МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
з дисципліни "Планування експерименту у дослідженні ЕМС"
для магістрів спеціальностей
8.05070201 "Електричні машини та апарати", та
8.05070207 "Електромеханічне обладнання енергоємних виробництв",
денної та заочної форм навчання

2013

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Планування експерименту у дослідженні ЕМС” для магістрів спеціальностей 8.05070201 “Електричні машини та апарати”, та 8.05070207 “Електромеханічне обладнання енергоємних виробництв”, денної та заочної форм навчання / Укл.: М. І. Коцур. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. 46 с.

Укладач: М. І. Коцур, доцент, канд. техн. наук

Рецензент: О. В. Близняков, доцент, канд. техн. наук

Відповідальний
за випуск: М. І. Коцур, доцент, канд. техн. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
“Електричні та електронні апарати”

Протокол № 1
від “ 4 “ вересня 2013

ЗМІСТ

ВСТУП

Підготовка фахівців, здатних розв'язувати складні інженерно організаційні та дослідницькі задачі, й підвищення ефективності і якості наукових досліджень є актуальним завданням.

Знання основ теорії наукових досліджень, сучасних методів їхнього проведення, що використовують теорію планування експерименту й математичну статистику, необхідна и обов'язкова умова підготовки магістрів з електричних машин та апараті та електромеханічного обладнання енергоємних виробництв. Застосування цих методів дає можливість, широко використовувати сучасну мікропроцесорну й обчислювальну техніку, одержувати математичні моделі досліджуваних об'єктів або процесів, що дозволяють досить точно й адекватно їх описувати. Наявність таких моделей заміняє подальші експериментальні дослідження об'єктів або процесів аналізом їхніх математичних моделей при розв'язанні поставлених конкретних задач з дослідження електричних та електронних апаратів (ЕЕА), електромеханічного обладнання енергоємних виробництв (ЕОЄВ).

Ймовірнісно-статистичні методи дозволяють проводити вивчення надмірно складних (недобре організованих і з недостатньо зрозумілими механізмами) об'єктів або процесів і здійснювати побудову математичних моделей для подальшого їхнього використання при виборі оптимальних параметрів об'єкта або для оптимального керування процесом. Застосування методів математичного планування експерименту істотно підвищує точність і значно зменшує обсяг експериментальних досліджень. Це скорочує строки їх проведення й значною мірою підвищує їх економічність й ефективність.

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Мета роботи: ознайомлення з основами й вивчення методики планування багатофакторних експериментів ПФЕ2^m, набуття студентами практичних навичок проведення на цій основі експериментальних досліджень ЕМС, уміння будувати математичні моделі першого порядку й аналізувати фізичні процеси, які відбуваються в електричних апаратах за різних режимів роботи.

1.1 Короткі теоретичні відомості

Математичні методи планування експерименту можуть застосовуватися для розв’язання багатьох задач, у тому числі й для побудови інтерполяційних формул (математичних моделей) різних порядків. Для побудови математичної моделі першого порядку у вигляді відрізка степеневого ряду (полінома) доцільно використати повний факторний експеримент ПФЕ 2^m, у якому фактори X_j змінюються на двох рівнях: $X_{j\min} \leftrightarrow (-1)$ і $X_{j\max} \leftrightarrow (+1)$. Нижче, на рис. 1.1, наведено кібернетичну схему (чорний ящик) досліджуваного об’єкта (ДО) при кількості факторів $m = 2$ і кількості функцій відгуку Y для $k = 1$.

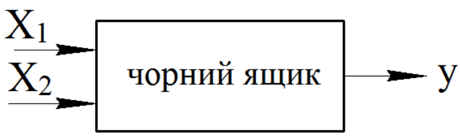

Рисунок 1.1 - Кібернетична схема досліджуваного об’єкта.

Математична модель такого об’єкта дослідження має вигляд

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \qquad (1.1)$$

де X_1, X_2 - фактори; y - функція відгуку; B_0, B_1, B_2 - невідомі коефіцієнти.

План експерименту при цьому має відповідати всім вимогам теорії планування багатофакторного експерименту. Фактори в плані повинні бути наведені в кодованому вигляді. Тоді пошукова математична модель має вигляд:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \tag{1.2}$$

де x_1, x_2 - кодовані значення відповідних натуральних факторів X_1 й X_2, які в загальному вигляді обчислюються за формулою (1.1). Для обчислення або знаходження невідомих коефіцієнтів у загальному вигляді використовується план ПФЕ 2^m, що має відповідати вимогам теорії планування експерименту: симетричності, ортогональності й нормуванню.

Невідомі коефіцієнти в цьому випадку будуть обчислюватися за формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ei} x_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2}. \tag{1.3}$$

де y_{ei} - середнє арифметичне, тобто числова величина експериментального значення функції відгуку в i-му досліді, тобто в i-му рядку плану; x_{ji} - кодоване значення j-го фактора в i-му досліді або в i-му рядку.

При коефіцієнті дублювання $k_Д = 3$

$$y_{ei} = \frac{y'_{ei} + y''_{ei} + y''_{ei}}{3}. \tag{1.4}$$

Наприклад, якщо взяти за досліджуваний об’єкт швидкодіючий запобіжник або автоматичний вимикач і вибрати число факторів $m = 2$, то розв’язання цієї задачі може бути виконане в такий спосіб. Виберемо як фактор: X_1 - струм I, фактор X_2 - напругу U, а як функцію відгуку Y - час відключення t_n. Виберемо граничні рівні факторів $X_{j\min}$ і $X_{j\max}$ і знайдемо їх кодовані значення x_1 за формулою

$$x_J = \frac{X_j - X_{jcp}}{h_j}. \tag{1.5}$$

де X_{jcp} - середнє значення j-го фактора $X_{jcp} = \dfrac{X_{j\min} - X_{j\max}}{2}$,

h_j - крок варіювання j-го фактора $h_j = X_{j\max} - X_{jcp} = X_{jcp} - X_{j\min}$

X_j - натуральне значення j-го фактора.

Визначимо граничні і середні рівні факторів й відповідні їм кодовані значення:

$X_{1\min} = 10kA \leftrightarrow x_{1\min} = -1; \quad X_{2\min} = 220B \leftrightarrow x_{2\min} = -1;$

$X_{1\max} = 70kA \leftrightarrow x_{1\max} = +1; \quad X_{2\max} = 660B \leftrightarrow x_{2\max} = +1;$

$X_{1cp} = \dfrac{70+10}{2} = 40kA \leftrightarrow x_{1cp} = 0; \quad X_{2cp} = \dfrac{220+660}{2} = 440B \leftrightarrow x_{2cp} = 0;$

$h_1 = 70 - 40 = 40 - 10 = 30kA; \quad h_2 = 660 - 440 = 440 - 220 = 220B.$

Результати розрахунку зводимо в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 - Граничні рівні і відповідні їм кодовані значення факторів X_1 і X_2

Фактори		$X_1(I)$	$X_2(U)$
Одиниця вимірювання		кА	В
Крок варіювання, h_j		30	220
Рівні факторів	-1	10	220
	0	40	440
	+1	70	660

Зобразимо модель у кодованому вигляді по (1.1). Для визначення невідомих коефіцієнтів b_0, b_1, b_2 будуємо план. Для цього знаходимо число дослідів за формулою

$$m = 2^m = 2^2 = 4.$$

Відповідно до правила побудови (стовпці $x_0 = +1$ у всіх рядках,

Таблиця 1.2 - План повного двофакторного експерименту ПФЕ 2^2

а в стовпцях x_j знак плюс чергується зі знаком мінус через 2^{j-1}

Умови експерименту				Результати експерименту				Результати розрахунків		
	j=0	j=1	j=2							
i	x_0	x_1	x_2	y'_{ei}	y''_{ei}	y'''_{ei}	y_{ei}	y'_{pi}	y_{ei}- y'_{pi}	Δ%
1	+1	+1	+1							
2	+1	-1	+1							
3	+1	+1	-1							
4	+1	-1	-1							

рядки) складаємо план ПФЕ 2^2 (табл. 1.2).

