ВВЕДЕНИЕ

Место ТАУ в системе научных дисциплин

Теория автоматического управления (ТАУ) является базовой и относительно молодой наукой об управлении. Основные вопросы и методы ТАУ рассмотрены в классической теории, продолжающей интенсивно развиваться в сторону создания теории интеллектуальных систем управления.

ТАУ довольно долго имела сильную инженерную направленность и базировалась в основном на рассмотрении процессов в системе «регулятор — объект управления». ТАУ является системной наукой и потому включает в себя частично многие методы инженерных направлений. Прикладную или инженерную ТАУ сегодня именуют «классической».

Основы современной ТАУ идеологически заложены в «классической» ТАУ и преследуют цель «оптимизации в целом», превращаясь в совокупность методов и средств, осуществляющих интеллектуальное управление и составляющих основу теории интеллектуальных систем управления.

Теория автоматического регулирования и управления относится к числу научных дисциплин, образующих в совокупности науку об управлении и регулировании.

Краткие сведения по истории ТАУ

Впервые с необходимостью построения регуляторов столкнулись создатели высокоточных механизмов, в первую очередь — часов.

На рубеже нашей эры арабы снабдили поплавковым регулятором уровня водяные часы. Гюйгенс в 1657 году встроил в часы маятниковый регулятор хода.

Развитие промышленных регуляторов началось лишь на рубеже XVIII и XIX столетий, в эпоху промышленного переворота в Европе. Первыми промышленными регуляторами этого периода являются автоматический поплавковый регулятор питания котла паровой машины, использованный в 1765 году И.И. Ползуновым, и центробежный регулятор скорости паровой машины, на который в 1784 году получил патент Дж. Уатт.

Первые публикации по исследованию регуляторов появляются в двадцатых–тридцатых годах XIX века (Д.С. Чижов опубликовал один из первых трудов в 1823 году).

Значительный вклад в методологию исследования внесли три фундаментальные теоретические работы, содержащие по существу изложение основ новой науки: Д.К. Максвелла «О регуляторах» (1866 г.) и две работы И.А. Вышнеградского «Об общей теории регуляторов» (1876 г.) и «О регуляторах прямого действия» (1877 г.). Они смело упростили задачу, перейдя к исследованию малых колебаний и линеаризовав нелинейные дифференциальные уравнения системы, что позволило дать общий подход к исследованию разнообразных по своей физической природе систем, заложить основы теории устойчивости и установить ряд важных общих закономерностей регулирования по принципу обратной связи. Начинается усиленная разработка математического аппарата, в частности были разработаны алгоритм для определения устойчивости системы по виду цепи корней характеристического уравнения и критерии устойчивости системы (Раусс и Гурвиц).

Важное место в теории регулирования занимают работы Н.Е. Жуковского «О прочности хода» и «Теория регулирования хода машин» (1909 г.).

В период с 1900 по 1940 гг. появляется целый ряд работ, рассматривающих приложения теории регулирования к разнообразным техническим процессам. Особенно чётко мысль о теории регулирования как о дисциплине общетехнического характера проводится в ряде работ И.И. Вознесенского (период с 1922 по 1942 гг.), руководителя одной из крупнейших школ в этой области.

Быстрое развитие систем автоматического управления вело к необходимости создания более эффективных методов исследования. Появляются работы Найквиста (1932 г.) и Михайлова (1938 г.), касающиеся теории устойчивости. Частотные критерии устойчивости, разработанные А.В. Михайловым, быстро вошли в практику. В 1946 г. Т Броде и Я. Маккол ввели логарифмические характеристики.

В эти же годы усилия исследователей направляются на разработку общих основ теории нелинейных систем. Одно из важнейших направлений, исследование устойчивости нелинейных систем, основывающееся на работах А.М. Ляпунова (1896 г.), развивалось в работах Н.Г. Четаева (1945 г.), А.И. Лурье (1944–1951), А.М. Летова и др.

В трудах Г.В. Щипанова, В.С. Кулебякина, Б.И. Петрова и других были разработаны теория автоматического регулирования по возмущению и теория компенсации возмущений.

В.В. Казаничевым, А.П. Юркевичем, А.А. Фелдбаумом, А.А. Красовским и другими были сформулированы и исследованы принципы экстремального управления и разработана теория экстремальных систем, а также созданы основы теории оптимального управления.

В настоящее время ТАУ представляет собой единую научную базу для решения задач управления объектами различной природы (физической, химической, биологической и т.п.), имея развитые методы исследования САУ — анализа и синтеза (расчёта и проектирования).

1. ПРЕДМЕТ ИЗУЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общей наукой об управлении является кибернетика, которая занимается изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить и перерабатывать информацию, а также использовать её для управления и регулирования. В зависимости от природы изучаемых систем она может быть технической, экономической, биологической и др. ТАУ входит в техническую кибернетику.

Предметом изучения теории автоматического управления является:

- изучение и определение принципов управления (машинами, аппаратами, станками и т.п.);
- сбор и анализ информации о свойствах этих систем, а также условиях их использования и эксплуатации;
- синтез алгоритмов управления и создание управляющих устройств, реализующих требуемые алгоритмы.

Осуществление процессов управления без непосредственного участия человека составляет задачу автоматического управления. Роль автоматики непрерывно растёт во всех отраслях промышленности, что объясняется следующими причинами:

- с развитием и совершенствованием методов управления различными процессами требуются скорости и усилия, значительно превосходящие возможности человека;
- при автоматическом управлении процессами значительно повышаются технико-экономические показатели производства из-за сокращения эксплуатационных расходов и повышения надёжности протекания процессов по требуемым параметрам;
- появление и развитие отраслей, в которых управление процессами становится недоступным для человека или вредным для его организма (химические производства, ядерно-энергетический комплекс и т.п.).

При автоматическом управлении машин решается комплекс задач:

- пуск машины в действие;
- защита от аварийной ситуации;
- определение программ рабочих режимов;
- регулирование рабочих режимов.

В решении указанных задач важную роль играет автоматическое регулирование, которое заключается в обеспечении, без вмешательства человека, заданных значений одной или нескольких величин, определяющих режим работы машины, аппарата, станка и других технических систем. Эти величины называются регулируемыми.

Таким образом, автоматическое регулирование является составной частью автоматического управления.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТАУ

2.1. Общие понятия

Управление — формирование управляющих воздействий, обеспечивающих требуемый режим работы объекта управления.

Регулирование — частный вид управления, задачей которого является обеспечение постоянства или изменения по определённому закону какой-либо выходной величины объекта управления.

Автоматическое управление — управление, осуществляемое без непосредственного участия человека.

Объект управления (ОУ) — устройство, требуемый режим работы которого поддерживается извне, специально организованными управляющими воздействиями.

Автоматическое управляющее устройство (АУУ) — устройство, осуществляющее воздействие на объект управления с целью обеспечения требуемого режима работы без непосредственного участия человека.

Автоматическая система или система автоматического управления (АС) — совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействующих между собой.

2.2. Воздействия и сигналы

Задающее воздействие или сигнал (g; G) — величина, характеризующая планируемое воздействие на входе автоматической системы.

Входное воздействие или сигнал (x; X) — величина, характеризующая состояние сигнала на входе автоматической системы или отдельного её элемента.

Управляющее воздействие или сигнал (u; U) — воздействие управляющего устройства на объект управления.

Выходное воздействие или сигнал (y; Y) — величина, характеризующая состояние объекта управления.

Возмущающее воздействие (f; F) — воздействие, возникающее в результате взаимодействия автоматической системы с внешней средой и вызывающее непланируемые изменения выходных координат.

Ошибка управления (z; Z) — разность между предписанным и действительным значениями выходного сигнала автоматической системы.

2.3. Элементы и звенья систем автоматического управления

Функциональный элемент (ФЭ) — конструктивно обособленная часть автоматической системы, выполняющая определённую функцию.

Воспринимающий элемент (ВЭ) — функциональный элемент автоматического управляющего устройства, принимающий внешние или контрольные воздействия, предназначенный для определения величин воздействий, поступающих в автоматическую систему, а также ошибки управления.

Усилительно-преобразовательный элемент (УЭ) — функциональный элемент автоматического управляющего устройства, воспринимающий сигналы измерительного элемента, усиливающий их и преобразующий к виду, удобному для передачи на исполнительный элемент.

Исполнительный элемент (ИЭ) — функциональный элемент автоматического управляющего устройства, осуществляющий выработку управляющих воздействий.

Корректирующий элемент (КЭ) — устройство, включаемое в системы автоматического управления для повышения устойчивости и улучшения динамических свойств.

Динамическое звено — элементарное звено, осуществляющее арифметические операции по отношению к воздействиям, поступающим на его входы.

Логическое звено — элементарное звено, осуществляющее логическую операцию («И», «ИЛИ», «НЕ») по отношению к воздействиям, поступающим на его входы.

3. ТИПОВАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА САУ

В системе управления отдельные её элементы взаимосвязаны и постоянно передают друг другу сообщения о происходящих в них процессах посредством сигналов, т.е. передают информацию.

Любая АС в общем виде может быть представлена как совокупность двух частей:

— объекта управления (ОУ);

— автоматического управляющего устройства (АУУ) (рис. 3.1).

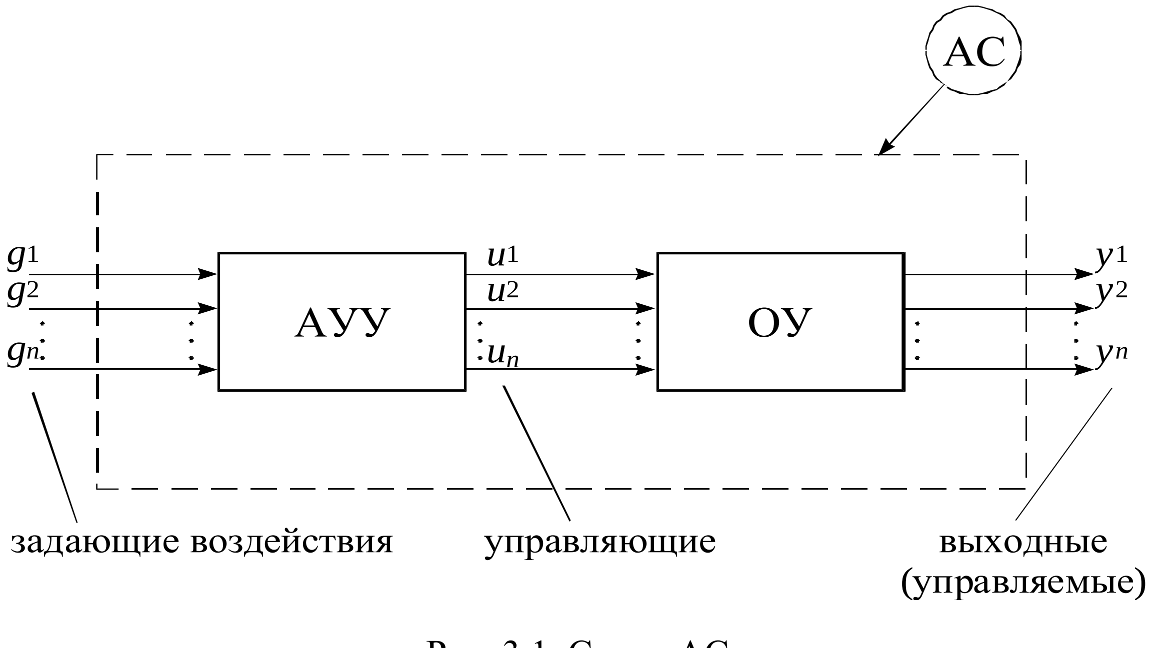


Рис. 3.1. Схема АС

Состояние объекта характеризуется совокупностью выходных величин *y*, которые в общем случае могут быть векторными — $\overline{y}$.

От АУУ на вход ОУ поступает управляющее воздействие — *U*, и помимо него к ОУ приложено возмущающее воздействие *f*, препятствующее управлению.

На вход управляющего устройства подаётся задающее воздействие g, содержащее информацию о требуемом значении y, то есть — о цели управления.

Переменные u, g и f в общем случае также являются векторными — $\bar{U}$, $\bar{G}$ и $\bar{F}$.

Элемент, входящий в САУ и определённым образом преобразующий входной сигнал в выходной, является звеном, обозначение которого (рис. 3.2) не отражает его особенностей, основной интерес представляет связь между воздействием на вход звена и его реакция на это воздействие.

