

Міністерство науки та освіти України
Донбаська державна машинобудівна академія

С. О. Бабенко,
С. С. Красовський,
В. В. Хорошайло

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Краматорськ 2008

УДК 514. 18
ББК 22. 151. 3
Б 12

Рецензенти:

Кухтик Т.В., д-р техн. наук, професор, Донбаський інститут техніки і менеджменту Міжнародного технічного університету;

Пивоваров Л. В., д-р техн. наук, професор, Слов'янський державний університет;

Бойко В. Г., канд. техн. наук, доцент, Краматорський економіко-гуманітарний інститут.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18-Г-1083 від 14.05.2008)

Бабенко, С. О.

Б 12 Нарисна геометрія : навчальний посібник / С. О. Бабенко, С. С. Красовський, В. В. Хорошайло. – Краматорськ : ДДМА 2008. – 128 с.

ISBN 978-966-379-258-3.

У навчальному посібнику висвітлено основні теми згідно з навчальною програмою з нарисної геометрії при підготовці бакалаврів і додаткові теми для розв'язання різноманітних інженерних задач.

Для покращення засвоєння теоретичного матеріалу і закріплення вміння та навичок із нарисної геометрії наведено практичні приклади.

УДК 514.18
ББК 22.151.3

ISBN 978-966-379-258-3

© С. О. Бабенко, С. С. Красовський,
В. В. Хорошайло, 2008
© ДГМА, 2008

ЗМІСТ

Умовні позначення.....	5
1 Метод проєкціювання.....	6
1.1 Центральне проєкціювання.....	6
1.2 Паралельне проєкціювання. Основні властивості.....	6
1.3 Проєкціювання на дві площини проєкцій.....	8
1.4 Проєкціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій.....	10
2 Проєкціювання відрізка прямої лінії.....	12
2.1 Розташування відрізка прямої відносно площин проєкцій.....	12
2.2 Правило прямокутного трикутника.....	17
2.3 Взаємне розташування прямих.....	18
2.4 Проєкціювання прямого кута.....	21
2.5 Точка на прямій. Сліди прямої.....	24
3 Площина.....	26
3.1 Задання площини на комплексному кресленні.....	26
3.2 Положення площини відносно площин проєкцій.....	28
3.3 Належність точки і прямої площині.....	36
3.4 Головні лінії площини.....	38
3.5 Паралельність площин.....	42
3.6 Перетин площин.....	44
3.7 Паралельність прямої і площини.....	48
3.8 Перетин прямої і площини.....	49
3.9 Перпендикулярність прямої і площини.....	54
3.10 Перпендикулярність прямих загального положення.....	56
3.11 Перпендикулярність площин.....	57
4 Методи перетворення ортогональних проєкцій.....	60
4.1 Метод заміни площин проєкцій.....	60
4.2 Обертання навколо проєкціювальних осей.....	65
4.3 Метод плоскопаралельного переміщення.....	66
4.4 Метод обертання навколо прямих рівня.....	66
4.5 Метод обертання навколо сліду площини.....	68
5 Грані поверхні.....	72
5.1 Переріз гранних поверхонь площиною.....	78
5.2 Побудова точок перетину лінії з поверхнею.....	81
5.3 Розгортки гранних поверхонь.....	83
5.4 Побудова лінії взаємного перетину гранних поверхонь.....	88

6	Криві поверхні.....	93
6.1	Переріз кривих поверхонь площиною.....	101
6.2	Побудова точок перетину лінії з поверхнею.....	106
6.3	Площина, дотична до поверхні.....	109
6.4	Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь.....	112
7	АксонOMETричні проєкції.....	118
7.1	Прямокутна ізометрія.....	119
7.2	Прямокутна диметрія.....	122
7.3	Косокутна фронтальна симетрія.....	124
	Список додаткової літератури.....	127

Умовні позначення

$A, B, C, D, \dots 1, 2, 3, 4, \dots$ – точки;

$a, b, c, d \dots$ – прямі та криві лінії;

h – горизонталь;

f – фронталь;

p – профільна пряма;

$\theta, \Lambda, \Sigma, \Gamma, \Phi$ – поверхні (площини);

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ – кути;

Π_1 – горизонтальна площина проєкцій;

Π_2 – фронтальна площина проєкцій;

Π_3 – профільна площина проєкцій;

$A \in \Phi$ – точка A належить фігурі Φ ;

$A \notin \Phi$ – точка A не належить фігурі Φ ;

$\Phi_k \equiv \Phi_i$ – фігури Φ_k та Φ_i збігаються;

$\Phi_k \cup \Phi_i$ – об'єднання фігур Φ_k та Φ_i ;

$\Phi_k \cap \Phi_i$ – перетин фігур Φ_k та Φ_i ;

\supset – проходить через ...;

\subset – лежить на ...;

\Rightarrow – логічний наслідок;

\parallel – паралельно;

\perp – перпендикулярно;

\sphericalangle – плоский або двогранний кут;

x, y, z – осі проєкцій. Індокси при x, y, z означають відповідно площини проєкцій. Наприклад, вісь x_{12} означає, що вісь x поділяє поле горизонтальних проєкцій (індекс 1) і поле фронтальних проєкцій (індекс 2). Позначення проєкцій фігур таке саме, як і написання відповідного індексу.

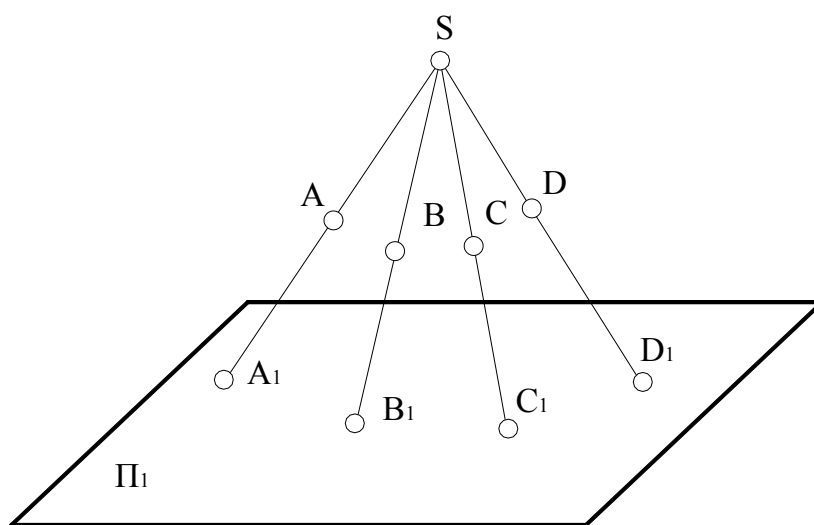
1 МЕТОД ПРОЕКЦІЮВАННЯ

В основі побудови зображень, які розглядаються в нарисній геометрії та застосовуються в технічному кресленні, лежить метод проєкціювання.

Апарат проєкціювання включає в себе проєкціювальні промені і площину проєкцій.

1.1 Центральне проєкціювання

Якщо всі промені, що проєкціюють об'єкт, виходять з однієї точки, званої центром, то таке проєкціювання називається *центральним* (рис. 1.1).



A, B, C, D – об'єкти проєкціювання;
S – центр проєкцій;
П₁ – площина проєкцій;
A₁, B₁, C₁, D₁ – проєкції точок на площині П₁

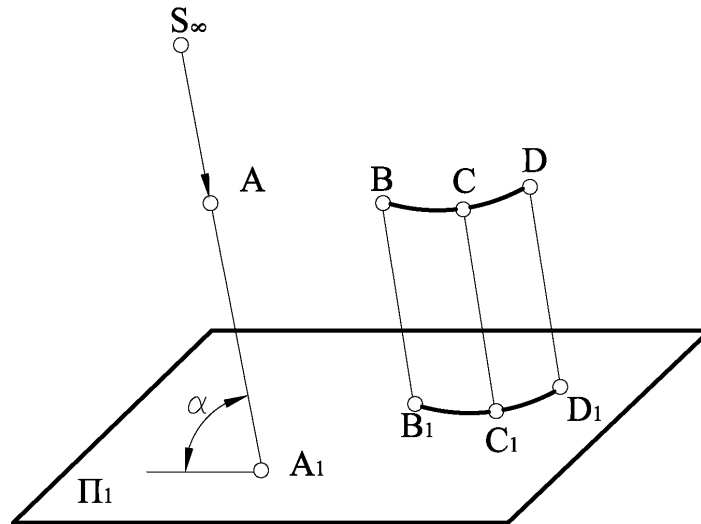
Рисунок 1.1

Проєкціями заданих точок A, B, C, D є точки перетину проєкціювальних променів, що проходять через відповідні точки, з площиною проєкцій.

Центральне проєкціювання застосовується для наочного зображення предметів, але для технічного креслення не застосовується.

1.2 Паралельне проєкціювання. Основні властивості

Якщо центр проєкцій помістити у нескінченність, то всі проєкціювальні промені стають паралельними, таке проєкціювання називається *паралельним* (рис. 1.2).



A, B, C, D – об'єкти проєкціювання;
 S_{∞} – заданий напрямок проєкціювання;
 Π_1 – площина проєкцій;
 A_1, B_1, C_1, D_1 – проєкції точок A, B, C, D ;
 α – кут нахилу проєкціювальних променів відносно площини проєкцій Π_1

Рисунок 1.2

Якщо напрямок проєкціювання є перпендикуляром до площини проєкцій, то таке проєкціювання називається **прямокутним** або **ортогональним**, в інших випадках проєкціювання називається **косокутним**.

Паралельне прямокутне проєкціювання є основою нарисної геометрії та технічного креслення.

Проєкцією точки є точка перетину проєкціювального променя, що проходить через неї, з площиною проєкцій.

Проєкцією прямої в загальному випадку є пряма. Якщо задано проєкції хоча б двох точок прямої, то можна визначити проєкцію всієї прямої (рис. 1.3).

Якщо пряма паралельна площині проєкцій, то її проєкція паралельна цій прямій (рис. 1.4).

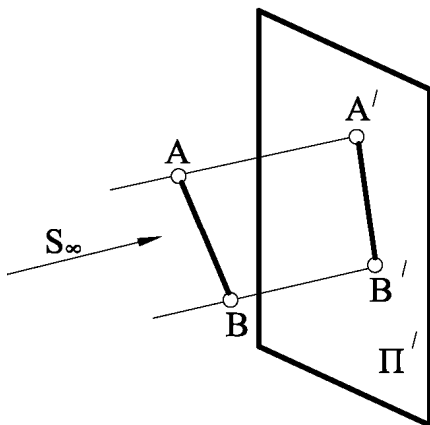


Рисунок 1.3

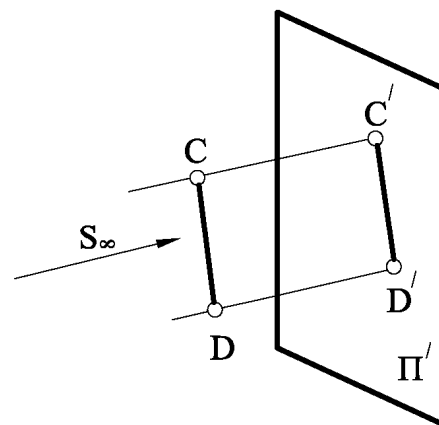
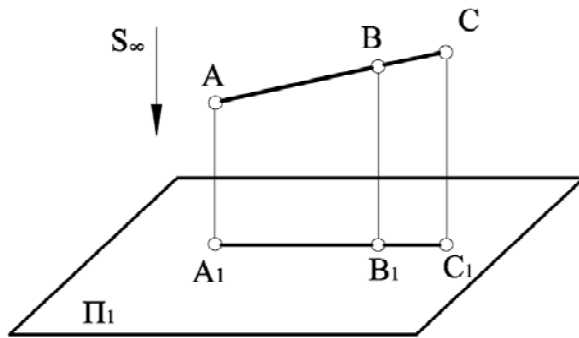


Рисунок 1.4

Якщо на відрізку прямої задати точку, що лежить між даними точками, то довжини відрізків проєкцій будуть пропорційними до заданих (рис. 1.5).



$$|AB| : |BC| = |A_1B_1| : |B_1C_1|$$

Рисунок 1.5

Плоска фігура, яка паралельна площині проєкцій, проєкціюється на цю площину в натуральному вигляді. Недоліком проєкціювання об'єктів на одну площину є необоротність креслення, за однією проєкцією не можна визначити ні форму об'єкта, ні його положення в просторі.

1.3 Проєкціювання на дві площини проєкцій

Для отримання оборотного креслення будують комплексне креслення об'єкта не менше як на дві площини проєкцій.

Метод побудови комплексного креслення на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій узагальнив і обґрунтував Гаспар Монж.

За цим методом площини Π_1 і Π_2 взаємно перпендикулярні, а центри проєкціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному площинам проєкцій. Сукупність кількох зв'язаних між собою проєкцій фігури (мінімум двох) називають **системою прямокутних (ортогональних) проєкцій**.

Точку А в просторі ортогонально проєкціюють на обидві площини проєкцій:

$$AA_1 \perp \Pi_1; AA_1 \cap \Pi_1 = A_1;$$

$$AA_2 \perp \Pi_2; AA_2 \cap \Pi_2 = A_2.$$

Проєкціювальні промені AA_1 і AA_2 взаємно перпендикулярні і створюють в просторі проєкціювальну площину $A_1A_xA_2$, перпендикулярну обом площинам проєкцій. Ця площина перетинає площини проєкцій по лініях, які проходять через проєкції точки А (рис. 1.6).

Щоб отримати плоске креслення, сумістимо горизонтальну площину проєкцій Π_1 з фронтальною площиною Π_2 обертанням навколо осі Π_2/Π_1 (рис. 1.7). Тоді обидві проєкції точки виявляються на одній лінії, перпендикулярній осі Π_2/Π_1 . Пряма, що з'єднує горизонтальну A_1 і фронтальну A_2 проєкції точки, називається **вертикальною лінією зв'язку**.

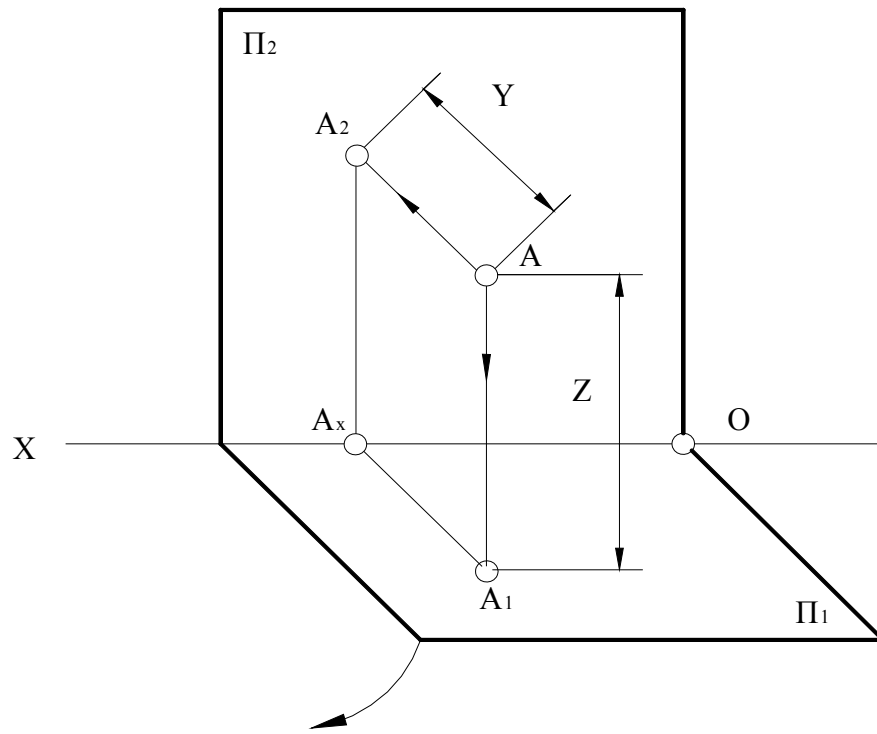


Рисунок 1.6

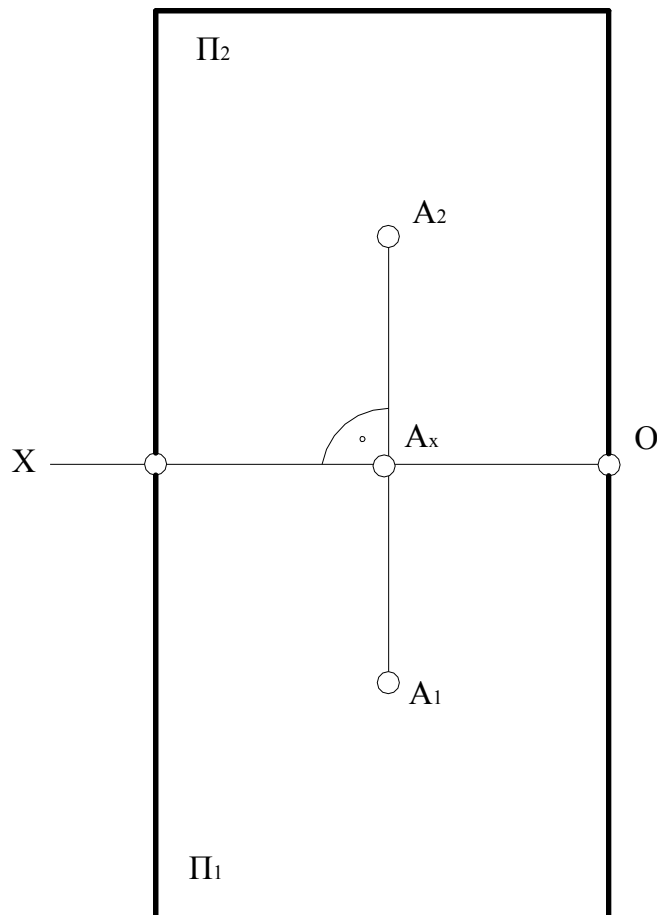


Рисунок 1.7

Дві пов'язані між собою ортогональні проекції точки однозначно визначають її положення відносно площин проекцій.

Якщо визначити положення точки A відносно цих площин (рис. 1.6) її висотою $AA_1 = z$ і глибиною $AA_2 = y$, то ці величини на комплексному кресленні існують як відрізки вертикальної лінії зв'язку (рис. 1.8). Ця обставина дозволяє легко реконструювати креслення, тобто визначити за кресленням положення точки відносно площин проєкцій.

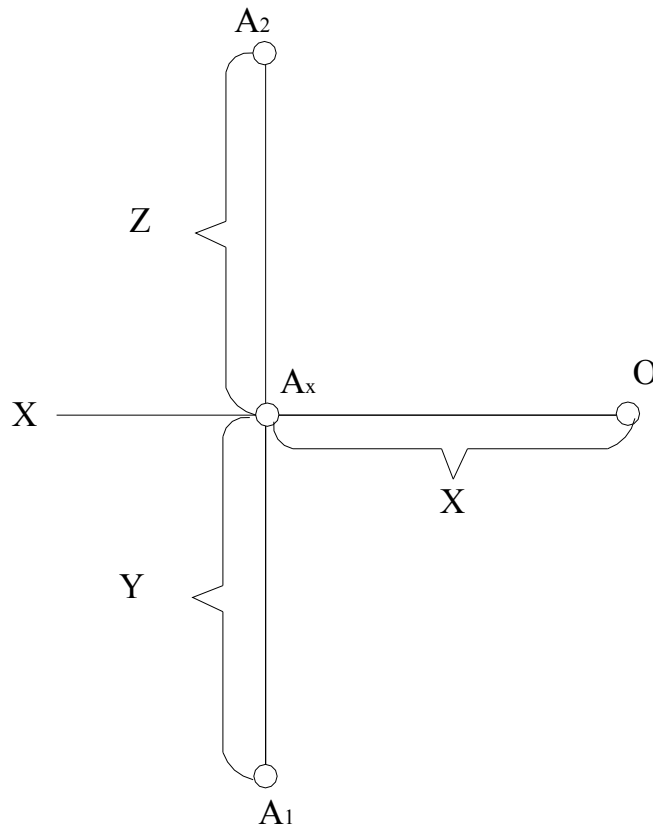


Рисунок 1.8

1.4 Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій

У залежності від складності фігури може виникнути необхідність у побудові ще одного зображення предмета на третій профільній площині проєкції Π_3 . Цю площину розташовують праворуч від спостерігача перпендикулярно одночасно горизонтальній Π_1 і фронтальній Π_2 площинам проєкцій (рис. 1.9).

Лінія перетину площин Π_2 і Π_3 – нова вісь Π_2/Π_3 , яка розташовується на плоскому кресленні (рис. 1.10) паралельно вертикальній лінії зв'язку A_1A_2 . Третя проєкція точки A_3 – профільна, виявляється пов'язаною з фронтальною проєкцією A_2 новою лінією зв'язку – горизонтальною. Причому $A_2A_3 \perp A_2A_1$ і $A_2A_3 \perp \Pi_2/\Pi_3$. Оскільки глибина точки AA_2 проєкціюється без спотворень і на площину Π_1 і на площину Π_3 (рис. 1.9), то ця обставина дозволяє побудувати профільну проєкцію точки за її горизонтальною і фронтальною проєкціями (рис. 1.10).

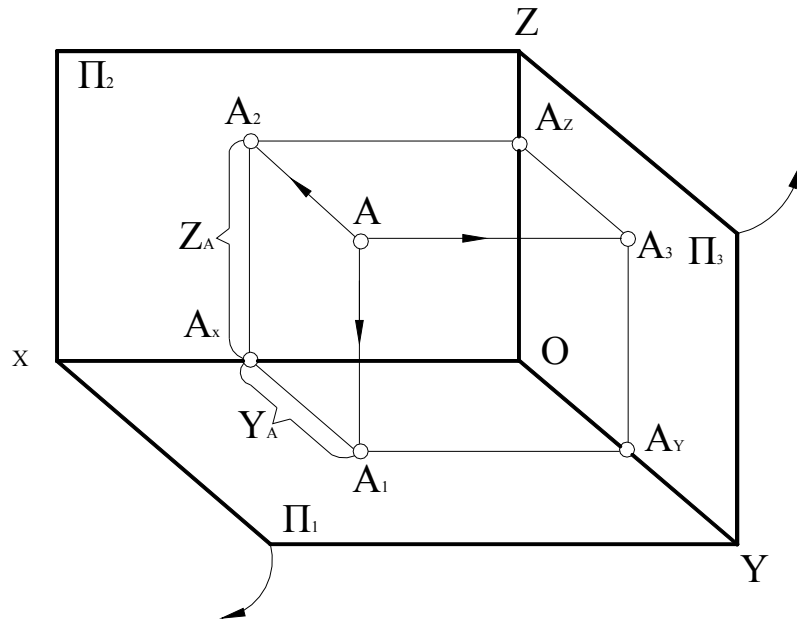


Рисунок 1.9

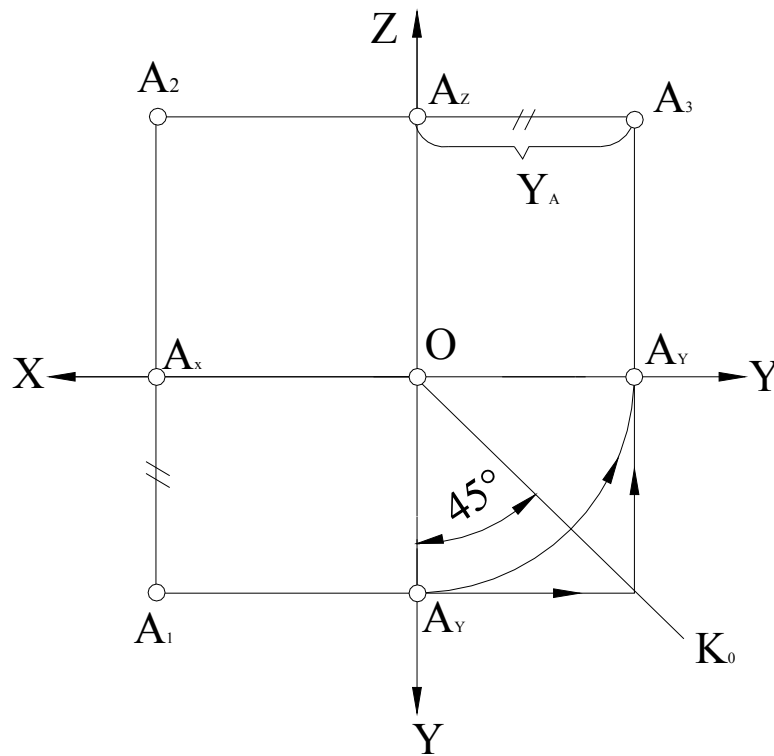


Рисунок 1.10

Через фронтальну проекцію проводять горизонтальну лінію зв'язку перпендикулярно осі Z і від осі відміряють координату Y_a (відрізок $A_x A_1$).

Цю побудову можна виконати з допомогою дуги кола, проведеного із центра O , або з допомогою прямої, проведеної під кутом 45° до осі Y .

2 ПРОЕКЦЮВАННЯ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

2.1 Розташування відрізка прямої відносно площин проекцій

Відомо, що пряма лінія в просторі визначається положенням двох її точок. Таким чином, досить виконати комплексне креслення цих двох точок, а потім з'єднати однойменні проекції точок прямими лініями, отримаємо відповідно горизонтальну, фронтальну і профільну проекції прямої.

Відносно площин проекцій пряма може займати різні положення. Прямі, паралельні одній із площин проекцій, називають **прямими рівня**.

Назва їх залежить від того, якій площині вони паралельні. Пряму, паралельну горизонтальній площині проекцій, називають **горизонталлю** і позначають на кресленнях через h (рис. 2.1) $h_2 \parallel X$, $|A_1B_1| = |AB|$, β – кут нахилу прямої АВ до площини Π_2 .

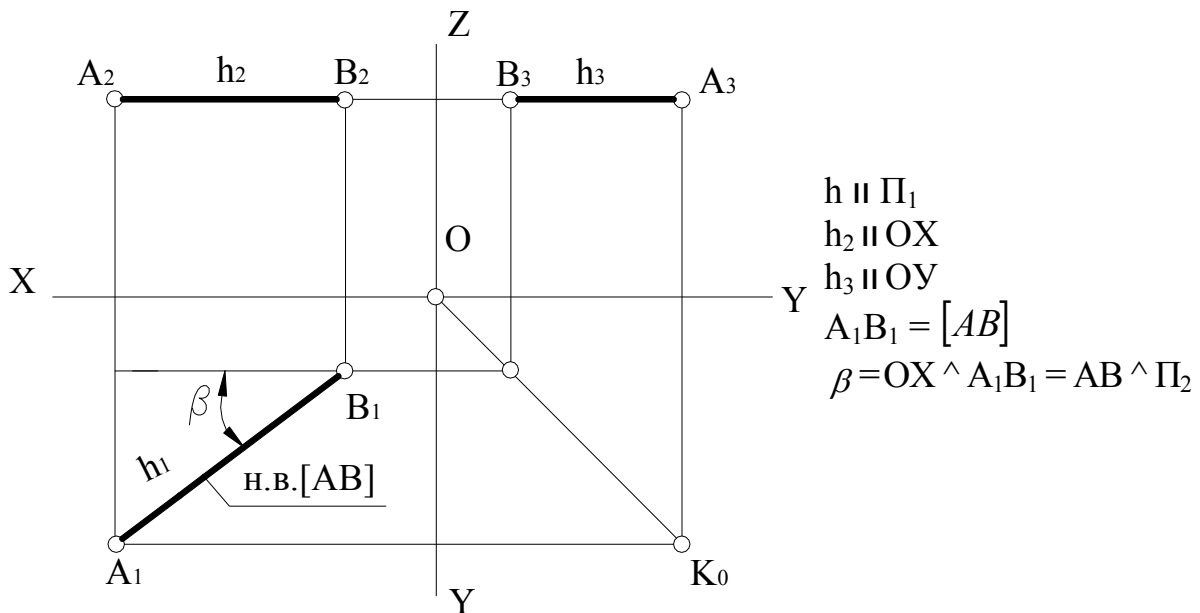


Рисунок 2.1

Пряму, паралельну фронтальній площині проекцій, називають **фронталлю** і позначають через f (рис. 2.2.).

