

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни "Динаміка і міцність машин"  
для студентів спеціальності 133 "Галузеве машинобудування"

ЗАТВЕРДЖЕНО  
на засіданні кафедри  
"Автоматизовані металургійні  
машини та обладнання "  
Протокол №1 від 06.09.2016 р

Краматорськ ДДМА 2016

УДК 621.771

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Динаміка і міцність машин" для студентів спеціальності 133 "Галузеве машинобудування" / Укл. Е.П. Грибков. – Краматорськ : ДДМА, 2016. – 24 с.

Розглянуто приклади рішення задач з динаміки та міцності машин.

Укладач:

Е.П. Грибков



















## 2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача № 2.1

Определить максимальные нормальные напряжения в балке под правой опорой (рис. 2.1), максимальный прогиб балки и частоту, при которой наступит резонанс системы.

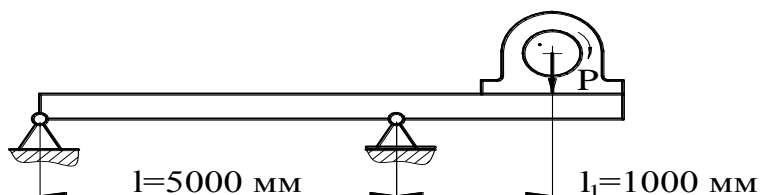


Рисунок 2.1 – Расчётная схема к задаче 2.1

#### Исходные данные:

$P=5$  кН;  $n=500$  об/мин; вращающиеся части привода не уравновешены, на балку действует центробежная сила 500 Н; момент инерции сечения балки  $I=815$  см<sup>4</sup>; момент сопротивления сечения  $W=82$  см<sup>3</sup>.

#### Ход решения

1 Относительный прогиб  $\delta$  (податливость) в сечении балки в месте расположения привода определяется по способу Верещагина от единичной силы (рис. 2.2).

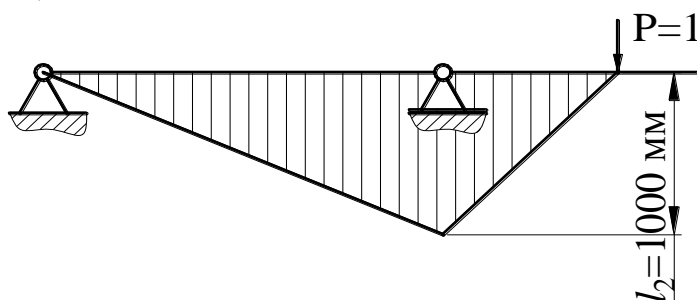


Рисунок 2.2 – Расчётная схема к определению податливости по методу Верещагина

Прогиб под правой опорой

$$\delta = \sum \frac{\Omega \bar{y}_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{l_2 l}{2} \frac{2}{3} l_2 + \frac{l_2 l_1}{2} \frac{2}{3} l_2 \right) = \frac{1}{3EI} l_2^2 (l + l_1) =$$

$$= 1 / (3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 815 \cdot 10^4) \cdot 1000^2 (5000 + 1000) = 0,0012 \text{ мм/Н},$$

где  $\Omega$  – площадь грузовой эпюры;  $E$  – модуль упругости материала;  $\bar{y}_c$  – координата центра тяжести грузовой эпюры.

2 Частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы

$$p = \sqrt{c/m} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{P\delta}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10^3}{5000 \cdot 0,0012}} = 40 \text{ с}^{-1}.$$

3 Закон изменения возмущающей силы –  
 $S(t) = S \cos(\varphi t)$ ,

где частота вынужденных колебаний

$$\varphi = \pi n / 30 = \pi \cdot 500 / 30 = 52 \text{ с}^{-1}.$$

4 Коэффициент динамичности

$$K_D = \frac{1}{1 - p^2 / \varphi^2} = \frac{1}{1 - 40^2 / 52^2} = 2,45.$$

5 Максимальный динамический прогиб правого конца балки (при  $\cos(\varphi t) = 1$ )

$$\Delta_{\max}^D = S \delta K_D = 500 \cdot 0,0012 \cdot 2,45 = 1,47 \text{ мм.}$$