Рис. 3.2. Обозначение звена

В общем случае типовая функциональная схема САУ состоит из (рис. 3.3):

— задающего элемента (ЗЭ), служащего для задания определённого закона управления;

— элемента главной обратной связи (ЭГОС), служащего для определения значения регулируемой величины $y(t)$ и преобразования её в другую, более удобную для технической реализации величину $y_{ос}(t)$;

— элемента сравнения $\otimes$, служащего для выявления разницы между заданным и текущим значениями регулируемой величины;

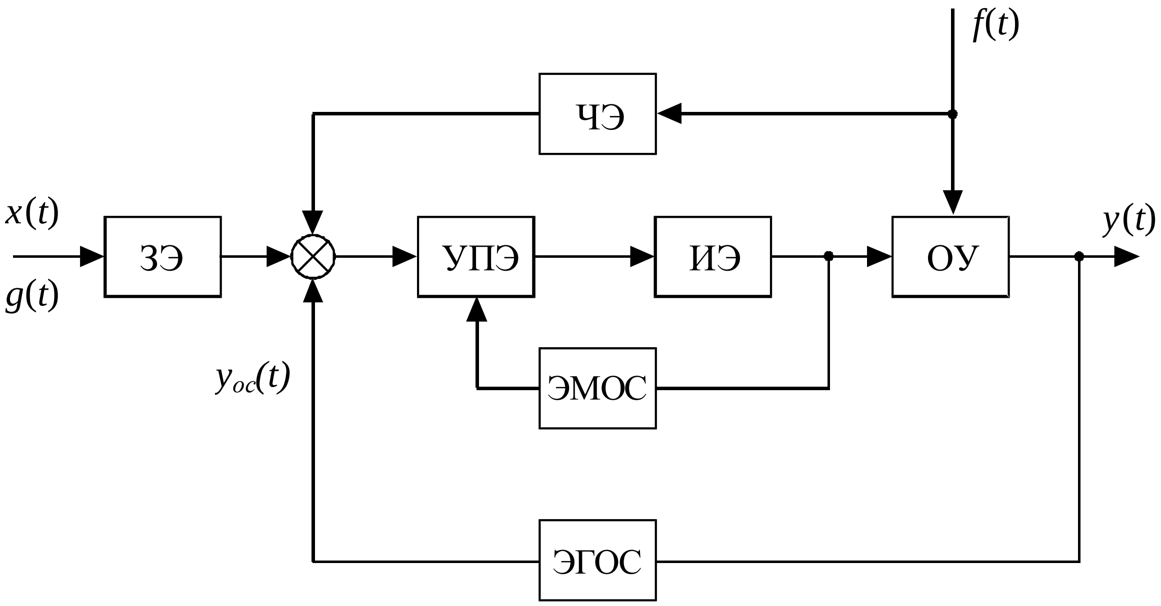


Рис. 3.3. Типовая функциональная схема САР

— усилительно-преобразовательного элемента (УПЭ), служащего для преобразования сигнала с целью придания системе желаемых динамических свойств и его усиления до значения, достаточного для приведения в действие исполнительного механизма;

— исполнительного элемента (ИЭ), осуществляющего непосредственно регулирование выходного параметра объекта управления;

— объекта управления (ОУ) — технического устройства, регулирование выходного параметра которого осуществляется САУ;

— чувствительного элемента (ЧЭ), служащего для определения основного возмущения;

— элемента местной обратной связи (ЭМОС), служащего для придания системе требуемых динамических свойств.

В общем случае система автоматического управления содержит канал прямой связи и может содержать несколько каналов обратной связи. Причем, знак обратной связи может быть как отрицательным так и положительным.

3.1. Принципы управления

Выходная величина объекта управления вследствие различных возмущений может отклоняться от заданного значения. Задачей устройства управления является обеспечение соответствия выходной величины заданной. Это обеспечивается формированием необходимого управляющего воздействия.

Управление по задающему воздействию осуществляется только по воздействию $g(x)$ (рис. 3.4 а), представляющему в этом случае команды программы. Такое управление не учитывает действительных значений выходной величины $y(t)$ и возмущающего воздействия $f(t)$. Подобные САУ дают удовлетворительное качество управления лишь при высокой стабильности системы и внешней среды и при невысоких требованиях к точности и отличаются, как правило, простотой конструкции.

Управление по возмущению (рис. 3.4 б) учитывает и компенсирует возмущение. При этом первоначально определяется доминирующее возмущение, а затем — как необходимо менять значение управляемого параметра для компенсации возмущения. САУ этого вида дают возможность полной компенсации возмущений и обладают высоким быстродействием, однако, в случае преобладания неконтролируемых возмущений этот способ не даёт требуемой точности, а при необходимости учёта нескольких возмущающих воздействий, система резко усложняется.

Управление по отклонению (рис. 3.4 в) позволяет получить более высокое качество управления, при этом используется информация как о задающем воздействии $g(t)$, так и об управляемой величине $y(t)$, для этого замеряется $y(t)$, происходит сравнение с заданным, и при наличии разности сигналов вырабатывается управляющее воздействие. Такое устройство управления компенсирует отклонения при любых возмущающих воздействиях, вызвавших это отклонение, т.е. учитывает действительное состояние объекта, что является его основным положительным свойством. Недостатком является низкое быстродействие, поскольку в этом случае системой измеряется уже результат управления. Применительно к металлообработке это означает, что при некоторых условиях возможно появление брака. Использование таких систем нецелесообразно при наличии случайных возмущений. Стремление повысить характеристики САУ может привести к потере устойчивости.

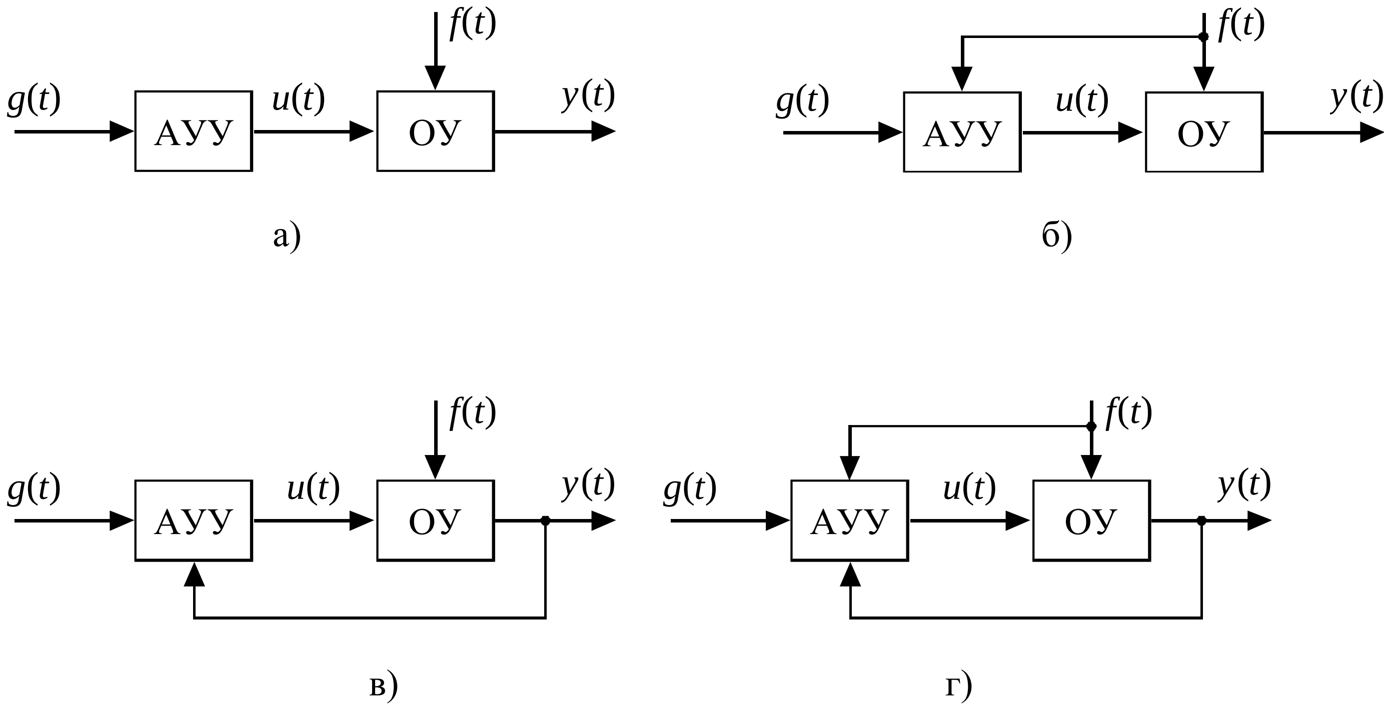


Рис. 3.4. Принципы управления: а) управление по задающему воздействию; б) управление по возмущению; в) управление по отклонению; г) комбинированное управление

Комбинированное управление свободно от вышеперечисленных недостатков, при этом (рис 3.4 г) используется информация одновременно о трёх воздействиях: *g(t)*, *y(t)* и *f(t)*, что даёт высокое качество управления и быстродействие, однако в большинстве случаев подобные системы сложнее и дороже вышеперечисленных.

3.2. Рабочая и априорная информация

В системах автоматического управления для поддержания стабильности протекающих в ней процессов необходимо наличие постоянной информации об объекте управления и окружающих условиях. При этом информация об ОУ и окружающих условиях может быть как заранее определённой (например, из расчётов или справочных условий), так и замеряться непосредственно во время работы.

Информацию о предполагаемом диапазоне изменения возмущающих и задающих воздействий называют априорной, а информацию о текущем, фактическом состоянии объекта и о его фактических свойствах, получаемую в процессе функционирования САУ, называют рабочей.

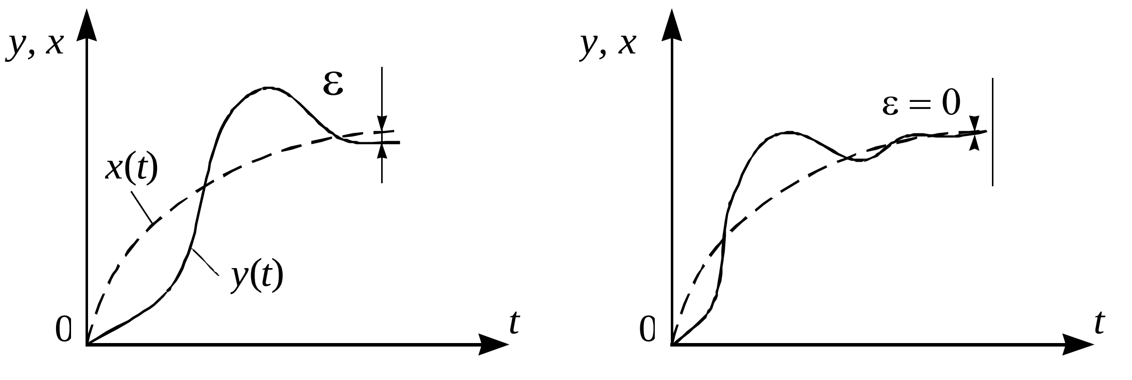
4. ТИПЫ СИСТЕМ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

4.1. Статические и астатические системы

Зависимость динамической ошибки от времени *t* для систем в установившемся режиме имеет вид

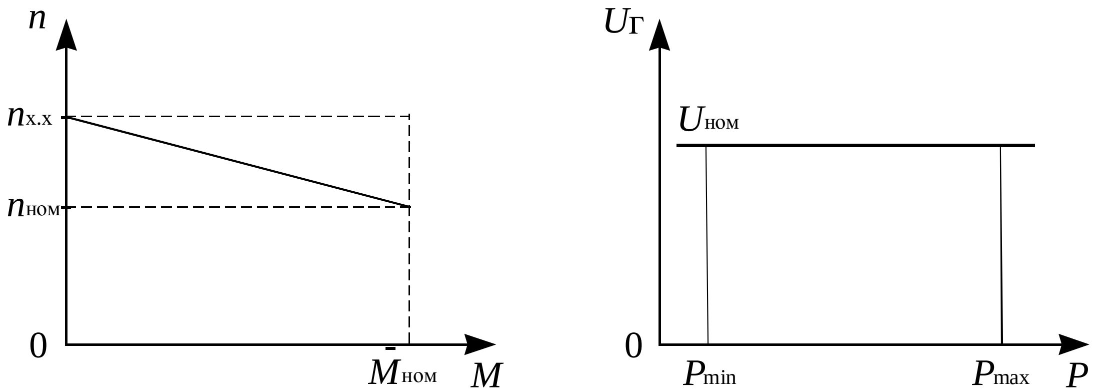
$$E(t) = U(t) - y(t),$$

где *U(t)* — сигнал управления; *y(t)* — выходная характеристика, которая при установившихся значениях определяет тип системы (рис. 4.1).



а) б)

Рис. 4.1. Статическое (а) и астатическое (б) управление



а) б)

Рис. 4.2. Статическое (а) и астатическое (б) управление при изменении нагрузки

Систему называют статической, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому значению, ошибка ε также стремится к постоянному значению, зависящему от значения управляющего воздействия, т.е. система не обеспечивает постоянства управляемого параметра при переменной нагрузке и всегда имеет некоторую ошибку *ε*.

Систему называют астатической, если при воздействии, стремящемуся к установившемуся значению, ошибка стремится к нулю независимо от значения воздействия.

Конструктивно статические системы проще астатических, однако требуют, например, поддержания постоянного значения управляемого параметра при разных внешних нагрузках (рис. 4.2).

Изменение управляемого параметра является важнейшей характеристикой системы и называется её неравномерностью. Отношение этой неравномерности к номинальному значению управляемого параметра называют степенью неравномерности (коэффициентом статизма или статизмом) и обычно его измеряют в процентах.

