

О. О. Новіков
О. Г. Ровенська

**Наближення
періодичних
функцій
прямокутними
лінійними
методами**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

О. О. Новіков, О. Г. Ровенська

**НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ
ФУНКЦІЙ ПРЯМОКУТНИМИ
ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ**
Монографія

Затверджено
на засіданні
вченої ради
Протокол № 10 від 29.05.2012

Краматорськ
ДДМА
2012

УДК 517.5
ББК 22.161
Н 73

Рецензенти:

Чуйко С. М., доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Слов'янського державного педагогічного університету;

Чайченко С. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент, проректор з науково-педагогічної роботи Слов'янського державного педагогічного університету.

Новіков, О. О.

Н 73 Наближення періодичних функцій прямокутними лінійними методами : монографія / Новіков О. О., Ровенська О. Г. — Краматорськ : ДДМА, 2012. — 300 с.

ISBN 978-966-379-570-6.

У монографії подано результати досліджень асимптотичної поведінки точних верхніх меж відхилень прямокутних лінійних методів наближення на багатовимірних аналогах класів періодичних функцій, що визначаються за допомогою мультиплікаторів і зсувів за аргументом, та розглянуто деякі суміжні питання.

Для спеціалістів з математичного аналізу, викладачів, аспірантів і студентів, що вивчають дисципліни математичного профілю.

УДК 517.5

ББК 22.161

© О. О. Новіков,
О. Г. Ровенська, 2012

ISBN 978-966-379-570-6

© ДДМА, 2012

ЗМІСТ

Вступ	5
Пам'яті Володимира Івановича Рукасова	8
Наукові праці В. І. Рукасова	11
Розділ 1. Основні відомості	33
1.1. Класи $\bar{\psi}$ -диференційованих періодичних функцій багатьох змінних	33
1.2. Прямокутні лінійні методи наближення ..	41
1.3. Властивості коефіцієнтів Фур'є функцій із класів $C^{m\bar{\psi}}$	48
1.4. Інтегральні зображення відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є	56
1.5. Інтегральні зображення, що визначаються згорткою на основі невластивого інтеграла ..	67
Розділ 2. Наближення періодичних функцій скінченної та малої гладкості	77
2.1. Асимптотична поведінка величин $\mathcal{E}(C_{\infty}^{m\bar{\psi}}; U_{\vec{n}})$	77
2.2. Наближення функцій скінченної гладкості прямокутними сумами Валле Пуссена, Зигмунда, Рогозинського та Фавара	91
2.3. Наближення класів функцій малої гладкості прямокутними лінійними методами	126

Розділ 3. Наближення класів функцій високої гладкості прямокутними лінійними методами	135
3.1. Наближення класів $C_{\beta,\infty}^{mq}$ прямокутними сумами Фур'є	135
3.2. Наближення прямокутними сумами Валле Пуссена класів $C_{\beta,\infty}^{mq}$	144
3.3. Наближення багатовимірних аналогів класів аналітичних функцій	151
Розділ 4. Наближення повторними суммами Валле Пуссена періодичних аналітичних функцій дійсної змінної	165
4.1. Класи аналітичних функцій	166
4.2. Інтегральні зображення для відхилень повторних сум Валле Пуссена на класах функцій $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_{\beta}^q H_{\omega}$	168
4.3. Наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ повторними сумами Валле Пуссена	174
4.4. Наближення класів $C_{\beta}^q H_{\omega}$	185
4.5. Наближення r -повторними сумами Валле Пуссена класів $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_{\beta}^q H_{\omega}$	220
Розділ 5. Історична довідка	231
5.1. Задача Колмогорова — Нікольського на класах W^r і W_{β}^r	231
5.2. Класи О. І. Степанця	249
Коментарі	272
Література	280

ВСТУП

У монографії розглянуто окремі питання теорії наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами в рівномірній метриці. Більшість наведених результатів стосується досліджень асимптотичної поведінки точних верхніх меж відхилень тригонометричних поліномів, що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, на класах $\overline{\psi}$ -інтегралів періодичних сумовних функцій багатьох змінних.

