Межотраслевая балансовая модель

Допустим, что материальное производство делится на *n* отраслей, каждая из которых производит один условно-однородный продукт.

В процессе производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей, т. е. выступает одновременно и как производитель и как потребитель. В результате статистического анализа было выявлено, что эта потребность прямо пропорциональна объему производства. Коэффициенты пропорциональности представляют собой удельные затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли – Aij. Они получили название коэффициентов прямых затрат, а вся их совокупность составляет матрицу коэффициентов прямых затрат.

Обозначим через Xi количество продукции, произведенной i-й отраслью, т.е. валовой выпуск продукции i-й отрасли. После вычета из него всех расходов на производство продукции i-й и других отраслей получим:

$$Y_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot X_j, \quad i = 1 \dots n$$

(15)

Величина Yi называется конечным продуктом. Выражение (15) называется соотношением баланса Леонтьева. В матричном виде модель Леонтьева многоотраслевой экономики имеет вид:

$$\overline{Y} = \overline{X} - A \cdot \overline{X},$$

(16)

где $\overline{X}$ - вектор валового выпуска (в масштабах государства это совокупный общественный продукт);

$\overline{Y}$ - вектор конечного производства (в масштабах государства это валовой национальный продукт).

Зная матрицу A, можно планировать экономику. Рассмотрим два случая использования уравнения Леонтьева.

1. Составить такой план валового производства продукции, чтобы в итоге был получен заданный объем конечного продукта каждого вида Yi.

Преобразуем уравнение (16):

$$\overline{Y} = E \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{X} \text{ или } \overline{Y} = (E - A) \cdot \overline{X}$$

следовательно:

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y}$$

(17)

Здесь E – единичная матрица, содержащая единицы в главной диагонали и нули в остальных элементах. Верхний индекс (–1) означает, что берется обратная матрица.

2. В первой задаче мы не учитывали никаких ограничений на производство и реализацию продукции. При наличии таких ограничений встает вопрос выбора наилучшего варианта плана валового производства. Необходимо оптимизировать производство так, чтобы обеспечить максимальную суммарную прибыль по всем отраслям.

Цену за единицу конечной продукции i-й отрасли обозначим через Ci. Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot Y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (X_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot X_j) \to \max$$

(18)

Система ограничений имеет вид:

а) ограничение производственной мощности:

$$X_i \le M_i$$

(19)

б) ограничение рыночного спроса на конечную продукцию:

$$Y_i \le S_i$$

(20)

в) неотрицательность конечного продукта (нельзя расходовать больше, чем произведено):

$$Y_i \ge 0$$

(21)

г) неотрицательность валового выпуска:

$$X_i \ge 0$$

(22)