1.2 Порядок виконання роботи

1.2.1 Скласти схему досліджуваного електричного апарата стосовно свого варіанту (рис. А.1, додаток А), вибрати фактори й функцію відгуку, визначити граничні величини факторів і відповідні їм кодовані значення. Число факторів m задається викладачем. Експериментальні значення функцій відгуку y_{ci} задаються відповідно до варіанту (табл. А.1)

1.2.2. Вибрати вид шуканої інтерполяційної формули (математичної моделі) першого порядку, скласти план ПФЕ 2^m для проведення експерименту й визначити невідомі коефіцієнти в загальному вигляді.

1.2.3. Визначити числові величини коефіцієнтів, побудувати інтерполяційної формули (математичної моделі) першого порядку й розрахувати за моделлю значень функції відгуку, її відхилень й відносних відхилень у відсотках $\Delta_i\%$ для кожного досліду плану.

1.3 Зміст звіту:

- мета роботи;
- схема комутаційних досліджень електричних апаратів на постійному струмі;
- алгоритм, програма й план експерименту.

- результати розрахунків коефіцієнтів й інтерполяційні формули (математичні моделі).
- аналіз математичної моделі й висновки.

1.4 Контрольні запитання

1.4.1.Чим відрізняються багатофакторні плановані експерименти від традиційних одно факторних?

1.4.2. Що таке планування експерименту?

1.4.3. Які об’єкти доцільно досліджувати на основі планованих багатофакторних експериментів?

1.4.4. Які вимоги ставляться до об’єктів дослідження?

1.4.5. Назвіть вимоги, які ставляться до факторів, функцій відгуку та математичних моделей згідно з теорією планування експерименту?

1.4.6.Що являє собою план багатофакторного експерименту і які його основні особливості? Наведіть приклади.

1.4.7. Які види шуканих математичних моделей використовуються в планованих експериментах?

1.4.8. Які критерії апроксимації доцільно використати при побудові багатофакторних інтерполяційних формул (математичних моделей)?

1.4.9. З якою метою і як проводиться кодування факторів? Наведіть приклади.

1.4.10. Викладіть суть методу найменших квадратів. Наведіть приклади.

1.4.11. Яким чином складається план багатофакторного експерименту ПФЕ 2^m Наведіть приклади.

1.4.12. Наведіть приклади застосування методу найменших квадратів для функцій з двома змінними.

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕ ЛІНІЙНОСТЯМИ

Мета роботи: навчитися будувати математичні моделі першого порядку з урахуванням не лінійності на основі плану повного факторного експерименту першого порядку.

2.1 Короткі теоретичні відомості.

У випадку, якщо перевірка адекватності математичної моделі першого порядку дала негативний результат, тобто модель недостатньо вірно описує процес або об’єкт, слід переходити до побудови математичної моделі більш високого порядку. Бажання мінімізувати кількість дослідів у багатофакторному експерименті, при побудові математичної моделі першого порядку, й необхідність підвищення ступеня її адекватності, приводять до застосування математичної моделі першого порядку з урахуванням не лінійності. Для двох факторів, тобто коли $m=2$, математична модель першого порядку з не лінійністю в виді добутку двох факторів має вигляд

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2 \tag{2.1}$$

Невідомим у ній, крім коефіцієнтів b_0, b_1, b_2, буде й коефіцієнт b_{12}. Для їхнього знаходження використаємо план ПФЕ 2^m**,** який модифікуємо шляхом додання розрахункового стовпця для фіктивного фактора $x_3 = x_1x_2$.

Тоді коефіцієнт $b_3 = b_{12}$ буде визначатися за загальною формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ei}x_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2}. \tag{2.2}$$

Кількість дослідів у ПФЕ 2^m визначиться як $n = 2^m = 2^2 = 4$. План такого експерименту наведено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 - План першого порядку з не лінійністю

i	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2 = x_3$	y_{ei}
1	+ 1	+1	+ 1	+1	y_{e1}
2	+ 1	-1	+ 1	-1	y_{e2}
3	+ 1	+1	-1	-1	y_{e3}
4	+ 1	-1	-1	+1	y_{e4}

При $m = 3$ і більше в математичну модель першого порядку, з урахуванням не лінійності, необхідно включити всі можливі комбінації добутків парної взаємодії факторів: потрійні, четвертні й т. ін. ($x_1 x_2$, $x_1 x_3$, x_2, x_3, $x_1 x_2 x_3$ тощо). Для цього в плані добудовуються відповідні стовпці, які дозволяють визначити невідомі коефіцієнти $b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}$ і т. д. за тією ж загальною формулою (2.2).

2.2 Порядок виконання

2.2.1 Відповідно до варіантів, зазначених у табл. А.1, для заданої кількості факторів m записати вид шуканої математичної моделі першого порядку з урахуванням не лінійності визначили невідомі коефіцієнти при $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, x_2, x_3, $x_1 x_2 x_3$ і т. д. і для цього побудувати додаткові до плану ПФЕ 2^m відповідні стовпці.

2.2.2. Розрахувати невідомих коефіцієнтів розрахункових значень функції відгуку y_{pi}, її відхилення y_{pi} й відносного відхилення у відсотках Δ_i%.

2.3 Зміст звіту

- мета роботи;

- математична модель із не лінійностями в загальному вигляді й добудований план експерименту;

- алгоритм і програма розрахунку коефіцієнтів математичної моделі, розрахункового значення функції відгуку y_{pi}, її відхилення Δ_i й відносного відхилення у відсотках $\Delta_i\%$ з описом структури й правил застосування;

- результати розрахунку, математична модель з урахуванням не лінійності і її аналіз.

2.4 Контрольні запитання

2.4.1. Який загальний вигляд мають математичні моделі з урахуванням не лінійності для різного числа факторів $m = 4, 5, 6$ і для чого ми їх будуємо?

2.4.2. Як добудовується план експерименту для знаходження коефіцієнтів при нелінійних членах?

2.4.3. Як розраховуються невідомі коефіцієнти? Наведіть приклади.

2.4.4. Як будується алгоритм і програма розрахунку коефіцієнтів?

2.4.5. Яким умовам має відповідати план експерименту?

2.4.6. Яким умовам мають відповідати фактори?

2.4.7. Яким умовам має відповідати математична модель?

2.4.8. Яким умовам мають відповідати функції відгуків?

2.4.9 Яким умовам має відповідати досліджуваний об’єкт?

2.4.10. Що таке фіктивні фактори, куди й для чого вони вводяться?

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ДРОБОВИХ ПЛАНІВ

Мета роботи: ознайомитися з методикою побудови дробових багатофакторних планів і навчитися будувати на їхній основі багатофакторні математичні моделі першого порядку, а також розробляти алгоритми й програми для розрахунків невідомих коефіцієнтів, нев'язки функцій відгуку й відносних відхилень між експериментальним значенням функції відгуку й розрахунковим.

3.1 Короткі теоретичні відомості.

Розглядаючи чотирифакторний експеримент при двох рівнях зміни кожного з факторів ПФЕ24, можна побачити, що він містить у собі проведення 16 дослідів і дозволяє побудувати насичене рівняння регресії, яке складається з лінійної частини (головні лінійні ефекти) і нелінійної частини, у яку входять ефекти взаємодії - парні, потрійні й четвертні:

$$\begin{gathered} y = \underline{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4} + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \\ + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4 + b_{123}x_1x_2x_3 + \\ + b_{124}x_1x_2x_4 + b_{134}x_1x_3x_4 + b_{234}x_2x_3x_4 + b_{1234}x_1x_2x_3x_4. \end{gathered} \tag{3.1}$$

У першому рядку даного рівняння записано й підкреслено прямою лінією складові, які визначають головні лінійні ефекти, а в наступних рядках - ефекти парної взаємодії x_1x_2 і т. д., потім ефекти потрійної взаємодії $x_1x_2x_3$ і т. д., і наприкінці - ефект четвертної взаємодії $x_1x_2x_3x_4$.