$f_1 \parallel X$, $|C_2D_2| = |CD|$, α – кут нахилу прямої CD до площини Π_1 .

Пряму, паралельну профільній площині проекцій, називають **профільною прямою** і позначають через p (рис. 2.3).

$p_2 \perp X$, $p_1 \perp X$, $|E_3F_3| = |EF|$, α та β – кути нахилу прямої EF до площин Π_1 та Π_2 .

Прямі, перпендикулярні одній із площин проекцій, називаються **проеціювальними**, при цьому вони одночасно паралельні двом іншим площинам проекцій. У проєціювальних прямих одна проєкція вироджується в точку, а дві інші проєкції паралельні самій прямій і збігаються з напрямом лінії зв'язку.

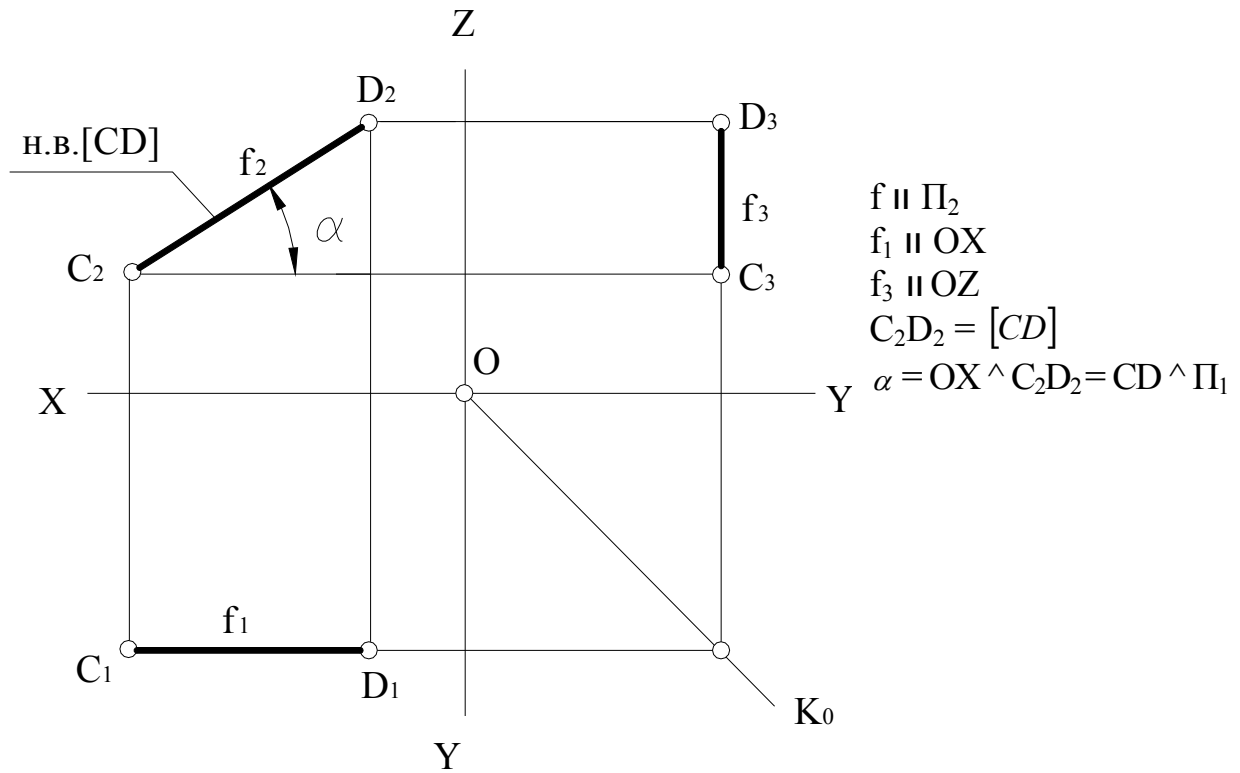


Рисунок 2.2

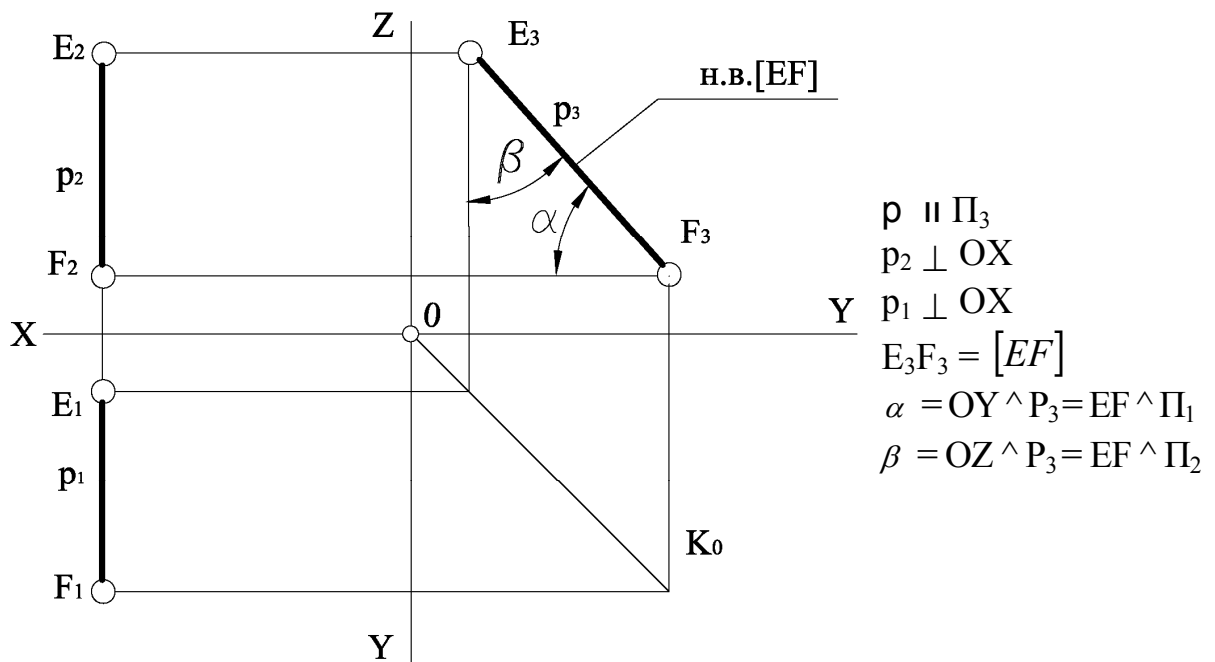


Рисунок 2.3

Пряму, перпендикулярну горизонтальній площині проекції Π_1 і одночасно паралельну фронтальній Π_2 і профільній Π_3 площинам проекцій, називають **горизонтально проєкціовальною** (рис. 2.4).

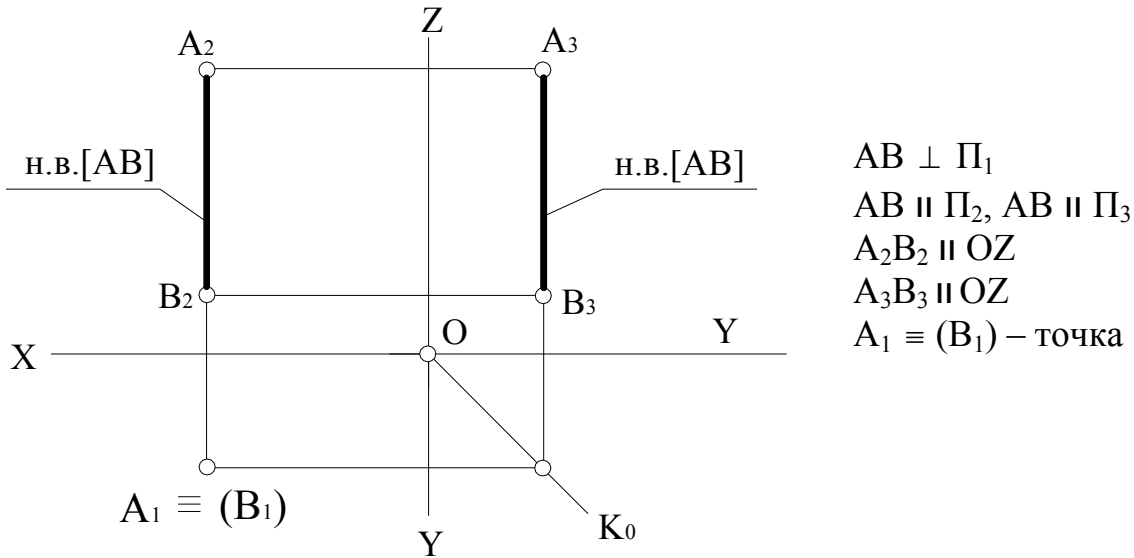


Рисунок 2.4

Пряму, перпендикулярну фронтальній площині проєкцій Π_2 і одночасно паралельну горизонтальній Π_1 та профільній Π_3 площинам проєкцій, називають **фронтально проєкціювальною** (рис. 2.5).

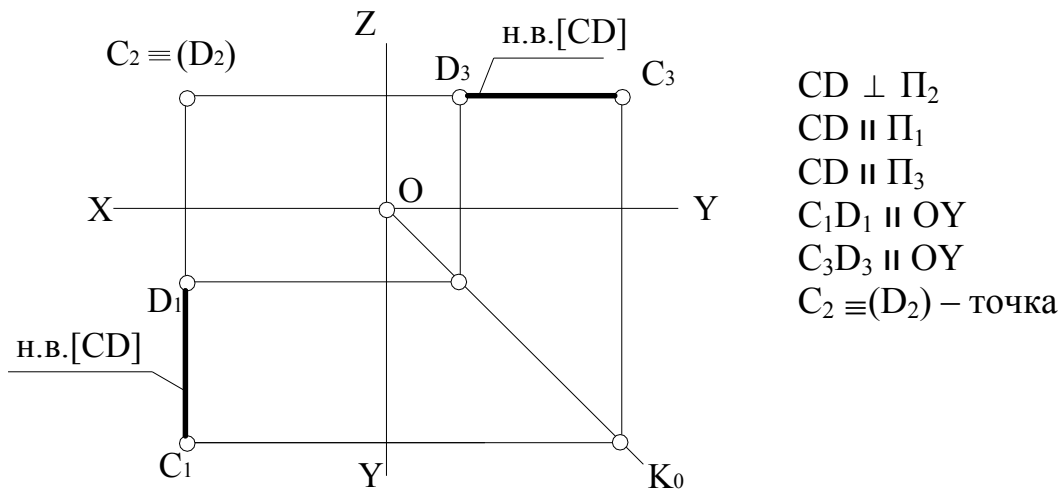


Рисунок 2.5

Пряму перпендикулярну профільній площині проєкцій Π_3 і одночасно паралельну горизонтальній Π_1 та фронтальній Π_2 площинам проєкцій, називають **профільно проєкціювальною** (рис. 2.6)

Пряму, яка не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проєкцій, називають **прямою загального положення**. Приклад такої прямої наведено на рис. 2.7. Відрізок $[AB]$ прямої на жодну із площин проєкцій не відображається в натуральну величину, тобто $[A_1B_1] < [AB]$, $[A_2B_2] < [AB]$, $[A_3B_3] < [AB]$. Пряма загального положення має різні кути нахилу до площин проєкцій. Під кутом нахилу прямої до площини проєкцій розуміють такий кут, який утворюється між самою прямою та її відповідною проєкцією.

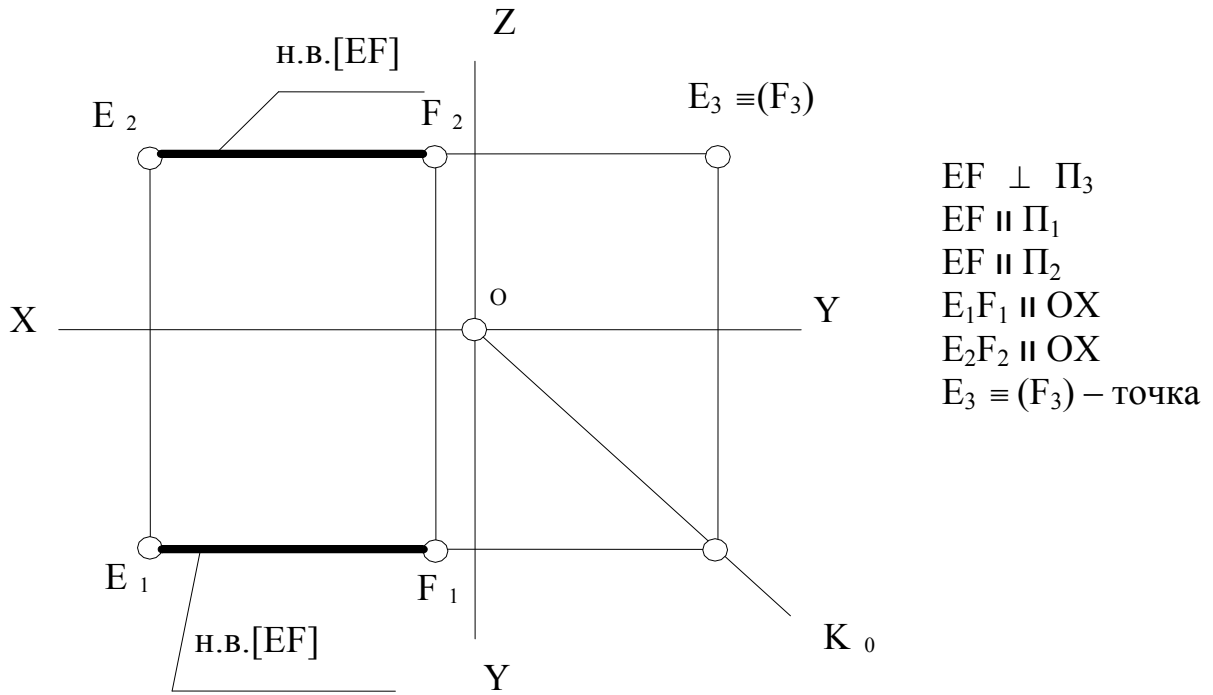


Рисунок 2.6

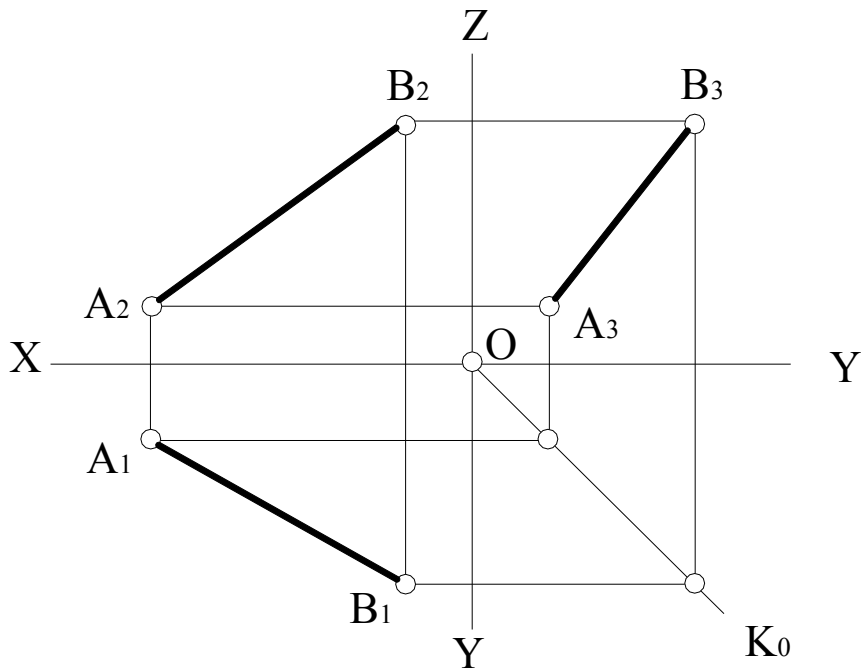
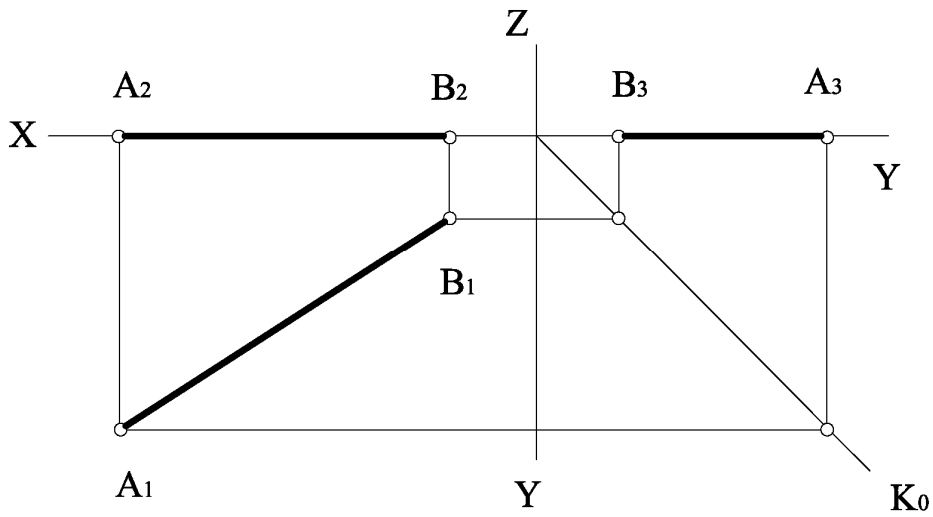


Рисунок 2.7

Пряма може належати одній із площин проєкцій. На рис. 2.8 наведено приклад прямої АВ, що належить горизонтальній площині проєкцій Π_1 .

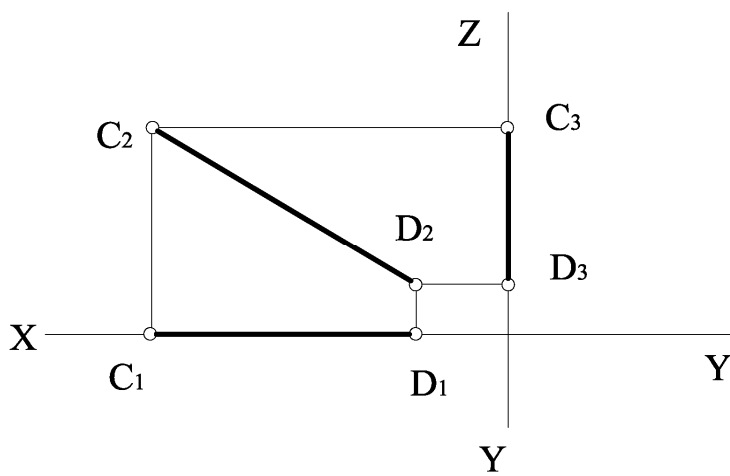
На рис. 2.9 наведено приклад прямої CD, що належить фронтальній площині проєкцій Π_2 .

На рис. 2.10 наведено приклад прямої EF, що належить профільній площині проєкцій Π_3 .



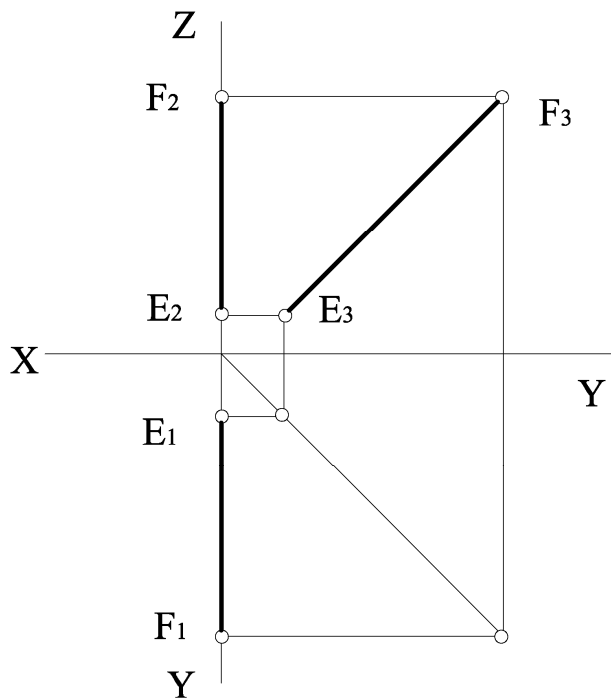
$AB \in \Pi_1$

Рисунок 2.8



$CD \in \Pi_2$

Рисунок 2.9



$EF \in \Pi_3$

Рисунок 2.10

2.2 Правило прямокутного трикутника

Для прямої загального положення виникає потреба у визначенні натуральної величини відрізка та кутів нахилу до площин проекцій. Розглянемо рис. 2.11, з якого випливає правило прямокутного трикутника.

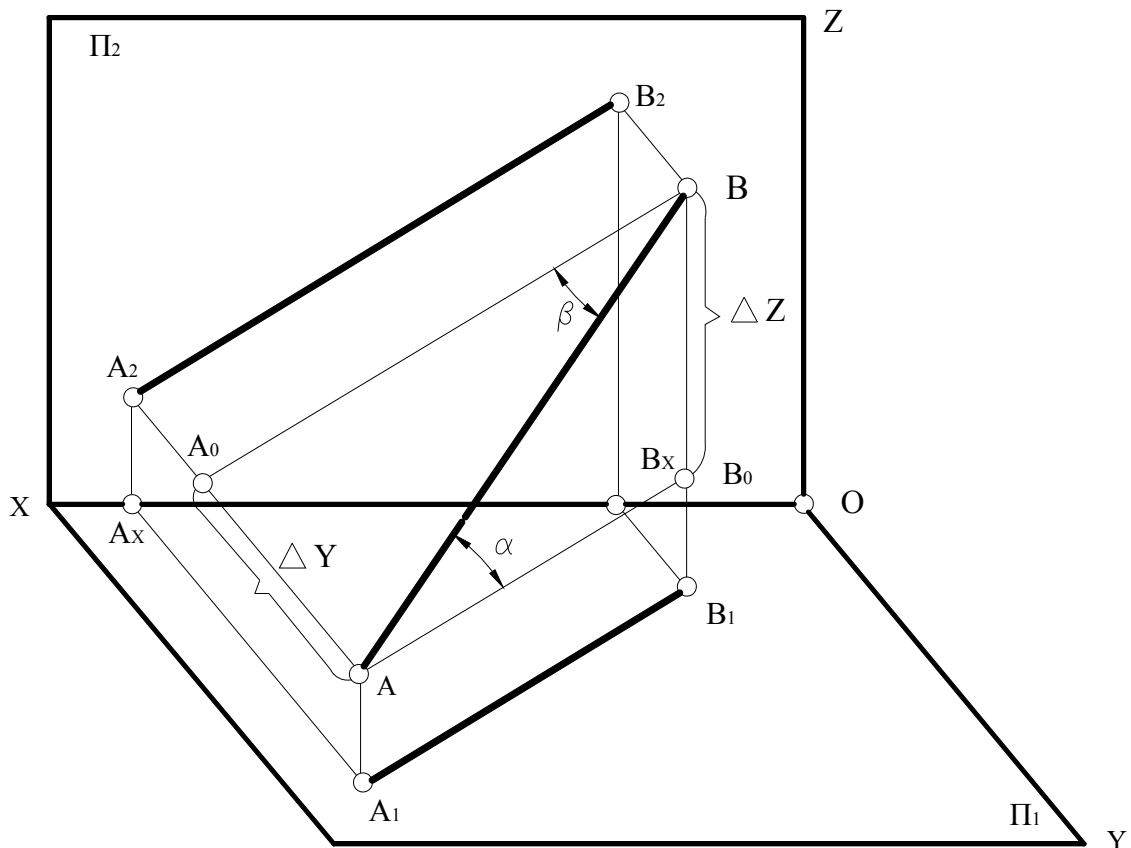


Рисунок 2.11

Візьмемо відрізок AB і побудуємо його ортогональну проекцію на горизонтальну і фронтальну площини проекцій. Дістанемо два прямокутних трикутники ΔAB_0V і ΔAA_0V , у яких $[AB]$ – гіпотенуза є натуральною величиною, $\alpha = \angle BAV_0$ – кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій Π_1 , $\beta = \angle ABA_0$ – кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій Π_2 . Для трикутника ΔAB_0V катет AB_0 дорівнює величині горизонтальної проекції A_1B_1 відрізка $[AB]$, другий катет VB_0 дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка (точки A і B) до горизонтальної площини проекцій, тобто ΔZ .

Аналогічні висновки випливають також з розгляду трикутника ΔAA_0V .

Для визначення натуральної величини відрізка прямої та кута нахилу прямої до певної площини проекції потрібно на комплексному кресленні (рис. 2.12) побудувати прямокутний трикутник на тій площині проекцій,

відносно якої визначається кут нахилу прямої, тоді натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція відрізка на тій площині проєкцій, а другим катетом є різниця відстаней від кінців відрізків до тієї ж площини проєкцій, а кут між відповідною проєкцією цього відрізка та його гіпотенузою дорівнює куту нахилу прямої до цієї площини проєкцій.