Статическая зависимость управляемого параметра нежелательна и её влияние стараются уменьшить или исключить.

4.2. Циклические и ациклические системы

Классификация систем на циклические и ациклические главным образом характерна для различных САУ, применяемых в машиностроительном производстве.

Циклические системы выполняют свои функции по заданной программе без каких-либо изменений последовательности её отдельных этапов или режимных параметров, несмотря на возможные изменения условий фактического протекания процесса. Эти системы функционируют на основе априорной информации.

Ациклические системы управления осуществляют управление с использованием информации о текущем состоянии объекта управления, о выходных величинах или возмущающих воздействиях. Эти системы функционируют на основе рабочей информации.

5. ДРУГИЕ КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ПРИЗНАКИ И ТИПЫ САУ

В зависимости от требуемого закона изменения управляющего воздействия $g(t)$ автоматические системы подразделяют на:

1) системы стабилизации;
2) системы программного управления;
3) следящие системы;
4) экстремальные системы.

Системы стабилизации служат для поддержания на постоянном уровне значения управляемой величины. Задающее воздействие в этом случае определяется соотношением

$$g(t) = g_0 = \text{const}.$$

Системы программного управления предназначены для изменения управляемой величины по заданному закону, представляющему собой заранее известную функцию какой-либо величины, например времени:

$$g(t) = g_0(t).$$

Эта функция и будет определять программу управления.

Следящие системы предназначены для изменения управляемой величины объекта по закону, который заранее не известен. В этом случае задающее воздействие определяется в зависимости от какой-либо величины объекта слежения, например, его скорости, перемещения, положения и т.п. В таких системах задающее воздействие $g(t)$ может рассматриваться как случайная величина или как случайная функция.

Экстремальные системы поддерживают наибольшее или наименьшее значения управляемой величины, возможное при конкретных условиях протекания процесса

$$g(t) = y \text{ ext}.$$

Назначение этих систем — автоматическое отыскание управляющих воздействий, соответствующих экстремальному значению управляемой величины при неконтролируемом изменении характеристик объекта и внешних воздействий.

В зависимости от способности САУ автоматически изменять свои характеристики в зависимости от изменения условий работы они делятся на обычные (априорные) и самоприспосабливающиеся (адаптивные).

Обычные (априорные) — обеспечивают требуемый результат только при наиболее вероятных условиях работы, принятых при проектировании, и не способны изменять характеристики отдельных звеньев и структуру управления в зависимости от условий работы.

Адаптивные — обладают способностью в зависимости от условий работы автоматически изменять параметры звеньев автоматической системы, структуру управления и целевую функцию.

Кроме вышеуказанной классификации используют также и другие классификационные признаки.

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Статика систем автоматического управления

Статические характеристики САУ или отдельных её звеньев представляют собой функциональную зависимость выходных величин от входных при статическом, т.е. установившемся режиме работы. Под установившемся предполагается режим работы при постоянных во времени значениях входных и выходных величин.

В общем случае у любой САУ может быть несколько входных и выходных величин, при этом каждая входная величина воздействует на все выходные по соответствующим каналам передачи воздействий, при этом статическая характеристика представляет собой многомерную функцию. Несмотря на это, любую промышленную установку можно условно расчленить на несколько объектов с одной регулируемой величиной и затем решать задачи создания одноконтурных САУ. Для таких объектов с «n»-входами и одним выходом статическая характеристика представляет собой функциональную зависимость между входными (x_1, x_2, ... x_n) и выходной (y) величинами в установившемся режиме:

$$y = F(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Статические характеристики могут быть описаны алгебраическими или дифференциальными уравнениями, зачастую их представляют также в виде графиков.

Статические характеристики позволяют определить значения регулируемых параметров, положение регулирующих органов, расходы энергии или вещества и другие данные для любого установившегося состояния исследуемого объекта.

Уравнения статических режимов могут быть получены из дифференциальных уравнений звеньев, если в последних приравнять нулю производные от всех величин по времени.

Экспериментально статическая характеристика определяется следующим образом (рис. 6.1).

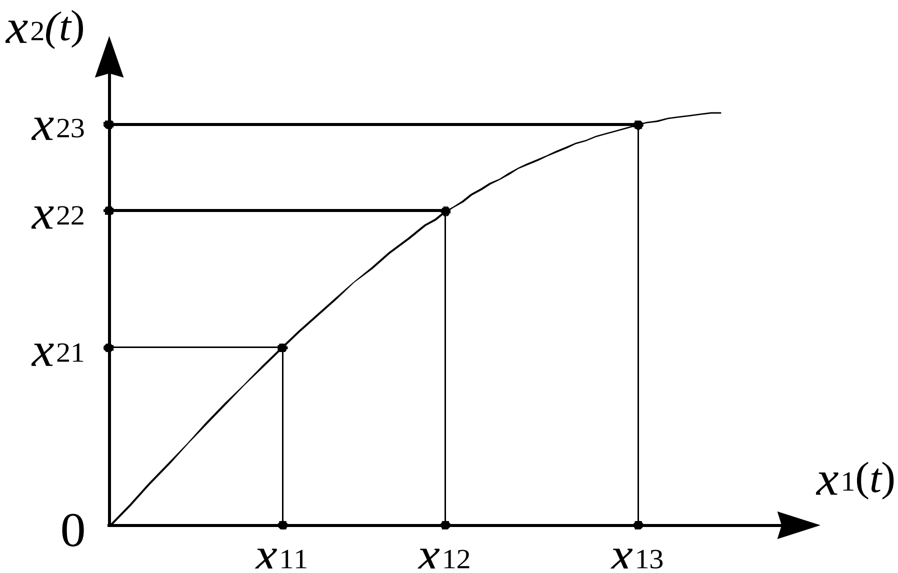


Рис. 6.1. Получение статической характеристики

Входной величине придают определённое значение $x_1(t) = x_{11}$. По окончании переходного процесса определяют установившееся значение выходной величины

$x_2(t) = x_{21}$, и получают первую точку характеристики. Далее, аналогично повторяют измерения до получения необходимого числа точек, после чего проводят интерполяцию и получают искомую характеристику.

Статические характеристики могут быть линейными (рис. 6.2) и нелинейными (рис. 6.3).

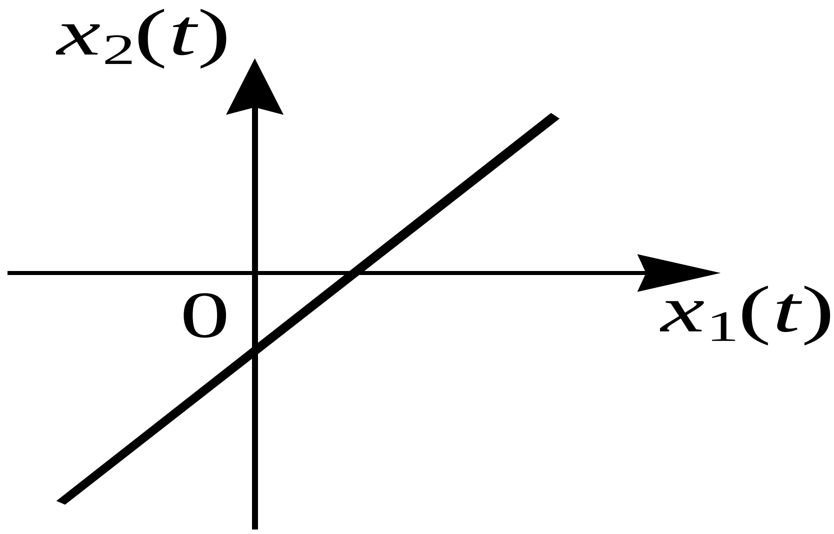


Рис. 6.2. Пример линейной характеристики

Наличие в автоматической системе хотя бы одного нелинейного звена делает всю систему нелинейной.

Уравнение статического режима любого линейного звена описывается уравнением вида

$$x_2(t) = a + k \cdot x_1(t).$$

Большинство реальных статических характеристик нелинейно, однако, зачастую эти нелинейности достаточно малы, либо проявляются вне какого-либо диапазона значений $x_1(t)$, в связи с чем такие системы можно условно считать линейными, (например, систему, имеющую статическую характеристику, изображённую на (рис. 6.3. е), можно считать линейной при работе системы с входными воздействиями от $-x_1$ до $+x_1$). Однако в большинстве случаев связь между входными и выходными величинами, как правило, существенно нелинейная и часто задаетсяв графической или неявной форме, поэтому непосредственно исключить промежуточные переменные при составлении дифференциальных уравнений элементов автоматической системы не удается. Более того,если даже и удается исключить промежуточные переменные,то все равнообщее уравнение ситемы получается нелинейным, а аналитическое решение нелинейных уравнений возможно только в редких частных случаях. Поэтому прежде чем преобразовывать полученные нелинейные уравнения элементов системы, их необходимо линеаризовать.

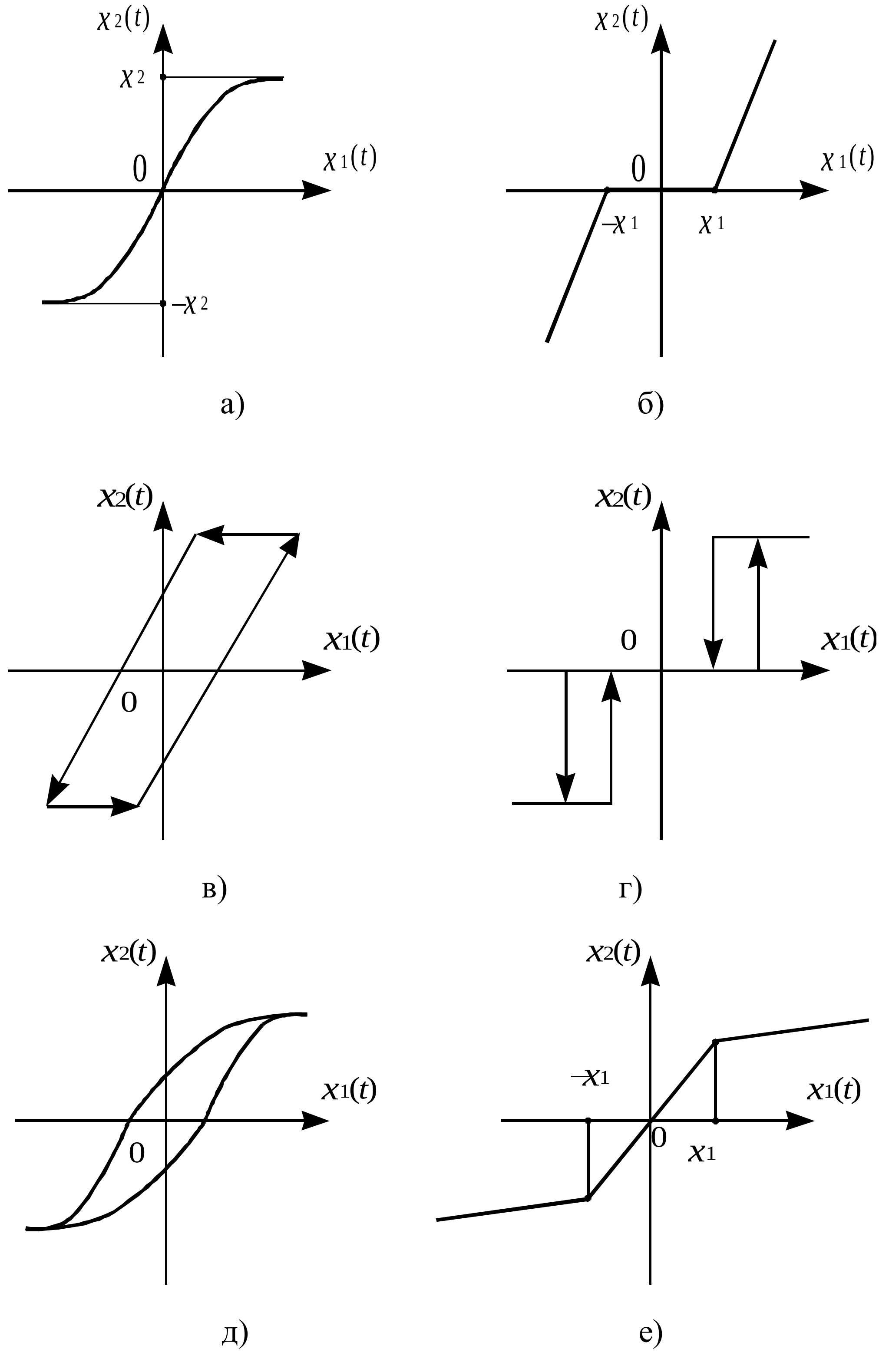


Рис. 6.3. Примеры нелинейных характеристик: а) однозначная, типа насыщения; б) с зоной нечувствительности; в) неоднозначная, типа петля люфта; г) релейная, с зоной нечувствительности и зонами неоднозначности; д) петля гистерезиса; е) кусочнолинейная аппроксимация.

6.2. Линеаризация дифференциальных уравнений

Многие элементы САР описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, при этом далеко не каждое нелинейное дифференциальное уравнение может быть проинтегрировано, и даже отыскание приближённого числового решения требует трудоёмких расчётов, в связи с этим их подвергают линеаризации.