Практика показує, що в більшості випадків ефекти потрійної взаємодії й більш високих порядків, а також ефекти парної взаємодії статистично не значущі, тобто абсолютні значення відповідних коефіцієнтів математичної моделі менші від помилок їхнього визначення. Таким чином, для побудови досить точної моделі необхідно визначити не 2^m коефіцієнтів, а значно менше. Наприклад, якщо в чотирифакторному експерименті домінуючими є головні лінійні частини (див. 3.1) то рівняння регресії буде включати тільки п'ять складових, а число невідомих коефіцієнтів k також буде дорівнювати (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4). Для їхнього визначення досить п'яти дослідів, тому що кожен дослід у плані багатофакторного експерименту являє собою рівняння. У загальному випадку повинне виконуватися співвідношення $n \geq k$.

Таким чином, кількість дослідів n в експерименті може бути зменшена до величини k. Але непарна кількість дослідів у ПФЕ 2^m обов'язково приведе до несиметрії, а виходить, і до не ортогональності плану. Тому для побудови математичної моделі й для скорочення кількості дослідів використовують дробовий багатофакторний експеримент ДФЕ 2^{m-q}. Він містить у собі тільки частину дослідів повного факторного експерименту ПФЕ 2^m, тому й називається дробовим факторним експериментом ДФЕ 2^{m-q}.

Кількість дослідів у ньому визначається як $n_{ДФЕ} 2^{m-q}$, де q - індекс роздробленості репліки, що показує, яку частину плану ПФЕ 2^m ми беремо: при $q = 1$- напіврепліка (1/2 плану ПФЕ 2^m), при $q = 2$- четвертьрепліка (1/4 плану ПФЕ2"'), при $q = 3$- дві чверті репліки (1/8 плану ПФЕ2"') і т. д.

Можна показати, що кількість дослідів у дробовому факторному експерименті (ДФЕ) пов'язана із кількістю дослідів у повному факторному експерименті (ПФЕ) такою формулою або залежністю:

$$n_{ДФЕ} = 2^{-q} n_{ПФЕ}, \tag{3.2}$$

де q - ціле позитивне число, індекс роздробленості репліки.

При побудові дробових планів виникає запитання, яким чином з 2^m дослідів повного факторного експерименту (ПФЕ) вибрати частину 2^{m-q} дослідів так, щоб матриця плану ДФЕ була симетричною, ортогональною й нормованою. Для забезпечення зазначених ознак побудову ДФЕ варто виконувати за такими правилами:

1. Матриця плану ДФЕ 2^{m-q} включає 2^{m-q} рядки й $m+1$стовпець (колонку).

2. Стовпці (колонки) $x_0, x_1 ... x_{m-q}$ заповнюють за правилом заповнення матриць ПФЕ 2^m.

3. Колонки $x_{m-q\ 1,}\quad x_{m-q\ 2}, ... x_m$ заповнюють за допомогою спеціальних співвідношень, які являють собою добуток факторів $x_0, x_1 ... x_{m-q}$ або частини з них. Такі співвідношення називають генеруючими.

Наприклад, при $m = 4$ матриця ДФЕ 2^{4-1}, побудована за допомогою зазначених вище правил, буде мати генеруюче співвідношення $x_4 = x_1 x_2 x_3$. Відповідно $b_4 \Leftrightarrow b_{123}$. Після того як найбільше число множників обране (у нашому випадку три - $x_1 x_2 x_3$), при необхідності побудови плану беруться співвідношення з меншим числом множників, наприклад, $x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3$.

Для визначення змішування оцінок інших ефектів використовують співвідношення так званого визначального контрасту. Його одержують з генеруючого співвідношення шляхом множення його лівої й правої частин на ліву частину. У нашому прикладі співвідношення визначального контрасту має такий вигляд:

$$x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{3.3}$$

Оскільки при прийнятому способі кодування $x_j = \pm 1,$ то можна записати

$$1 = x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{3.4}$$

Помноживши ліву й праву частини визначального контрасту на будь-який фактор або на будь-яку взаємодію факторів, одержимо співвідношення, яке визначає ефект змішування:

$$x_1 \cdot 1 = x_1^2 x_2 x_3 x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 x_3 x_4 \Rightarrow b_1 \Rightarrow b_{234}; \tag{3.5}$$

$$x_2 x_3 \cdot 1 = x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 \Rightarrow x_2 x_3 = x_1 x_4 \Rightarrow b_{23} \Rightarrow b_{14}. \tag{3.6}$$

Коефіцієнти регресії $(b_0, b_1 ... b_m)$ визначаються за тією ж формулою, що й у плані ПФЕ 2^m

3.2 Порядок виконання

3.2.1. Відповідно до варіанта, записати шукану математичну модель у загальному вигляді й виділити в ній лінійну частину.

3.2.2. Побудувати план дробового факторного експерименту з метою максимального скорочення кількості дослідів і знаходження невідомих коефіцієнтів для лінійної частини математичної моделі.

3.2.3. Скласти алгоритм і програму для розрахунку числових значень коефіцієнтів математичної моделі, розрахункових значень функції відгуку y_{pi}, і її нев'язки Δ_i, відносного відхилення у відсотках Δ_i%.

3.2.4. Відповідно до варіанта, розрахувати коефіцієнти, розрахункові значення функції відгуку y_{pi}, нев'язки функції відгуку Δ_i й відносного відхилення у відсотках Δ_i%.

3.3 Зміст звіту:

- мета роботи;
- математична модель у загальному вигляді;
- план дробового факторного експерименту;
- алгоритм і програма;
- результати розрахунків у вигляді таблиці;
- математична модель з числовими значеннями коефіцієнтів.

3.4 Контрольні запитання

3.4.1. Що таке дробовий факторний експеримент ДФЕ?

3.4.2. У яких випадках доцільно проводити ДФЕ?

3.4.3. Яку математичну модель можна вибудувати, використовуючи ДФЕ?

3.4.4. Як обчислити кількість дослідів у ДФЕ? Наведіть приклади.

3.4.5. Як співвідноситься кількість дослідів у ДФЕ з кількістю дослідів ПФЕ?

3.4.6. Правила побудови матриці ДФЕ 2^{m-q}. Наведіть приклади.

3.4.7. Що являють собою генеруючі співвідношення? Наведіть приклади.

3.4.8. Що таке індекс роздробленості репліки і як він визначається?

3.4.9. Як розраховують коефіцієнти математичної моделі на основі ДФЕ?

3.4.10. Поясніть алгоритм і програму обробки результатів ДФЕ.

3.4.11. Що таке визначальний контраст і як його одержати? Наведіть приклади.

3.4.12. Як визначають змішування оцінок коефіцієнтів?

3.4.13. Що таке розрізнювальна здатність дробової репліки?

3.4.14. Який дробовий план називають насиченим?

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 4

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи: ознайомлення з ортогональними планами другого порядку та набуття практичних навичок побудови математичних моделей другого порядку на основі ортогональних центрально-композиційних планів (ОЦКП) другого порядку.

4.1 Короткі теоретичні відомості.

Рівняння регресії, які враховують ефекти взаємодії, є нелінійними. Але якщо зафіксувати всі фактори, крім якого-небудь одного з них, на певних визначених рівнях, то отримана в такий спосіб однофакторна залежність буде лінійною. Інакше кажучи, рівняння з урахуванням ефектів взаємодії є лінійними в перетині. У ряді випадків такими рівняннями не можна з прийнятною точністю описати реальну поверхню функції відгуку. Наприклад, це може бути в області мінімуму або максимуму функції відгуку. У таких випадках рівняння в перетинах повинні бути нелінійними. Одержати такі нелінійності можна шляхом введення в рівняння регресії квадратів факторів x_j^2, де $j = 1, 2, ..., m$.

Планування експерименту з метою одержання регресії у вигляді квадратичного полінома називають плануванням другого порядку. Поліном другого порядку включає складові, які враховують головні лінійні ефекти, ефект парних взаємодій, а також квадратичні ефекти. У загальному випадку цей поліном має такий вигляд:

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^{m} b_j x_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m} b_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{m} b_{jj} x_j^2. \qquad (4.1)$$

Перша складова правої частини враховує головні лінійні ефекти, друга - ефекти парної взаємодії, третя - квадратичні ефекти. Головні лінійні ефекти формально можна розглядати як ефект взаємодії з фіктивним фактором $x_0 = 1$.