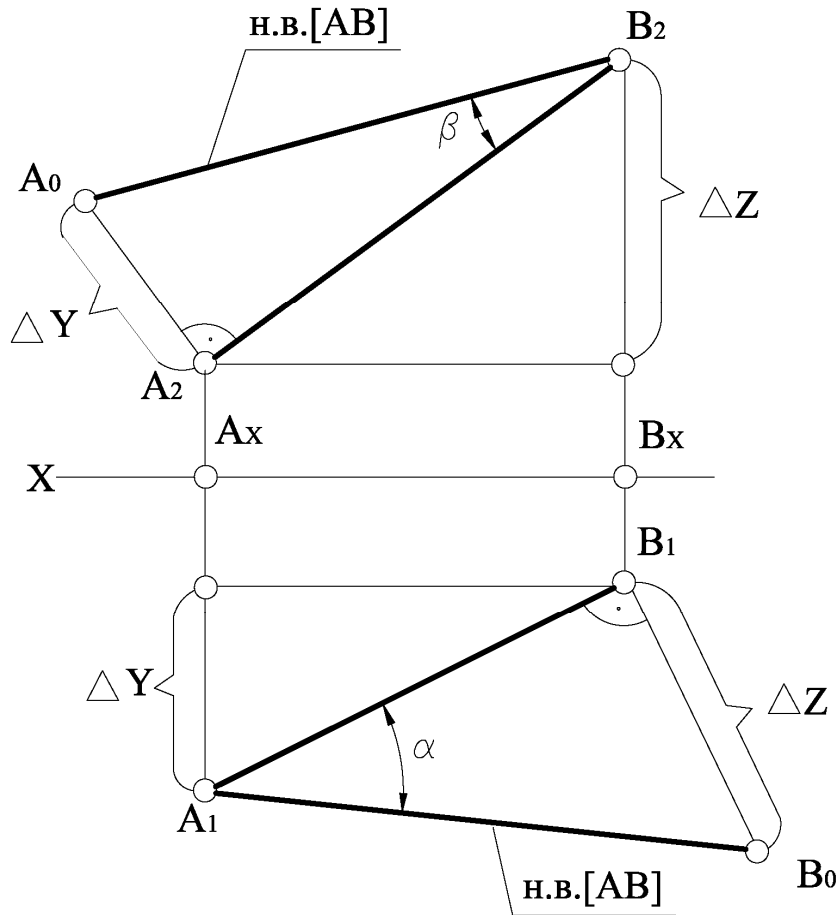


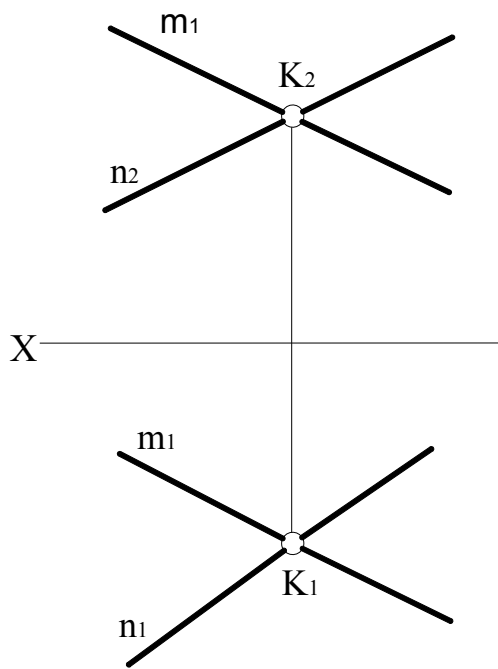
Рисунок 2.12

2.3 Взаємне розташування прямих

Дві прямі в просторі можуть співпадати ($a \equiv b$), бути паралельними ($c \parallel d$), перетинними ($m \cap n$), перехресними $\left(k \overset{\cdot}{-} \ell \right)$.

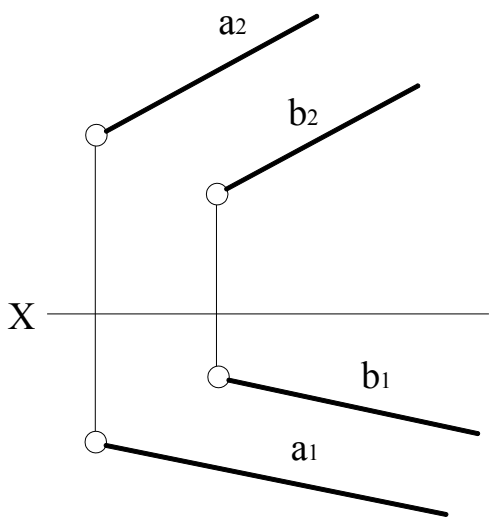
Якщо дві прямі перетинаються в деякій точці K , то проєкції цієї точки повинні належати однойменним проєкціям прямих, тобто точки перетину однойменних проєкцій перетинних прямих повинні лежати на одній лінії зв'язку (рис. 2.13).

Якщо дві прямі паралельні, то на комплексному кресленні їхні однойменні проєкції паралельні (рис. 2.14) або збігаються на одній із площин проєкцій (рис. 2.15).



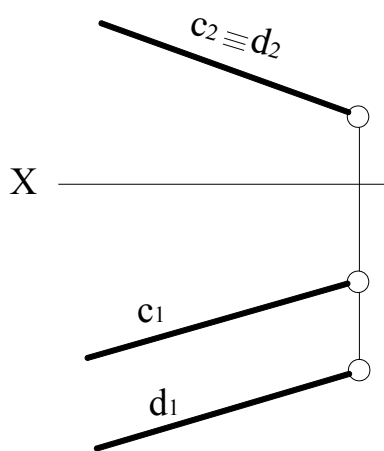
$$m \cap n = K \begin{cases} m_1 \cap n_1 \\ m_2 \cap n_2 \end{cases}$$

Рисунок 2.13



$$a \parallel b \begin{cases} a_2 \parallel b_2 \\ a_1 \parallel b_1 \end{cases}$$

Рисунок 2.14



$$c \parallel d \begin{cases} c_2 \equiv d_2 \\ c_1 \parallel d_1 \end{cases}$$

Рисунок 2.15

Якщо прямі паралельні одній з площин проєкцій, то їх паралельність визначається на площині, якій прямі паралельні. У наведених нижче прикладах (рис. 2.16, рис. 2.17) прямі АВ та CD паралельні профільній площині проєкцій, таким чином, їх взаємопаралельність визначається на площині Π_3 . На рис. 2.16 АВ та CD паралельні між собою, а на рисунку 2.17 – не паралельні.

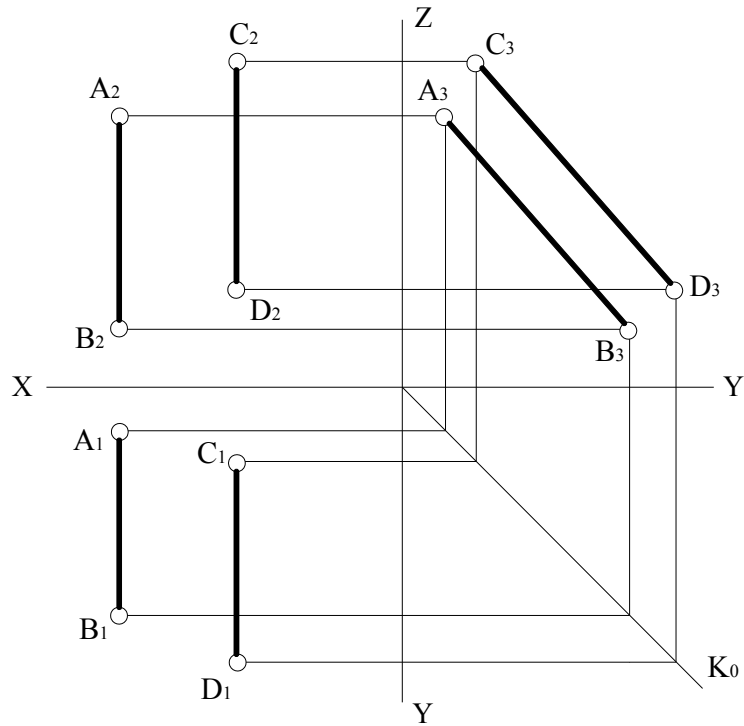


Рисунок 2.16

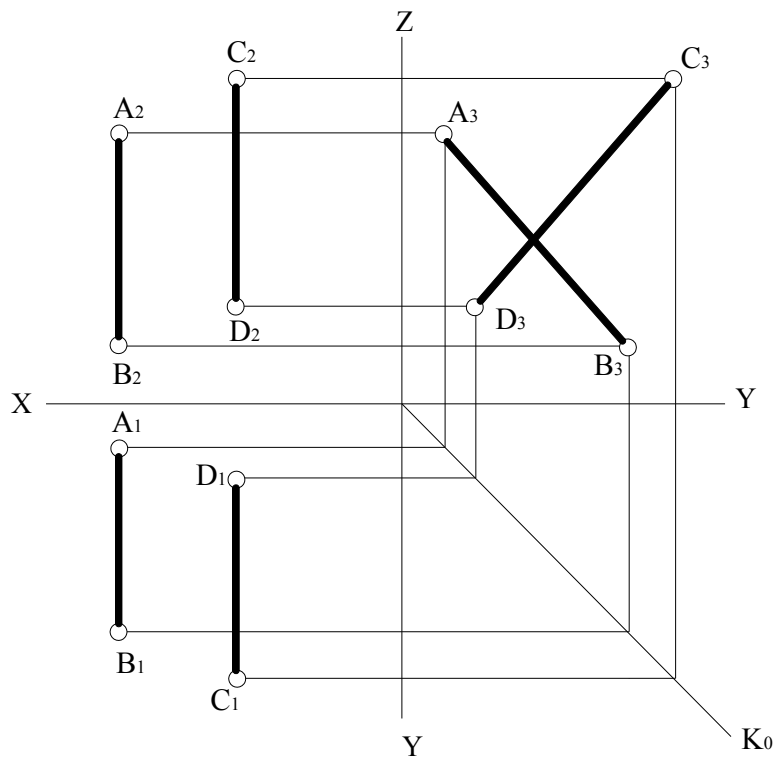


Рисунок 2.17

Якщо дві прямі спільних точок не мають і вони не паралельні, то їх називають *перехресними*.

На рис. 2.18 зображено дві перехресні прямі m і n . Фронтальні проєкції їх перетинаються в точці $3_2 \equiv (4_2)$, а горизонтальні – у точці $1_1 \equiv (2_1)$. Для визначення «перекривання» відрізків на проєкціях застосовують конкуруючі точки, які лежать на одному проєкціювальному промені, належать різним прямим і на одній площині проєкцій збігаються.

На рис. 2.18 дві пари конкуруючих точок 1 і 2 відносно поля Π_1 та 3 і 4 відносно поля Π_2 . При цьому точки 1 і 4 належать відрізку m , а точки 2 і 3 – відрізку n . Оскільки точка 1 розміщена вище від точки 2 на полі Π_1 , то відрізок m «перекриває» відрізок n , невидиму проєкцію точки 2_1 беруть у дужки.

Точка 3 лежить ближче до спостерігача, ніж точка 4, тому на полі Π_2 відрізок n «перекриває» відрізок m , невидиму проєкцію точки 4_2 беруть у дужки.

На рис. 2.19 зображені дві мимобіжні прямі a і b . Фронтальні проєкції їх перетинаються в точці $1_2 \equiv (2_2)$, а на горизонтальній площині проєкцій видно, що точка 1_1 належить a_1 , а точка 2_1 належить b_1 .

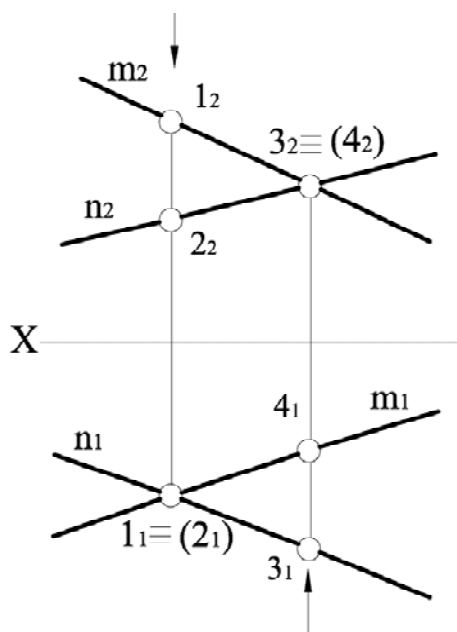


Рисунок 2.18

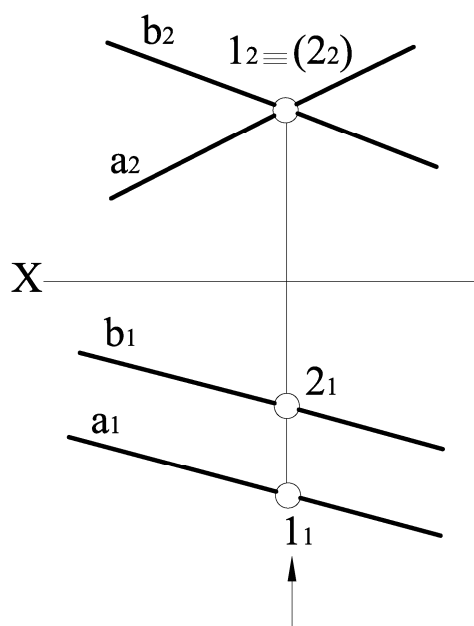


Рисунок 2.19

2.4 Проекціювання прямого кута

Якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга їй не перпендикулярна, то при ортогональному проєкціюванні прямий кут проєкціюється на цю площину проєкцій без спотворень.

На рис. 2.20 зображено прямий кут ABC , у якого сторона AB паралельна площині Π_1 . Проекційвальна площина $\Sigma(BCC_1V_1)$ перпендикулярна площині Π_1 . $AB \perp \Sigma$, оскільки $AB \perp BC$ та $AB \perp BV$, тому $AB \perp B_1C_1$. Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

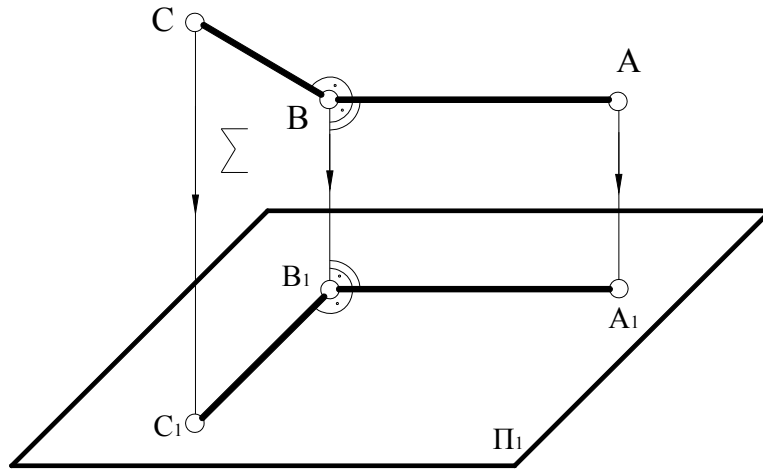


Рисунок 2. 20

На рис. 2.21 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є горизонтальна пряма рівня h .

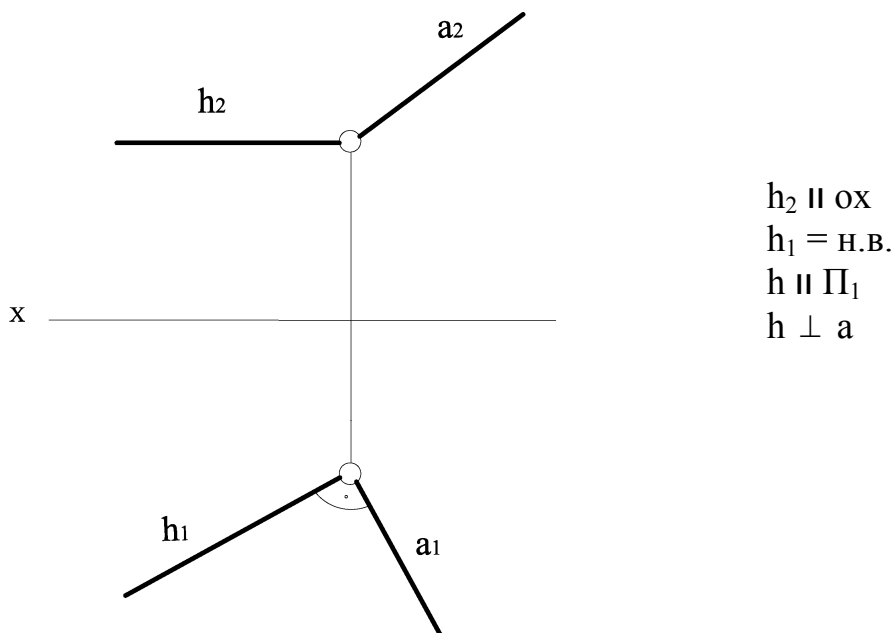


Рисунок 2.21

На рис. 2.22 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є фронтальна пряма рівня f , яка є паралельною до Π_2 , тому на цю площину прямий кут проєкціюється як прямий.

Правило проєкціювання прямого кута використовується при розв'язанні задач по знаходженню відстані від точки до прямої особливого положення. На рис. 2.23 наведено приклад по знаходженню відстані від точки C до горизонтальної прямої рівня h .

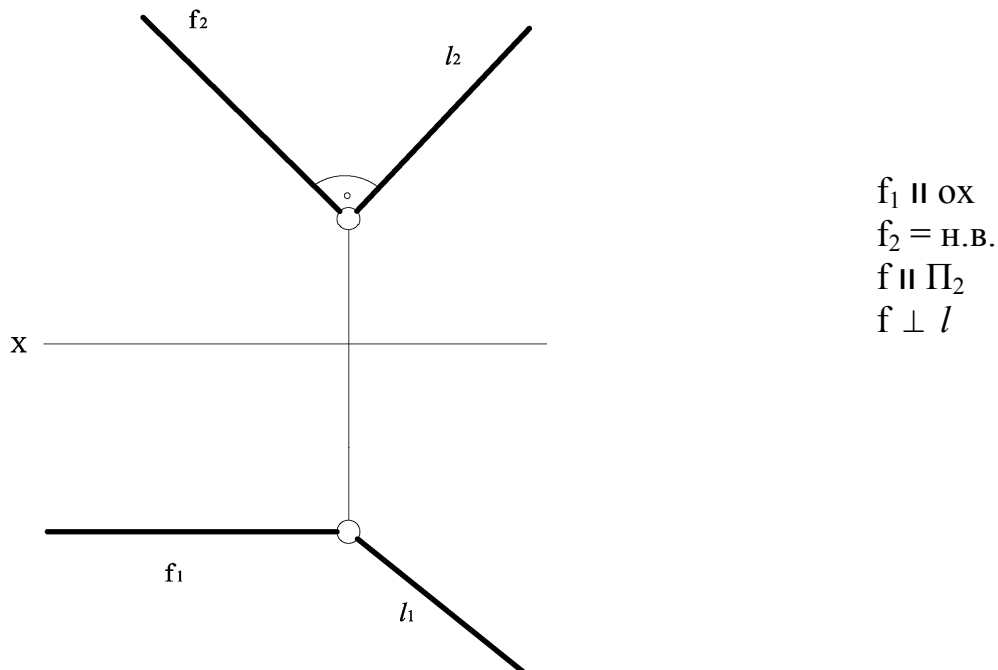


Рисунок 2.22

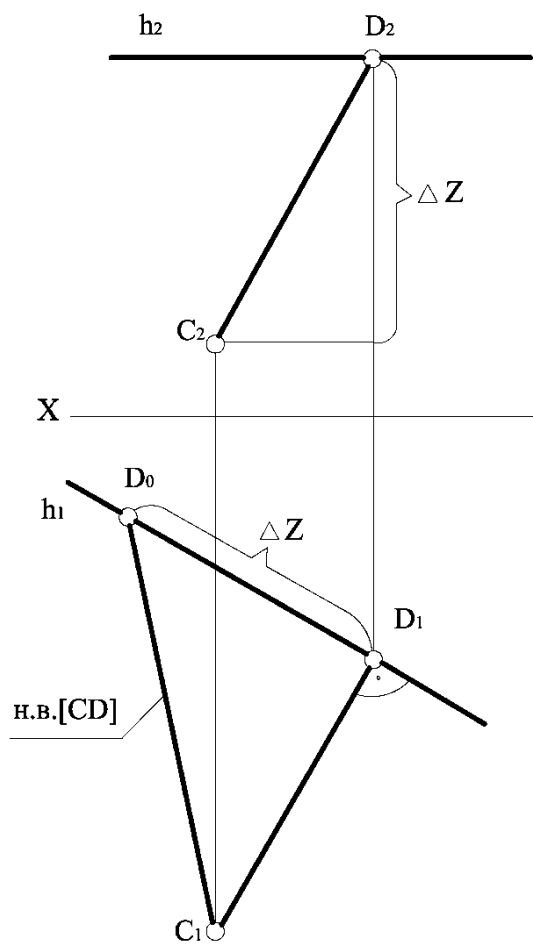


Рисунок 2.23

Із точки С необхідно опустити перпендикуляр на пряму А. Оскільки $h \parallel \Pi_1$, то прямий кут спроекціюється на Π_1 без спотворень. Натуральну величину (CD) знаходимо методом прямокутного трикутника.

2.5 Точка на прямій. Сліди прямої

Якщо в просторі точка належить прямій, то проєкції цієї точки лежать на однойменних проєкціях цієї прямої і на спільній лінії проєкційного зв'язку.

На рис. 2.24 зображена точка A , що належить прямій l , бо її проєкції A_1 і A_2 розташовані відповідно на горизонтальній l_1 і фронтальній l_2 проєкціях прямої.

Точка не належить прямій лінії, якщо жодна з проєкцій точки, наприклад точка C , не належить відповідній проєкції прямої, або одна з проєкцій точки належить однойменній проєкції прямої лінії, наприклад точка B .

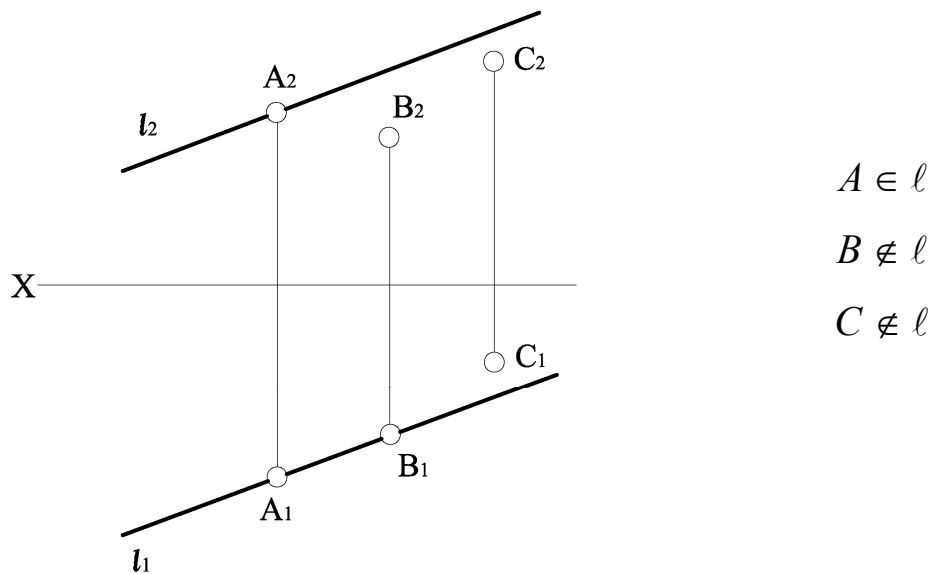


Рисунок 2.24

Точка перетину прямої з площиною проєкцій називається **слідом прямої**.

Точка M (M_1, M_2, M_3) перетину прямої l з горизонтальною площиною проєкцій Π_1 має назву **горизонтального сліду**; точка N (N_1, N_2, N_3) перетину прямої l з фронтальною площиною проєкцій Π_2 має назву **фронтального сліду**; точка P (P_1, P_2, P_3) перетину прямої l з профільною площиною проєкцій Π_3 має назву **профільного сліду**.

На рис. 2.25 наведено приклад побудови горизонтального і фронтального сліду для прямої l .

Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проєкцію l_2 до перетину з віссю OX . Далі з точки перетину M_2 – фронтальної проєкції горизонтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з горизонтальною проєкцією прямої. Точка перетину M_1 – горизонтальна проєкція горизонтального сліду, яка збігається з самим горизонтальним слідом M .

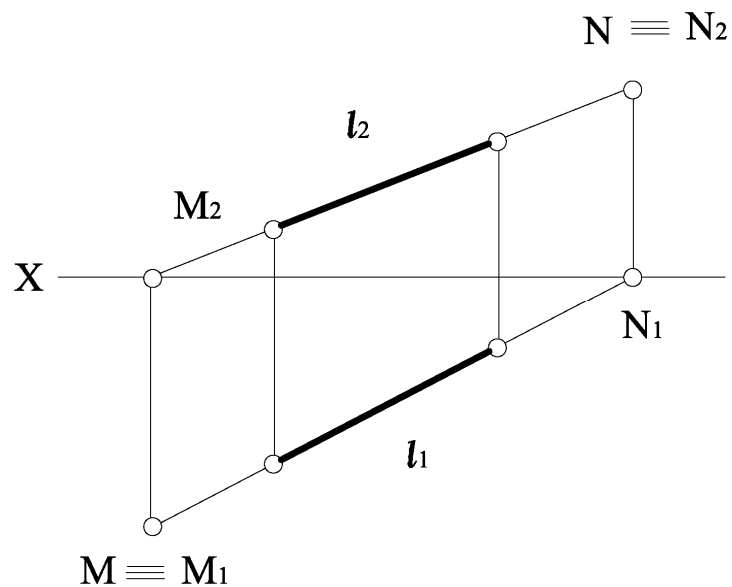


Рисунок 2.25

Для знаходження фронтального сліду прямої l необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої l_1 до перетину з віссю OX . Далі з точки перетину N_1 – горизонтальної проекції фронтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з фронтальною проекцією прямої. Точка перетину N_2 – фронтальна проекція фронтального сліду, яка збігається з самим фронтальним слідом N .

3 ПЛОЩИНА

3.1 Задання площини на комплексному кресленні

Площина є найпростішою поверхнею. *Площиною* називається поверхня, яка має таку властивість: якщо будь-яка пряма має з нею загальні точки, то вона цілком їй належить. З геометричної точки зору площину Σ (рис. 3.1) можна подати у вигляді нескінченної множини прямої лінії a , яка плоско-паралельно переміщується по напрямній прямій ℓ .

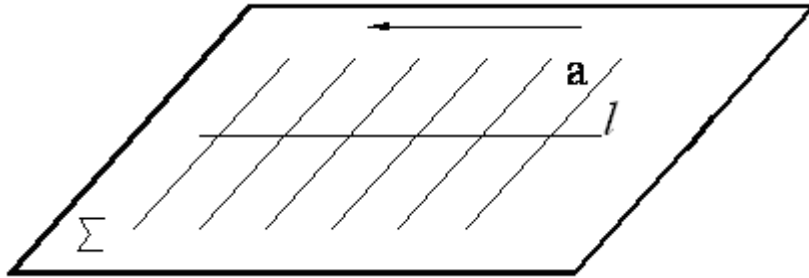


Рисунок 3.1

Площину можна задавати 6 способами.

1 Трьома точками A , B і C , які не належать одній прямій (рис. 3.2).