В основе линеаризации лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе отклонения переменных от их установившихся значений остаются всё время достаточно малыми.

Рассмотрим два метода линеаризации:

1) метод осреднения;

2) метод малых отклонений.

Предположим, что на некотором участке $-x_м < x < x_м$ (рис. 6.4), нелинейная характеристика может быть аппроксимирована прямой линией вида $y(t) = k \cdot x(t)$, где $k = \mathrm{tg}(\alpha)$. Тогда эта прямая может быть принята за статическую характеристику.

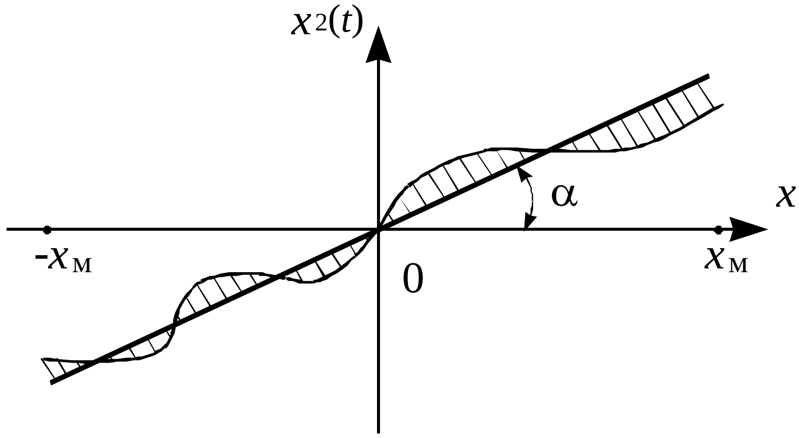


Рис. 6.4. Нелинейная характеристика и ее линейная аппроксимация

Такую простую линеаризацию и называют методом осреднения и используют в инженерной практике, когда достаточно «гладкая» характеристика может быть аппроксимирована аналитической функцией. Данный метод используется, как правило, при обработке экспериментальных данных и данных, найденных по эмпирическим закономерностям.

Более широко используют метод малых отклонений, который позволяет линеаризовать как нелинейные статические характеристики, так и нелинейные дифференциальные уравнения.

Линеаризация основывается на разложении линеаризуемой функции в ряд Тейлора.

Рассмотрим линеаризацию применительно к функции одной переменной. Если разложить её в ряд Тейлора, то получим

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \\ + \ldots \frac{y^n(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n, \qquad (6.1)$$

где $y(x_0)$ — начальное значение выходной величины, соответствующее значению входной величины x_0; $y^n(x_0)$ — значения производных выходной величины, взятой для конкретной точки $A(x_0; y_0)$ (рис. 6.5).

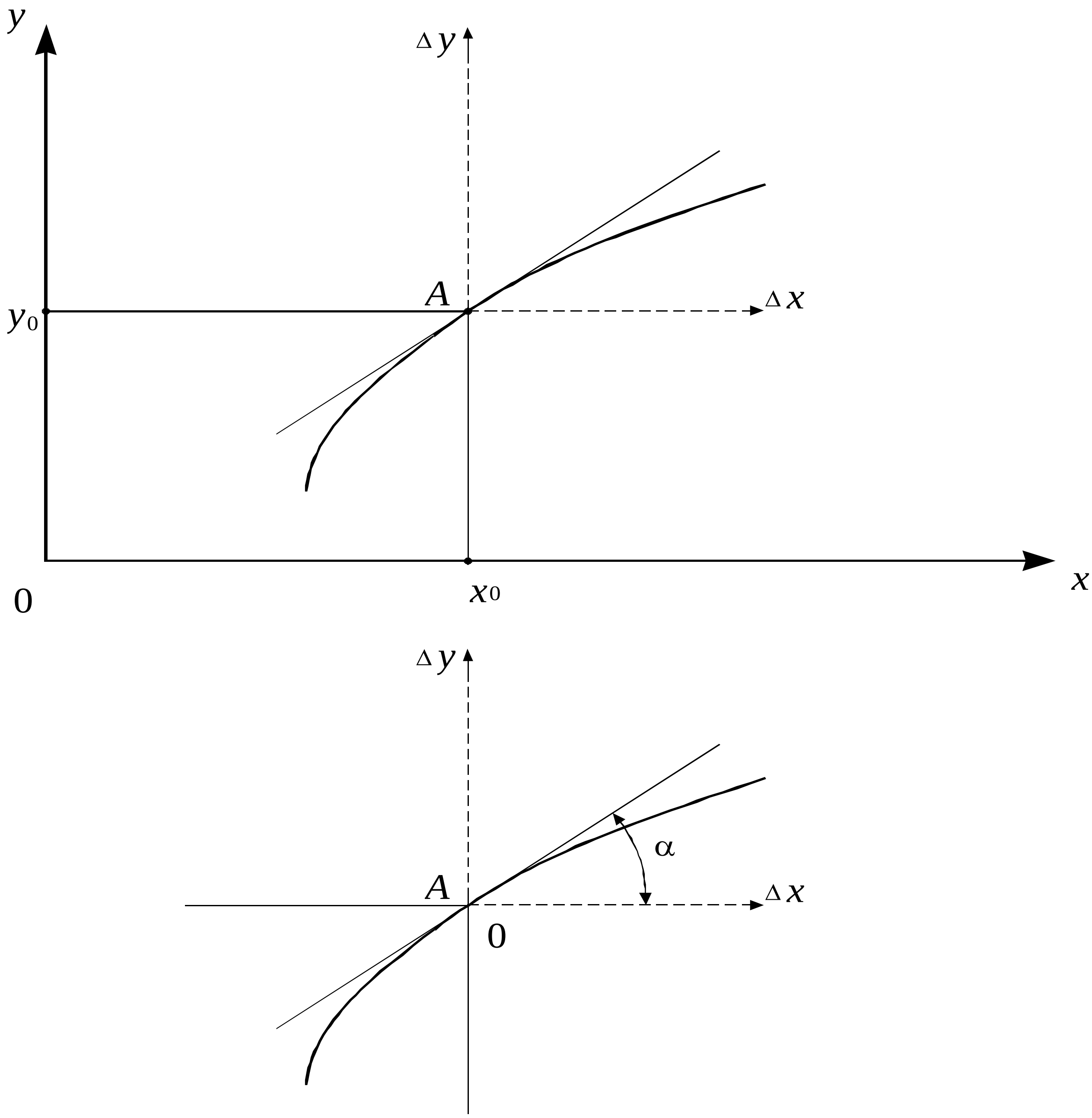


Рис. 6.5. Линеаризация по методу малых отклонений

Учитывая, что члены выражения (6.1), начиная со второй производной и выше, достаточно малы и ими можно пренебречь, получаем соотношение

$$y \approx y_0 + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x,$$

где y_0 — значение выходной величины, соответствующее x_0; $\Delta x = x - x_0$ — разность между текущим и начальным значениями входной величины; $\frac{dy}{dx}$ — производная выходной величины, причём $\frac{dy}{dx} = k = \mathrm{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона линеаризованной характеристики при $x = x_0$.

При этом нелинейная функция заменяется линейным уравнением в приращениях (прямая АВ) (см. рис. 6.5):

$$\Delta y = y - y_0 = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = k \cdot \Delta x,$$

то есть $\Delta y = k \cdot \Delta x$.

Таким образом, линеаризация функции одной переменной $y = \varphi(x)$ геометрически заключается в переходе от абсолютных величин x и y к их отклонениям Δx и Δy от установившихся значений x_0, y_0 и замене реальной кривой на касательную, проведённую в точке $A(x_0; y_0)$ установившегося состояния.

Если выходная величина является функцией нескольких независимых входных воздействий, то при линеаризации следует определить частные производные выходной величины по каждому входному воздействию, а приращение выходной величины находить как сумму частных приращений. Так если $y = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, то

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n,$$

где Δx_1, Δx_2 ... Δx_n — приращения входных воздействий; Δy — приращение выходной величины; $\frac{\partial y}{\partial x_n}$ — частные производные выходной величины.

Рассмотрим случай функции двух переменных

$$z = z(x, y).$$

На плоскости её можно представить в виде семейства кривых (рис. 6.6), построенных для фиксированных значений переменных.

Если точка $A(x_0; y_0; z_0)$ соответствует установившемуся состоянию звена, а исходная функция разложима в ряд Тейлора в окрестностях этой точки, то, отбросив все члены ряда выше первого порядка малости, получим

$$z = z_0 + kx \cdot \Delta x + ky \cdot \Delta y, \tag{6.2}$$

где z_0 — значение функции при $x = x_0$, $y = y_0$; $k_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $k_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ — значения частных производных, вычисленные при $x = x_0$ и $y = y_0$; $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$.

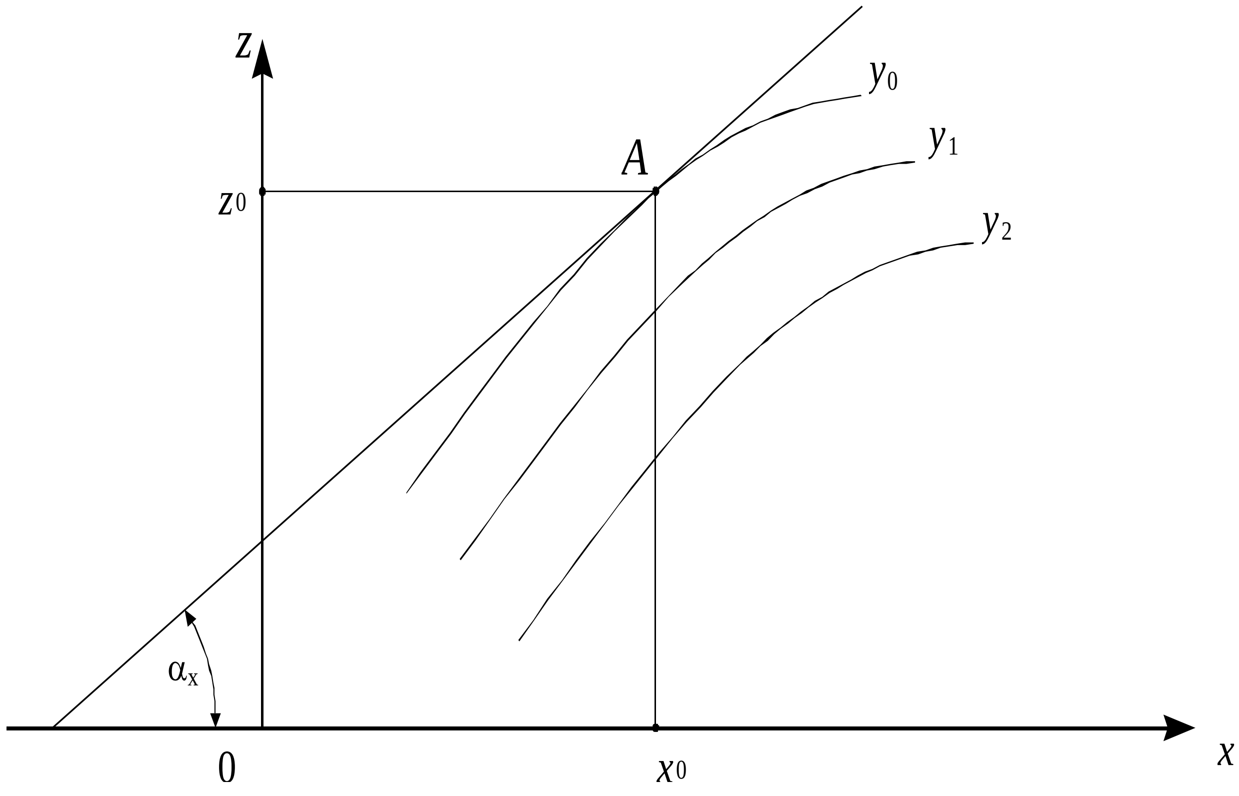


Рис. 6.6. Функция двух переменных

Таким образом, получили линеаризованное уравнение в окончательном виде (6.2). Для функций нескольких переменных линеаризация выполняется аналогично (см. рис. 6.6).

Поскольку линеаризация основана на разложении в ряд Тейлора, она применима только к непрерывно дифференцируемым нелинейностям, которые называются линеаризуемыми. Нелинейные звенья, не удовлетворяющие этому требованию, называются существенно нелинейными и не могут быть подвергнуты описанной выше линеаризации. В дальнейшем будем рассматривать линеаризованные уравнения звеньев, поэтому значок Δ будем опускать, а под величинами *x(t), f(t)* и т.д. будем понимать их отклонения от установившихся состояний.

7. ДИНАМИКА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

7.1. Общие положения

В реальных САУ зачастую сигналы между отдельными её элементами меняются во времени, что связано с постоянными изменениями условий работы.

Для оценки работы звена или системы в динамическом режиме используют динамические характеристики и параметры. Динамику звена характеризует исходная характеристика, под которой понимается зависимость выходной величины от времени t (рис. 8.1), где Δy — допустимое отклонение от заданного значения, $t_п$ — время переходного процесса.