Класифікацію періодичних функцій однієї дійсної змінної на основі перетворень рядів Фур'є за допомогою мультиплікаторів і зсувів за аргументом було запроваджено О. І. Степанцем на початку 80-х років минулого століття. Вона дозволяє єдиним способом класифікувати широкий спектр функцій, у тому числі функції малої, скінченної гладкості та нескінченно диференційовні. За певних умов для визначувальних параметрів класи $\overline{\psi}$ -інтегралів періодичних функцій збігаються з класами, які було запроваджено на основі операцій диференціювання, тригонометричного спряження та згортки з сумовними ядрами. Роботу присвячено питанням наближення багатовимірних аналогів таких класів прямокутними лінійними методами.

Монографія складається з п'яти розділів. У першому розділі визначено основні об'єкти та апарат дослідження, подано основні відомості, які стосуються наближення в рівномірній метриці періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами, що породжуються лінійними прямокутними методами підсумовування рядів Фур'є. Також у розділі досліджено основні властивості коефіцієнтів Фур'є

функцій із класів $C^{m\bar{\psi}}$ і знайдено інтегральні зображення відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на цих класах. Отримані результати застосовано в подальшому.

У другому розділі вивчено питання наближення класів $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій скінченної гладкості багатьох змінних прямокутними методами Фур'є, Валле Пуссена, Зигмунда, Рогозинського та Фавара, досліджено асимптотичну поведінку точних верхніх меж відхилень прямокутних методів Валле Пуссена та прямокутних узагальнених методів Зигмунда на класах функцій малої гладкості.

Апроксимаційні властивості прямокутних сум Фур'є та прямокутних Валле Пуссена на класах періодичних функцій високої гладкості є предметом розгляду третього розділу. Для точних верхніх меж відхилень вказаних тригонометричних поліномів отримано асимптотичні рівності, що в багатьох важливих випадках забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова — Нікольського.

Четвертий розділ має додатковий характер, коло питань, розглянутих у ньому, пов'язане з теперішніми науковими інтересами авторів. Розділ присвячено питанням наближення тригонометричними поліномами, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена, класів періодичних функцій однієї змінної $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ і $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$, які задаються мультиплікаторами $\psi(k)$ і зсувами за аргументом β за умови, що послідовності, які визначають класи, прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії (при цьому функції з класів $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ і $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ дозволяють регулярне продовження у відповідну смугу комплексної площини).

У п'ятому розділі подано основні історичні відомості, що стосуються одержання розв'язку відомої задачі Колмогорова — Нікольського на класах періодичних функцій. Розділ призначено для студентів і аспірантів, які цікавляться теорією наближення функцій і теорією рядів Фур'є.

Розділи поділено на підрозділи. У межах одного розділу використано подвійну нумерацію формул. Так, десятую формулу другого розділу позначено в ньому як (2.10). При посиланнях на неї в інших розділах це ж позначення зберігається. Леми, теореми та наслідки пронумеровано трьома числами: перше — номер розділу, друге — номер параграфу, третє — номер твердження в параграфі.

Результати, викладені в монографії, отримані протягом останніх років і раніше до монографій не включалися за винятком окремих відомостей першого розділу (пп. 1.1, 1.2) та історичних відомостей. При їх викладені вказані відповідні посилання на оригінальні роботи.

Книга розрахована на фахівців-математиків, що займаються теорією наближення періодичних функцій, і на підготовлених читачів, що володіють основами теорій наближення функцій і рядів Фур'є. У зв'язку з цим основні поняття і факти цих теорій використовуються без означень і додаткових роз'яснень. Автори сподіваються, що книга виявиться також доступною і корисною фахівцям—прикладникам, які досліджують процеси коливного характеру.

Автори присвячують роботу пам'яті доктора фізико-математичних наук, професора Володимира Івановича Рукасова — нашого керівника та співавтора протягом багатьох років.