Тоді рівняння (4.1) можна записати в більш короткому вигляді

$$y = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=j}^{m} b_{jk} x_j x_k. \qquad (4.2)$$

Наприклад, при $m = 2$ (двофакторний експеримент) одержимо

$$\begin{aligned} y &= b_{00}x_0x_0 + b_0x_0x_1 + b_{02}x_0x_2 + b_{11}x_1x_1 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2x_2 = \\ &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Кількість невідомих коефіцієнтів квадратного рівняння регресії, яку потрібно визначити, становить

$$k = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}. \qquad (4.4)$$

Повний або дробовий факторний експеримент не дозволяють визначити коефіцієнти квадратного полінома з-за таких трьох причин:

1. Два рівні зміни факторів не дозволяють виявити нелінійний характер перетинів поверхні відгуку.

2. При $m \geq 3$ кількість дослідів менша, ніж кількість невідомих коефіцієнтів k.

3. Стовпці k_j^2 та x_0 рівнозначні, тому такий план не є симетричним й ортогональним.

При побудові плану другого порядку плани ПФЕ або ДФЕ використовуються лише як його складові частини, а саме як ядро цих планів, що доповнюється рівнями зміни (точками), значення координат яких вибирають з умов симетричності й ортогональності. Найбільшого поширення набули так звані ортогональні центрально-композиційні плани (ОЦКП) другого порядку. У таких планах реалізується ідея композиційного планування. Суть цієї ідеї полягає в тому, щоб, використовуючи досліди, проведені шляхом добудови планів першого порядку (ПФЕ або ДФЕ), підвищити точність математичних моделей у випадку їх неадекватності.

Ядро такого плану ПФЕ або ДФЕ доповнюють m парами симетричних точок, розміщених на координатних осях на деякій відстані α

від центра плану (їх називають «зіркові точки»), а також точкою в центрі плану (нульова точка). Число α називають «зірковим плечем».

Так як, в плані ОЦКП другого порядку ядром являється план ПФЕ 2^m, то кількість дослідів в ньому n визначиться за формулою

$$n = 2^m + 2m + 1$$

На рис. 4.1 зображено координата точок стану об'єкта дослідження при двофакторному експерименті $(m = 2)$, що проводиться відповідно до плану ОЦКП другого порядку, в якому нараховується дев'ять дослідів.

Матрицю планування такого експерименту наведено в табл. 4.1.

Введення в план стовпців x_1^2 й x_2^2 порушує симетричність й ортогональність матриці, тому що їхні значення не можуть бути від'ємними $(x_j^2 = \pm 1)$. Отже, для врахування квадратичних ефектів вводять фіктивні фактори типу $x_j^2 - \varphi$, де φ - позитивне постійне число, яке називають квадратичною поправкою.

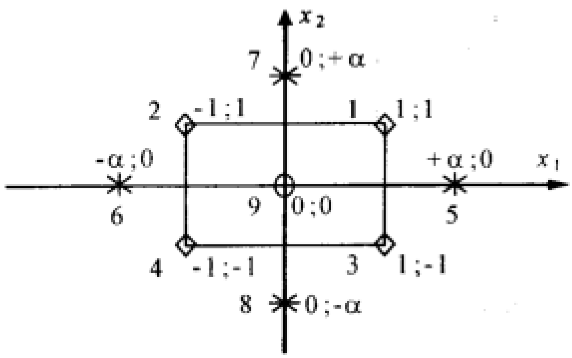

Рисунок 4.1 - Координати точок стану об'єкта дослідження в ОЦКП другого порядку при двох факторах - x_1 і x_2 ◊ (1;2;3;4) - точки ПФЕ 2^2; (5;6;7;8) - зіркові точки; 0(9) - нульова точка.

Значення поправки φ і зіркового плеча а однозначно визначаються виходячи з умов симетричності й ортогональності матриці умов дослідів плану експерименту для стовпців x_4 й x_5. Таким чином, α і φ можуть бути знайдені шляхом розв'язання системи двох рівнянь. Побудова рівняння симетричності зводиться до прирівнювання до нуля суми елементів стовпців x_4 або x_5:

$$4(1-\varphi)+2(\alpha^2-\varphi)-3\varphi=0. \tag{4.5}$$

Побудова рівняння ортогональності зводиться до прирівнювання до нуля суми попарних добутків елементів стовпців x_4 й x_5:

$$4(1-\varphi)^2-4\varphi(\alpha^2-\varphi)\varphi^2=0. \tag{4.6}$$

Таблиця 4. 1 - План ОЦКП другого порядку при двох факторах

Розв'язання системи рівнянь (4.5) і (4.6) дає такі результати:

i	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 \cdot x_2$	$x_4 = x_1^2 - \varphi$	$x_5 = x_2^2 - \varphi$	y_{ic}
1	+1	+1	+1	+1	$1-\varphi$	$1-\varphi$	y_{1c}
2	+1	-1	+1	-1	$1-\varphi$	$1-\varphi$	y_{2c}
3	+1	+1	-1	-1	$1-\varphi$	$1-\varphi$	y_{3c}
4	+1	-1	-1	+1	$1-\varphi$	$1-\varphi$	y_{4c}
5	+1	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2-\varphi$	$-\varphi$	y_{5c}
6	+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2-\varphi$	$-\varphi$	y_{6c}
7	+1	0	$+\alpha$	0	$-\varphi$	$\alpha^2-\varphi$	y_{7c}
8	+1	0	$-\alpha$	0	$-\varphi$	$\alpha^2-\varphi$	y_{8c}
9	+1	0	0	0	$-\varphi$	$-\varphi$	y_{9c}

$$\alpha=1, \quad \varphi=\frac{2}{3}=0,667.$$

Аналогічним образом може бути побудована система двох рівнянь у загальному вигляді для m факторів з ядром ПФЕ або ДФЕ й розраховані відповідні значення α і φ.

Через те що побудована за таких умов матриця плану симетрична й ортогональна, визначення коефіцієнтів рівняння регресії другого порядку проводиться за загальною формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ei} x_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2}. \tag{4.7}$$

Рівняння регресії другого порядку з урахуванням квадратичних ефектів для $m = 2$ записується як:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11}(x_1^2 - \varphi) + b_{22}(x_2^2 - \varphi) \tag{4.8}$$

або в загальному вигляді

$$y = \sum_{j=0}^{m} b_j x_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m} b_{jk} x_{jk} + \sum_{j=1}^{m} (x_3^2 - \varphi) \tag{4.9}$$

4.2 Порядок виконання

4.2.1. Відповідно до заданого варіанта записати математичну модель другого порядку в загальному вигляді й побудувати план ОЦКП для знаходження коефіцієнтів регресії.

4.2.2. Визначити коефіцієнти математичної моделі другого порядку в загальному вигляді.

4.2.3. Скласти алгоритм і програму для математичної обробки результатів експерименту, а саме: для визначення коефіцієнтів, розрахункового значення функції відгуку, відхилення функції відгуку й відносного відхилення у відсотках . Результати звести у таблицю.

4.2.4. На основі експериментальних значень функцій відгуку, відповідно до варіанта, обчислити коефіцієнти полінома, розрахункове значення функції відгуку, абсолютні та відносні відхилення функції відгуку.

4.3 Зміст звіту:

- мета роботи;
- рівняння регресії другого порядку в загальному виді;
- план ОЦКП другого порядку;
- програма математичної обробки результатів експерименту з описом структури й правил використання;
- результати розрахунків коефіцієнтів регресії, розрахункові значення функції відгуку, її абсолютні та відносні відхилення;
- побудовану математичну модель другого порядку з описом структури й аналізом.

4.4 Контрольні запитання

4.4.1 У яких випадках рівняння регресії, які враховують ефекти взаємодії, не можуть із прийнятною точністю описати реальну поверхню функції відгуку?

4.4.2. У яких випадках доцільно використовувати рівняння регресії або поліном другого порядку?

4.4.3. Що таке планування експерименту другого порядку? Наведіть приклади для $m = 2; 3$.

4.4.4. На основі якого плану можуть бути визначені коефіцієнти полінома другого порядку?