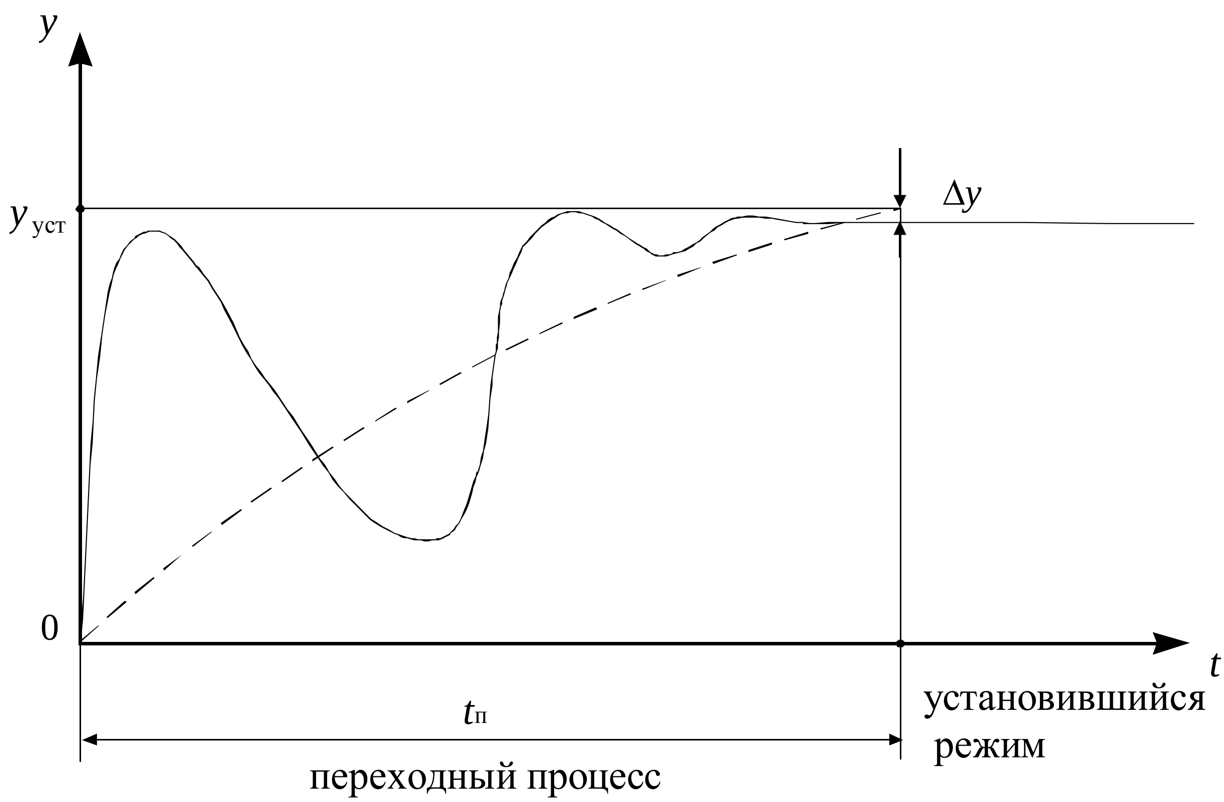


Рис. 7.1. График переходного процесса

Основными этапами исследования систем в динамике являются:

- постановка задачи управления — формирование цели управления и критериев качества управления;
- математическое описание процессов в объектах управления;
- синтез структуры устройства управления;
- анализ и оценка функционирования системы при заданных условиях.

7.2. Понятие динамического звена

При исследованиях и расчётах автоматических систем невозможно составить математическое описание всей системы сразу. Для облегчения задачи систему разбивают на отдельные элементы и для каждого из них составляют дифференциальные уравнения, которые записываются на основе соответствующих им физических законов. Для отражения динамических свойств элементов независимо от их физической природы используют понятие динамического звена.

Динамическое звено — часть автоматической системы или элемента, описываемая определённым дифференциальным уравнением и обладающая свойством направленного действия. Направленность действия звена означает, что воздействие (рис. 7.2) передаётся только в одном направлении — от входа к выходу, и выходная величина $x_2(t)$ не влияет на входную — $x_1(t)$.

Рис. 7.2. Динамическое звено

Динамическим звеном можно представить элемент, совокупность элементов, автоматическую систему в целом.

Следует отметить, что обозначение динамического звена (см. рис. 7.2) не несёт информации о связи входной и выходной величин, в то время как при анализе САУ необходимо иметь чёткое представление о зависимости этих величин.

Математическое описание САУ может быть произведено различными способами (например, при помощи дифференциального уравнения или передаточных функций), которые будут рассмотрены ниже.

7.3. Математическое описание линейных САУ

Создание математического описания — построение модели САУ, что обычно сопровождается разбиением её на звенья и описанием этих звеньев (аналитически либо в виде графических характеристик, связывающих входную и выходную величины). Совокупность уравнений (или характеристик) отдельных звеньев определяют уравнения или характеристики системы в целом.

Любая САУ осуществляет преобразование информации, т.е. каждой функции на выходе ставится в соответствие определённая функция на входе. Это соответствие между входной функцией $x(t)$ и выходной функцией $y(t)$ можно записать в виде

$$y(t) = A \cdot x(t),$$

где A — оператор системы, обозначающий всю совокупность математических действий, производимых для сопоставления $x(t)$ и $y(t)$, при этом оператор системы является полной исчерпывающей её характеристикой, объединяющей любые математические действия: алгебраические, дифференцирование, интегрирование, сдвиг во времени, любые функциональные зависимости, а также любые логические действия.

При изучении принципа действия САУ обычно рассматривается её функциональная схема, в которой система разбита на звенья, исходя из их назначения, т.е. выполняемых ими функций. При математическом описании САУ разбивают на звенья по принципу удобства получения этого описания, т.е. систему разбивают на возможно более простые мелкие звенья направленного действия, передающие воздействие только в одном направлении — со входа на выход. При этом целесообразно, чтобы каждое звено в динамике описывалось дифференциальным уравнением не выше второго порядка и изменение состояния такого звена не влияло бы на состояние предшествующего звена (работающего на его вход).

В общем виде уравнения звеньев обычно записываются через переменные состояния *x(t)* в нормальной форме — в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешённых относительно первых производных (форма Коши):

$$\dot{x}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \text{ или}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1} \cdot x_1 + \ldots + a_{in} \cdot x_n + b_{i1} \cdot u_1 + \ldots + b_{im} \cdot u_m ,$$

где X — вектор состояния $(x_1 \ldots x_n)^T$; $i = 1 \ldots n$; $x_1 \ldots x_n$ — фазовые координаты; U — вектор управления $(u_1 \ldots u_n)^T$.

Переменные состояния аналогичны координатам, а пространство их изменения является фазовым. Математическое описание САУ в целом представляет совокупность независимо составленных уравнений отдельных звеньев, образующих систему. Математическое независимое описание звеньев позволяет легко составить структурную схему системы.

Структурная схема определяет основу математического описания САУ.

7.4. Понятие о структурной схеме

Как было сказано выше, математическое описание звеньев позволяет составить структурную схему, состоящую из прямоугольников, изображающих звенья, и стрелок, соединяющих входы и выходы звеньев (рис. 7.3.).

Стрелками показывают не только связи между звеньями, но и влияние воздействий, приложенных к отдельным звеньям системы.

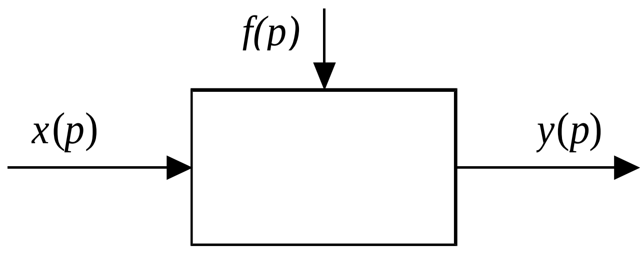
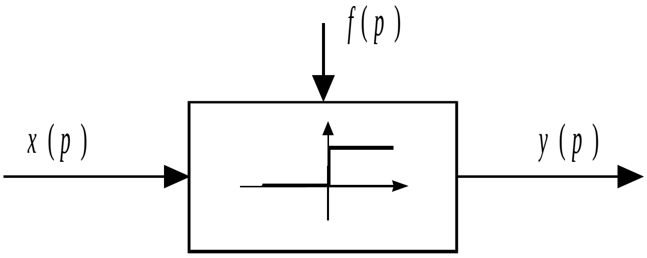
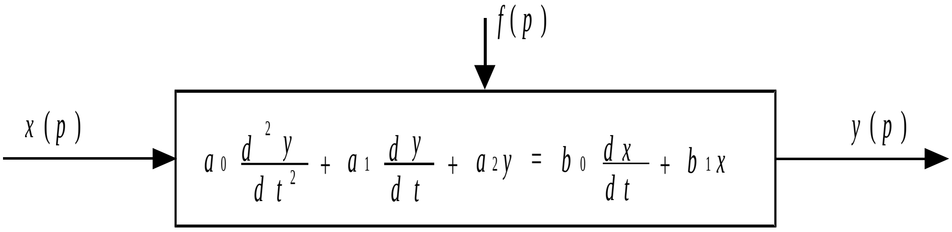


Рис. 7.3. Обозначение динамического звена воздействий

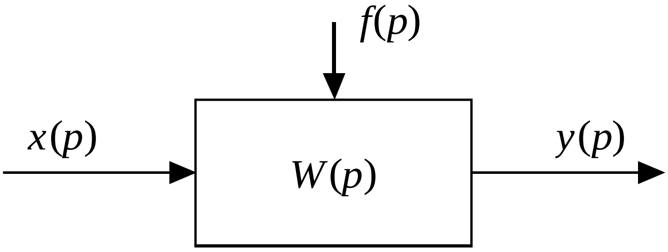
Уравнение (или характеристика) звена структурной схемы обычно записывается прямо внутри прямоугольника в виде графической зависимости (рис. 7.4 а), в виде графической зависимости (рис. 7.4 б), в виде некоторой обобщенной (рис. 7.4 в) или передаточной функци (рис. 7.4 г).

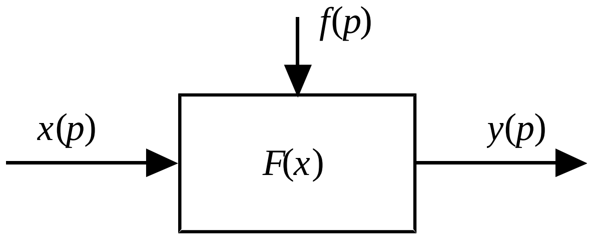


а)



б)





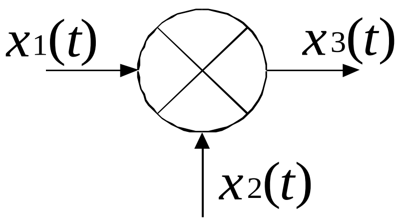
в) г)

Рис. 7.4. Динамические звенья: а) с характеристикой в виде графической зависимости; б) с характеристикой в виде дифференциального уравнения; в) с характеристикой в виде передаточной функции; г) с характеристикой в виде обычной функции

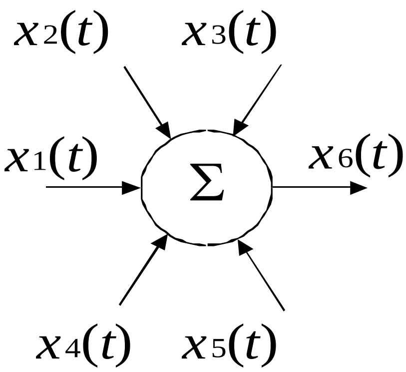
Помимо этого, используются также обозначения, отображающие соединение динамических звеньев между собой.

Для изображения операций алгебраического суммирования используется знак сумматора (рис. 5.5 а), который используется также и для отображения операций алгебраической разности или сравнения (рис. 7.5 б), соответственно для обозначения отрицательной величины того или иного сигнала соответствующий сектор закрашивается либо имеет знак минус. В том случае если количество воздействий, приходящих к сумматору, более трёх используют несколько другое обозначение (рис. 7.5 в). Следует заметить, что к сумматору может подходить достаточно большое число воздействий и сигналов, а выходить только одно.

В том случае, если одно и тоже воздействие является входным для нескольких звеньев используется значок узла (рис. 7.6), который также иногда называют разветвлением. К узлу не может подходить более одного воздействия, а выходить может несколько (однако на практике, как правило, не более трёх, в противном случае используют несколько значков узла).