6 Максимальный полный прогиб правого конца балки

$$\Delta_{\max}^{\Pi} = \Delta_{\max}^D + \Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\max}^D + P \delta = 1,47 + 5000 \cdot 0,0012 = 7,47 \text{ мм.}$$

7 Напряжения от динамических нагрузок под правой опорой балки

$$\sigma_D = M_{\text{изгД}} / W = (S K_D l_1) / W = \frac{500 \cdot 2,45 \cdot 1000}{82 \cdot 10^3} = 14,9 \text{ Н/мм}^2.$$

8 Напряжения от полной нагрузки под правой опорой балки

$$\sigma_{\Pi} = \sigma_D + \sigma_{\text{ст}} = \sigma_D + \frac{P \cdot l_1}{W} = 14,9 + \frac{5000 \cdot 1000}{82 \cdot 10^3} = 75,9 \text{ Н/мм}^2.$$

9 Резонанс системы наступит тогда, когда частота вынужденных колебаний будет равна частоте собственных колебаний системы, то есть при  $\varphi = p$ . При этом число оборотов электродвигателя составит:

$$n_p = \frac{30 p}{\pi} = \frac{30 \cdot 40}{\pi} = 382 \text{ об/мин.}$$

### Задача № 2.2

Определить максимальные напряжения в вале для двухмассовой системы, совершающей вращательное движение (рис. 2.3) при мгновенном приложении момента технологического сопротивления.

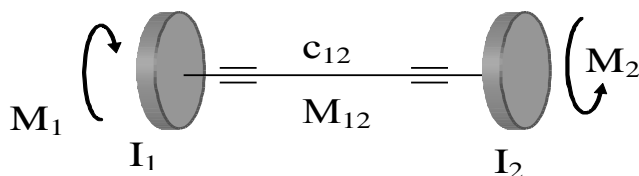


Рисунок 2.3 – Расчётная схема к задаче 2.2 и 2.3

**Исходные данные:**

$$M_1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}; I_1 = 10000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I_2 = 4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; l = 2 \text{ м}; d = 200 \text{ мм.}$$

### Ход решения

1 Значение статического (амплитудного) момента технологического сопротивления:

$$M_a = \frac{I_1 M_2 + I_2 M_1}{I_1 + I_2} = \frac{10000 \cdot 20 + 4000 \cdot 30}{10000 + 4000} = 22,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2 Для заданных начальных условий движения системы, а именно:  $t = 0, M_{12} = 0, dM_{12}/dt = 0$  – уравнение для определения момента технологического сопротивления будет иметь вид  $M_{12} = M_a(1 - \cos pt)$ , откуда при  $\cos pt = -1$  максимальное значение момента технологического сопротивления будет равно:  $M_{12} = M_a(1 - (-1)) = 2M_a$ , то есть коэффициент динамичности  $K_D = M_{12\max} / M_a = 2M_a / M_a = 2$ .

3 Максимальное значение момента технологического сопротивления, возникающего в упругой связи системы (вале),

$$M_{12\max} = K_D M_a = 2 \cdot 22,86 = 45,72 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4 Максимальные напряжения в вале

$$\tau_{\max} = \frac{M_{12\max}}{0,2 d^3} = \frac{45,71 \cdot 1000}{0,2 \cdot 0,2^3} = 28,57 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 28,57 \text{ Н/мм}^2.$$

### Задача № 2.3

Определить максимальные напряжения в вале для двухмассовой системы, совершающей вращательное движение (см. рис. 2.3).

**Исходные данные:**

$M_1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}; I_1 = 10000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I_2 = 4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; l = 2 \text{ м}; d = 200 \text{ мм}; t_0 = 1 \text{ с}.$

#### Ход решения

1 Значение статического (амплитудного) момента технологического сопротивления:

$$M_a = \frac{I_1 M_2 + I_2 M_1}{I_1 + I_2} = \frac{10000 \cdot 20 + 4000 \cdot 30}{10000 + 4000} = 22,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2 Коэффициент жёсткости вала

$$c = \frac{G I_p}{l} = \frac{0,82 \cdot 10^5 \cdot 25,13 \cdot 10^5}{2000} = 0,1030 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{мм/рад} = 103 \text{ кН}\cdot\text{м/рад},$$

где  $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 200^4}{2000} = 25,13 \cdot 10^5 \text{ мм}^4$  – полярный момент инерции сечения вала;

$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 0,82 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$  – модуль упругости второго рода

для стали;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

3 Частота собственных колебаний системы

$$p = \sqrt{c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{103 \cdot 10^3 \frac{10000 + 4000}{10000 \cdot 4000}} = 6,0 \text{ с}^{-1}.$$

4 Коэффициент динамичности

$$K_D = M_{12\max} / M_a = 1 + \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} = 1 + \frac{\sin \pi 0,956}{\pi 0,956} = 1,046,$$

где  $\lambda = t_0 / T = t_{0p} / 2\pi = 1 \cdot 6 / 2\pi = 0,956$  – вспомогательный параметр.