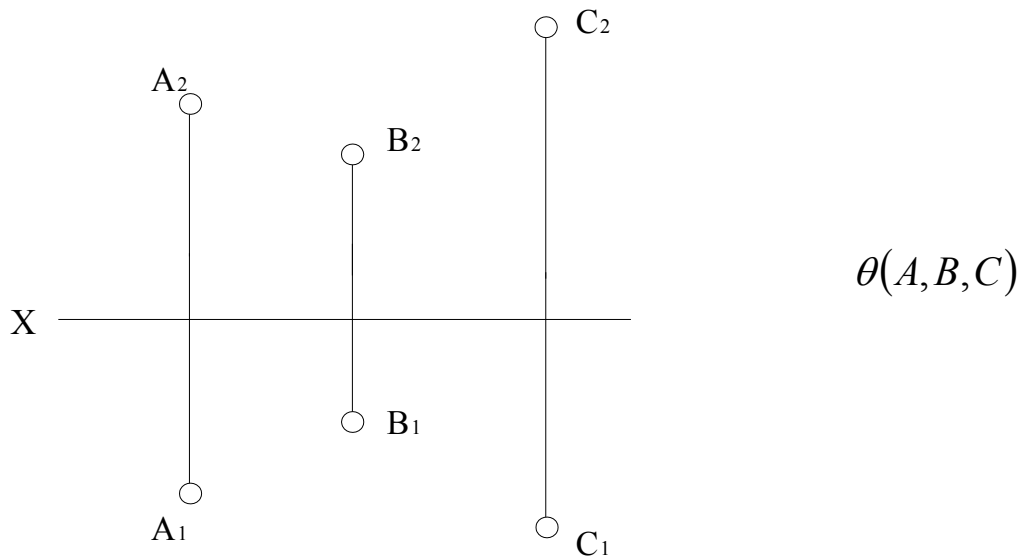
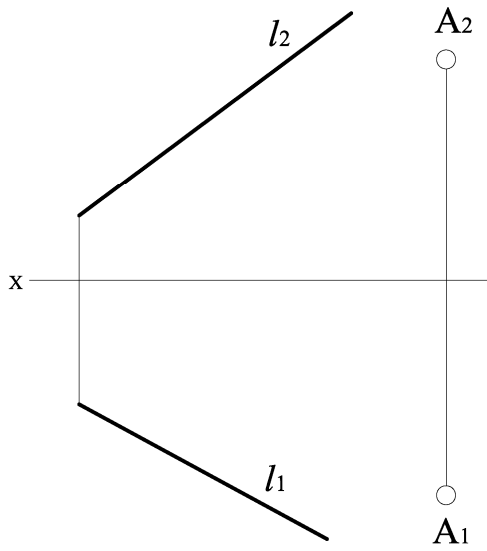


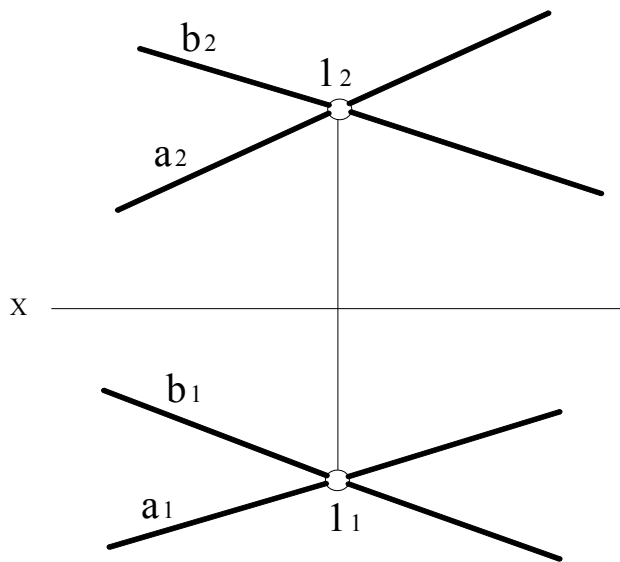
Рисунок 3.2

- 2 Прямою і точкою, яка не належить цій прямій (рис. 3.3).
- 3 Двома прямими, які перетинаються (рис. 3.4).
- 4 Двома паралельними прямими (рис. 3.5).
- 5 Будь-якою плоскою фігурою, наприклад трикутником (рис. 3.6).
- 6 Слідами площини, що являють собою прямі лінії, по яких вона перетинає відповідні площини проєкцій (рис. 3.7).



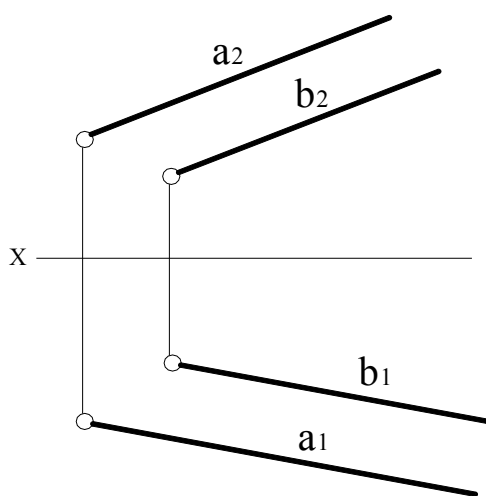
$\theta(l, A)$
 $A \notin l$

Рисунок 3.3



$\theta(a \cap b)$

Рисунок 3.4



$\theta(a \parallel b)$

Рисунок 3.5

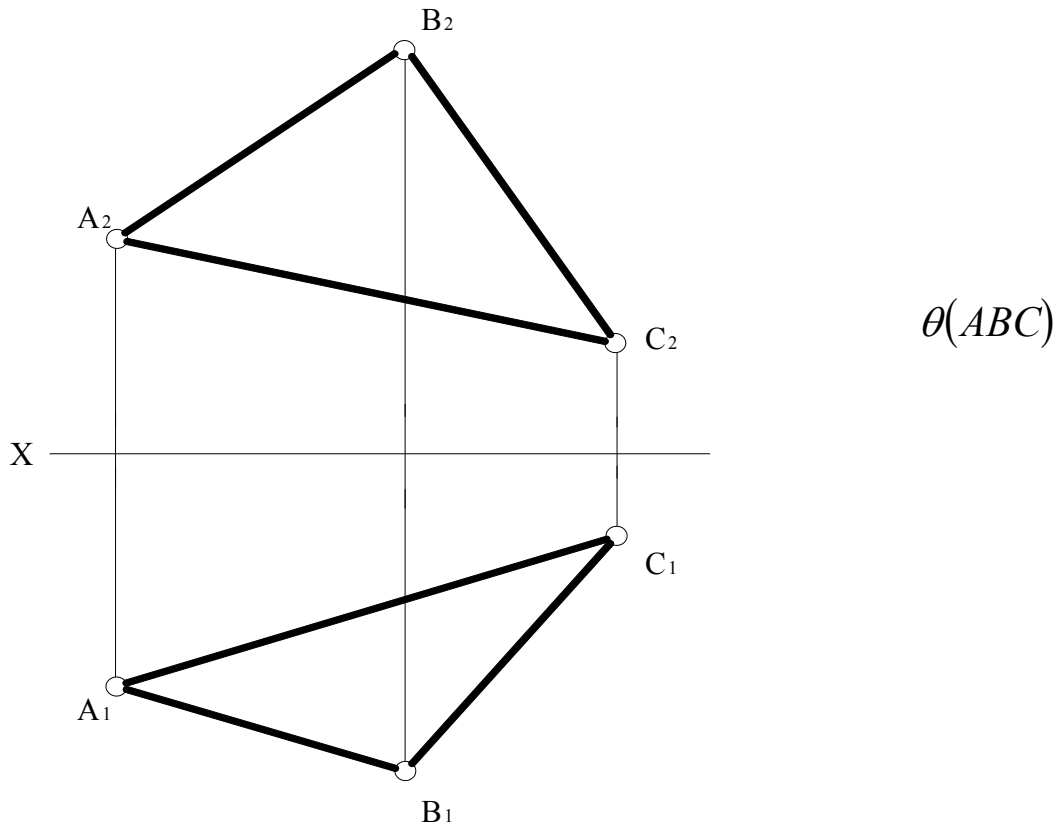


Рисунок 3.6

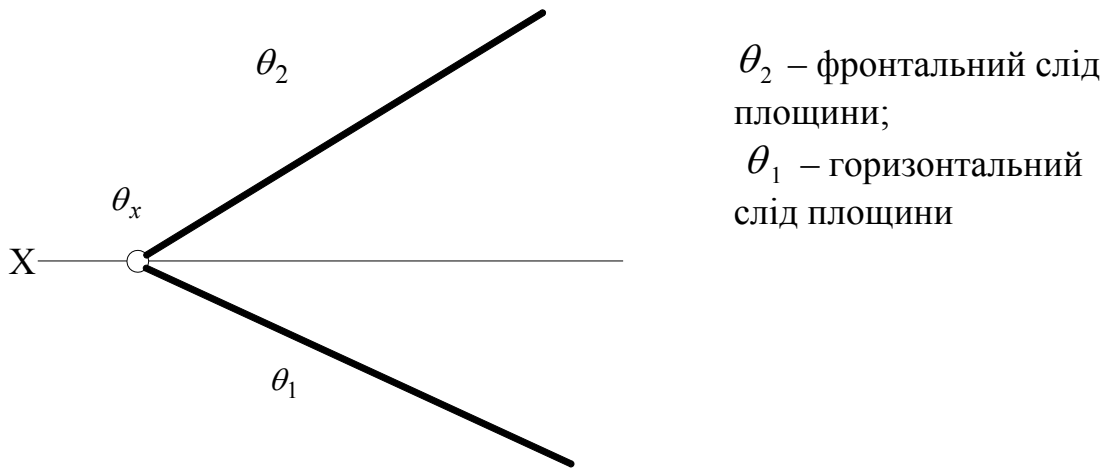


Рисунок 3.7

На комплексному кресленні проекції площини не обмежуються проекціями елементів, це означає, що площина вважається нескінченною.

3.2 Положення площини відносно площини проєкцій

Площина, яка не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проєкцій, називається *площиною загального положення*. Приклади таких площин наведені на рис. 3.2–3.7.

На рис. 3.8 наведено приклад площини θ загального положення, яка перетинає всі три площини проекцій.

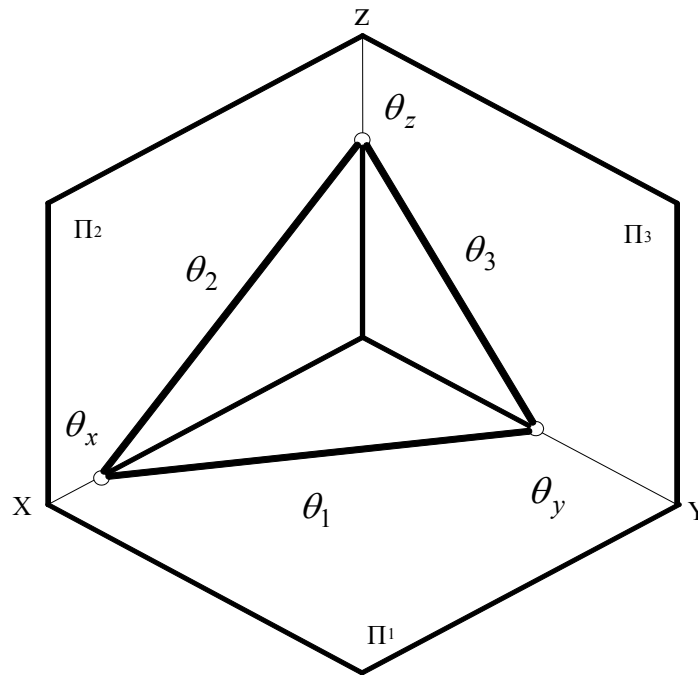


Рисунок 3.8

Відповідні сліди площини θ позначають:

$\theta_1 = \theta \cap \Pi_1$ – горизонтальний слід площини θ ;

$\theta_2 = \theta \cap \Pi_2$ – фронтальний слід площини θ ;

$\theta_3 = \theta \cap \Pi_3$ – профільний слід площини θ .

Точки $\theta_x = \theta_2 \cap \theta_1$, $\theta_y = \theta_1 \cap \theta_3$, $\theta_z = \theta_2 \cap \theta_3$, в яких перетинаються два сліди площини, отримали назву точок збігу слідів.

Комплексне креслення площини загального положення θ наведено на рис. 3.9.

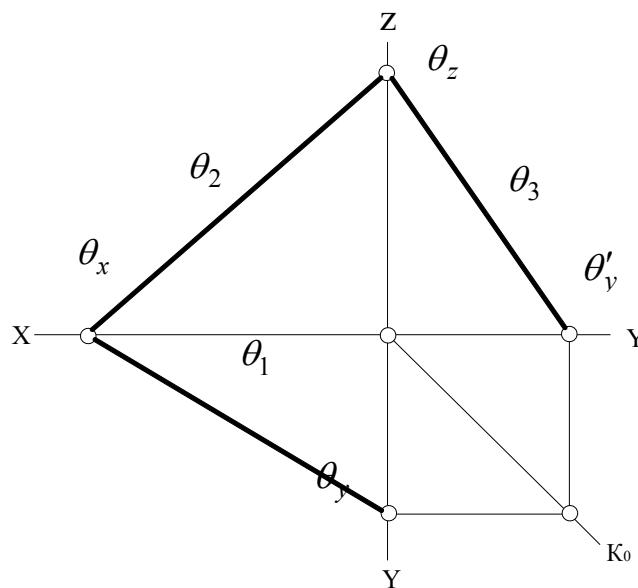
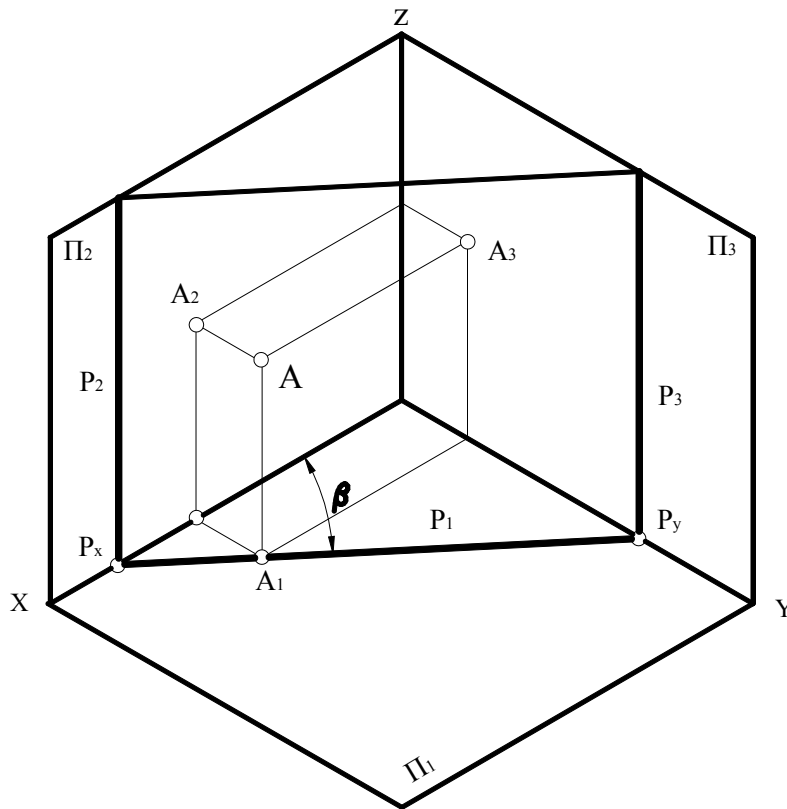


Рисунок 3.9

Площини, які перпендикулярні тільки одній із площин проєкцій, називають проєкціювальними.

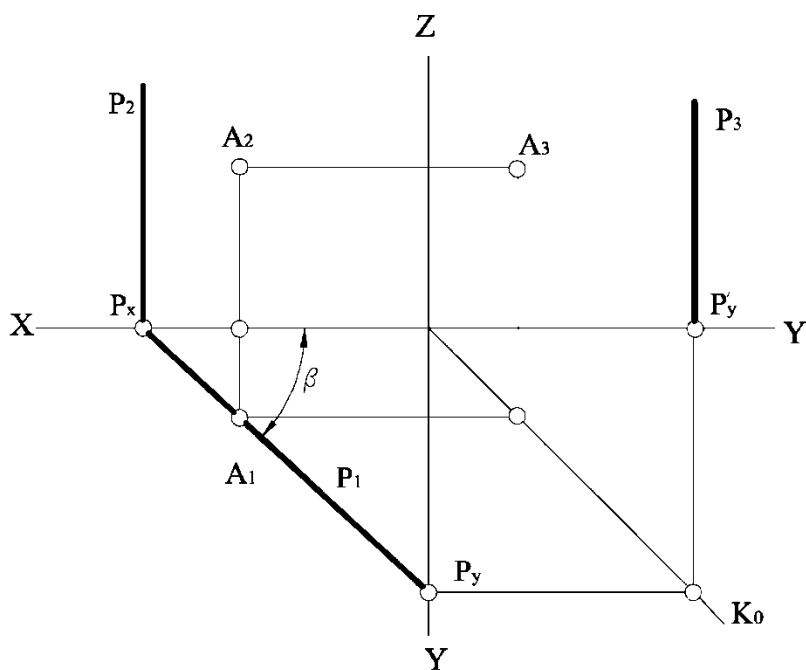
На рис. 3.10 наведено приклад горизонтально проєкціювальної площини.

На рис. 3.11 наведено приклад комплексного креслення горизонтально проєкціювальної площини P .



$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_1 \\
 &P_2 \perp OX \\
 &P_3 \perp OY \\
 &\beta = OX \wedge P_1 = \Pi_2 \wedge P \\
 &A \in P \rightarrow A_1 \in P_1
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.10



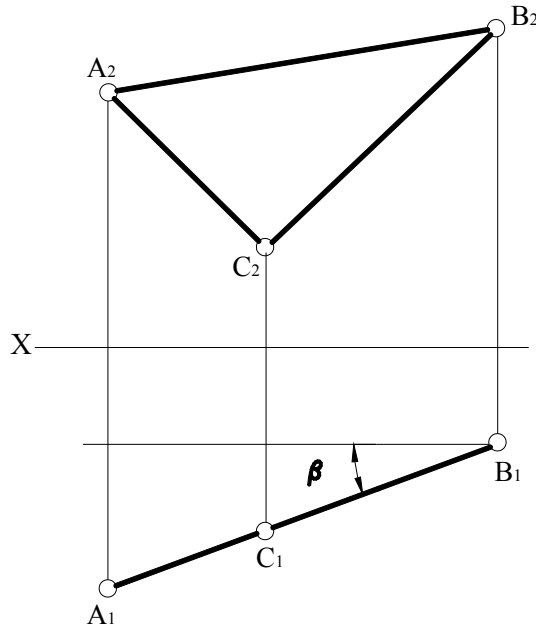
$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_1 \\
 &A \in P \rightarrow A_1 \in P_1
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.11

Горизонтальні проєкції точок, прямих, плоских фігур, які належать горизонтально проєкціювальній площині, збігаються з горизонтальним слідом цієї площини.

На рис. 3.12 наведено приклад комплексного креслення горизонтально проєкціювальної площини, яка задана трикутником $\theta(ABC)$.

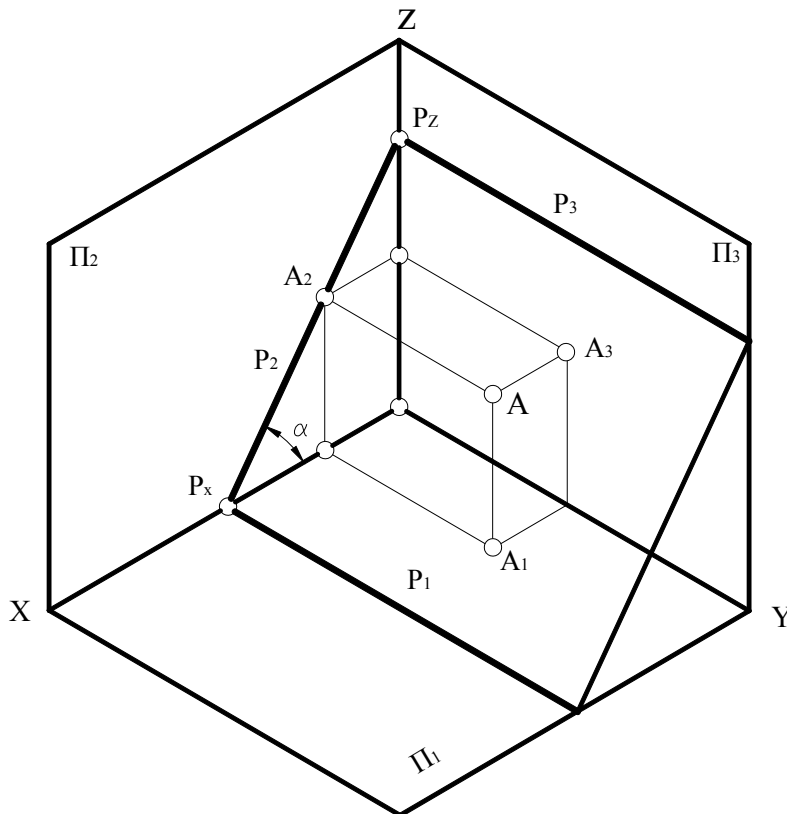
Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій, називається **фронтально проєкціювальною площиною** (рис. 3.13).



$$\theta(ABC) \perp \Pi_1$$

$$\beta = OX \wedge (A_1C_1B_1) = \theta \wedge \Pi_2$$

Рисунок 3.12



$$P \perp \Pi_2$$

$$A \in P \rightarrow A_2 \in P_2$$

$$P_1 \perp OX$$

$$P_3 \perp OZ$$

$$\alpha = OX \wedge P_2 = P \wedge \Pi_1$$

Рисунок 3.13

На рис. 3.14 наведено приклад комплексного креслення фронтально проєкціювальної площини $P \perp \Pi_2$.

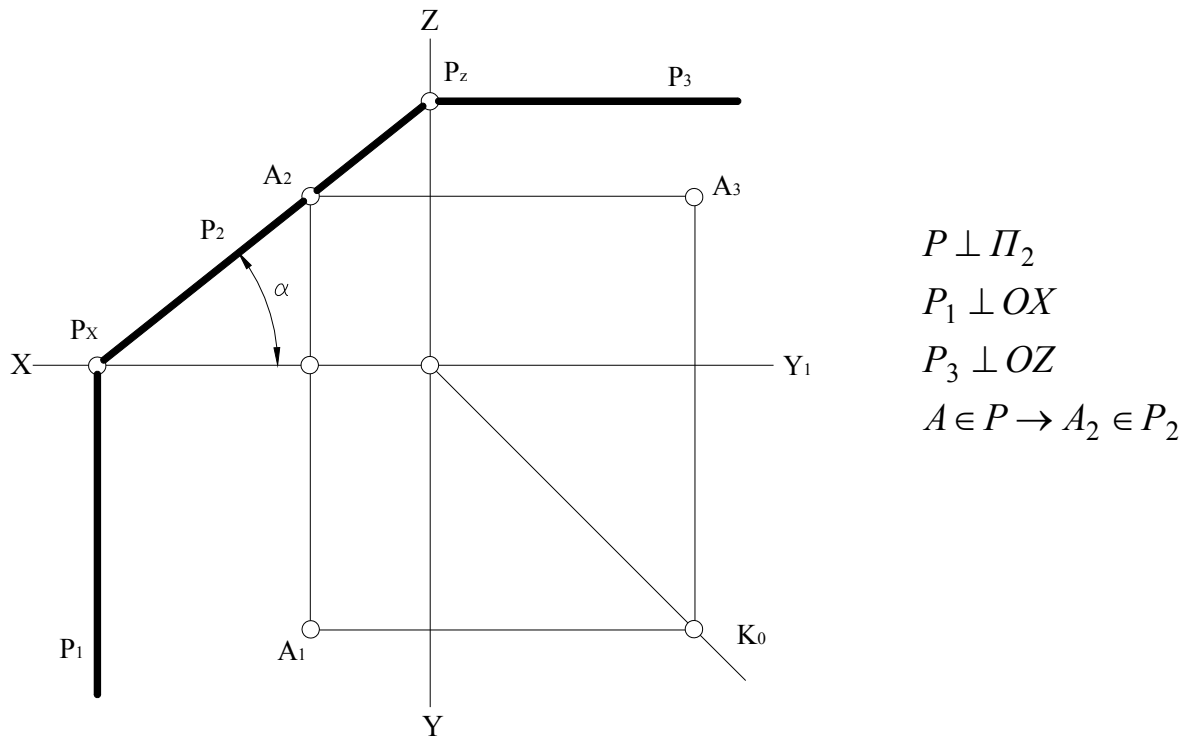


Рисунок 3.14

Фронтальні проєкції точок, прямих, плоских фігур, які належать фронтально проєкціювальній площині, збігаються з фронтальним слідом цієї площини.

На рис. 3.15 наведено приклад комплексного креслення фронтально проєкціювальної площини, яка задана відсіком площини $\theta(ABC)$.

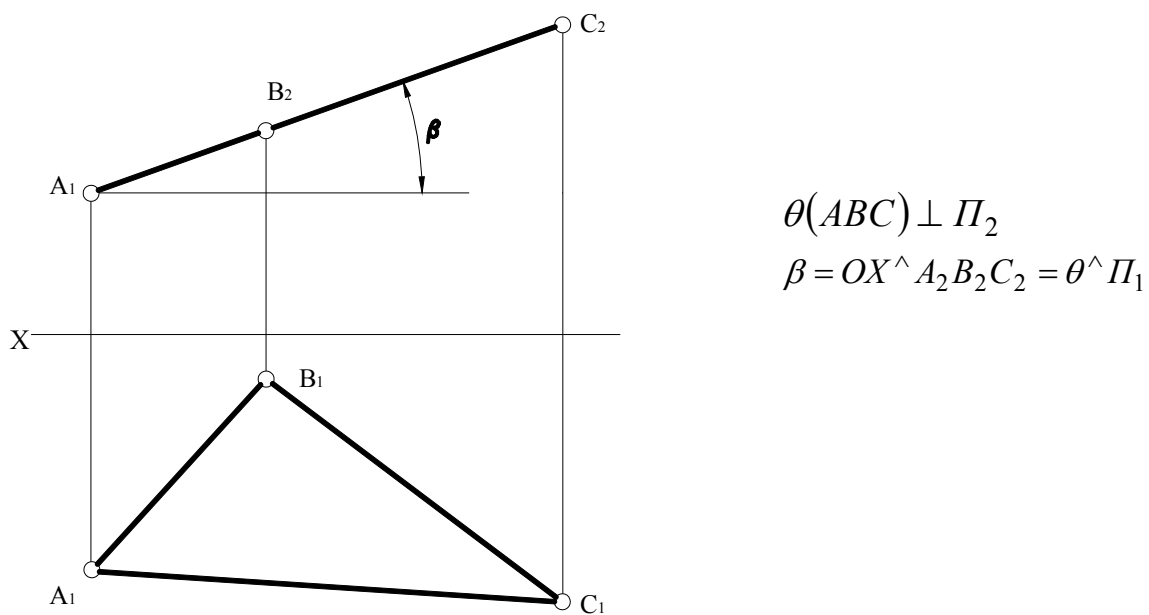
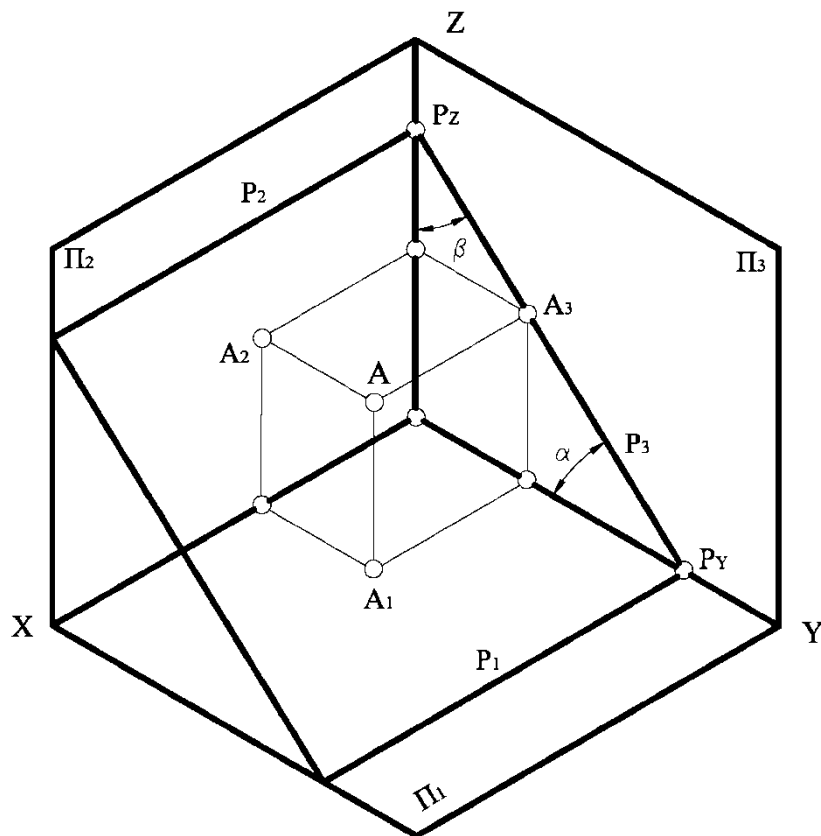


Рисунок 3.15

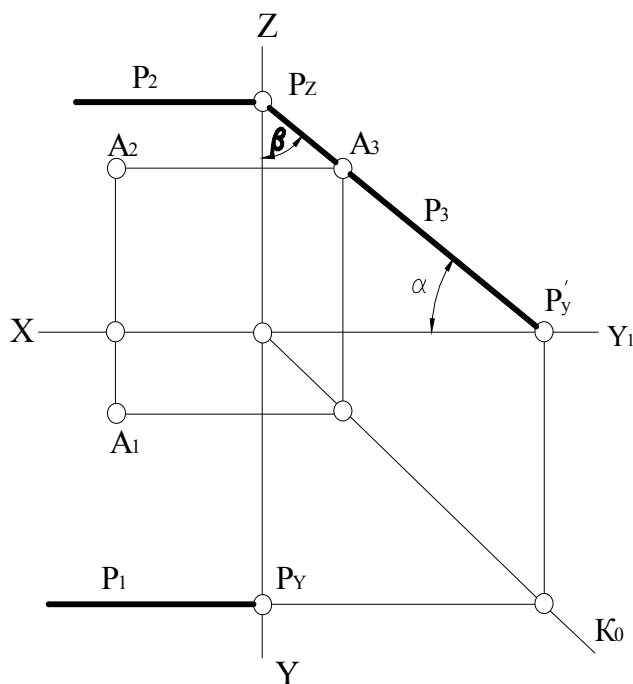
Площина, яка перпендикулярна до профільної площини проєкцій, називається **профільно проєкціовальною площиною** (рис. 3.16).