4.4.5. З яких причин коефіцієнти полінома другого порядку не можуть бути визначені на основі ПФЕ або ДФЕ?

4.4.6. Які вимоги ставляться й повинні виконуватися при побудові ортогональних планів?

4.4.7. Що може являти собою ядро плану в ОЦКП?

4.4.8. Для чого вводяться «зіркове плече» α і квадратична поправка φ. Як визначають їхні числові значення і яка їхня роль при побудові планів ОЦКП для різної кількості факторів?

4.4.9. Як обчислити кількість дослідів у плані ОЦКП другого порядку при різній кількості факторів?

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 5

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ОСНОВІ ДРОБОВИХ ПЛАНІВ

Мета роботи: ознайомлення з дробовими ортогональними центрально-композиційними планами (ДОЦКП) другого порядку й набуття практичних навичок побудови на їхній основі за допомогою математичних моделей другого порядку.

5.1 Короткі теоретичні відомості.

Рівняння регресії другого порядку можна побудувати на основі як повного, так і дробового ОЦКП другого порядку. Останній дозволяє значно скоротити кількість дослідів і тим самим зменшити матеріальні витрати й витрати часу на проведення багатофакторних досліджень. Разом з тим, зменшення кількості дослідів знижує точність математичної моделі.

Для підвищення точності математичної моделі другого порядку, що будується на основі дробового плану ОЦКП, у її складову включають додаткові члени, які являють собою не лінійності у вигляді потрійних, четвертних і більш високих ефектів взаємодії:

$$x_1, x_2, x_3, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.$$

У цьому випадку кількість дослідів залишається такою же, як й у дробовому плані ОЦКП другого порядку, тільки до плану вводяться додаткові розрахункові стовпчики (колонки) для відповідних добутків факторів: $x_1x_2x_3, \quad x_1x_2x_3x_4, \quad x_1x_2x_3x_4x_5.$

За допомогою цих стовпчиків розраховують невідомі відповідні коефіцієнти $b_{123}, b_{1234}, b_{12345}$. й т.д.

Кількість дослідів у дробовому плані ОЦКП другого порядку визначається за формулою

$$m = 2^{m-q} + 2m + 1, \tag{5.1}$$

де q індекс роздрібненості репліки ядра плану.

Таким чином, за ядро, як видно, вибирають частину плану ПФЕ, тобто план ДФЕ 2^{m-q} , який будується за звичайними відомими правилами (див. лаб. роботу №3). Зіркові точки $\pm\alpha$, нульова точка й квадратична поправка φ визначаються так само, як і у повному плані ОЦКП другого порядку (див. лаб. роботу №4). При виборі індексу роздрібненості репліки q, як і при побудові дробового плану першого порядку, необхідно керуватися тим же правилом $n \geq K$, де n - кількість дослідів, а K - кількість невідомих коефіцієнтів у поліномі другого порядку. Невідомі коефіцієнти регресії визначають так само, як й у повному плані ОЦКП другого порядку (див. лаб. роботу № 4, формула (4.7)).

5.2 Порядок виконання

5.2.1. Відповідно до заданого варіанта записати шукану математичну модель другого порядку з урахуванням нелінійностей з парними ефектами взаємодії $x_j x_{ji}$, що може бути побудована на основі дробового плану ОЦКП другого порядку.

5.2.2. Визначити коефіцієнти шуканої математичної моделі в загальному вигляді.

5.2.3. Скласти алгоритм і програму для математичної обробки результатів експерименту, а саме для визначення коефіцієнтів полінома, розрахункового значення функції відгуку y_{pi},, відхилення функції відгуку q, й відносні відхилення у відсотках $\Delta_i\%$.

5.2.4. На основі експериментальних значень функцій відгуку, відповідно до заданого варіанта обчислити коефіцієнти шуканої математичної моделі, розрахункові значення функції відгуку, відхилення функції відгуку й відносні відхилення у відсотках.

5.3 Зміст звіту:

- мета роботи;
- рівняння регресії другого порядку з урахуванням нелінійностей з парними ефектами взаємодії, що може бути побудоване на основі

дробового плану ОЦКП другого порядку в загальному вигляді;

- дробовий план ОЦКП другого порядку;
- результати розрахунків коефіцієнтів рівняння регресії другого порядку, розрахункове значення функції відгуку, відхилення функції відгуку й відносне відхилення Δ у відсотках. Аналіз одержаних результатів;
- побудоване рівняння регресії другого порядку з описом структури й аналізом.

5.4 Контрольні запитання

5.4.1 Напишіть у загальному вигляді рівняння регресії другого порядку з урахуванням нелінійностей, що може бути побудоване на основі дробового плану ОЦКП другого порядку.

5.4.2. У яких випадках доцільно використати дробовий план ОЦКП другого порядку?

5.4.3. Як можна підвищити точність математичної моделі другого порядку, що будується на основі дробового плану ОЦКП другого порядку?

5.4.4. Як визначається кількість дослідів у дробових планах ОЦКП другого порядку?

5.4.5. Як визначається індекс роздрібненості репліки при побудові дробових планів ОЦКП другого порядку?

5.4.6. Як визначаються коефіцієнти на основі дробових планів ОЦКП другого порядку?

5.4.7. Які вимоги ставляться до ортогональних дробових планів ОЦКП другого порядку?

5.4.8. Що таке генеруючі співвідношення і для чого вони використовуються?

5.4.9. Для чого проводиться рандомізація дослідів?

5.4.10 Що таке роздільна здатність дробової репліки?

5.4.11 Для чого використовується квадратична поправка φ і як вона розраховується?

ЛАБОТАТОРНА РОБОТА № 6

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета роботи: вивчити методи статистичної обробки результатів експерименту, дисперсійний і регресійний аналізи планів і математичних моделей першого порядку.

6.1 Короткі теоретичні відомості.

Обробка багатофакторних експериментів передбачає проведення дисперсійного і регресійного аналізу. Метою дисперсійного аналізу є розкладання сумарної дисперсії на дві величини: дисперсію зумовлену технікою експерименту, і дисперсію, визвану дією фактора який досліджується. Для його проведення необхідно виконання двох наступних умов:

- серії вимірювань можна розглядати як випадкові вибірки з генеральних сукупностей які підпорядковуються нормальному розподіленню;
- дисперсії які зумовлені помилками відтворюваності для всіх серій вимірювань повинні бути однорідними.

У випадку проведення багатофакторних експериментів, за допомогою дисперсійного аналізу визначаються дисперсії, які зумовлені дією кожного фактора окремо і їх взаємодією, та оцінюється статистична значимість цих величин з врахуванням помилок відтворюваності. При дослідженні якого-небудь об’єкту або процесу, зміна вихідної величини у через наявність неконтрольованих факторів має випадковий характер. Це обумовлює необхідність:

- по-перше, проведення паралельних дослідів, результати яких $y_{ei1}, y_{ei2}, y_{ei3}$ усереднюються, шляхом визначення їх середньоарифметичного значення в залежності від прийнятого коефіцієнта дублювання дослідів;
- по-друге, забезпечення випадкового порядку проведення експерименту, при якому всі неконтрольовані фактори були б рандомізовані.

При проведенні експериментальних досліджень відповідно до складеної матриці планування для плану ПФЕ 2^m необхідно вибрати кількість паралельних дослідів. Проведення дублювання дослідів необхідно для виключення грубих помилок і визначення дисперсії відтворення $S_{\text{В}}^2$. Коефіцієнт дублювання $K_Д$ може бути визначений попередньо незалежно від спостережень або в процесі досліджень. При проведенні експериментальних досліджень на основі планування експерименту можливі чотири типових випадки, пов'язаних з дублюванням дослідів:

- рівномірне дублювання;
- нерівномірне, дублювання;
- дублювання в одній точці;
- дублювання в окремій серії, що має певне кількість дослідів.