5 Максимальное значение момента технологического сопротивления, возникающего в упругой связи системы (вала),

$$M_{12\max} = K_D M_a = 1,046 \cdot 22,86 = 23,91 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6 Максимальные напряжения в вале

$$\tau_{\max} = \frac{M_{12\max}}{0,2 d^3} = \frac{23,91 \cdot 1000}{0,2 \cdot 0,2^3} = 14,94 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 14,94 \text{ Н/мм}^2.$$

### Задача № 2.4

Определить динамические нагрузки в вале механизма, имеющего радиальный зазор  $\theta$ . Механизм приведен к двухмассовой расчетной схеме (рис. 2.4). Определить величину действующих напряжений.

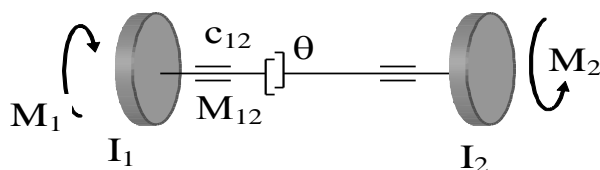


Рисунок 2.4 – Расчётная схема к задаче 2.4

#### Исходные данные:

законы изменения внешних нагрузок:  $M_1(t) = \text{const}$ ;  $M_2(t) = \text{const}$ ;  $M_1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $I_1 = 10000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $I_2 = 4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ; диаметр вала  $d = 200 \text{ мм}$ , длина вала  $l = 2 \text{ м}$ ; величина приведенного радиального зазора  $\theta = 0,03 \text{ рад}$ .

#### Ход решения

1 Значение статического (амплитудного) момента технологического сопротивления:

$$M_a = \frac{I_1 M_2 + I_2 M_1}{I_1 + I_2} = \frac{10000 \cdot 20 + 4000 \cdot 30}{10000 + 4000} = 22,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2 Коэффициент жёсткости вала

$$c = \frac{G I_p}{l} = \frac{0,82 \cdot 10^5 \cdot 25,13 \cdot 10^5}{2000} = 0,1030 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{мм/рад} = 103 \text{ кН}\cdot\text{м/рад},$$

где  $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 200^4}{2000} = 25,13 \cdot 10^5 \text{ мм}^4$  – полярный момент инерции сечения вала;

$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 0,82 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$  – модуль упругости второго рода

для стали;  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

3 Частота собственных колебаний системы

$$p = \sqrt{c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{103 \cdot 10^3 \frac{10000 + 4000}{10000 \cdot 4000}} = 6,0 \text{ с}^{-1}.$$

4 Угловая скорость к концу выборки зазора

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2M_1\theta}{I_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 0,03}{10000}} = 0,135 \text{ с}^{-1}.$$

5 Коэффициент динамичности:

$$K_D = M_{12\max} / M_a = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 c}{M_{ap}}\right)^2} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{0,135 \cdot 103}{22,86 \cdot 6}\right)^2} = 2,28.$$

6 Максимальное значение момента технологического сопротивления, возникающего в упругой связи системы (вале),

$$M_{12\max} = K_D M_a = 2,28 \cdot 22,86 = 52,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7 Максимальные напряжения в вале

$$\tau_{\max} = \frac{M_{12\max}}{0,2 d^3} = \frac{52,12 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,2^3} = 32,6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 32,6 \text{ Н/мм}^2.$$

### Задача № 2.5

Определить напряжения при ударе в механической системе (рис.2.5). Массой балки пренебречь.