$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_3 \\
 &P_1 \perp OY \\
 &P_2 \perp OZ \\
 &\alpha = OY \wedge P_3 = P \wedge \Pi_1 \\
 &\beta = OZ \wedge P_3 = P \wedge \Pi_2 \\
 &A \in P \rightarrow A_3 \in P_3
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.16

На рис. 3.17 наведено приклад комплексного креслення профільно проєкціовальної площини $P \perp \Pi_3$.

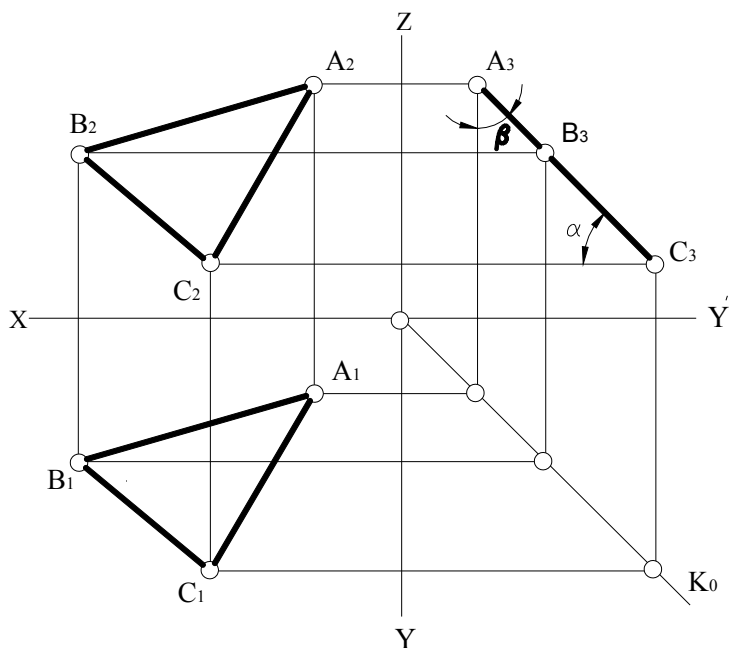


$$A \in P \rightarrow A_3 \in P_3$$

Рисунок 3.17

Профільні проєкції точок, прямих, плоских фігур, які належать профільно проєкціювальній площині, збігаються з профільним слідом цієї площини.

На рис. 3.18 наведено приклад комплексного креслення профільно проєкціювальної площини, яка задана трикутником $\theta(ABC)$.



$$\theta(ABC) \perp \Pi_3$$

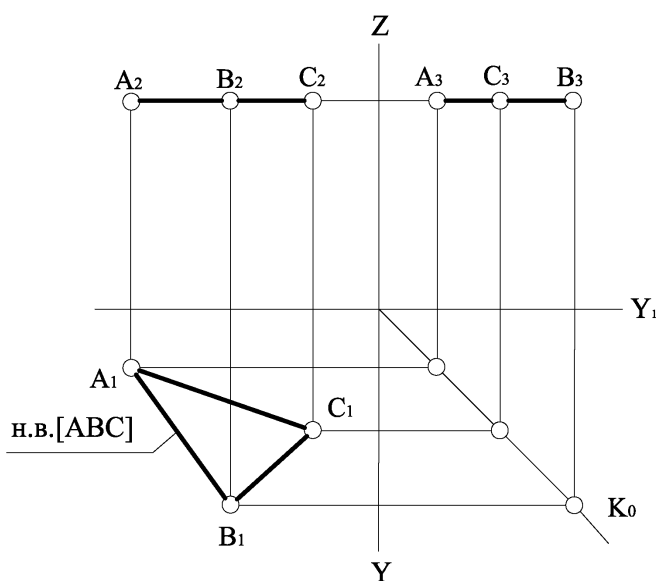
$$\alpha = OY \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge \Pi_1$$

$$\beta = OZ \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge \Pi_2$$

Рисунок 3.18

Площини, які одночасно перпендикулярні до двох площин проєкцій, називаються площинами рівня (або подвійно проєкціювальними), як наслідок, вони паралельні третій площині проєкцій.

Площина, яка паралельна горизонтальній площині проєкцій, називається **горизонтальною площиною рівня**. На рис. 3.19 приведено комплексне креслення цієї площини, яка задана відсіком площини $\theta(ABC)$.



$$A_2B_2C_2 \perp OZ$$

$$A_3B_3C_3 \perp OZ$$

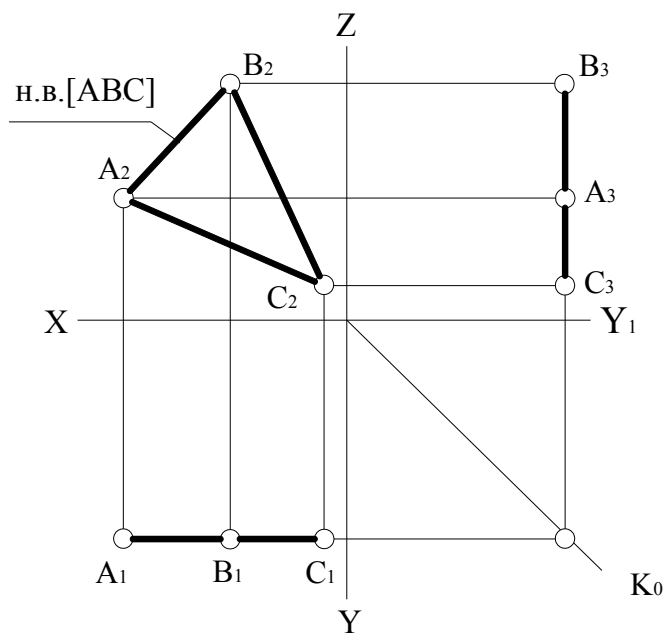
$$(A_1B_1C_1) - \text{н.в.}[ABC]$$

$$\theta(ABC) \perp \Pi_2$$

$$\theta(ABC) \perp \Pi_3$$

Рисунок 3.19

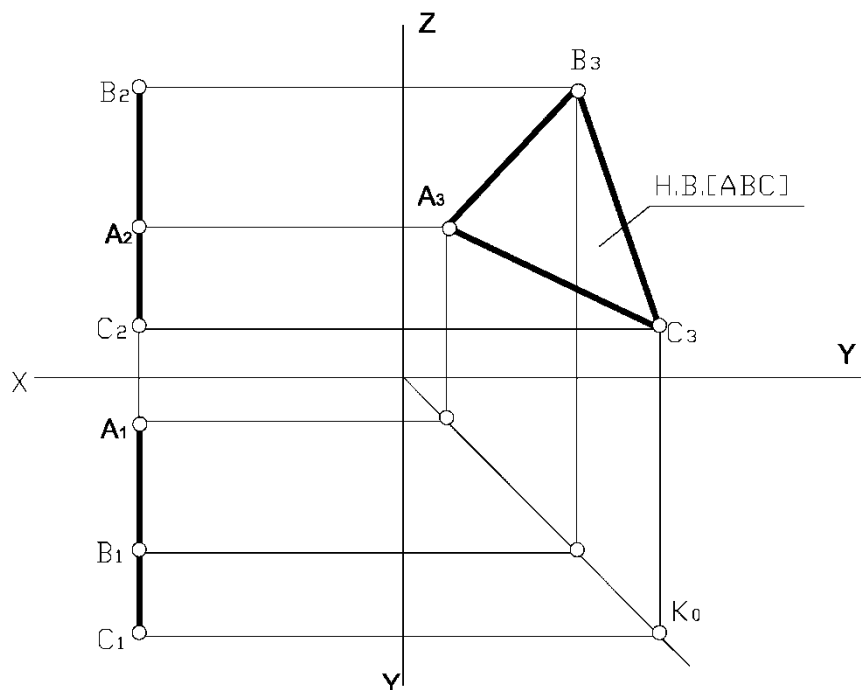
Площина, яка паралельна фронтальній площині проєкцій, називається **фронтальною площиною рівня**. На рис. 3.20 наведено приклад комплексного креслення цієї площини, яка задана відсіком площини $\Phi(ABC)$.



- $\Phi(ABC) \perp \Pi_1$
- $\Phi(ABC) \perp \Pi_3$
- $\Phi(ABC) \parallel \Pi_2$
- $A_1B_1C_1 \parallel ox$
- $B_3A_3C_3 \parallel oz$
- $(A_2B_2C_2) = \text{н.в.}[ABC]$

Рисунок 3.20

Площина, яка паралельна профільній площині проєкцій, називається **профільною площиною рівня**. На рис. 3.21 наведено приклад комплексного креслення цієї площини, яка задана відсіком площини $\Sigma(ABC)$.

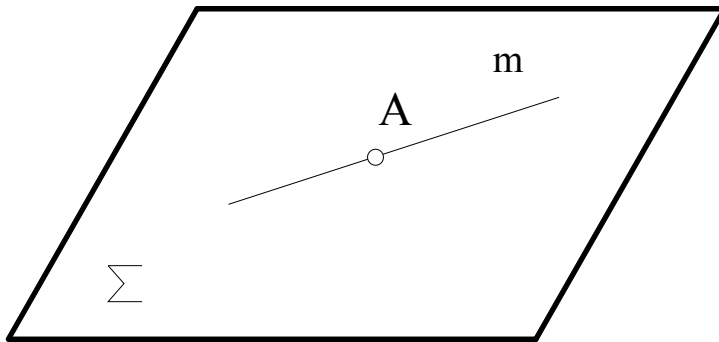


- $\Sigma(ABC) \parallel \Pi_3$
- $\Sigma(ABC) \perp \Pi_1$
- $\Sigma(ABC) \perp \Pi_2$
- $A_1B_1C_1 \perp ox$
- $B_2A_2C_2 \perp ox$
- $(A_3B_3C_3) = \text{н.в.}[ABC]$

Рисунок 3.21

3.3 Належність точки і прямої площині

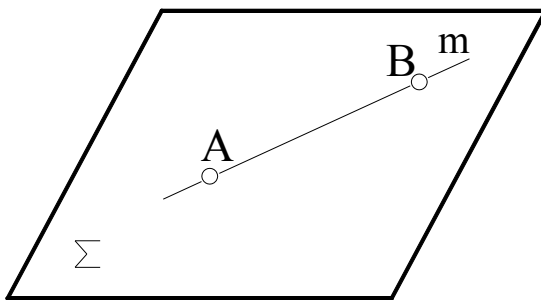
Точка належить площині, якщо вона належить якійсь прямій лінії, яка належить цій площині (рис. 3.22.)



$$m \in \Sigma$$
$$A \in m \Rightarrow A \in \Sigma$$

Рисунок 3.22

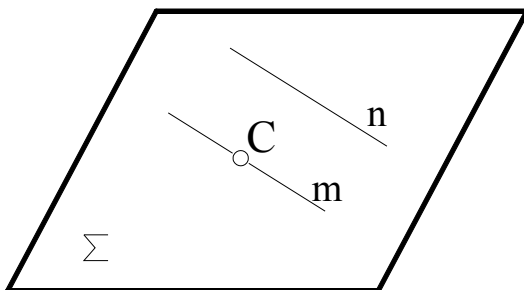
Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через дві точки цієї площини (рис. 3.23).



$$A \in \Sigma, B \in \Sigma$$
$$m \supset A, B \Rightarrow m \in \Sigma$$

Рисунок 3.23

Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через одну точку цієї площини і паралельна будь-якій прямій, розташованій у цій площині (рис. 3.24).



$$C \in \Sigma, n \in \Sigma$$
$$m \supset C, m \parallel n \Rightarrow m \in \Sigma$$

Рисунок 3.24

Якщо пряма лінія належить площині, то її відповідні сліди належать відповідним слідам площини (рис. 3.25).

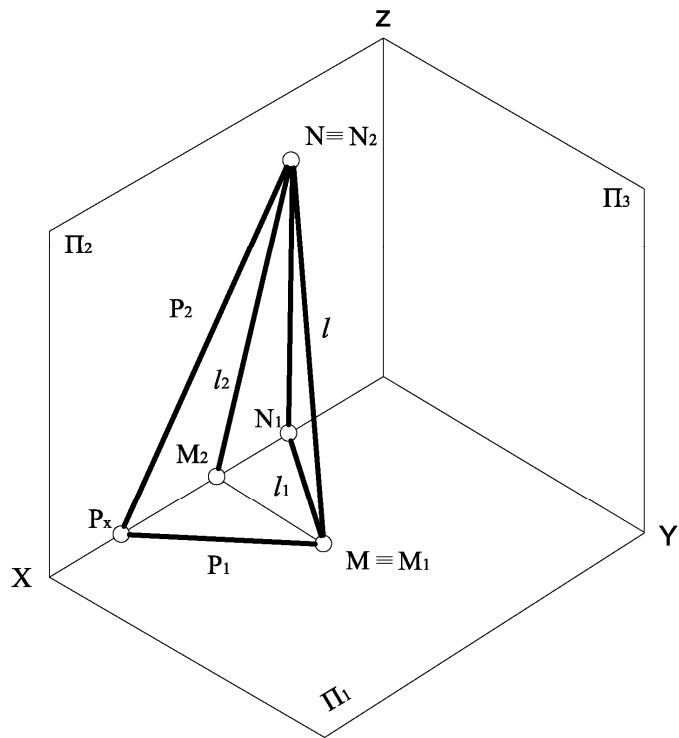


Рисунок 3.25

На рис. 3.26 наведено приклад комплексного креслення площини загального положення P , яка задана слідами P_1 та P_2 , та прямої l , яка належить цій площині.

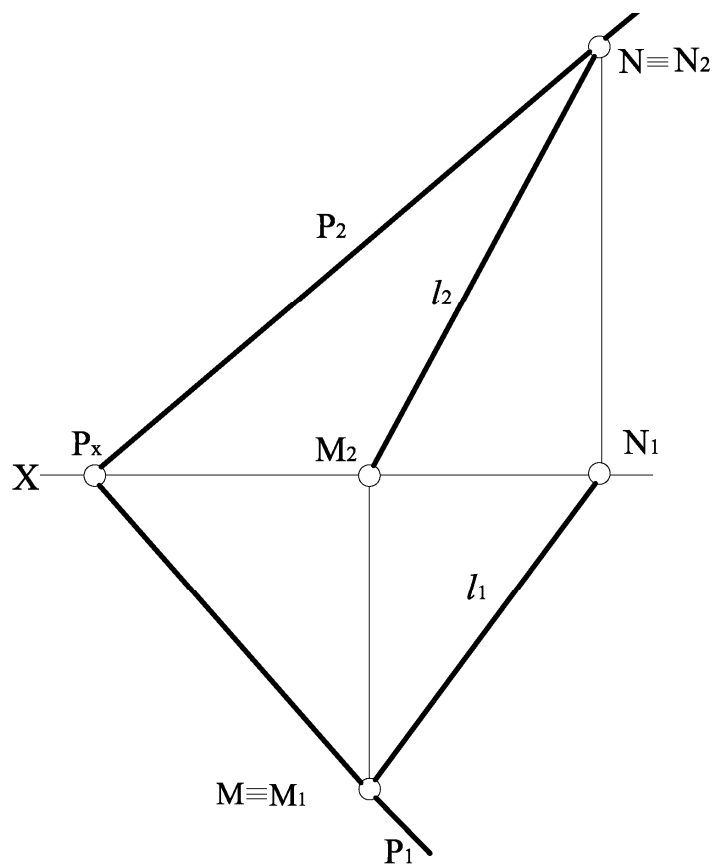


Рисунок 3.26

3.4 Головні лінії площини

Лініями рівня площини називають лінії, що належать даній площині та паралельні одній із площин проєкцій – це горизонтальні h , фронтальні f і профільні прямі P (рис. 3.27).

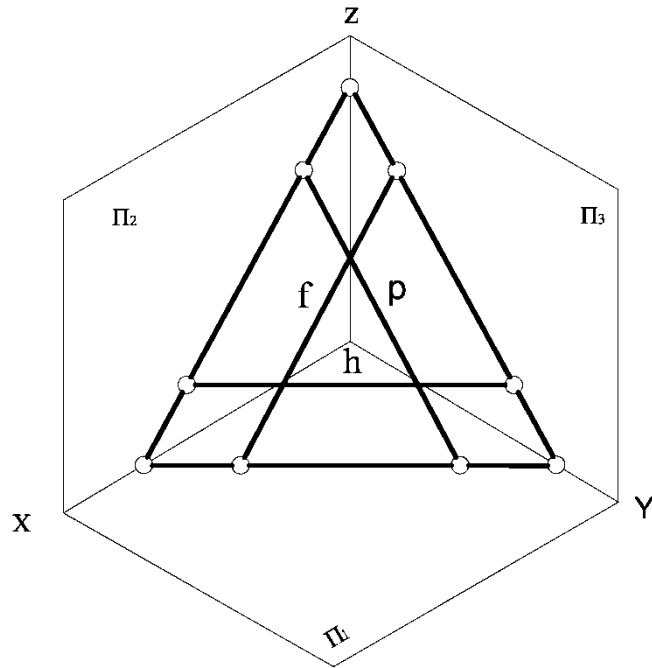
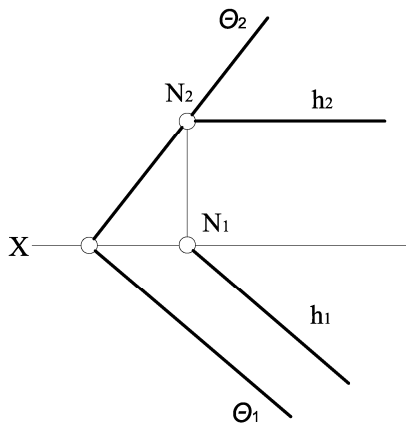


Рисунок 3.27

Лінії перетину площини з площинами проєкцій – сліди площини – також є горизонтальною h , фронтальною f та профільною P прямими. Їх у цьому випадку називають **нульовими**: h_1^0, f_2^0, P_3^0 .

На рис.3.28 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини θ , яка задана слідами.

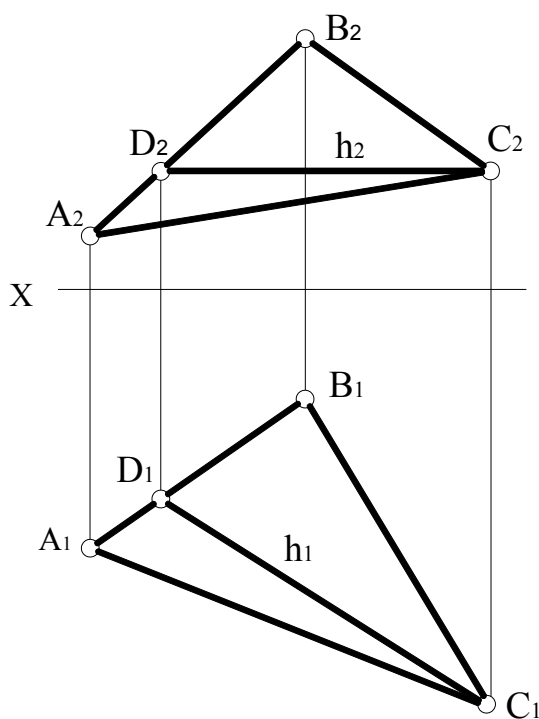
Горизонталь – це лінія, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 .



$$\begin{aligned} (h \in \theta) \wedge (h \parallel \Pi_1) \\ h_2 \parallel OX \\ h_1 \parallel \theta_1 \end{aligned}$$

Рисунок 3.28

На рис. 3.29 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини $\Sigma(ABC)$, яка задана відсіком площини.

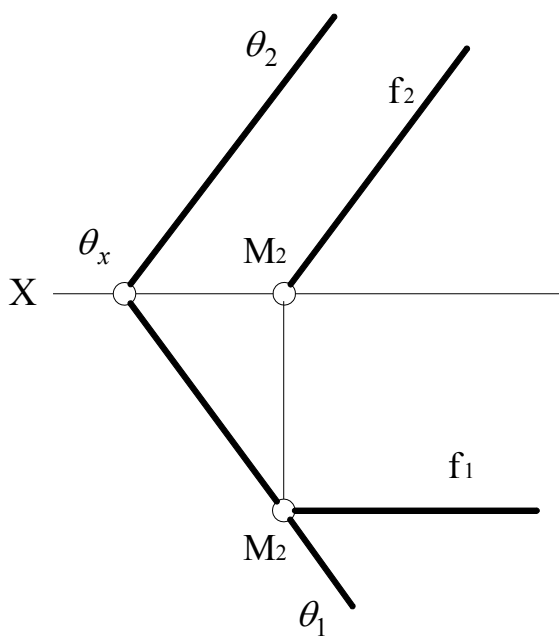


$\Sigma(ABC)$
 $(h \in \Sigma) \wedge (h \parallel \Pi_1)$
 $h_2 \parallel oX$
 $h_2 = D_2C_2$
 $h_1 = D_1C_1$

Рисунок 3.29

Фронталь – це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 .

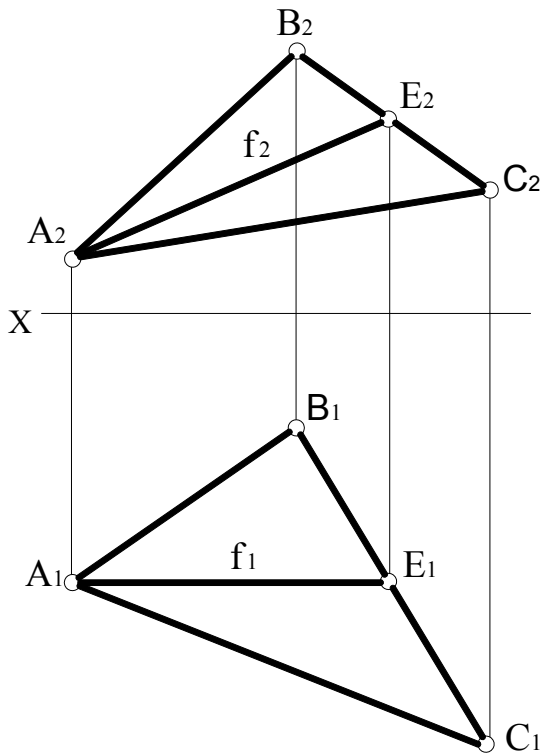
На рис. 3.30 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини θ , яка задана слідами.



$(f \in \theta) \wedge (f \parallel \Pi_2)$
 $f_1 \parallel oX$
 $f_2 \parallel \theta_2$

Рисунок 3.30

На рис. 3.31 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини $\Sigma(ABC)$, яка задана відсіком площини.

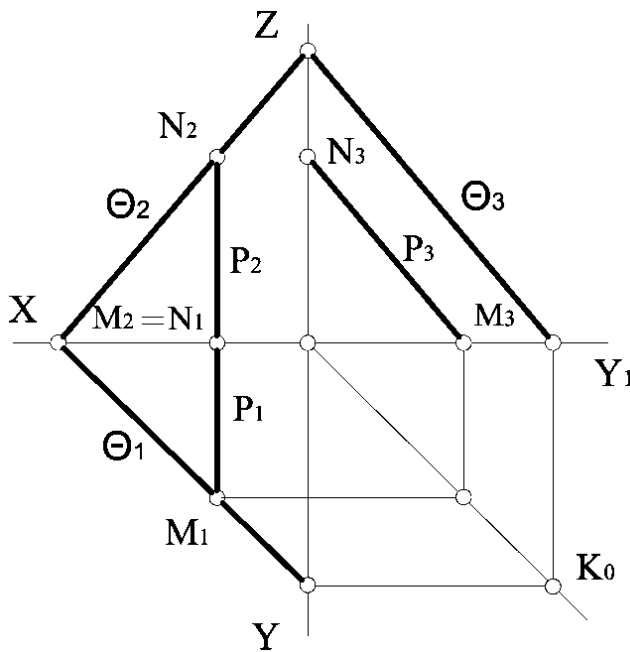


$$\begin{aligned} &\Sigma(ABC) \\ &(f \in \Sigma) \wedge (f \parallel \Pi_2) \\ &f_1 \parallel OX \\ &f_1 = A_1E_1 \\ &f_2 = A_2E_2 \end{aligned}$$

Рисунок 3.31

Профільна пряма – це лінія, що належить площині та паралельна профільній площині проєкцій Π_3 .

На рис. 3.32 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини θ , яка задана слідами.



$$\begin{aligned} &(P \in \theta) \wedge (P \parallel \Pi_3) \\ &(P_1 \wedge P_2) \perp OX \\ &P_3 \parallel \theta_3 \end{aligned}$$

Рисунок 3.32

На рис. 3.33 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини $\Sigma(ABC)$, яка задана відсіком площини.