Звичайно віддають перевагу рівномірному дублюванню дослідів, тому що в цьому випадку вихідна ортогональність матриці планування (тобто ортогональність дубльованого плану) не порушується. В інших трьох випадках має місце порушення ортогональності дубльованих планів, що вимагає деяких змін у дисперсійному й регресійному аналізі при обробці результатів експерименту. Аналіз результатів експериментальних досліджень ЕМС вказують на те, що при одних і тих же умовах дослідів їх характеристики можуть бути різними по величині. Тому для одержання математичних моделей характеристик, доцільно використати методи математичної статистики. В цьому випадку перед аналізом результатів експериментальних досліджень необхідно провести попередні дослідження закону розподілення випадкових помилок. В [1-2,5] приводяться різні методи перевірки закону нормального розподілення випадкових помилок. Одним із стандартних статистичних тестів з допомогою якого можна перевірити гіпотезу про нормальне розподілення, являється критерій відповідності χ^2, що потребує проведення великої кількості дослідів для визначення його розрахункової величини і порівняння з табличним значенням (табл. Б.4). Щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних зовнішніми умовами й різними неконтрольованими причинами, рекомендується проводити рандомізацію дослідів у часі, тобто проводити їх у випадковій послідовності. Для цього перед безпосередньою реалізацією плану для кожної з $K_Д$ серій дослідів, зазвичай проводиться рандомізація дослідів, тобто визначається послідовність виконання дослідів при дослідженні даного об'єкта або процесу. Рандомізація дослідів може бути здійснена за допомогою таблиці або генератора випадкових чисел.

Нехай потрібно рандомізувати план експерименту ПФЕ 2^m при $m = 2$. Кількість дослідів дорівнює чотирьом $n = 2^2 = 4$. З таблиці випадкових чисел виписуємо чотири С - значних числа. Приписавши кожному з них номер відповідного досліду, одержимо: 56,66,25, 32 - випадкові числа; 1, 2, 3, 4 - номери дослідів у нерандомізованому плані. Розташувавши випадкові числа в порядку їх зростання, одержимо таку послідовність проведення дослідів:
25, 32,56, 66 - випадкові числа; 3, 4, 1,2 - номери дослідів у рандомізованому плані;

При проведенні експерименту можливі грубі помилки, похибки. Це може бути зв'язано, наприклад, з неточністю запису або із записом результату не в ту клітинку плану й т. д. З метою виключення грубих помилок здійснюється перевірка неоднорідності паралельних дослідів. Нехай в i-му рядку плану серед результатів $y_{i1}, y_{i2}, ... y_N, ..., y_{im}$ є результат y_I, стосовно якого виникає сумнів і висловлюється припущення, що він помилковий. При цьому складемо відношення

$$t_{p_I} = \frac{\left| y_i^* - \overline{y}_i^* \right|}{\sigma_i^*}, \tag{6.1}$$

де $\overline{y}_i^*, \sigma_i^*$ - оцінки математичного очікування й середньоквадратичного відхилення без врахування сумнівного результату; t_p - розрахункове значення критерію Стьюдента;

$$\overline{y}_i^* = \frac{1}{k_Д - 1} \sum_{n=1}^{k_Д} y_{iu}, y_{iu} \neq \overline{y}_I^*; \tag{6.2}$$

$$\sigma_i^* = \sqrt{\frac{1}{k_Д - 2} \sum_{u=1}^{k_Д} (y_{iu} - y_i^*)^2 y_{iu} \neq \overline{y}_i^*}. \tag{6.3}$$

Випадкова величина t_p має $k_Д$ ступенів волі (число паралельних дослідів мінус два зв'язки, які використані для визначення $\bar{y}_i^*$ й σ_i^*)

Формально процедура перевірки статистичної гіпотези робиться за допомогою зіставлення того або іншого розрахункового показника з табличним значенням критерію (у цьому випадку t) при заданій довірчій імовірності P (або рівні значимості g = 1 - P). Якщо розрахункове значення виявляється менше табличного, то з імовірністю P можна прийняти дану гіпотезу. У противному разі гіпотеза відкидається (імовірність правдоподібності гіпотези менше P).

Таким чином, при $t_p < t$ з імовірністю P можна вважати, що паралельні досліди однорідні, інакше результат розглядається як наслідок грубої помилки або промаху.

Після усунення грубих помилок розбіжність значень y_i обумовлена тільки випадковими факторами, тобто помилками досліду, які є випадковими внаслідок допусків й інших відхилень. Тоді й самі значення y_i - випадкові величини й для їхньої оцінки й роботи з ними застосовується математичний апарат теорії ймовірностей і математичної статистики.

Будь-яка випадкова величина характеризується законом розподілу ймовірностей. Ми допускаємо, що для будь-якого фіксованого набору факторів $x_1, x_2, ..., x_m$ значення y_i розподілені за нормальним законом розподілу Лапласа-Гаусса. У цьому випадку ми можемо цілком охарактеризувати y_i двома величинами - математичним очікуванням (середнім значенням y_i) і дисперсією S_i^2:

$$\bar{y}_i = \sum_{u=1}^{k_Д} y_{iu} / k_Д; \tag{6.4}$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^{k_Д} (y_{iu} - \bar{y}_I)^2}{k_Д - 1}, \tag{6.5}$$

де $k_Д$ - коефіцієнт дублювання (число повторень кожного досліду); u - номер повторення.

Чим більше дисперсія, тим сильніше діють випадкові чинники, тим більш визначеним може виявитися кожне окреме значення y_i.

Приклад. Маємо дві групи значень y_i по три числа в кожній:

I 6, 9, 15;

II 9.2, 9.8, 11.0.

Середні в цих групах $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 10$.

Однак дисперсії істотно розрізняються:

$$S^2\{y_I\} = \frac{(6-10)^2 + (9-10)^2 + (15-10)^2}{3-1} = 21;$$

$$S^2\{y_{II}\} = \frac{(9,2-10)^2 + (9,8-10)^2 + (11-10)^2}{3-1} = 0,84.$$

Коли дисперсія більша, тоді ми повинні виявити підвищену обережність і вжити заходів щодо її зменшення, тобто спробувати знайти причину великого розкиду результатів (неоднаковість умов проведення дослідів, погані вимірювальні прилади й т. д.) і усунути її по можливості. Якщо це не вдасться, тоді необхідно збільшити $k_Д$.

У статистиці дисперсія пов'язана з числом ступенів волі f. Це число дорівнює різниці між числом дослідів, за якими оцінювалася дисперсія, і числом констант, знайдених за тими же дослідами. У нашому випадку $f = k_Д - 1$, тому що за результатами цих дослідів визначалося $\bar{y}_i$ - середнє значення, що належить формулі S_i^2.

Перевірка однорідності дисперсій здійснюється для того, щоб установити, чи маємо ми право використовувати середні значення $\bar{y}_i$ для визначення невідомих коефіцієнтів полінома.

Дисперсії однорідні, якщо вони не залежать від того, у якій точці факторного простору проводяться досліди, і між ними немає значної розбіжності.

Порівняння двох дисперсій може бути зроблене за допомогою критерію Фішера

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{21}{0,84} = 25 \text{ при } f_1 = f_2 = 2. \quad S_1^2 > S_2^2. \qquad (6.6)$$

У таблиці для F по горизонталі відкладені f для більшої дисперсії, а по вертикалі для меншої $\boldsymbol{F}_{\text{табл}}$ (див. табл. Б.2).

При числі порівнюваних дисперсій більше 2 рекомендується використовувати інші, потужніші критерії.

При однаковому числі повторень кожного досліду використовують критерій Кохрена G, який визначається за формулою

$$G=\frac{S^2{}_{\max}}{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i^2} \tag{6.7}$$

При $\boldsymbol{G} < \boldsymbol{G}_{\text{таб}}$ приймається гіпотеза про однорідність дисперсії.

У випадку, коли дисперсії не однорідні, не можна користуватися середніми значеннями як математичним очікуванням.

У цьому випадку необхідно підібрати таке перетворення y, щоб дисперсії стали однорідними, наприклад використати $\ln y, \sqrt{y}, \sqrt[3]{y}$ й т. д. Так чи інакше ми повинні мати однорідні дисперсії в дослідах.