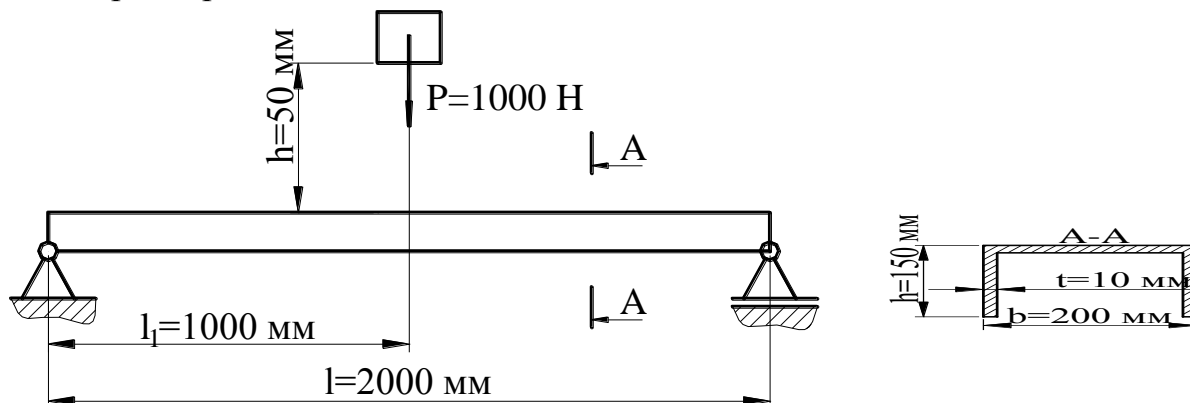


Рисунок 2.5 – Расчётная схема к задаче 2.5

### Ход решения

1 Определяем параметры сечения балки. Примем за начало отсчёта линию, проходящую через центр тяжести прямоугольника размерами 200×10 мм. Тогда вертикальная координата центра тяжести фигуры будет равна

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F_x} = \frac{b t 0 + (h - t) 2t ((h - t)/2 + t/2)}{b t + (h - t) 2t} =$$

$$= \frac{0 + (150 - 10) \cdot 2 \cdot 10 \cdot (140/2 + 10/2)}{200 \cdot 10 + (150 - 10) \cdot 2 \cdot 10} = 43,75 \text{ мм}.$$

Момент инерции сечения балки

$$I = \sum (I_i + a_i^2 F_i) = \frac{b t^3}{12} + y_c^2 b t + \frac{t(h - t)^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} - y_c\right)^2 (h - t) 2t =$$

$$= \frac{200 \cdot 10^3}{12} + 43,75^2 \cdot 200 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 140^3}{12} + (75 - 5 - 43,75)^2 \cdot 140 \cdot 2 \cdot 10 =$$

$$= 806 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 806 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления сечения балки

$$W = I / y_{\max} = I / (h - t / 2 - y_c) = 806 / (15 - 0,5 - 4,375) = 79,61 \text{ см}^3.$$

2 Прогиб посередине балки от статического действия силы P

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P l^3}{48 E I} = \frac{1000 \cdot 2000^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 806 \cdot 10^4} = 1,575 \text{ мм}.$$

3 Коэффициент динамичности

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{1,575}} = 9,029.$$

4 Наибольший изгибающий момент от статического действия силы P

$$M = P / 2 \cdot l / 2 = 1000 / 2 \cdot 2 / 2 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

5 Максимальные нормальные напряжения от статического действия силы P:

$$\sigma_{\text{ст}} = M / W = 500 \cdot 10^3 / 79,61 \cdot 10^3 = 6,28 \text{ Н} / \text{мм}^2.$$

6 Максимальные нормальные напряжения от динамического действия силы P

$$\sigma = \sigma_{\text{ст}} K_d = 6,28 \cdot 9,029 = 56,7 \text{ Н} / \text{мм}^2.$$

### Задача № 2.6

Определить напряжения при ударе в механической системе (см. рис.2.5) с учётом массы системы.

#### Ход решения

Пункты 1, 2 выполняются аналогично предыдущей задаче.

3 Масса балки

$$m = [b t + (h - t) 2t] l \rho = [0,2 \cdot 0,01 + (0,15 - 0,01) 2 \cdot 0,01] 2 \cdot 7800 = 75 \text{ кг}.$$

Вес балки  $Q = mg = 75 \cdot 9,81 = 735 \text{ Н}$ .