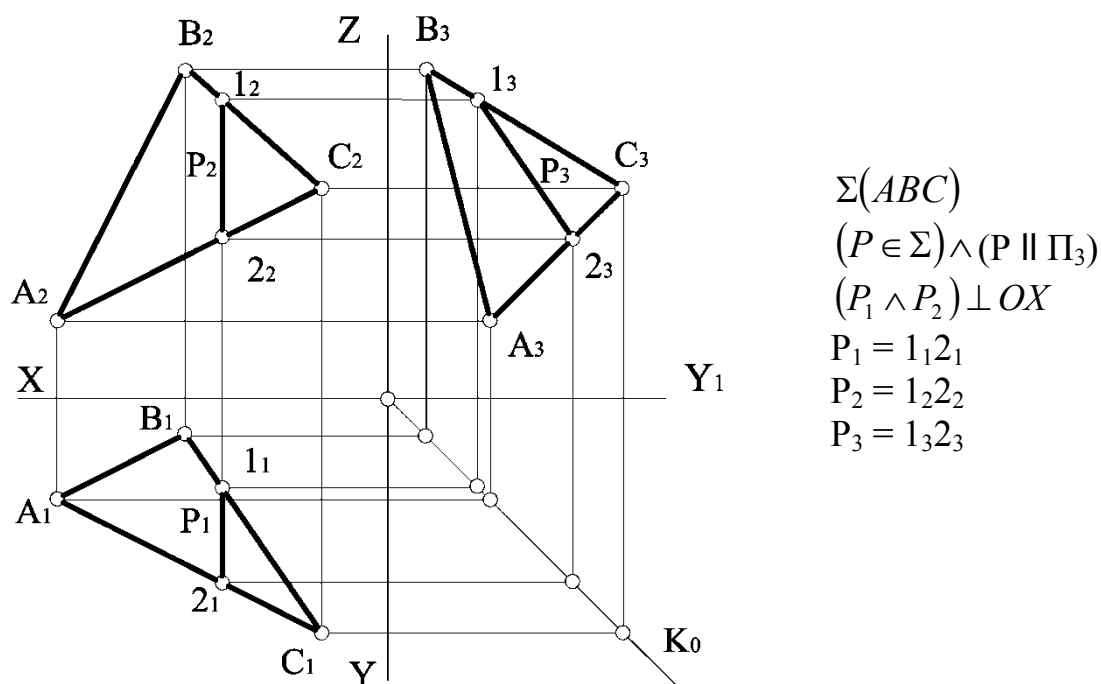


Рисунок 3.33

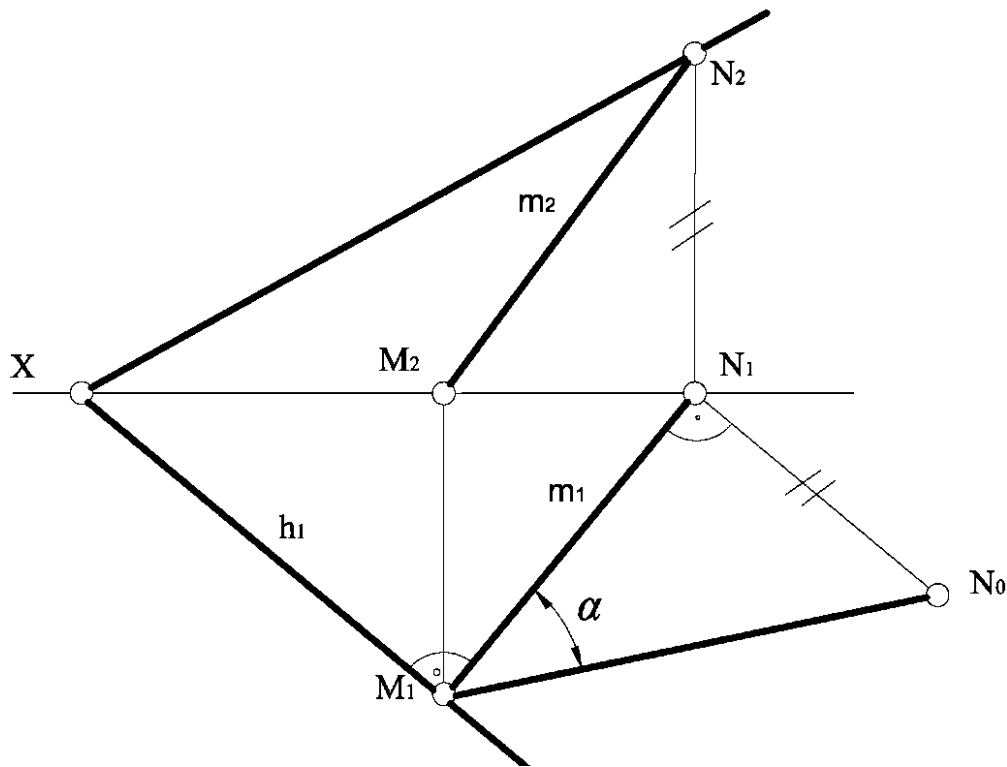
До особливих ліній площини відносять лінії найбільшого нахилу площини до відповідної площини проєкцій – це лінії, які належать площині і перпендикулярні або до горизонтальної, або до фронтальної, або до профільної прямої площини. Ця умова використовується в тих випадках, коли площина задана не слідами. Якщо площина задана слідами, то замість горизонтальної, фронтальної або профільної прямої використовують відповідні сліди.

Лінія найбільшого нахилу використовується для визначення натуральної величини кута нахилу площини до заданої площини проєкцій.

На комплексному кресленні (рис. 3.34) наведено приклад побудови лінії найбільшого нахилу m площини θ , заданої слідами площини, до горизонтальної площини проєкцій, а також знаходження кута α нахилу площини θ до Π_1 . У лінії найбільшого нахилу m на комплексному кресленні горизонтальна проєкція m_1 завжди перпендикулярна горизонтальній проєкції горизонталі або горизонтальному сліду θ_1 .

Фронтальна проєкція m_2 визначається за умовою її належності до площини θ , тобто горизонтальний слід M (M_1, M_2) і фронтальний слід N (N_1, N_2) цієї прямої повинні належати однойменним слідам площини.

Кут, що утворюється між лінією m і її горизонтальною проєкцією m_1 , є кутом нахилу площини θ до горизонтальної площини проєкцій, тобто кутом α . Натуральну величину цього кута на комплексному кресленні (рис. 3.34) знаходимо методом прямокутного трикутника.



$$m \in \theta$$

$$m_1 \perp \theta_1$$

$$\alpha = M_1 N_1 \wedge M_1 N_0 = \theta \wedge \Pi_1$$

Рисунок 3.34

3.5 Паралельність площин

Якщо дві прямі перетину однієї площини відповідно паралельні двом прямим перетину другої площини, то площини паралельні.

Якщо площини задані слідами і відповідні сліди площин паралельні, то і площини паралельні.

$$(\theta_1 \parallel \Sigma_1) \wedge (\theta_2 \parallel \Sigma_2) \wedge (\theta_3 \parallel \Sigma_3) \Leftrightarrow \theta \parallel \Sigma$$

Із рівняння випливає, що якщо хоча б одна пара відповідних слідів перетинається, то і площини перетинаються.

На рис. 3.35 наведено приклад побудови через точку А площини $\Sigma(l \cap m)$, паралельно заданій $\theta(a \cap b)$ у точці С.

На рис. 3.36 наведено приклад побудови через точку А площини $\Sigma(l \cap m)$, паралельно заданій θ ($a \parallel b$). Для цього в площині θ , яка задана паралельними прямими, будемо додаткову пряму n , яка належить цій площині, тому що проходить через дві точки цієї площини.

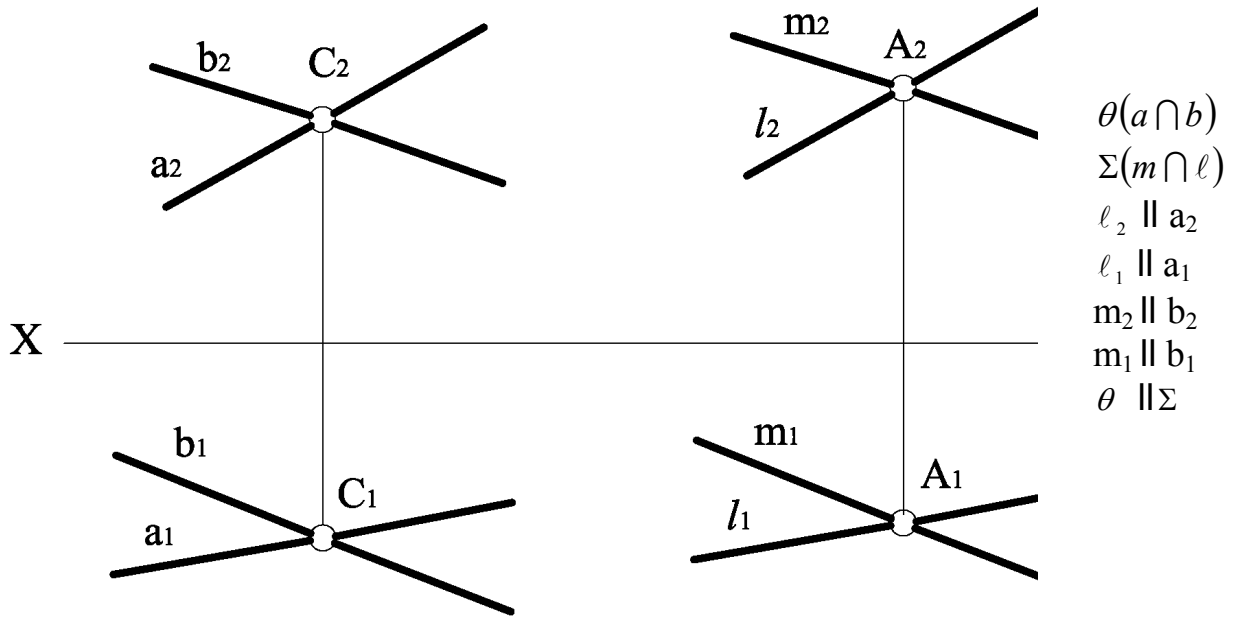


Рисунок 3.35

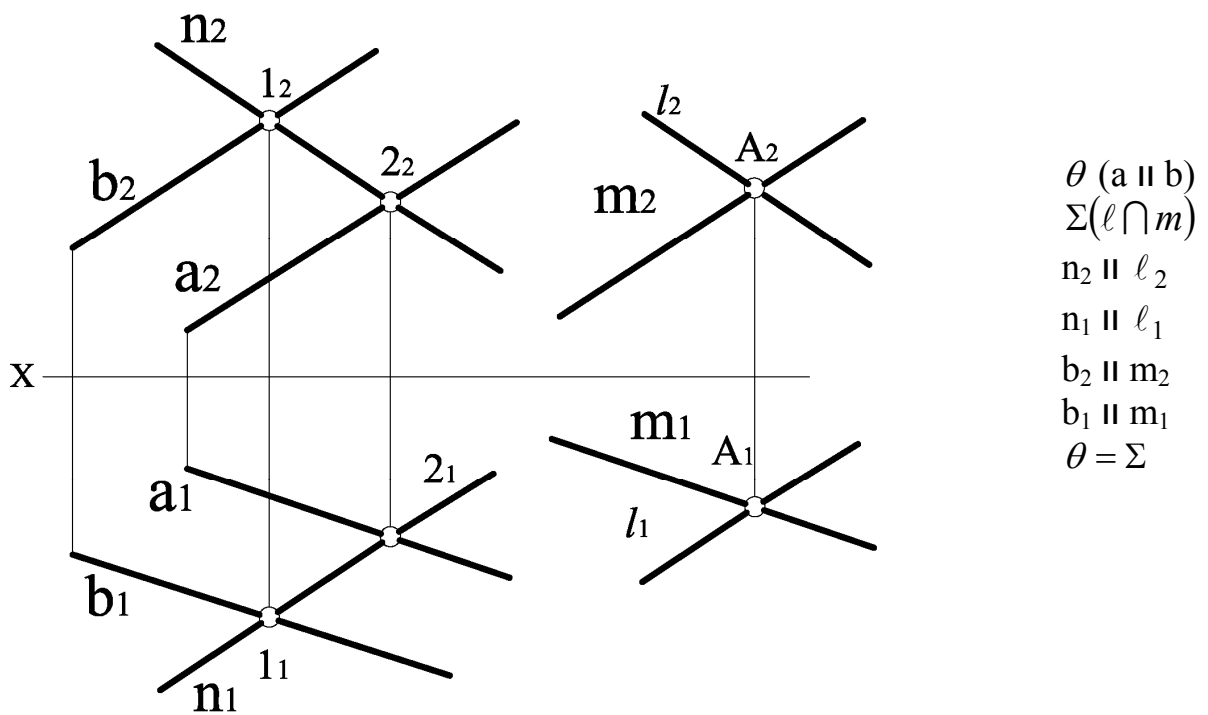
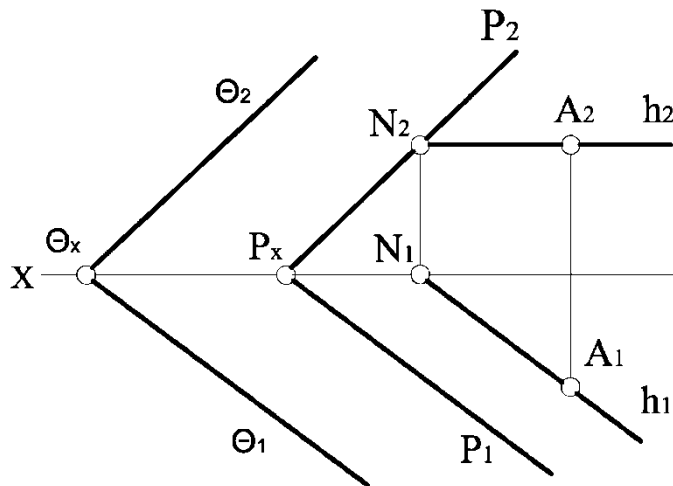


Рисунок 3.36

На рис. 3.37 наведено приклад комплексного креслення двох паралельних площин загального положення, які задані слідами, а також приклад побудови точки А, яка належить площині Р, за допомогою горизонтальної прямої цієї площини.



$$\theta_2 \parallel P_2$$

$$\theta_1 \parallel P_1$$

$$\theta \parallel P$$

$$h_2 \parallel ox$$

$$A_2 \in h_2$$

$$A_1 \in h_1$$

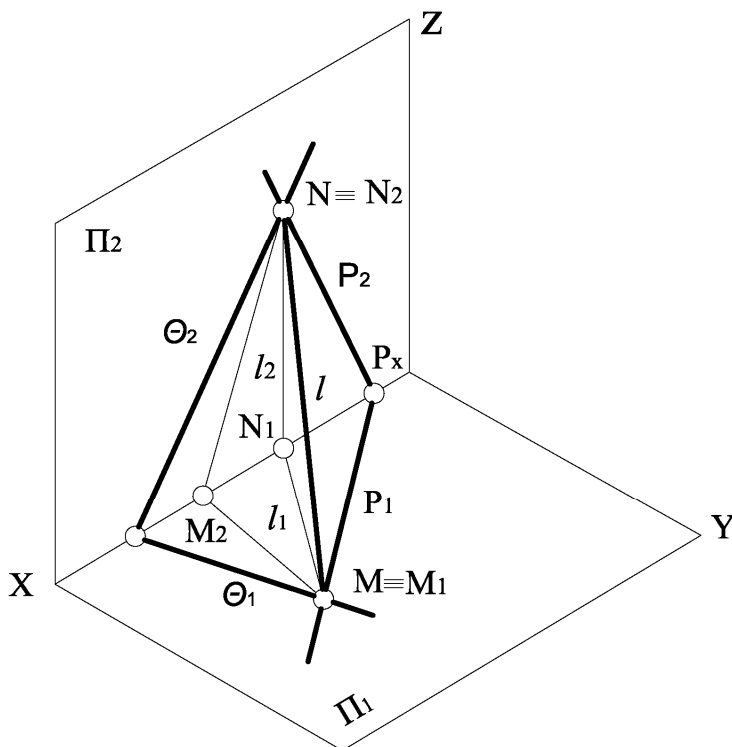
$$(h \in P) \Rightarrow (A \in P)$$

Рисунок 3.37

3.6 Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії, тому необхідно визначити будь-які дві точки, спільні для цих площин, або одну точку і напрям лінії перетину.

Якщо площини задані слідами і сліди перетинаються в межах креслення, то необхідно визначити точки перетину відповідних слідів площин. Ці точки спільні для двох площин. Вони є слідами лінії перетину цих площин (рис. 3.38).



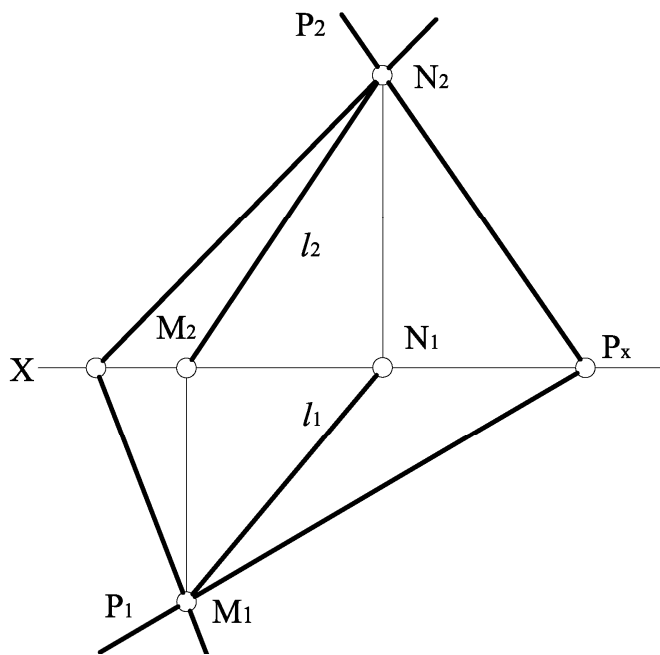
$$\theta_2 \cap P_2 = N_2$$

$$\theta_1 \cap P_1 = M_1$$

$$\theta \cap P = l$$

Рисунок 3.38

На рис. 3.39 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин, які задані слідами.

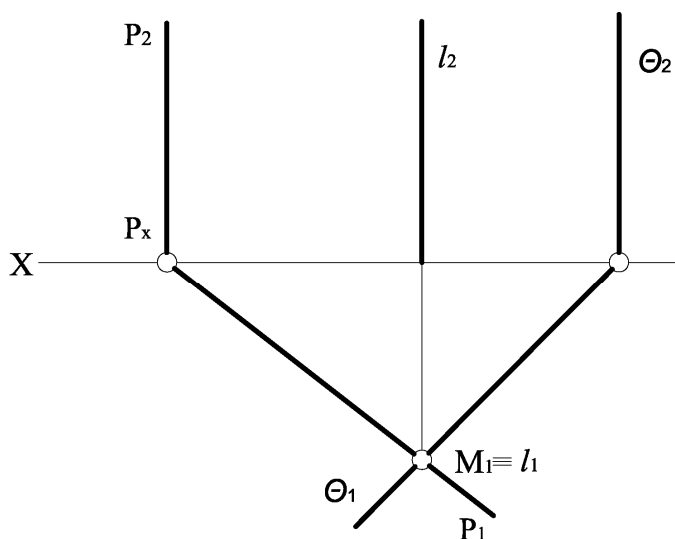


$$\begin{aligned} \theta_2 \cap P_2 &= N_2 \\ \theta_1 \cap P_1 &= M_1 \\ l_2 &= M_2 N_2 \\ l_1 &= M_1 N_1 \end{aligned}$$

Рисунок 3.39

Для визначення лінії перетину двох площин знаходимо спільні точки на перетині фронтальних і горизонтальних слідів: $\theta_2 \cap P_2 = N_2$; $\theta_1 \cap P_1 = M_1$. Потім будуємо фронтальну проекцію M_2 горизонтального сліду M_1 та горизонтальну проекцію N_1 фронтального сліду N_2 , а потім будуємо проекцію лінії перетину l_1 та l_2 , з'єднуючи відповідні проекції слідів.

Якщо дві площини перетину є проєкціювальними відносно однієї з площин проєкцій, то лінія їх перетину – проєкціювальна пряма (рис. 3.40).

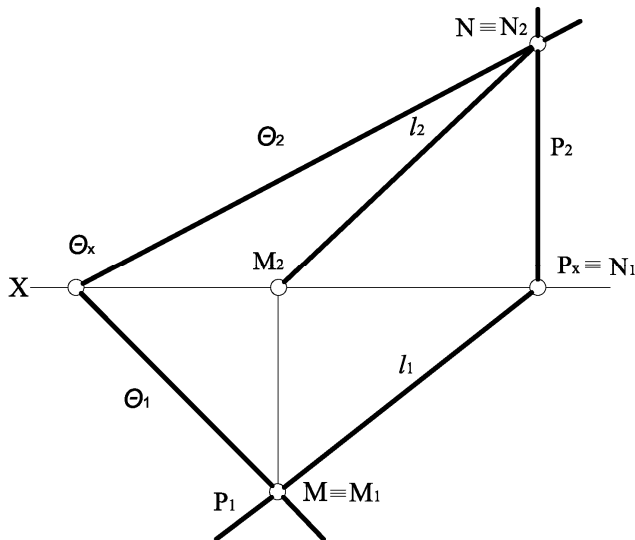


$$\begin{aligned} P &\perp \Pi_1 \\ \theta &\perp \Pi_1 \\ \theta_1 \cap P_1 &= M_1 \\ M_1 &\equiv l_1 \\ l_2 &\perp OX \\ l &\perp \Pi_1 \end{aligned}$$

Рисунок 3.40

У даному випадку результатом перетину двох горизонтально проєкціювальних площин є горизонтально проєкціювальна пряма $\ell : \theta \cap P = \ell$.

На рис. 3.41 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин, одна – загального положення, а друга – горизонтально проєкціювальна.

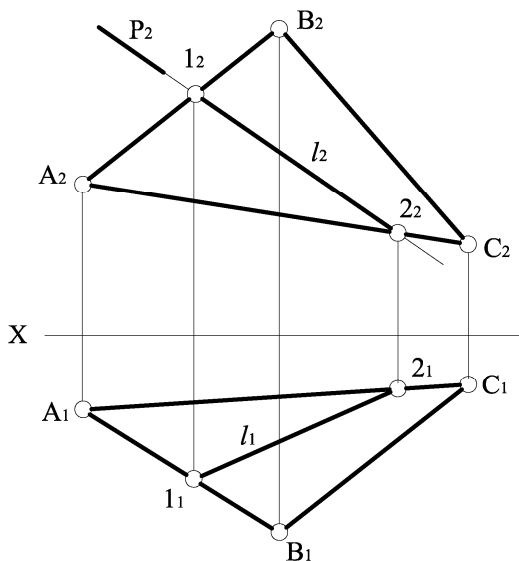


$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_1 \\
 &\theta_1 \cap P_1 = M_1 \\
 &\theta_2 \cap P_2 = N_2 \\
 &\ell_1 = M_1 N_1 \\
 &\ell_2 = M_2 N_2 \\
 &\theta \cap P = \ell
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.41

При розв'язанні визначаються точки перетину слідів цих площин. Важливою властивістю проєкціювальних площин є збиральні властивості: горизонтальна проєкція лінії перетину заданих площин збігається з горизонтальним слідом площини P . Звідси випливає, що в подібних випадках одна з проєкцій лінії перетину завжди відома, а інші необхідно визначити, спираючись на закони проєкційного зв'язку та закон належності.

На рис. 3.42 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину площин загального положення $\theta(A_2 B_2 C_2)$ з фронтально проєкціювальною P , яка задана слідом.



$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_2 \\
 &P_2 \cap (A_2 B_2 C_2) = 1_2 - 2_2 \\
 &\ell_2 = 1_2 - 2_2 \\
 &\ell_1 = 1_1 - 2_1 \\
 &P \cap \theta = \ell
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.42

Завдяки збиральним властивостям проєкціювальних площин на Π_2 маємо готову проєкцію лінії перетину. Використовуючи проєкційний зв'язок і закон належності, будуємо горизонтальну проєкцію лінії перетину.

У більш загальних випадках, коли площини задані слідами, а сліди не перетинаються в межах креслення, або обидві площини задані лініями або плоскими відсіками, необхідно для побудови лінії перетину двох площин застосовувати метод допоміжних січних площин, якими є проєкціювальні площини або площини рівня.

На рис. 3.43 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин загального положення, які задані відсіками площин.

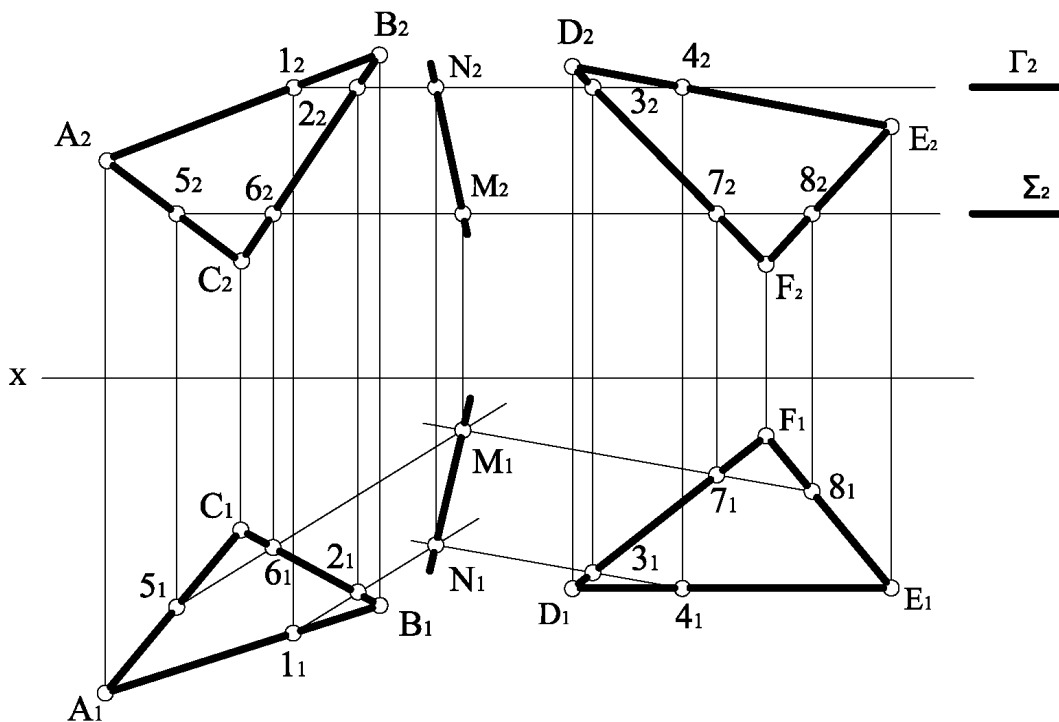


Рисунок 3.43

Визначення лінії перетину площини θ (ABC) з площиною Λ (DEF) проводимо в такій послідовності:

1 Проводимо допоміжну січну горизонтальну площину рівня Γ , яка перетинає обидві площини, $\Gamma_2 \parallel ox$.