Кращою оцінкою є дисперсія відтворення

$$S_{\text{В}}^2 = \sum_{u=1}^{n} S_u^2 / n; \tag{6.8}$$

$$f_{\text{В}} = (k_{Д} - 1), \tag{6.9}$$

де $f_{\text{В}}$ — число ступенів волі дисперсії відтворення; n - число дослідів в плані експерименту.

Аналіз отриманої математичної моделі. Через те що $\bar{y}$ - випадкова величина, знайдені коефіцієнти b також будуть випадковими величинами й потрібна оцінка точності отриманих коефіцієнтів на основі визначення їхньої дисперсії $S^2\left\{b_j\right\}$ за формулою

$$S^2\left\{b_j\right\} = S_{\text{В}}^2 / \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2, \tag{6.10}$$

або

$$S^2\left\{b_j\right\} = S_{\text{В}}^2 / n, \qquad (6.11)$$

Як видно з (6.11) дисперсія коефіцієнтів $S^2\left\{b_j\right\}$ в N разів менша від дисперсії відтворення. Знаючи дисперсію кожного коефіцієнта і його чисельне значення b, можна визначити межі, у яких з певною довірчою ймовірністю буде отримане дійсне значення коефіцієнта $b_Д$:

$$b - \Delta b < b_Д < b + \Delta b. \qquad (6.12)$$

Значення Δb, що визначають довірчий інтервал, визначають за допомогою таблиць критерію Стьюдента (табл. Б.3)

$$\Delta b = t \cdot S\left\{b_j\right\}. \qquad (6.13)$$

де t - табличне значення критерію Стьюдента при прийнятій довірчій імовірності 0,95 і числі ступенів волі f_h, з яких визначена дисперсія $S_{\text{В}}^2$.

Для планів ДФЕ, ПФЕ можна записати

$$\Delta b = t\sqrt{\frac{S_{\text{В}}^2}{n}} = t\,\frac{S_{\text{В}}}{\sqrt{n}}. \qquad (6.14)$$

Визначивши довірчі інтервали, вирішуємо питання про значимість кожного коефіцієнта, тобто про невипадкову його відмінність від нуля. Можна вважати, що коефіцієнт b значно відрізняється від нуля, якщо

$$\left|b\right| > t \cdot S\left\{b_j\right\} x. \qquad (6.15)$$

У противному разі b = 0, тобто, значення його статистично незначне. Адекватність моделі перевіряється шляхом порівняння двох дисперсій - адекватності S_a^2 і відтворення $S_\text{В}^2$ із зіставленням їхнього відношення з табличним значенням критерію Фішера F_m, яке визначається з табл. Б.2:

$$F = \frac{S_a^2}{S_\text{В}^2} < F_\text{Т}(при \quad p = 0,95), \qquad (6.16)$$

де

$$S_a^2 = \frac{k_Д \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - y_{pi})^2}{f_a}; \qquad (6.17)$$

$k_Д$ - коефіцієнт повторення дослідів; y_{pi} — розрахункове значення функції відгуку ; $f_\text{В}$ - ступінь волі дисперсії адекватності; n - кількість дослідів.

$$f_a = n - 1, \qquad (6.18)$$

де I - число коефіцієнтів математичної моделі.

6.2 Порядок виконання

6.2.1. Провести рандомізацію плану ПФЕ 2^m при заданому m відповідно до зазначеного варіанту.

6.2.2. Виконати перевірку однорідності паралельних дослідів за результатами, отриманих в i-му рядку плану відповідно до заданого значення m, при кількості паралельних дослідів, що дорівнює п’яти (u = 5). Останній результат - сумнівний:

(m - 0,2), (m - 0,3), (m - 0,i), (m), (m + 0,1) - результати i-го рядка y_{iu}.

6.2.3. Зробити для всіх рядків плану розрахунок математичних очікувань і дисперсій, перевірити однорідність дисперсій, визначити для значень m дисперсію відтворення плану згідно з заданим варіантом (табл. А.1).

6.2.4. Оцінити статистичну значимість експерименту на основі максимального й мінімального значень відгуків, статистичну значимість коефіцієнтів регресії.

6.2.5. Визначити дисперсію адекватності й зробити оцінку адекватності математичної моделі.

6.2.6. Скласти програму статистичної обробки результатів експерименту ПФЕ 2^m.

6.3 Зміст звіту:

- мета роботи;
- рандомізований план ПФЕ 2^m;
- результати розрахунку й перевірки однорідності паралельних дослідів;
- програма й результати розрахунку математичних очікувань, рядкових дисперсій, перевірки однорідності дисперсій; розрахунку дисперсії відтворення, статистичної значимості коефіцієнтів математичної моделі, дисперсії адекватності й перевірки адекватності математичної моделі.

6.4 Контрольні запитання

6.4.1. Випадкові величини і їхній розподіл. Основні види розподілу.

6.4.2. Класичне визначення ймовірності. Аксіоми теорії ймовірностей.

6.4.3. Статистична сукупність і розподілення випадкових величин.

6.4.4. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення.

6.4.5. Дисперсія, визначення й розрахунок.

6.4.6. Нормальний розподіл, його сутність і характеристика.

6.4.7. Генеральна сукупність і випадкова вибірка.

6.4.8. Як визначити рядкову дисперсію в плані експерименту?

6.4.9. Як визначається однорідність дисперсій?

6.4.10. Як здійснюється рандомізація дослідів?

6.4.11. Як перевіряється однорідність паралельних дослідів?

6.4.12. Як визначити дисперсію адекватності?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ивоботенко Б. А. Планирование эксперимента в электромеханике [Текст] / Б. А. Ивоботенко, Н. Ф. Ильинский, И. П. Копылов. - М.: Наука, 1975. – 184 с.

2. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст] / Ю. П. Адлер, Э. В. Маркова, Ю. В. Грановский. - М.: Наука, 1976. - 277 с.

3. Адлер Ю. П. Введение в планирование эксперимента [Текст] / Ю. П. Адлер. - М.: Металлургия, 1968. - 155 с.

4. Кринецкий Н. И. Основы научных исследований [Текст] / Н. И. Кринецкий. Учеб. пособие для вузов. - К., Одесса: Высш. шк. 1981. - 208 с.

5. Пустыльник Э.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений [Текст] / Э.И. Пустыльник. - М.: Наука, 1968. -288 с.

6. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента [Текст] / Л.З. Румшинский. - М.: Наука, 1971. - 192 с.

Додаток А

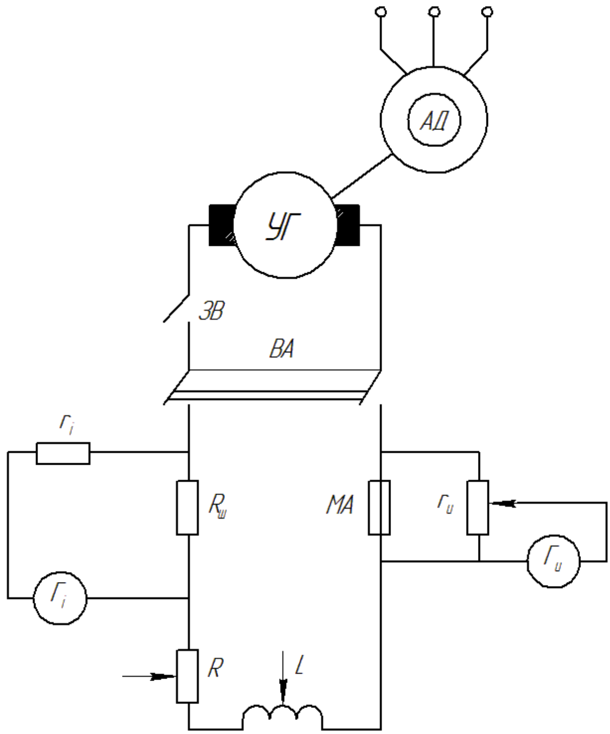

Рисунок А.1. – Схема віртуального стенда для проведення експериментів комутаційного дослідження електричних апаратів

Примітка. Схема віртуального стенда для проведення експериментів комутаційного дослідження електричних апаратів містить у собі:

- ударний генератор постійного струму (УГ), що приводиться в рух від асинхронного двигуна (АД);
- захисний вимикач (ЗВ), що забезпечує захист установки від аварійного короткого замикання;
- вмикаючий апарат (ВА);
- дослідний електричний апарат (запобіжник) (МА);
- регулюючі індуктивність (L) і опір (R).