4 Коэффициент динамичности

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}} [1 + \beta(Q/P)]}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{1,575 [1 + 17/35 \cdot 735/1000]}} = 7,91,$$

где  $\beta = 17/35$  – коэффициент приведения массы для изгибающего удара посередине балки.

5 Наибольший изгибающий момент от статического действия силы P

$$M = P / 2 \cdot l / 2 = 1000 / 2 \cdot 2000 / 2 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

6 Максимальные нормальные напряжения от статического действия силы P

$$\sigma_{\text{ст}} = (M + Q / 1 \cdot l / 2 \cdot l / 4) / W = (M + Q \cdot l / 8) / W = (500 \cdot 10^3 + 735 \cdot 2000 / 8) / 79,61 \cdot 10^3 = 8,59 \text{ Н} / \text{мм}^2.$$

7 Максимальные нормальные напряжения от динамического действия силы P

$$\sigma = \sigma_{\text{ст}} K_d = 8,59 \cdot 7,91 = 67,9 \text{ Н} / \text{мм}^2.$$



### Задача № 2.7

Определить напряжения при ударе в механической системе (рис.2.6) с учётом наличия пружины под правой опорой балки с жёсткостью 300 Н/мм.

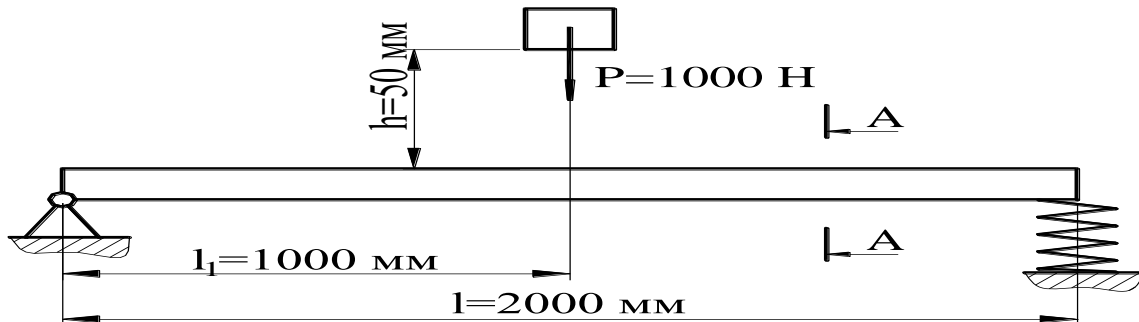


Рисунок 2.6 – Расчётная схема к задаче 2.7

#### Ход решения

Пункт 1 выполняется аналогично задаче 2.5.

2 Прогиб посередине балки от статического действия силы P

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P l^3}{48 E I} + \frac{P}{4c} = \frac{1000 \cdot 2000^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 806 \cdot 10^4} + \frac{1000}{4 \cdot 300} = 2,41 \text{ мм}.$$

3 Коэффициент динамичности

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{2,41}} = 7,52.$$

4 Наибольший изгибающий момент от статического действия силы P

$$M = P/2 \cdot l/2 = 1000/2 \cdot 2000/2 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

5 Максимальные нормальные напряжения от статического действия силы P

$$\sigma_{\text{ст}} = M/W = 500 \cdot 10^3 / 79,61 \cdot 10^3 = 6,28 \text{ Н/мм}^2.$$

6 Нормальные напряжения от динамического действия силы P

$$\sigma = \sigma_{\text{ст}} K_{\text{д}} = 6,28 \cdot 7,52 = 47,2 \text{ Н/мм}^2.$$





## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Динамика и прочность прокатного оборудования / Ф.К. Иванченко, П.И. Полухин, М.А. Тылкин, В.П. Полухин. – М.: Металлургия, 1970. – 486 с.

2 Машины и агрегаты металлургических заводов: в 3 т. – Т.3. Машины и агрегаты для производства и отделки проката: Учебник для вузов / А.И.Целиков, П.И.Полухин, В.М.Гребеник и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1988. – 680 с.

3 Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.

4 Розрахунок машин і механізмів прокатних цехів: Навч. посібник / Ф.К. Иванченко, В.М. Гребеник, В.І. Ширяев. – К.: Вища школа, 1995. – 455 с.

5 Прочность и износостойкость деталей машин / В.П.Когаев, Ю.Н.Дроздов. – М.: Высш. шк., 1991. – 319 с.