2 Визначаємо фронтальні проєкції ліній перетину обох площин завдяки збиральним властивостям площини рівня:

$$\theta_2(A_2B_2C_2) \cap \Gamma_2 = 1_2 - 2_2, \Lambda_2(D_2E_2F_2) \cap \Gamma_2 = 3_2 - 4_2.$$

3 Використовуючи проєкційний зв'язок і закон належності, визначаємо горизонтальні проєкції ліній перетину обох площин, а також спільну точку, яка належить одночасно трьом площинам:

$$(1_1 - 2_1) \cap (3_1 - 4_1) = N_1.$$

4 Використовуючи проєкційний зв'язок і закон належності, визначимо фронтальну проєкцію спільної точки N_2 , яка належить сліду R_2 .

Для визначення лінії перетину площин θ і Λ необхідна ще одна спільна точка M , яку знаходимо, використовуючи ще одну допоміжну площину Σ у такій же послідовності.

$$\theta(ABC) \cap \Lambda(DEF) = MN.$$

3.7 Паралельність прямої і площини

Пряма лінія паралельна площині, якщо в цій площині є пряма лінія, яка паралельна заданій прямій.

На рис. 3.44 наведено приклад побудови на комплексному кресленні через точку A прямої, яка паралельна заданій площині θ .

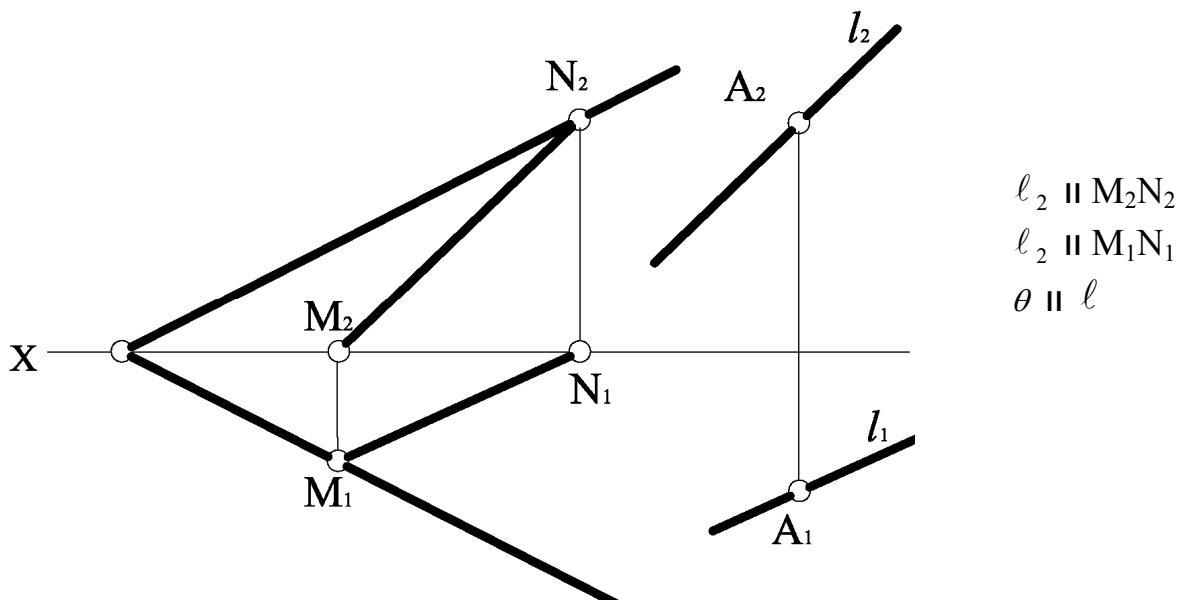


Рисунок 3.44

Спочатку в площині θ будемо довільну пряму MN , яка належить площині, а потім через точку A проводимо пряму $\ell \parallel MN$.

Через точку, яка не належить площині, можна провести нескінченну кількість прямих, які паралельні заданій площині. Для отримання одного варіанта побудови необхідні додаткові умови, наприклад побудувати пряму, яка паралельна одночасно двом площинам.

На рис. 3.45 наведено приклад побудови на комплексному кресленні через точку D прямої ℓ , яка паралельна заданій площині $\theta(ABC)$ і горизонтальній площині проєкцій Π_1 .

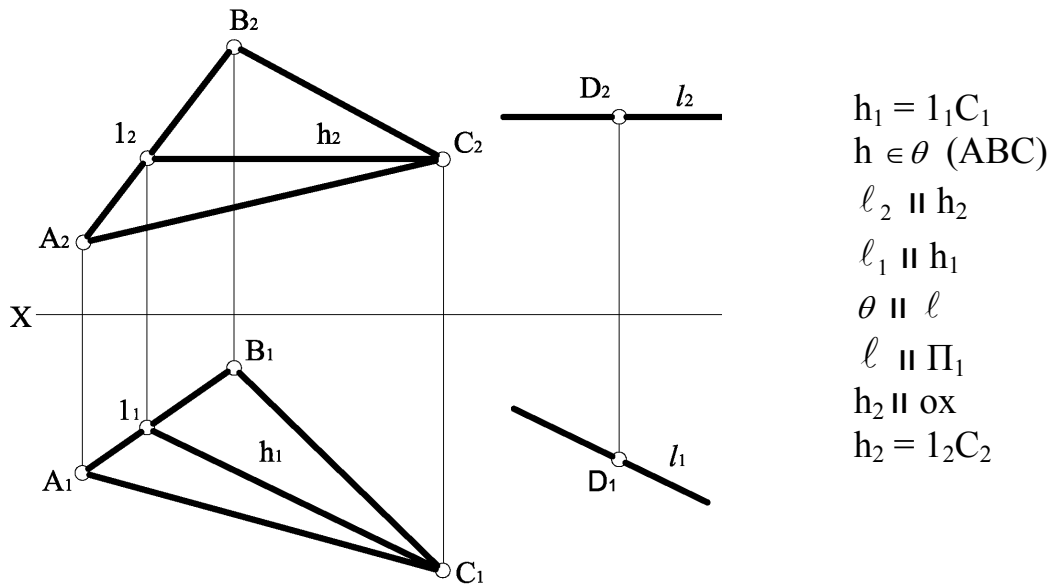


Рисунок 3.45

3.8 Перетин прямої і площини

Задача на знаходження точки перетину прямої з площиною належить до позиційних задач, які визначають взаємне положення геометричних фігур, взаємну належність геометричних фігур, а також перетин геометричних фігур.

Розрізняють також метричні задачі, у яких визначають відстані між двома точками, натуральні величини відрізка прямої, площі плоских фігур.

При перетині прямої з площиною для покращення наочності креслення для видимих ліній застосовують суцільні основні лінії, а для невидимих ліній – штрихові. При визначенні видимості ліній на комплексному кресленні вважають, що:

- а) площини і поверхні непрозорі;
- б) спостерігач завжди знаходиться в першій чверті або першому октанті.
- в) промінь зору від спостерігача є перпендикуляром до тієї площини проєкцій, відносно до якої визначається видимість.

На рис. 3.46 наведено наочне зображення конкуруючих точок відносно Π_1 та Π_2 .

Точки, які належать різним геометричним фігурам і лежать на одному проєкціювальному промені, називаються конкуруючими у видимості відносно тієї площини проєкцій, до якої проєкціювальний промінь є перпендикуляром.

Точки А і В є конкуруючими відносно горизонтальної площини проєкцій Π_1 , а точки С і D є конкуруючими відносно фронтальної площини проєкцій Π_2 .

На рис. 3.47 наведено приклад зображення конкуруючих точок на комплексному кресленні.

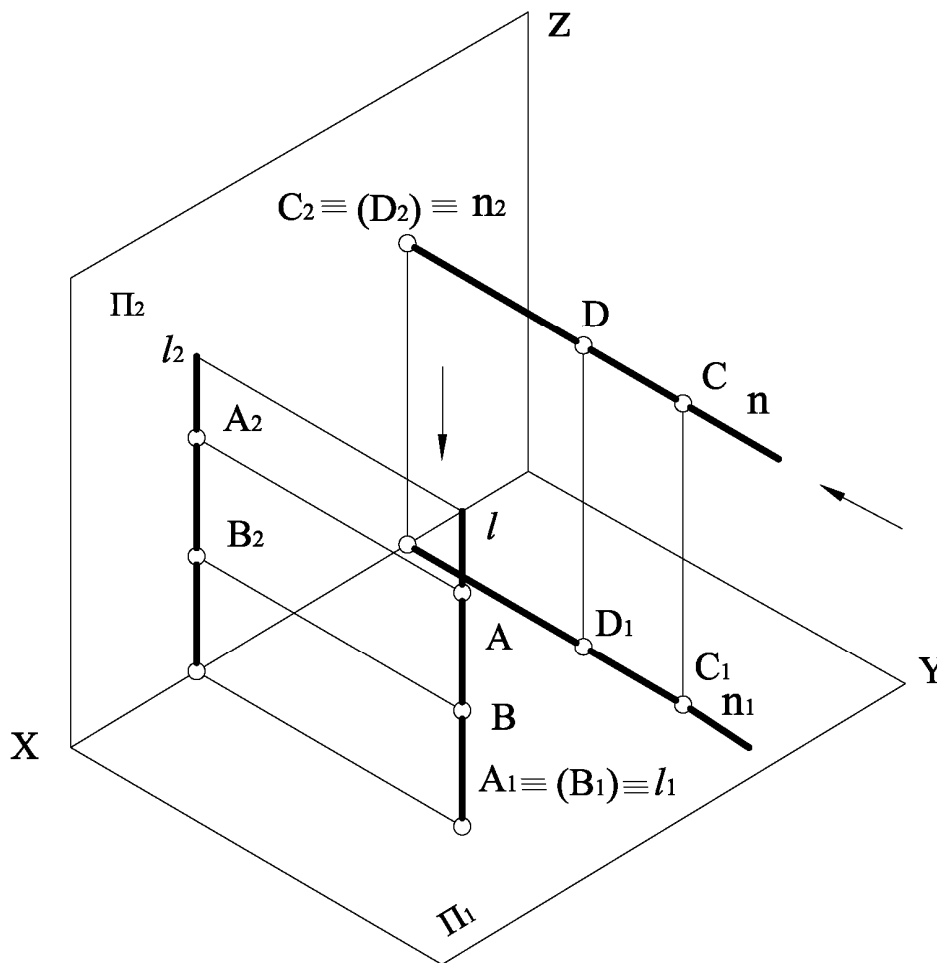


Рисунок 3.46

Точки А і В лежать на одному проєкціювальному промені $\ell \perp \Pi_1$, ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини Π_1 . Точка А видима, вона закриває точку В, яка невидима і її беруть у дужки.

Точки С і D також лежать на одному проєкціювальному промені $n \perp \Pi_2$, ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини Π_2 . Точка С – видима, D – невидима. На комплексному кресленні з двох конкуруючих точок видимою буде та проєкція, яка на більшій відстані знаходиться від площини проєкцій, відносно якої вони конкурують.

Задача на перетин прямої з площиною є однією з основних позиційних задач.

На рис. 3.48 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину фронтально проєкціювальної площини θ і горизонтально проєкціювальної прямої ℓ .

На рис. 3.49 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення ℓ з горизонтально проєкціювальною площиною $\theta(ABC)$.

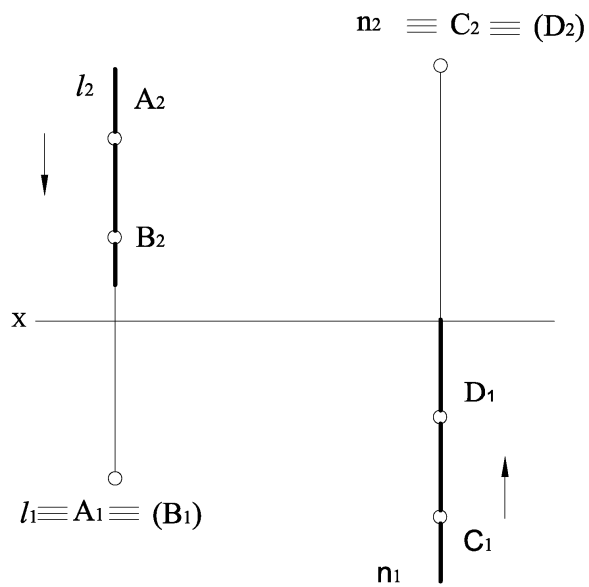
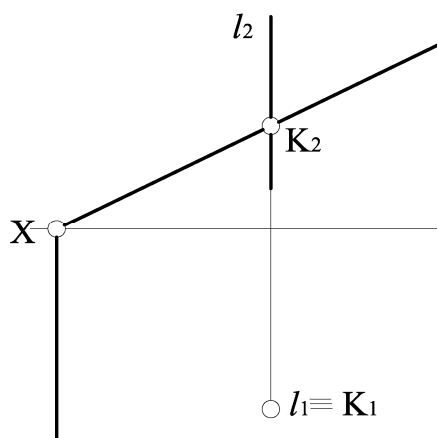


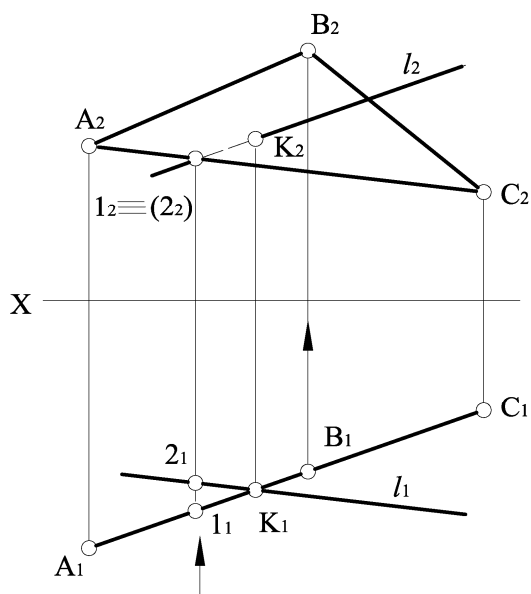
Рисунок 3.47



$$l_2 \cap \theta_2 = K_2$$

$$l_1 \equiv K_1$$

Рисунок 3.48



$$\theta(ABC) \perp \Pi_1$$

$$(A_1 B_1 C_1) \cap l_1 = K_1$$

Рисунок 3.49

Завдяки збиральним властивостям проєкціювальних площин $\theta(ABC) \perp \Pi_1$ на Π_1 маємо готову проєкцію точки перетину K_1 , використовуючи проєкційний зв'язок і належність точки K прямій ℓ , будуємо фронтальну проєкцію точки перетину K_2 .

На рис. 3.50 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення ℓ з площиною загального положення $\theta(ABC)$.

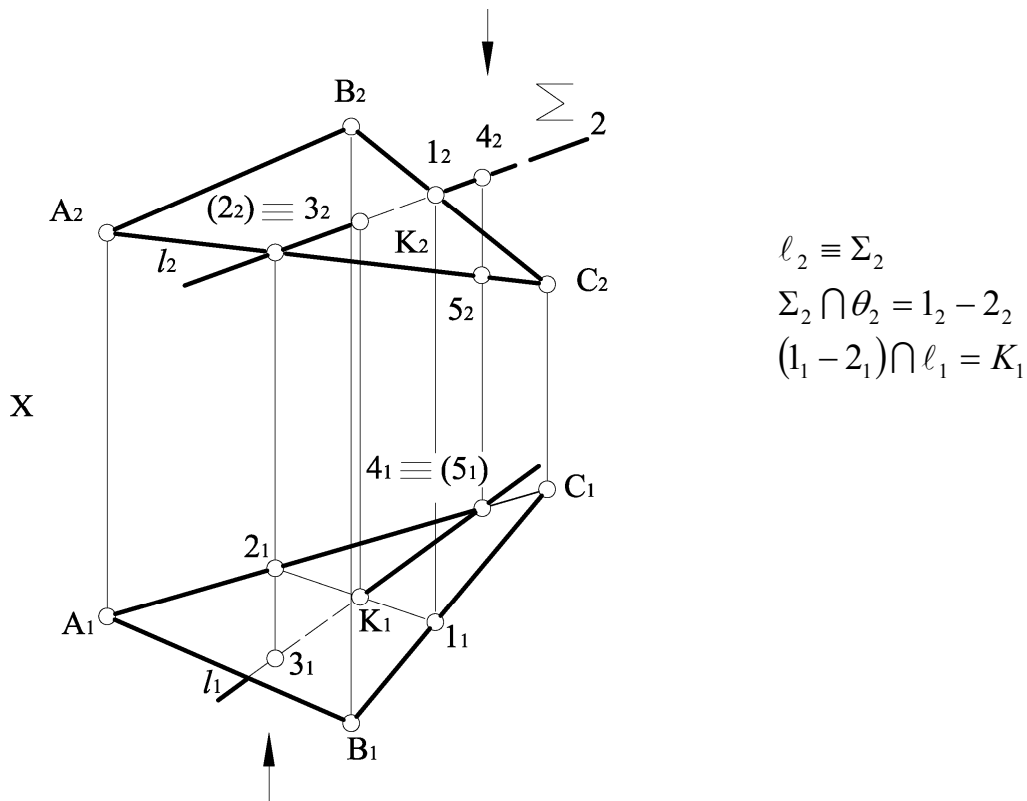


Рисунок 3.50

Алгоритм розв'язання задачі складається з чотирьох операцій:

1 Прямую поміщають у допоміжну площину: через пряму проводять фронтально проєкціювальну площину $\Sigma(\ell_2 \equiv \Sigma_2)$.

2 Знаходять лінію перетину заданої площини $\theta(ABC)$ з допоміжною Σ : $\Sigma_2 \cap \theta_2 = 1_2 - 2_2$. За фронтальною проєкцією визначають горизонтальну проєкцію $1_1 - 2_1$.

3 Визначають точку перетину двох прямих: $(1_1 - 2_1) \cap \ell_1 = K_1$, її фронтальну проєкцію визначають за вертикальною відповідністю.

4 Видимість відрізків прямої ℓ визначають за допомогою конкуруючих точок 2 і 3 для фронтальної площини проєкцій, та точок 4 і 5 – для горизонтальної площини проєкції.

На рис. 3.51 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення n з площиною загального положення θ , яка задана слідами.

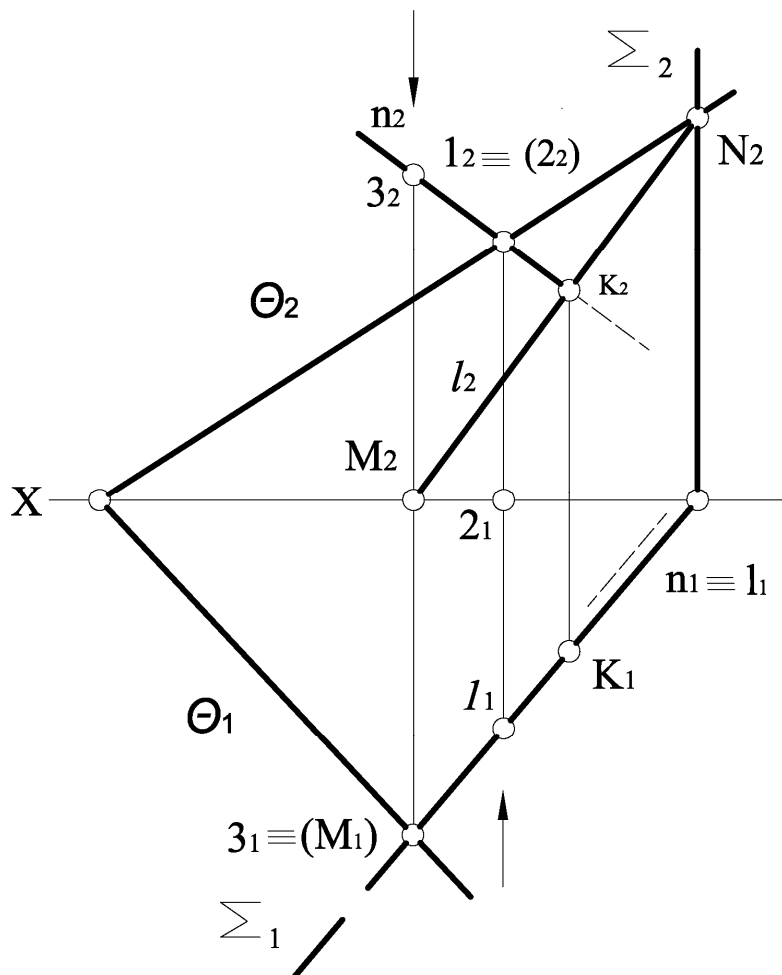


Рисунок 3.51

Послідовність визначення точки перетину $\theta \cap n = K$ складається з чотирьох операцій:

1 Через пряму n проводимо горизонтально проєкціювальну площину Σ :

$$n_1 \equiv \Sigma_1.$$

2 Знаходимо лінію перетину заданої площини θ з допоміжною Σ :

$$\theta \cap \Sigma = \ell, \text{ тобто } \ell_1 = M_1N_1, \text{ а } \ell_2 = M_2N_2.$$

3 Визначаємо точку перетину двох прямих:

$$n_2 \cap \ell_2 = K_2,$$

а K_1 визначаємо за вертикальною відповідністю.

4 Видимість відрізків прямої n визначаємо за допомогою конкуруючих точок 1 і 2 для фронтальної площини проєкцій та 3 і М – для горизонтальної площини проєкцій.

3.9 Перпендикулярність прямої і площини

Пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до кожної з двох прямих перетину, які належать цій площині.

Якщо в площині брати не довільні прямі перетину, а її горизонталь та фронталь, то виникає можливість використати теорему про проєкціювання прямого кута:

Якщо одна з двох взаємно перпендикулярних прямих є прямою окремого положення, то прямий кут між ними проєкціюється без спотворень на ту площину проєкцій, до якої пряма окремого положення є паралельною.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини Σ , то її горизонтальна проєкція l_1 перпендикулярна до горизонтальної проєкції горизонталі h_1 цієї площини, а фронтальна проєкція l_2 перпендикулярна до фронтальної проєкції фронталі f_2 цієї площини.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини, заданої слідами, то її горизонтальна проєкція l_1 перпендикулярна до горизонтального сліду h_1^0 цієї площини, а фронтальна проєкція l_2 перпендикулярна до фронтального сліду f_2^0 цієї площини.

На рис. 3.52 наведено приклад побудови перпендикуляра до площини θ , яка задана головними лініями цієї площини в точці К.

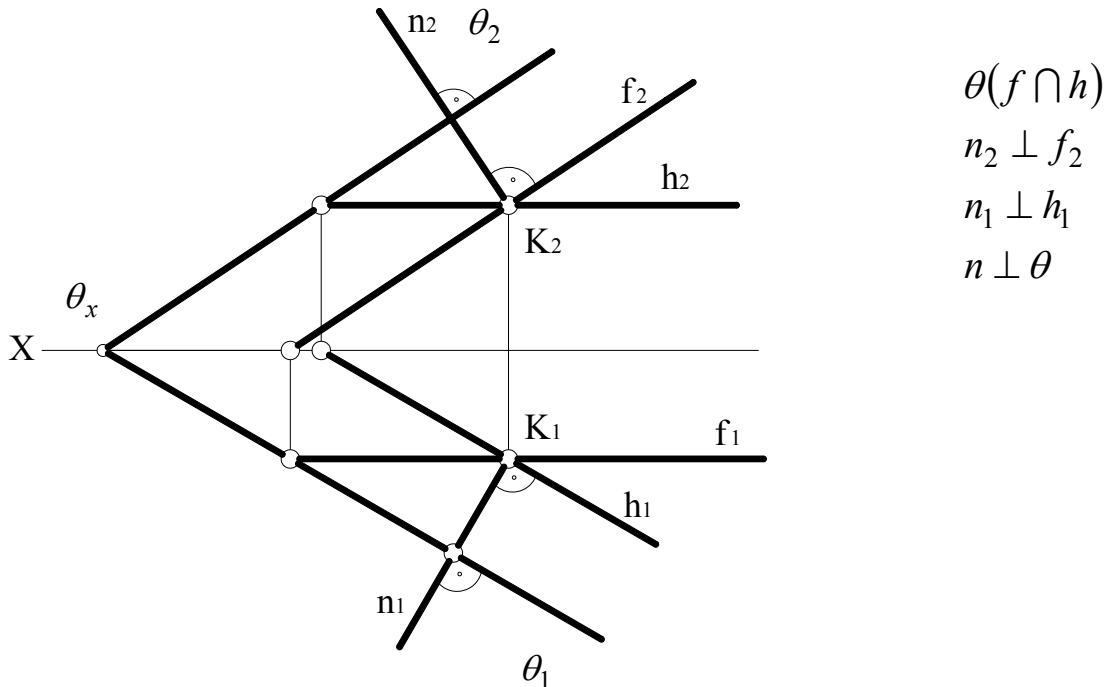
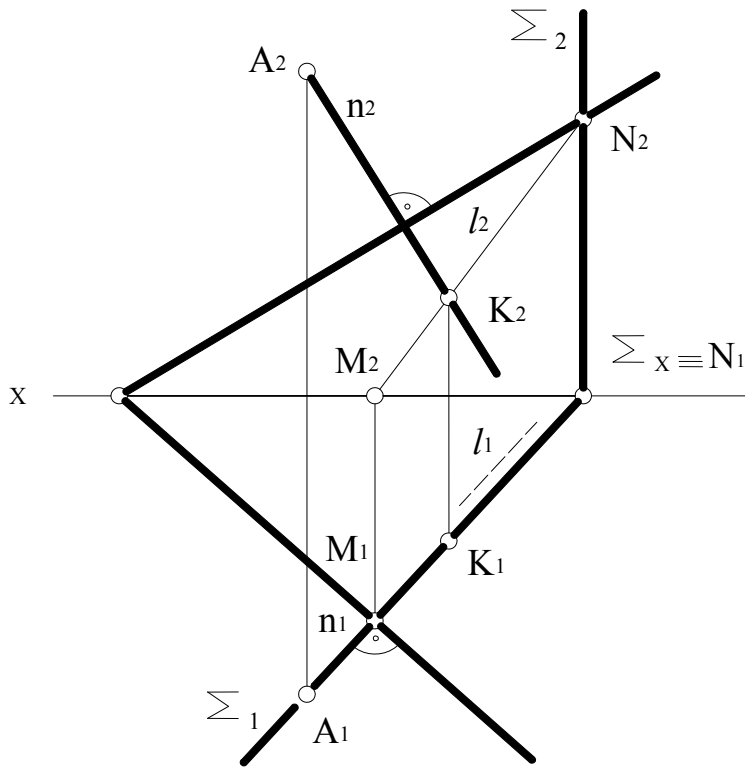


Рисунок 3.52

У наступному прикладі (рис. 3.53) площина загального положення θ задана слідами. Необхідно з точки А опустити перпендикуляр на площину θ та знайти його основу.



$$\begin{aligned}
 & A \in n \\
 & n_2 \perp \theta_2 \\
 & n_1 \perp \theta_1 \\
 & \Sigma_1 \equiv n_1 \\
 & \theta \cap \Sigma = \ell \\
 & \ell_2 = M_2 N_2 \\
 & \ell_1 = M_1 N_1 \\
 & n_2 \cap \ell_2 = K_2
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.53

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1 Із точки А опускаємо перпендикуляр n до площини θ , при цьому $n_2 \perp \theta_2$, а $n_1 \perp \theta_1$.

2 Основу перпендикуляра визначаємо за допомогою допоміжної горизонтально проєкціювальної площини $\Sigma (n_1 \equiv \Sigma_1)$.