У табл. А.1. наведено теоретичні експериментальні значення функції відгуку Y_e для розрахунку коефіцієнтів математичних моделей 1-го та 2-го порядків і відхилень між експериментальними та розрахованими значеннями функції відгуку $\Delta = Y_e - Y_p$ і відносних відхилень у відсотках:

$$\Delta\% = \frac{Y_e - Y_p}{Y_e} \cdot 100\%$$

У табл. А.1 прийняті такі позначення:

I_0 - струм обмеження; $I_{пл}$ - струм плавлення; $U_П$ - перенапруга; $U_{ср}$ - середньо інтегральна напруга на дузі; $t_{пл}$ - час плавлення вузьких перешийків плавкого елемента; $t_в$ - час відключення струму короткого замикання запобіжником; $W_П$ - інтеграл Джоуля (інтеграл квадрату струму за час відключення); $l_в$ - довжина вигорання плавкого елемента;

Таблиця А.1. – Експериментальні значення функцій відгуку

	I_0, кА	$I_{пл}$, кА	$U_П$, В	$U_{ср}$, В	$t_{пл}$, мс	$t_в$, мс	$W_П$, $А^2с$	$l_в$, мм
Вар	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
1.1	1,99	1,98	448,7	355,4	2,54	3,65	5295,1	25,01
	1,97	1,95	451,5	350,1	2,50	3,61	5246,0	24,68
	1,68	1,62	497,8	365,5	2,28	3,39	5907,9	15,71
	2,71	2,57	654,5	633,7	1,35	2,46	5805,7	39,84
	2,77	2,63	649,3	649,4	1,38	2,49	5940,5	40,71
	2,47	2,46	642,2	672,9	1,02	2,13	5435,8	27,75
	3,06	2,76	563,4	806,5	2,34	3,45	12658,0	38,36
	3,15	2,84	574,4	830,0	2,41	3,52	12785,1	39,66
1.2	1,73	1,91	427,7	347,4	2,59	3,45	5246,1	25,4
	1,78	1,98	486,5	358,1	2,49	3,71	5295,0	23,41
	1,59	1,64	474,8	364,4	2,32	3,51	3942,9	15,9
	2,37	2,76	622,3	606,5	1,88	2,09	5295,1	38,36
	2,36	2,84	624,7	630,0	1,86	2,09	5246,0	39,66
	2,02	2,65	642,9	834,5	1,89	2,15	5907,9	47,67
	3,00	2,57	654,5	849,1	2,56	3,65	13435,6	39,84

	2,89	2,63	649,3	860,1	2,60	3,61	11854,7	40,71

Продовження таблиці А.1

Вар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1.3	1,70	1,63	448,7	355,4	2,46	3,21	5232,3	28,64
	1,72	1,65	451,5	350,1	2,49	3,23	5182,4	29,17
	1,68	1,67	497,8	365,5	2.13	3,51	5555,3	25,29
	2,26	1,96	513,5	633,7	0,98	2,46	5805,7	39,84
	2,25	1,95	531,3	649,4	0,98	2,49	5940,5	40,71
	2,03	2,39	535,2	672,9	1,04	2,13	5435,8	47,75
	3,07	2,57	605,7	816,5	2,34	3,45	12435,6	40,78
	3,16	2,84	613,9	856,0	2,41	3,65	12854,7	40,60
2.1	1,99	1,61	540,4	330,3	0,65	2,09	10678,3	19,52
	1,97	1,66	546,8	378,8	0,86	2,09	10982,0	19,90
	1,68	1,37	561,3	379,9	0,89	2,15	11854,7	19,86
	2,19	1,43	605,7	386,7	1,70	2,40	12658,0	20,56
	2,24	1,77	613,5	391,0	1,72	2,56	12785,1	20,60
	2,32	1,74	654,5	413,3	1,74	2,60	13435,6	20,78
	3,72	3,64	763,2	633,7	2,19	2,97	15365,3	23,72
	4,02	3,72	767,1	649,4	2,23	3,00	16658,0	24,50

Продовження таблиці А.1

Вар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2.2	1,89	1,52	541,5	335,1	0,48	2,12	10895,3	19,98
	1,96	1,54	541,4	356,4	0,98	2,07	10895,0	19,92
	1,65	1,42	562,8	398,4	0,95	2,19	11985,7	20,21
	2,21	1,48	607,1	324,7	1,76	2,56	12589,0	20,06
	2,26	1,74	617,6	387,4	1,71	2,47	12892,0	20,90
	2,41	1,79	652,1	439,4	1,79	2,75	13578,2	20,48
	3,79	3,75	767,4	687,7	2,25	2,79	15485,2	23,56
	4,1	3,98	785,0	652,9	2,65	3,16	16874,0	25,1
2.3	1,47	1,48	578,4	344,1	0,39	2,10	10815,3	20,08
	1,87	1,65	568,2	346,4	0,87	2,0	10855,4	20,0
	1,95	1,49	545,9	389,4	0,85	2,1	11905,7	20,4
	2,32	1,58	625,4	332,0	1,84	2,45	12534,0	20,6
	2,18	1,95	636,4	396,2	1,76	2,42	12856,0	20,5
	2,36	2,82	624,3	442,9	1,71	2,71	13589,2	20,9
	3,87	3,21	789,2	682,4	2,33	2,89	15445,2	22,96
	4,12	3,56	780,0	646,4	2,63	3,23	16836,0	25,9

Додаток Б

Таблиця Б.1. – Значення критерію Кохрена G для рівня значимості q =0,05

120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312	0292	0279	0218
Число дис.-персій	Число ступенів вірності f_1 максимальної дисперсії $\left[S^2(y_{uk})\right]_{\max}$									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8584	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7341
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	5466
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365	5175	5017	4366
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,3645
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3135
7	7271	5612	4800	4307	3907	3726	3555	3384	3254	2756
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2462

Продовження таблиці Б.1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2226
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2032
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,1737
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911	1815	1736	1429
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1108
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,0942
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061	1002	0958	0771
40	2370	1576	1259	1082	0,968	0887	0827	0780	0745	0595
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0766	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0411

Таблиця Б.2. – Значення критерію Фішера F_T для рівня значимості q =0,05

Число ступенів вільності знаменника f_1	Число ступенів вільності чисельника f_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234	243,9	249	254
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Таблиця Б.3. – Значення критерію Стьюдента $t\ (P; f)$ при різних рівнях значимості q

Число ступенів вільності f_1	Рівень значимості q		Число ступенів вільності f_1	Рівень значимості q	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	12,71	63,66	11	2,20	3,11
2	4,30	9,93	12	2,18	3,11
3	3,18	5,84	13	2,16	3,06
4	2,78	4,60	14	2,15	,01
5	2,57	4,03	30	2,04	2,98
6	2,45	3,71	40	2,02	2,75
7	2,37	3,50	60	2,00	2,70
8	2,31	3,36	120	1,98	2,66
9	2,26	3,25	∞	1,96	2,62
10	2,23	3,17			

Таблиця Б.4. – Значення критерію χ при різних рівнях значимості q

Число ступенів вільності f_1	Рівень значимості q		Число ступенів вільності f_1	Рівень значимості q	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	3,8	6,6	16	26,3	32,0
2	6,0	9,2	17	27,6	33,4
3	7,8	11,3	18	28,9	34,8
4	9,5	13,3	19	30,1	36,2
5	11,1	15,1	20	31,4	37,6
6	12,6	16,8	21	32,7	38,9
7	14,1	18,5	22	33,9	40,3
8	15,5	20,1	23	35,2	41,6
9	16,9	21,7	24	36,4	43,0
10	18,3	23,2	25	37,7	44,3
11	19,7	24,7	26	38,9	45,6
12	21,0	26,2	27	40,1	47,0
13	22,4	27,7	28	41,3	48,3
14	23,7	29,1	29	42,6	49,6
15	25,0	30,6	30	43,8	50,9