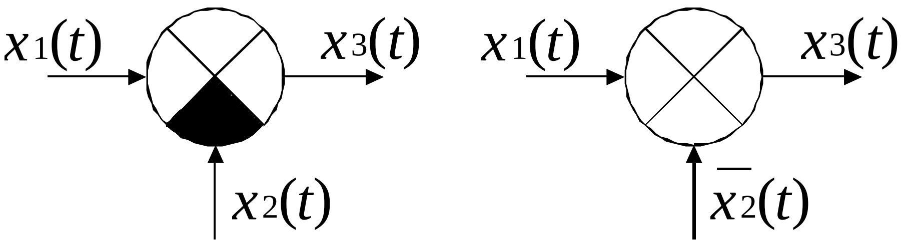


$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$



$x_6(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) - x_4(t) - x_5(t)$

а) б)



$x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$

в)

Рис. 7.5. Сумматоры: а) изображение алгебраического суммирования; б) изображение сумматора при большом числе приходящих воздействий; в) изображение разности

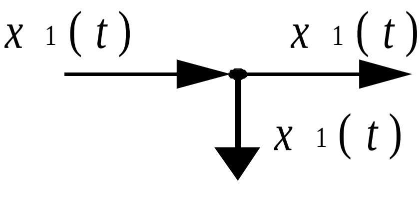


Рис. 7.6. Узел

7.5. Типовые соединения динамических звеньев

При составлении структурных схем динамические звенья в последних, как правило, соединяясь между собой, образуют различные сочетания, хотя всё их многообразие можно свести к трём типам соединений, которые называются типовыми:

— последовательное соединение (рис. 7.7);

— параллельное соединение (рис. 7.8);

— соединение с обратной связью или встречно-параллельное (рис. 7.9).

Далее рассмотрим каждое из них. При последовательном соединении выходная величина каждого из звеньев, кроме последнего, служит входной величиной последующего звена. Рассмотрим последовательное соединение звеньев. При этом

$$W_1(S) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}; \quad W_2(S) = \frac{x_3(t)}{x_2(t)}; \quad W(S) = \frac{x_3(t)}{x_1(t)},$$

где *W(t)* — передаточная функция совокупности всех звеньев.

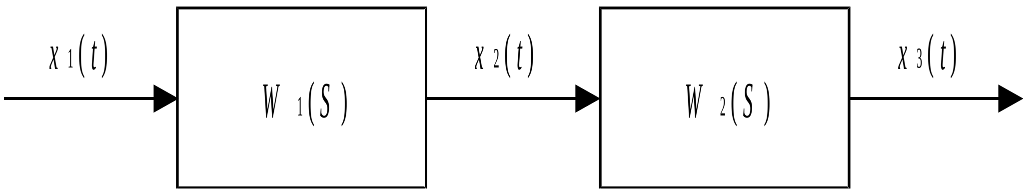


Рис. 7.7. Последовательное соединение звеньев

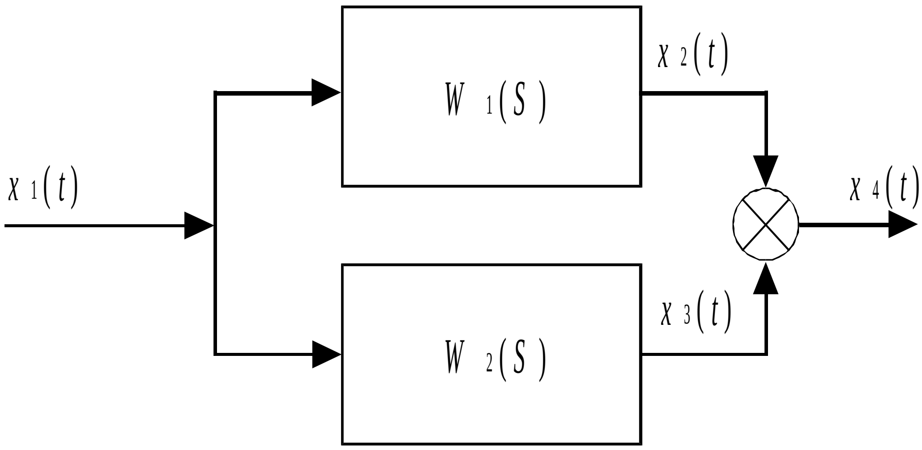


Рис. 8.8. Параллельное соединение звеньев

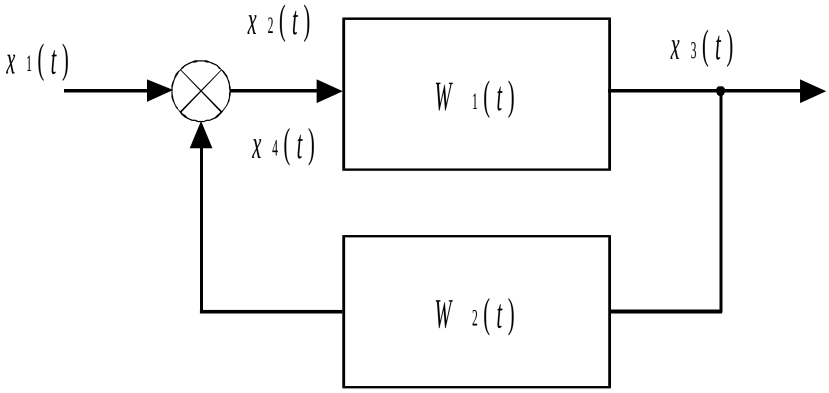


Рис. 7.9. Соединение с обратной связью

В связи с этим можно записать

$$x_2(t) = W_1(S) \cdot x_1(t), \text{ тогда}$$

$$W_2(S) = \frac{x_3(t)}{x_1(t) \cdot W_1(S)},$$

$$W_1(S) \cdot W_2(S) = \frac{x_3(t)}{x_1(t)} = W(S), \text{ то есть } W(S) = W_1(S) \cdot W_2(S).$$

Аналогично проводятся исследования и при большом числе звеньев. При этом общая передаточная функция при последовательном соединении *n* звеньев будет

$$W(S) = W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S) \cdot \ldots \cdot \prod_{i=1}^{n} W_i(S),$$

т.е. передаточная функция системы, состоящей из последовательно включённых звеньев, равна произведению передаточных функций этих звеньев.

При параллельном соединении все звенья имеют одну и туже входную величину, а их выходные величины суммируются (см. рис. 7.8), при этом:

$$W_1(S) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}; \quad W_2(S) = \frac{x_3(t)}{x_2(t)}; \quad W(S) = \frac{x_4(t)}{x_1(t)},$$

откуда $x_4(t) = x_2(t) + x_3(t)$. Тогда $x_2(t) = W_1(S) \cdot x_1(t)$; $x_3(t) = W_2(S) + x_1(t)$.

Окончательно получаем $W(S) = \dfrac{W_1(S) \cdot x_1(t) + W_2(S) \cdot x_1(t)}{x_1(t)} = W_1(S) + W_2(S).$

Аналогично проводят исследования при большем количестве параллельно соединённых звеньев, тогда для *n* параллельно соединённых звеньев

$$W(S)=W_1(S)+W_2(S)+W_3(S)+\ldots+\sum_{i=1}^{n}W_i(S).$$

Следовательно, передаточная функция параллельно соединённых звеньев будет суммой передаточных функций звеньев, входящих в соединение.

При соединении с обратной связью (рис. 7.9) имеет место прямая цепь передачи сигналов и цепь обратной связи, которая является либо положительной либо отрицательной, тогда

$$x_2(t)=x_1(t)\pm x_n(t);\ W_1(t)=\frac{x_3(t)}{x_2(t)};\ \ W_2(t)=\frac{x_n(t)}{x_3(t)},$$

$$W(S)=\frac{x_3(t)}{x_1(t)}=\frac{x_3(t)}{x_2(t)\mp x_4(t)}=\frac{W_1(S)\cdot x_2(t)}{x_2(t)\mp W_2(S)\cdot x_3(t)}=\frac{W_1(S)}{1\mp W_2(S)\cdot\dfrac{x_3(t)}{x_2(t)}}=$$

$$=\frac{W_1(S)}{1\mp W_2(S)\cdot W_2(S)},\ \text{то есть}\ W(S)=\frac{W_1(S)}{1\mp W_2(S)\cdot W_2(S)}.$$

В выражении, стоящем в знаменателе формулы, знак "+" принимается при отрицательной обратной связи, а знак "–" — при положительной обратной связи. В общем случае передаточная функция соединений с обратной связью определяется отношением передаточной функции прямой цепи к сумме или разности единицы и произведения передаточных функций прямой цепи и цепи обратной связи.

7.6. Правила преобразования структурных схем

Несмотря на то, что большинство структурных схем с целью их преобразования сводят к рассмотренным выше трём типам, тем не менее этому предшествует предварительное преобразование, и для сложных, разветвлённых структурных схем не всегда удаётся решить задачу с использованием только трёх вышеприведённых правил.

В связи с этим существуют правила преобразования структурных схем, которые представлены в приложении.

При преобразовании структурных схем может возникнуть необходимость в различных операциях: перенос сумматора через узел, узла через узел, сумматора через звено и т.д. Рассмотрим их (приложение 1):

- перенос узла через узел выполняется без каких-либо дополнительных преобразований;
- перенос сумматора через сумматор также производится без каких-либо преобразований;

- перенос узла через сумматор с образованием дополнительной цепи и сумматора, знаки входного воздействия $x_2(S)$ для сумматоров должны быть противоположны;
- перенос сумматора через узел осуществляется аналогично, но без изменения знака $x_2(S)$;
- перенос узла через звено осуществляется с введением в схему дополнительного звена с передаточной функцией $\frac{1}{W(S)}$, если перенос осуществляется по ходу сигнала, или $W(S)$, если перенос осуществляется против хода сигнала;
- перенос сумматора через звено осуществляется также с введением в схему дополнительного звена с передаточной функцией $W(S)$ при переносе по ходу сигнала и передаточной функцией $\frac{1}{W(S)}$ при переносе против хода сигнала.

Кроме того, имеются дополнительные правила преобразования структурных схем, (приложение 2).

В соответствии с ними допускаются следующие преобразования:

- внешнее воздействие f, приложенное к входу начального звена с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перенести на вход последующего звена, добавив между воздействием и входом звена $W_2(p)$ звено с передаточной функцией $W_1(p)$;
- внешнее воздействие f, приложенное к входу звена с передаточной функцией $W_2(p)$, можно перенести на вход предыдущего последовательно включенного звена с передаточной функцией $W_1(p)$, добавив между воздействием и входом звена $W_1(p)$ звено с передаточной функцией $W(p)=\frac{1}{W_1(p)}$;
- точку присоединения звена с передаточной функцией $W_3(p)$ можно перенести с выхода звена с передаточной функцией $W_2(p)$ на его вход, добавив между входами звеньев $W_2(p)$ и $W_3(p)$ звено с передаточной функцией $W_2(p)$;
- точку присоединения звена с передаточной функцией $W_3(p)$ можно перенести со входа звена на его выход, добавив между выходом звена $W_2(p)$ и входом звена $W_3(p)$ звено с передаточной функцией $\frac{1}{W_2(p)}$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ САУ

Дифференциальные уравнения системы записывают так, чтобы значения регулируемой величины и её производных располагались в левой части уравнения. Значения входных воздействий (управляющих и возмущающих) и их производных располагаются в правой части. При этом уравнение САУ имеет вид:

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n \cdot y = b_0 \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m \cdot x,$$

где a_0, a_1 ... a_n — постоянные коэффициенты левой части уравнения; b_0, b_1 ... b_m — коэффициенты правой части уравнения.

Значение выходной величины САУ обычно приводится к форме с единичным коэффициентом, т.е. коэффициенты уравнения делятся на a_n, b_m.

Обозначим операцию дифференцирования через символ дифференцирования:

$$p = \frac{d}{dt},$$

иначе называемый алгебраизированным оператором дифференцирования ($\frac{d^i}{dt^i}$ — тождественно равно p^i). Это условная алгебраическая величина, представляющая собой функцию времени; p не обладает свойством коммутативности и является сомножителем только как py (px, pf и т.д.), но не yp (fp, $\dot{x}p$ и т.д.).

Если пользоваться преобразованием Лапласа (или Карсона — Хевисайда) [1], с помощью которого рассмотрение процессов из временной области переносится в комплексную, тогда p будет являться комплексным числом $p = c \pm j \cdot \omega$ (иногда вместо p пишут $S = c \pm j \cdot \omega$, о чём будет сказано ниже).

Определим уравнение динамики звена.

Рассмотрим нелинейное звено, входящее в структуру САУ, описываемое нелинейной функцией разложимой в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки при внешнем возмущении $f = 0$:

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, f, \dot{f}, \ddot{f}, \ldots) = 0. \qquad (8.1)$$

При работе САУ x и y мало отклоняются от их программных значений x_0, y_0, исходя из принципа работы замкнутой САУ. Следовательно,

$$x = x^0 + \Delta x(t),\ \dot{x} = \Delta\dot{x},\ y = y^0 + \Delta y(t),\ \dot{y} = \Delta\dot{y},\ \ddot{y} = \Delta\ddot{y},$$

где Δ характеризует малые отклонения.

В установившемся состоянии уравнение нелинейного звена:

$$F(x, 0, y^0, 0, 0)^0 = 0. \qquad (8.2)$$

Разложим уравнение (8.2) в ряд Тейлора:

$$F(x, y)^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^0 \cdot \Delta\dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \cdot \Delta\ddot{y} + R_n = 0. \qquad (8.3)$$

Далее, заменив частные производные коэффициентами, получим

$$F(x,y)^0+(-b_1)\cdot\Delta x+(-b_0)\cdot\Delta\dot{x}+a_2\cdot\Delta y+a_1\cdot\Delta\dot{y}+a_0\cdot\Delta\ddot{y}+R_n=0,$$

где R_n определяет остальные члены порядка малости более двух ($n > 2$) и стремится к нулю при $x \to 0$ и $y \to 0$.

Вычитая из уравнения (8.3) уравнение (8.2), опустим знак Δ и, заменяя R_n на 0, получим линеаризованное уравнение в отклонениях:

$$a_0\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\cdot\frac{d\ y}{dt}+a_2\cdot y=b_0\cdot\frac{d\ x}{dt}+b_1\cdot x$$

или в операторной форме:

$$(a_0\cdot p^2+a_1\cdot p+a_2)\cdot y(t)=(b_0\cdot p+b_1)\cdot x(t).$$

Следует заметить, что положение о малых отклонениях для возмущения $f(t)$ обычно неприменимо, т.к. они могут иметь значительную величину.

8.1. Форма записи дифференциальных уравнений САУ

Запись уравнения, отражающего зависимость выходной величины от входной, может иметь различные формы. Рассмотрим основные формы записи дифференциальных уравнений САУ.

Первая форма записи имеет вид:

$$(T_2^2\cdot p_2^2+T_1\cdot p+1)\cdot y=k\cdot(T\cdot p+1)\cdot x,$$

где $T_2^2=\dfrac{a_0}{a_2}$; $T_1=\dfrac{a_1}{a_2}$; $T=\dfrac{b_0}{b_1}$; $k=\dfrac{b_1}{a_2}$.

В данном случае T — постоянная времени звена, измеряется в секундах и характеризует инерционность звена, k — передаточный коэффициент звена, который либо не имеет размерности, либо имеет размерность величины b_1/a_1 соответственно.

Вторая форма записи — через передаточную функцию звена

$$W(p)=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{b_0\cdot p+b_1}{a_0\cdot p^2+a_1\cdot p+a_2}=\frac{k\cdot(T\cdot p+1)}{T_2^2\cdot p+T_1\cdot p+1},$$

где $W(p)$ — характеризует отношение изображений по Лапласу выходной величины звена ко входной при нулевых начальных условиях и равенстве нулю всех возмущающих воздействий.

Третья форма записи применяется относительно переменных состояния, когда САУ описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t)=A(t)\cdot x(t)+B(t)\cdot u(t);$$

$$y(t) = C(t) \cdot y(t) + D(t) \cdot u(t),$$

где *A* — квадратная матрица коэффициентов; *B* — матрица управления; *C* — матрица выхода; *D* — матрица обхода системы; *u(t)* — многомерный вектор входных переменных; *x* — многомерный вектор переменных состояний входных координат; *y* — многомерный вектор выходных переменных.

Следует заметить, что в общем случае любая САУ описывается либо в форме дифференциального уравнения:

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n \cdot y = b_0 \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m \cdot x$$

или $$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y = b_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot x,$$

либо в его свёрнутом виде (уравнение типа вход-выход):

$$(T_n^n \cdot p^n + T_{n-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + 1) \cdot y(t) = k \cdot (T_m^m \cdot p^m + T_{m-1}^{m-1} \cdot p^{m-1} + 1) \cdot x(t)$$

или ему подобных.

8.2. Понятие передаточной функции

Связь между входной и выходной величинами можно задать различными способами. При составлении структурных схем и анализе работы САУ для определения этой связи используют передаточную функцию.

При наличии на входе звена сигнала x_1 дифференциальное уравнение звена может иметь вид

$$a_0 \cdot \frac{d^3 x_2}{dt^3} + a_1 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_2 \cdot \frac{d\ x_2}{dt} + a_3 \cdot x_2 = b_0 \cdot \frac{d\ x_1}{dt} + b_1 \cdot x_1$$

или

$$(T_3^3 \cdot p^2 \ + T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1) \cdot x_2(t) = (k_1 \cdot p_1 \ + k_2) \cdot x_1(t),$$

где $T_3^3 = \dfrac{a_0}{a_3}$; $T_2^2 = \dfrac{a_1}{a_3}$; $T_1 = \dfrac{a_2}{a_3}$; $k_1 = \dfrac{b_0}{a_3}$; $k_2 = \dfrac{b_1}{a_3}$, причём k_1, k_2 k_3 — коэффициенты передачи.

Найдём отношение выходной величины ко входной:

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{k_1 \cdot p + k_2}{T_3^3 \cdot p^2 \ + T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1} = W(p).$$

Выражение *W(p)* называют передаточной функцией. Более строго передаточная функция определяется как отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях. В основе понятия передаточной функции лежит преобразование Лапласа, сущность которого заключается в переходе от функции времени к функции комплексной переменной, т.е. $S = c + j\cdot\omega$, по формуле

$$X(S) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)\cdot e^{-S\cdot t}\,dt\ . \qquad (8.4)$$

Функцию *x(t)* в выражении (8.4) называют оригиналом, а *X(S)* — изображением. Изображения наиболее употребительных функций приведены в литературе [5].

Основные свойства преобразования Лапласа характеризуется следующими соотношениями:

— свойство линейности $L[a\cdot x(t)] = a\cdot L[x(t)]$; $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + [x_2(t)]$, где a — постоянная;

— правило дифференцирования $L\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right] = S\cdot X(S) - x(0),$

где $X(S) = L[x(t)]$; $x(0)$ — значение функции *x(t)* при $t = 0$, т.е. при начальных условиях;

— правило интегрирования $L\left[\int_0^t x(t)\cdot dt\right] = \dfrac{1}{S}\cdot X(S).$

В том случае, когда значения всех производных при $t = 0$ (начальные условия) равны нулю, то правило дифференцирования принимает вид

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = L\left[p^n\cdot x(t)\right] = S^n\cdot X(S),$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$ — символ (оператор) дифференцирования.

Формально, переход от дифференциального уравнения к алгебраическому относительно изображения при нулевых начальных условиях, обычных для большинства САР, получается путём замены $\dfrac{d^n}{dt^n}$ и соответственно p^n, на S^n и оригиналов *x(t)* их изображением *X(S),* зачастую, даже не разделяя S и p, в некоторых источниках записывают *X(p)* [1, 2, 3].

Если положим $F(S) = 0$, то

$$X(S) = W_1(S)\cdot X_1(S),$$

тогда $W_1(S) = \dfrac{X_2(S)}{X_1(S)}$.

Рассмотренное выше свойство позволяет производить и обратное преобразование, заменяя *S* на *p* или $\frac{d}{dt}$, то есть

$$x_2(t) = W_1(p) \cdot x_1(t) + W_2(p) \cdot f(t),$$

в случае *f(t)* = 0, $x_2(t) = W_1(p) \cdot x_1(t)$,

тогда $W_1(p) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$.

То есть при нахождении передаточной функции на практике в большинстве случаев её можно определить как отношение выходной величины ко входной.

8.3. Временные и частотные характеристики

Оценить динамические свойства САУ или её отдельных звеньев можно с использованием их дифференциальных уравнений, либо с помощью графических характеристик. Применяются два типа таких характеристик — временные (или переходные) и частотные. Характеристики могут быть найдены экспериментально либо построены по уравнению (также можно и по экспериментальным характеристикам составить уравнение звена).

Переходные частотные характеристики однозначно связаны с уравнением звена (САУ) и наряду с ним являются исчерпывающим описанием динамических свойств звена (или САУ).

Для получения временных характеристик на вход исследуемого звена подают одно из нижеперечисленных воздействий, получивших название типовых.

Единичное ступенчатое воздействие — это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остаётся неизменным (рис. 8.1). Для математической записи такого типового воздействия используют единичную ступенчатую функцию:

$$1(t) = \begin{cases} 0, \; при \; t < 0 \\ 1, \; при \; t \geq 0 \end{cases}.$$

Единичная ступенчатая функция может иметь и другие виды (см. рис. 8.1). В качестве примера ступенчатого воздействия можно привести любое достаточно быстрое увеличение или уменьшение входной величины: мгновенное увеличение нагрузки на вал двигателя, резкий перепад температуры, быстрое увеличение нагрузки в механической системе, резкое увеличение тока или напряжения в электросхеме и так далее, то есть наиболее неблагоприятные воздействия для САУ. Резкое увеличение воздействия на входе можно считать единичной ступенчатой функцией в том случае, если его длительность много меньше длительности переходного процесса, вызванного этим воздействием.

Наряду с переходной характеристикой h(t) применяется импульсная переходная характеристика, представляющая собой реакцию звена на единичный импульс. Единичный импульс — это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала (рис. 8.2).

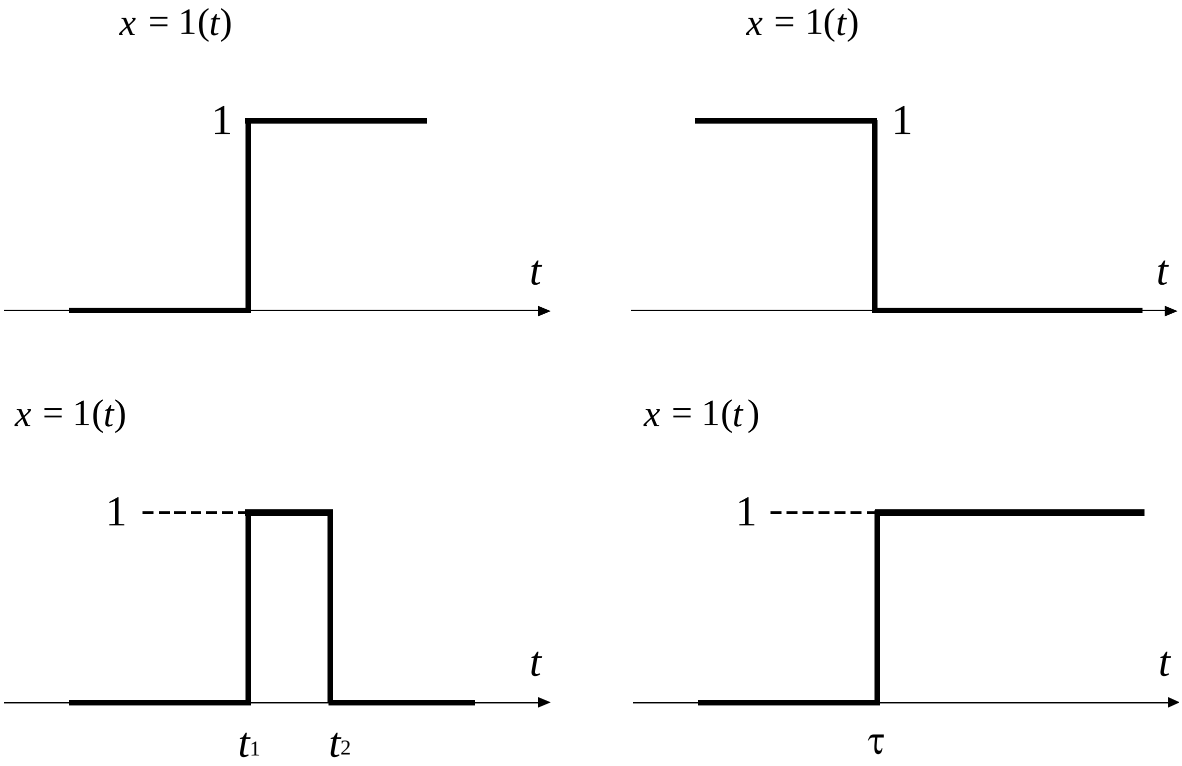


Рис. 8.1. Виды единичной ступенчатой функции

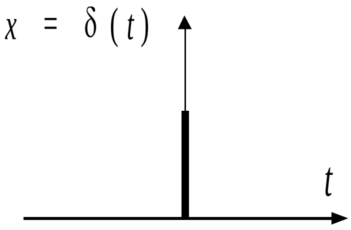


Рис. 8.2. Единичный импульс

В реальных САУ это удар в механической системе, ток короткого замыкания в электрической сети, скачки давления в гидросистеме и так далее, при этом длительность импульса весьма мала по сравнению с длительностью переходного процесса.

Единичный импульс $\delta(t)$ — импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю и амплитуде, равной бесконечности, т.е.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \ при \ t = 0 \\ 0, \ при \ t > 0, t < 0 \end{cases}.$$

Следует заметить, что δ(*t*) и единичная ступенчатая функция связаны соотношением $\delta(t)=\dfrac{d1(t)}{dt}$.

Аналитическое выражение для импульсной переходной характеристики — импульсная переходная функция или функция веса, обозначается *ω(t),* то есть *ω(t) = y(t)* при *x(t) = δ(t),* при этом

$$\omega(t)=h'(t)=\frac{dh}{dt}.$$

Следует также заметить, что между передаточной функцией звена и переходной характеристикой *h(t)* существует взаимосвязь

$$W(p)=p\cdot\int_{0}^{\infty}h(t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot dt,$$

а между *W(p)* и *ω(t)* $W(p)=p\cdot\int_{0}^{\infty}\omega(t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot dt$.

Графически процесс получения переходной характеристики представлен на рис. 8.3 а, а получение весовой функции — на рис. 8.3 б.

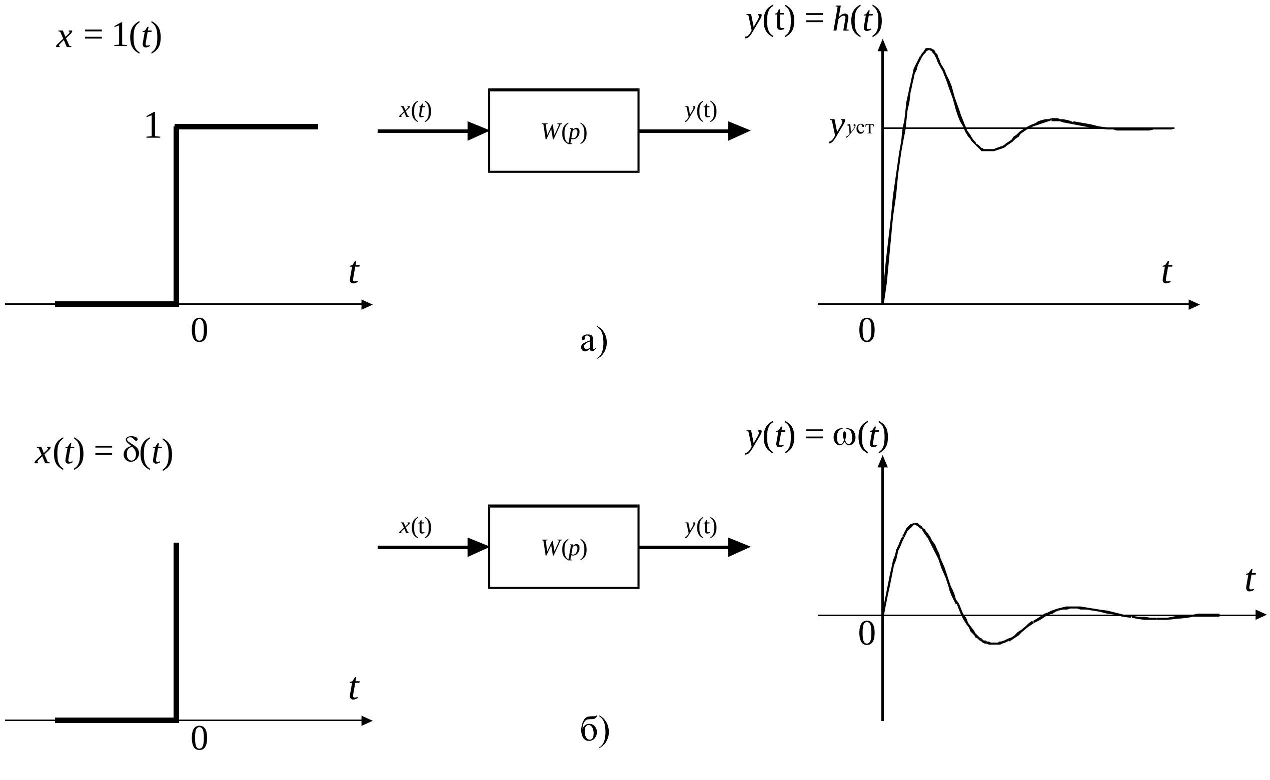


Рис. 8.3. Переходная и весовая характеристики звена

Переходные характеристики в основном бывают трёх видов (рис. 8.4): 1 — колебательная; 2 — апериодическая; 3 — монотонная.

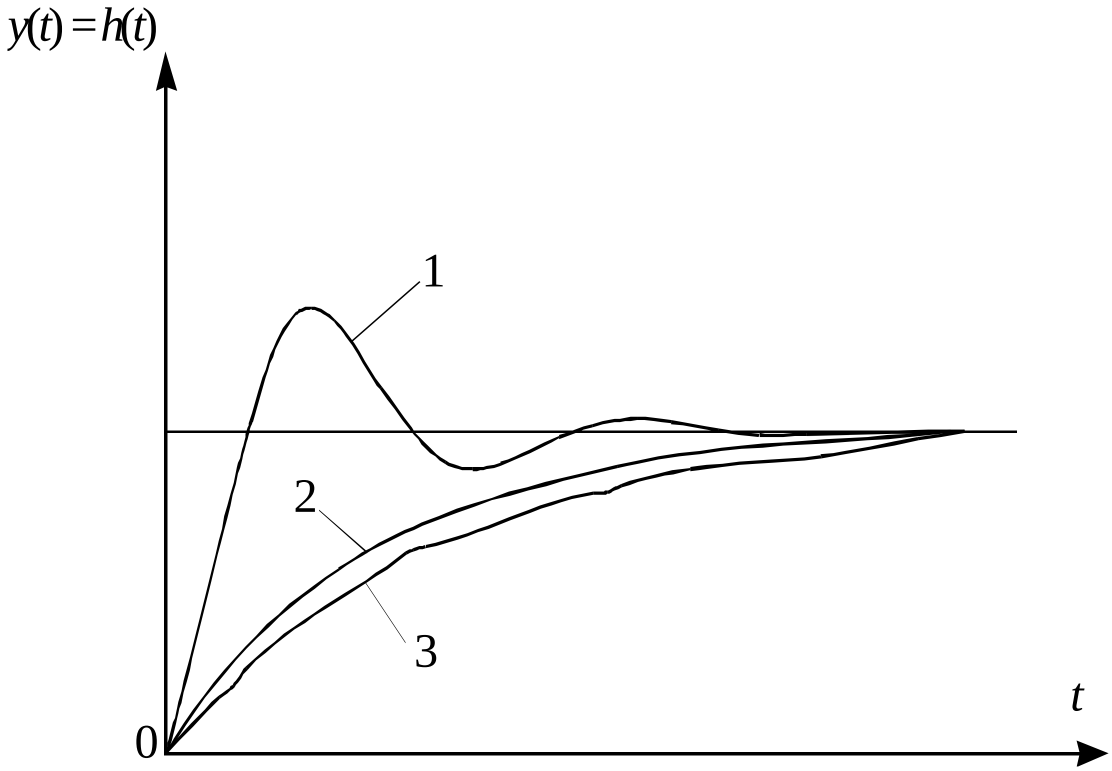


Рис. 8.4. Основные виды переходных характеристик

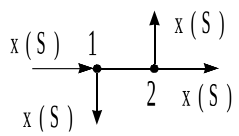
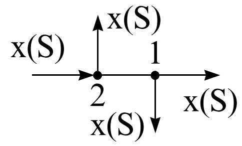
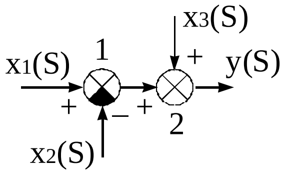
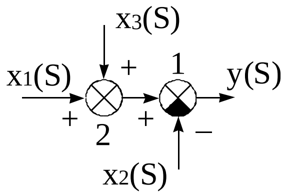
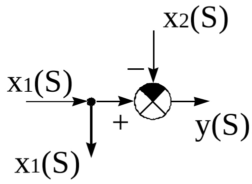
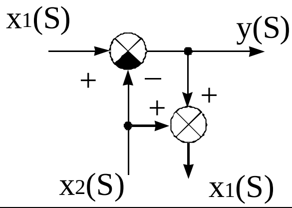
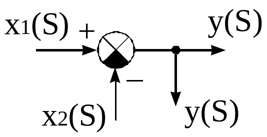
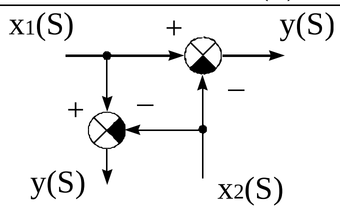
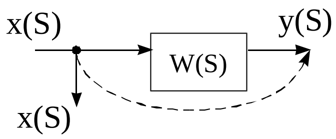
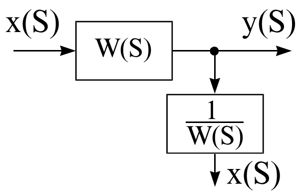
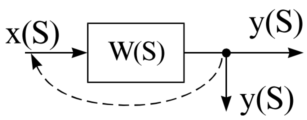
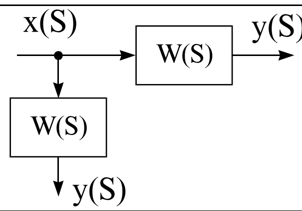
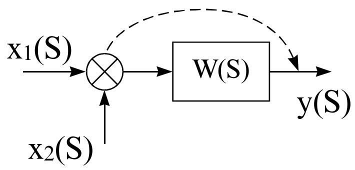
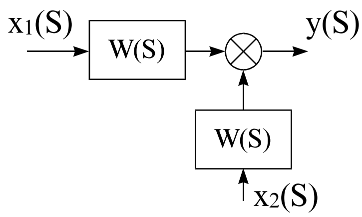
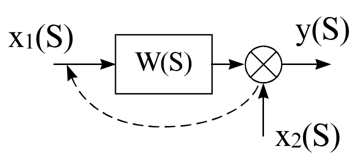
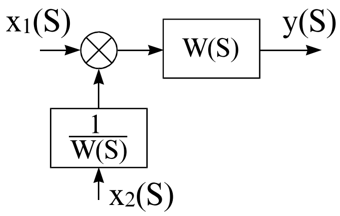
ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. — СПб.: Политехника, 1998. — 295 с.
2. Клюев А.С. Автоматическое регулирование. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Энергия, 1973. — 392 с.
3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для втузов.— 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1989. — 304 с.
4. Теория автоматического управления: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.С. Шаталова.— М.: Высшая школа, 1977.— 448 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. — М.: Высшая школа, 1975. — 410 с.
6. Справочник проектировщика АСУ ТП / Г. Л. Смилянский, Л.З. Амлинский, В.Я. Баранов и др.; Под ред. Г.Л. Смилянского. — М.: Машиностроение, 1983. — 527 с.
7. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. — 2-е изд. перераб. и доп. / Под ред. А.В. Нетушило. —М.: Высшая школа, 1976. — 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

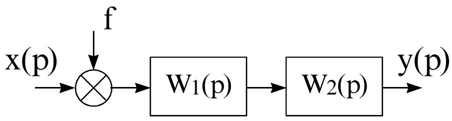
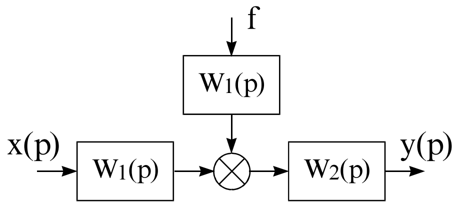
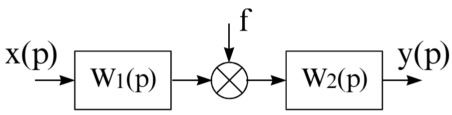
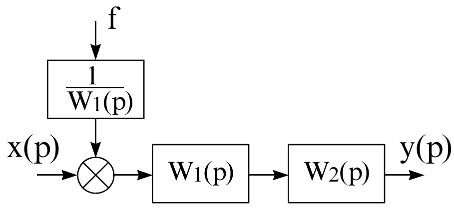
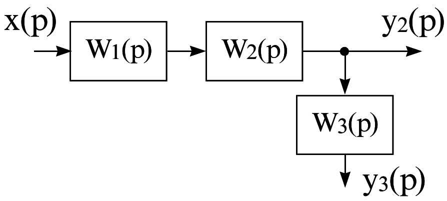
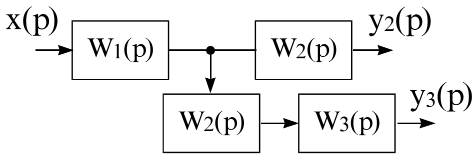
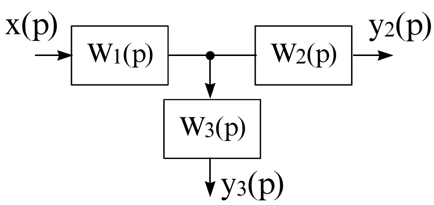
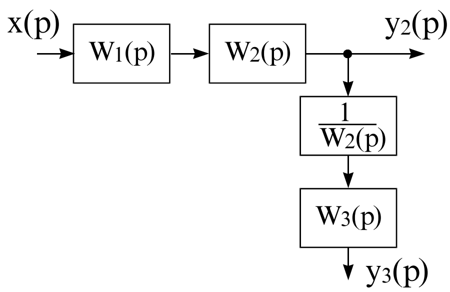
Приложение 1

Правила преобразования структурных схем

<table>
<tr><th>Операция при преобразовании</th><th>Исходная схема</th><th>Преобразованная схема</th></tr>
<tr><td>1. Перенос узла через узел</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Перенос сумматора через сумматор</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.Перенос узла через сумматор</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Перенос сумматора через узел</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Перенос узла через звено</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6. Перенос сумматора через звено</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Приложение 2

Дополнительные правила преобразования структурных схем

№	До преобразования	После преобразования
1		
2		
3		
4		

ОГЛАВЛЕНИЕ