3 Знаходимо лінію перетину заданої площини θ з допоміжною Σ : $\ell_1 = M_1 N_1, \ell_2 = M_2 N_2$.

4 Визначаємо точку перетину: $n_2 \cap \ell_2 = K_2$, а K_1 визначаємо за вертикальною відповідністю.

На рис. 3.54 наведено приклад визначення відстані від точки Д до площини загального положення АВС, яка задана відсіком площини. Для цього необхідно з точки Д опустити перпендикуляр на площину АВС, визначити його основу та знайти натуральну величину відрізка цього перпендикуляра.

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1 Будуємо головні лінії площини АВС: h – горизонталь, f – фронталь.

2 З точки Д будуємо проєкції перпендикуляра n : $n_2 \perp f_2, n_1 \perp h_1$.

3 Основу перпендикуляра n визначаємо за допомогою допоміжної горизонтально проєкціювальної площини Σ , яка перетинає відсік по прямій 3-4. Основою перпендикуляра є точка К, фронтальну проєкцію якої знаходимо на Π_2 : $n_2 \cap (3_2 - 4_2) = K_2$, а K_1 визначаємо за вертикальною відповідністю.

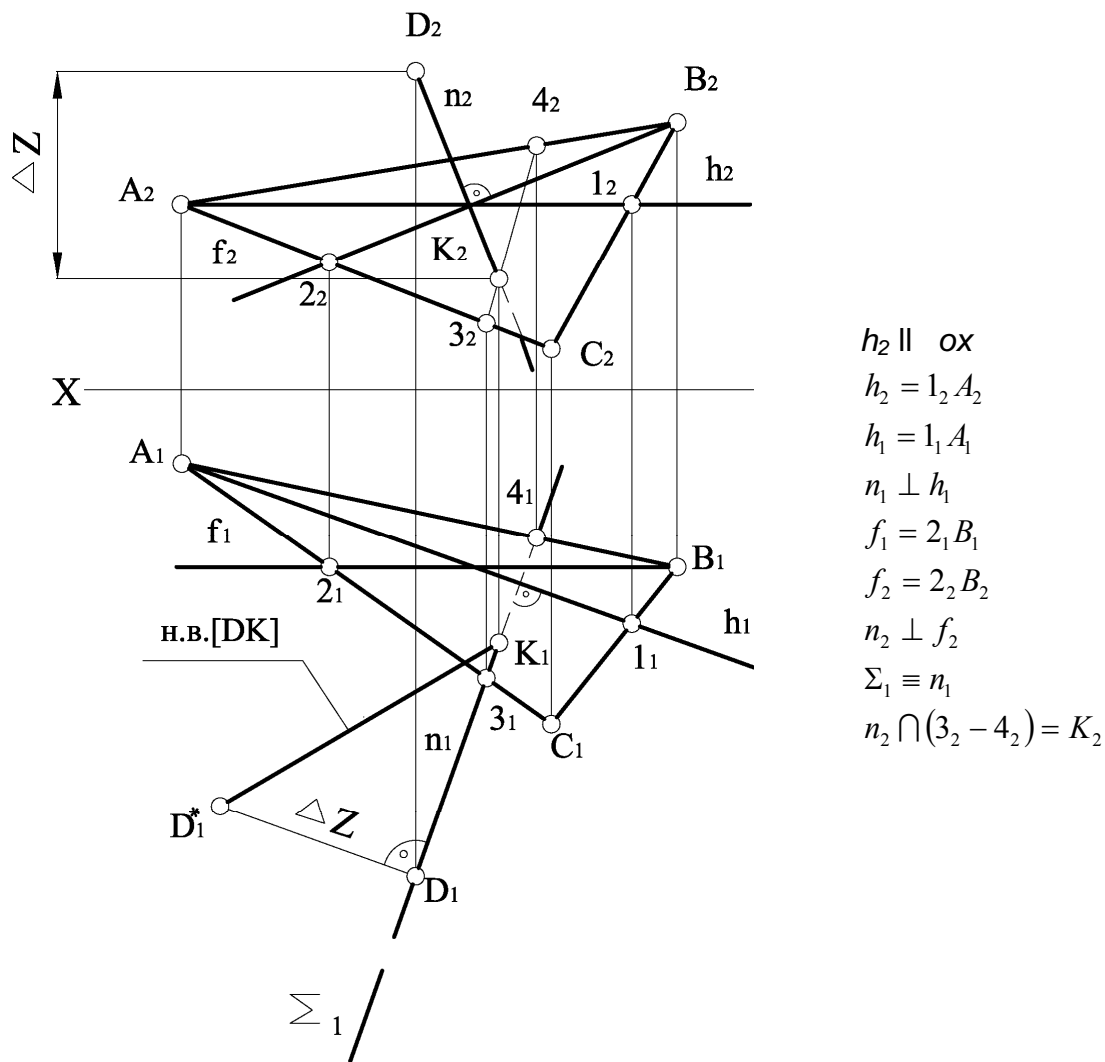


Рисунок 3.54

4 Проекції відстані від точки до площини – D_1K_1 і D_2K_2 . Способом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка [DK], що вимірює відстань від точки D до площини ABC

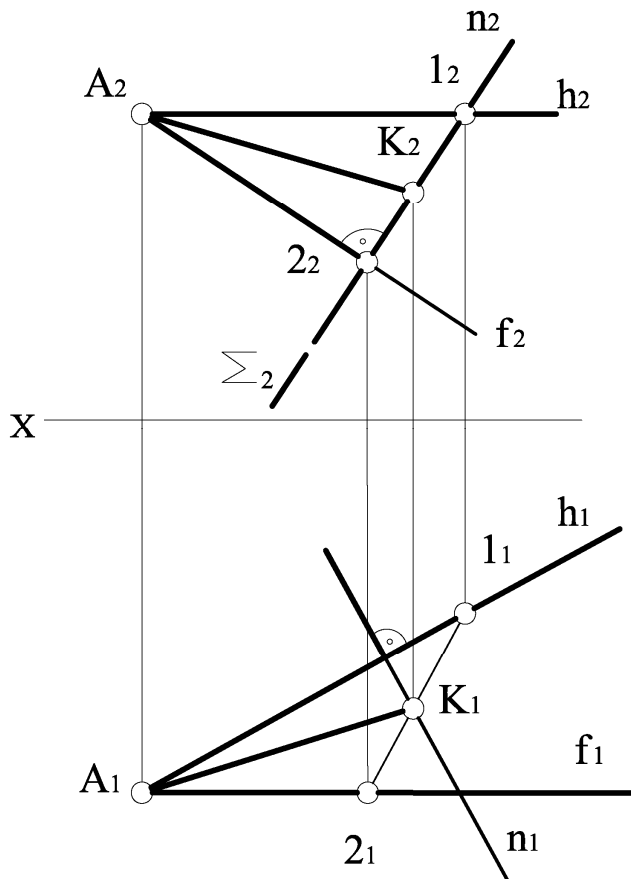
3.10 Перпендикулярність прямих загального положення

Прямий кут між перпендикулярними прямими загального положення на площини проєкцій проєціюється із спотвореннями. Задачу побудови перпендикуляра до прямої загального положення розв'язують за допомогою умови перпендикулярності прямої та площини.

Розглянемо випадок побудови перпендикуляра з точки A до прямої загального положення n (рис. 3.55).

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких графічних операцій:

1 Через точку A проводимо площину θ , яка перпендикулярна прямій n : $\theta(f \cap h) \perp n$.



$h_2 \parallel ox$
 $f_2 \perp n_2$
 $h_1 \perp n_1$
 $f_1 \parallel ox$
 $\theta(h \cap f) \perp n$
 $\Sigma_2 \cap (h_2 \cap f_2) = 1_2 - 2_2$
 $(1_1 - 2_1) \cap n_1 = K_1$
 $AK \perp n$

Рисунок 3.55

2 Визначаємо точку перетину прямої n з площиною θ . Для цього використовуємо допоміжну фронтально проєкціювальну площину $\Sigma(\Sigma_2 \equiv n_2)$: $\Sigma_2 \cap \theta_2(h_2 \cap f_2) = 1_2 - 2_2$; $(1_1 - 2_1) \cap n_1 = K_1$, а K_2 визначаємо за вертикальною відповідністю.

3 З'єднуємо точку A з точкою K . $AK \perp n$, тому що він належить площині, яка перпендикулярна прямій n . Таким чином, дві прямі перпендикулярні, якщо одна з них належить площині, яка перпендикулярна до другої прямої.

3.11 Перпендикулярність площин

Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одній із них належить пряма, яка перпендикулярна до іншої площини.

Побудову площини P , яка перпендикулярна до площини θ , можна виконати двома шляхами:

1 Площину P будемо через пряму m , яка перпендикулярна до площини θ : $(m \perp \theta) \wedge (m \in P) \Rightarrow P \perp \theta$.

2 Площину P будемо перпендикулярно до прямої n , яка лежить у площині Q або паралельна цій площині: $(n \parallel \theta) \wedge (n \perp P) \Rightarrow P \perp \theta$, оскільки через пряму m можливо провести безліч площин (перший шлях), а також у площині або паралельно до неї можливо провести безліч прямих

кож у площині або паралельно до неї можливо провести безліч прямих n (другий шлях), то задача має безліч розв'язків. Для отримання одного розв'язку необхідно накласти додаткові умови.

На рис. 3.56 наведено приклад побудови на комплексному кресленні для заданої площини $P(\triangle ABC)$ із точки D перпендикулярної площини θ .

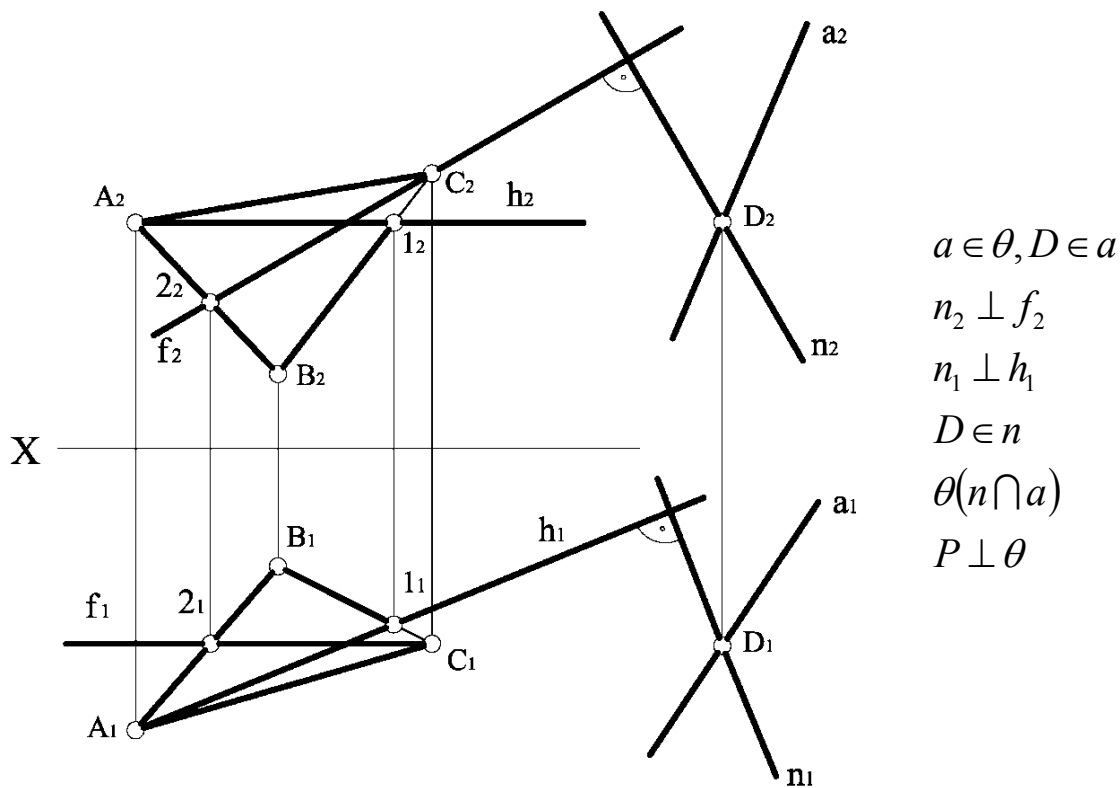


Рисунок 3.56

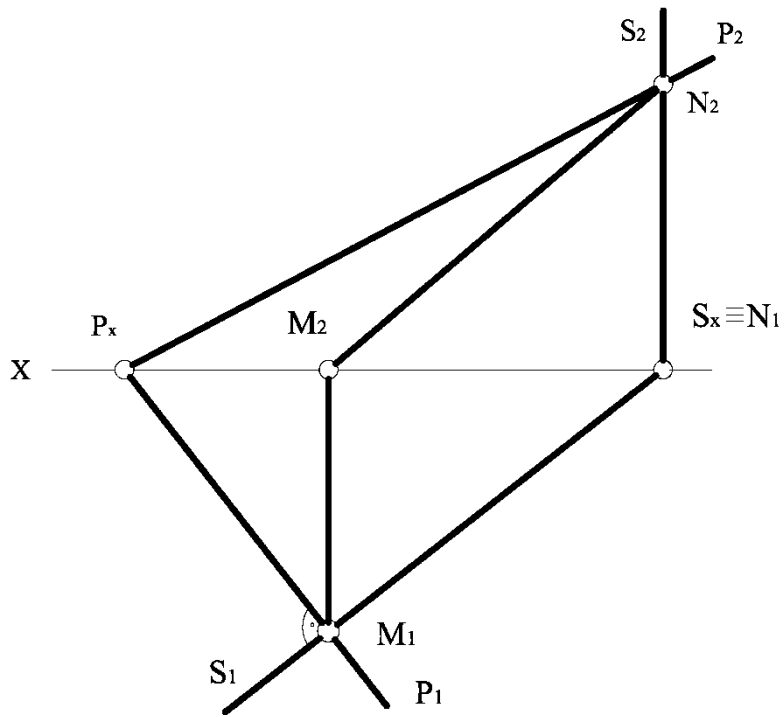
Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

- 1 Будуємо головні лінії площини ABC : h – горизонталь, f – фронталь.
- 2 З точки D будуємо пряму n , яка перпендикулярна до площини ABC : $n_2 \perp f_2, n_1 \perp h_1$
- 3 Через точку D будуємо пряму a загального положення: $P(ABC) \perp \theta(n \cap a)$.

На рис. 3.57 наведено приклад побудови на комплексному кресленні двох взаємно перпендикулярних площин, які задані слідами, одна з яких – площина загального положення P , а інша – горизонтально проєкціувальна площина S .

Якщо площина S перпендикулярна до площини Π_1 та до площини P , то $S \perp P_1$, як до лінії перетину площини P та горизонтальної площини проєкцій Π_1 , тому $P_1 \perp S_1$, як до однієї з прямих у площині S .

Проте, якщо однойменні сліди двох площин загального положення взаємно перпендикулярні, то самі площини не перпендикулярні між собою, оскільки при цьому не дотримується умова перпендикулярності площин.



$$(S \perp \Pi_1) \wedge (S \perp P) \Rightarrow S \perp P_1$$

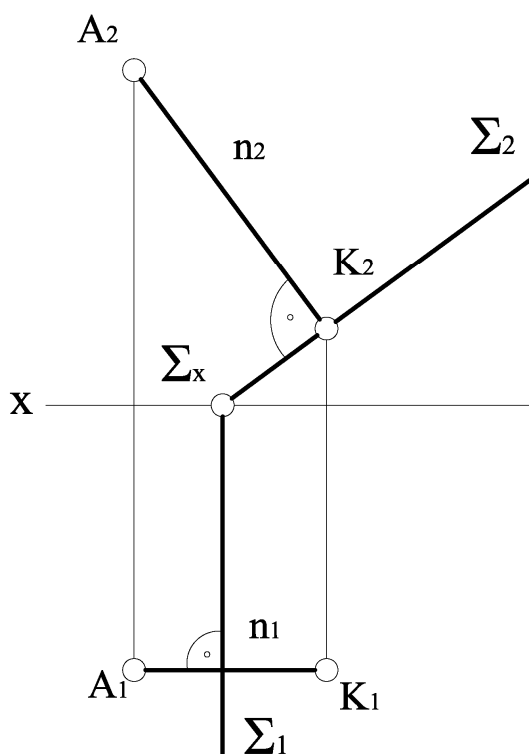
Рисунок 3.57

4 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

4.1 Метод заміни площин проекцій

У багатьох випадках розв'язання задачі значно спрощується, якщо прямі лінії, площини, елементи геометричних фігур займають окреме положення.

На рис. 4.1 наведено приклад знаходження відстані від точки A до фронтально проекціювальної площини Σ , яка задана слідами.



$$\begin{aligned}n_2 &\perp \Sigma_2 \\n_1 &\perp \Sigma_1 \\n_2 \cap \Sigma_2 &= K_2 \\A_2K_2 &= n.v.[AK]\end{aligned}$$

Рисунок 4.1

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1 З точки A опускаємо перпендикуляр до площини Σ : $n_2 \perp \Sigma_2, n_1 \perp \Sigma_1$, оскільки $\Sigma_2 = f_2^0, \Sigma_1 = h_1^0$.

2 Завдяки збиральним властивостям проекціювальних площин на Π_2 знаходимо фронтальну проекцію точки перетину перпендикуляра n з площиною Σ : $n_2 \cap \Sigma_2 = K_2$. Горизонтальну проекцію K_1 визначаємо за вертикальною відповідністю.

3 Пряма AK є фронталлю, тому $A_2K_2 = n.v.[AK]$.

Переміщення геометричної фігури із загального положення в окреме можна виконати двома шляхами:

1 Переміщенням площин проекцій у положення, відносно яких плоскі фігури займали б окремі положення.

2 Переміщенням плоскої фігури в просторі в окреме положення відносно нерухомих площин проекцій.

Перший шлях лежить в основі методу заміни площин проєкцій, а другий – в основі інших методів.

Суть методу полягає в тому, що самі геометричні фігури не змінюють свого положення, а в системі площин проєкцій Π_2 та Π_1 послідовно заміняють одну, дві або більше площин проєкцій. При цьому нова площина проєкцій має бути перпендикулярною до тієї площини проєкцій, яка залишається незмінною, а відносно плоских геометричних фігур вона повинна бути паралельною або перпендикулярною.

На рис. 4.2 зображена умовно перспективна модель проєкціювання точки A на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій Π_1 та Π_2 , а також на додаткову площину Π_4 , яка перпендикулярна Π_1 . У результаті утворилась нова система площин проєкцій $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ зі своєю віссю проєкцій x_{14} , як

наслідок перетину площин проєкцій Π_1 та Π_4 . Положення горизонтальної проєкції A_1 точки A залишається без зміни, оскільки точка A та площина Π_1 не змінювали свого положення в просторі. Для знаходження нової фронтальної проєкції точки A – A_4 достатньо виконати ортогональне проєкціювання точки A на площину Π_4 . Відстань нової фронтальної проєкції A_4 точки A від нової осі x_{14} дорівнює відстані від старої фронтальної проєкції A_2 точки A до старої осі x_{12} : $|A_4x_{14}| = |A_2x_{12}| = |AA_1|$.

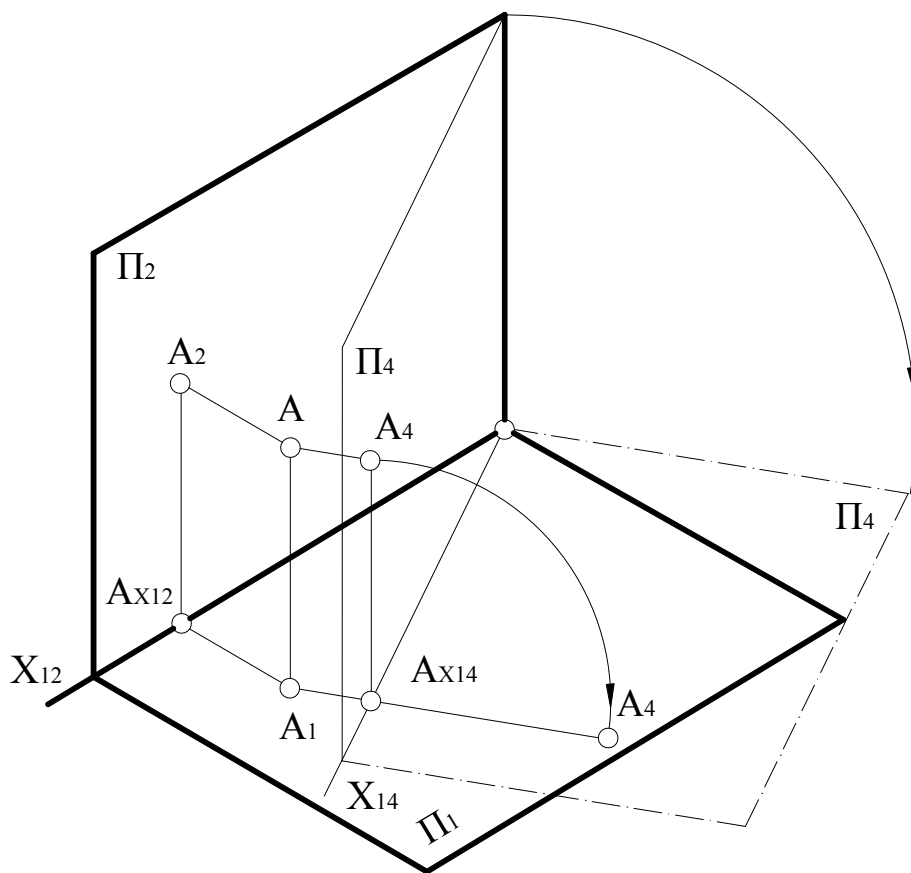


Рисунок 4.2

Для побудови комплексного креслення нова площина проєкцій Π_4 обертається навколо осі x_{14} до суміщення з горизонтальною площиною проєкцій Π_1 (рис. 4.3). Напря́м обертання не впливає на результат розв’язання задачі. Обертання виконують таким чином, щоб не було накладання нових проєкцій на старі.

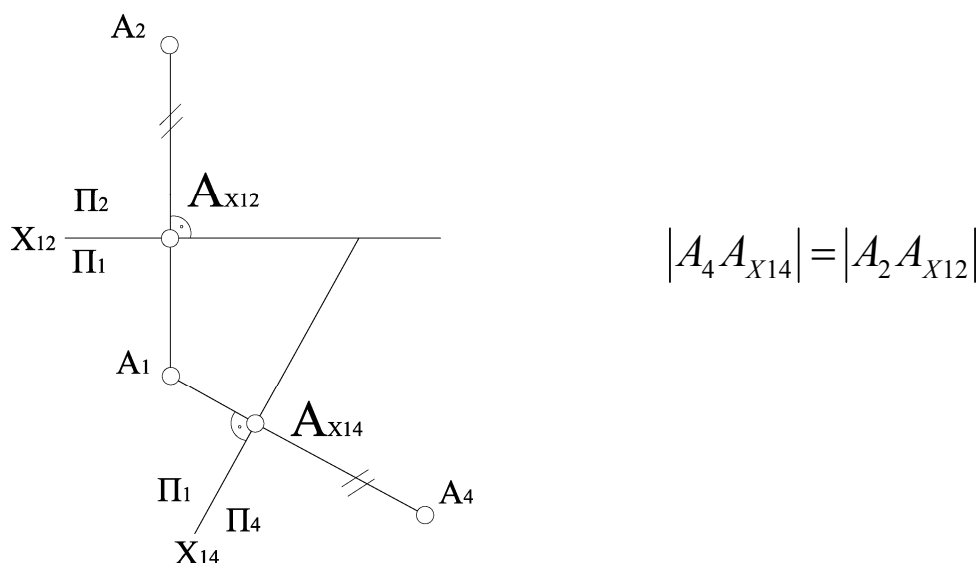


Рисунок 4.3

Заміна горизонтальної площини проєкцій Π_1 на нову площину Π_4 та побудова нових проєкцій точки A в системі $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ відбувається аналогічно розглянутому випадку. Тепер без змін залишається фронтальна проєкція точки, а для побудови нової горизонтальної проєкції A_4 точки A необхідно зі старої фронтальної проєкції точки опустити перпендикуляр (провести лінію зв’язку) на нову вісь x_{24} та відкласти на ньому від точки перетину з віссю x_{24} відрізок, що дорівнює відстані від горизонтальної проєкції точки до осі x_{12} (рис. 4.4).

Розв’язання всіх задач методом заміни площин проєкцій зводиться до розв’язання чотирьох основних задач:

- 1 Перетворення прямої загального положення в пряму рівня.
- 2 Перетворення прямої загального положення в проєкціювальну.
- 3 Перетворення площини загального положення в проєкціювальну.
- 4 Перетворення площини загального положення в площину рівня.

На рис. 4.5 зображено розв’язання перших двох задач перетворення прямої загального положення в пряму рівня та перетворення її в проєкціювальну. У системі $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ відрізок прямої AB займає загальне положення. Для перетворення відрізка прямої в пряму рівня будуємо на довільній відстані від відрізка площину Π_4 , яка паралельна проєкції відрізка A_1B_1 , а також ця площина $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

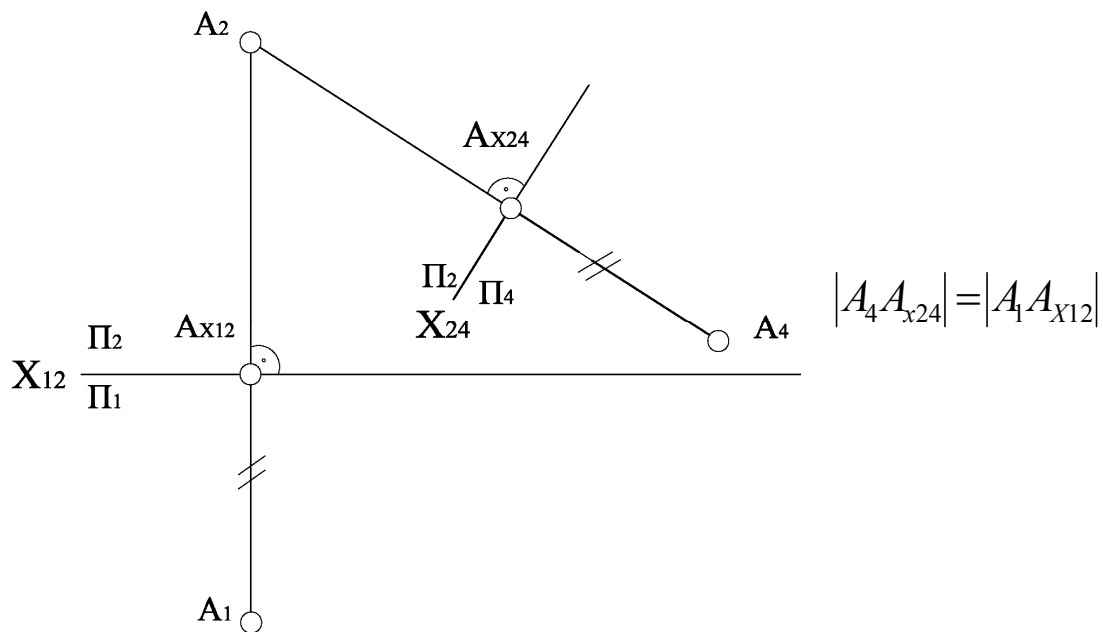


Рисунок 4.4

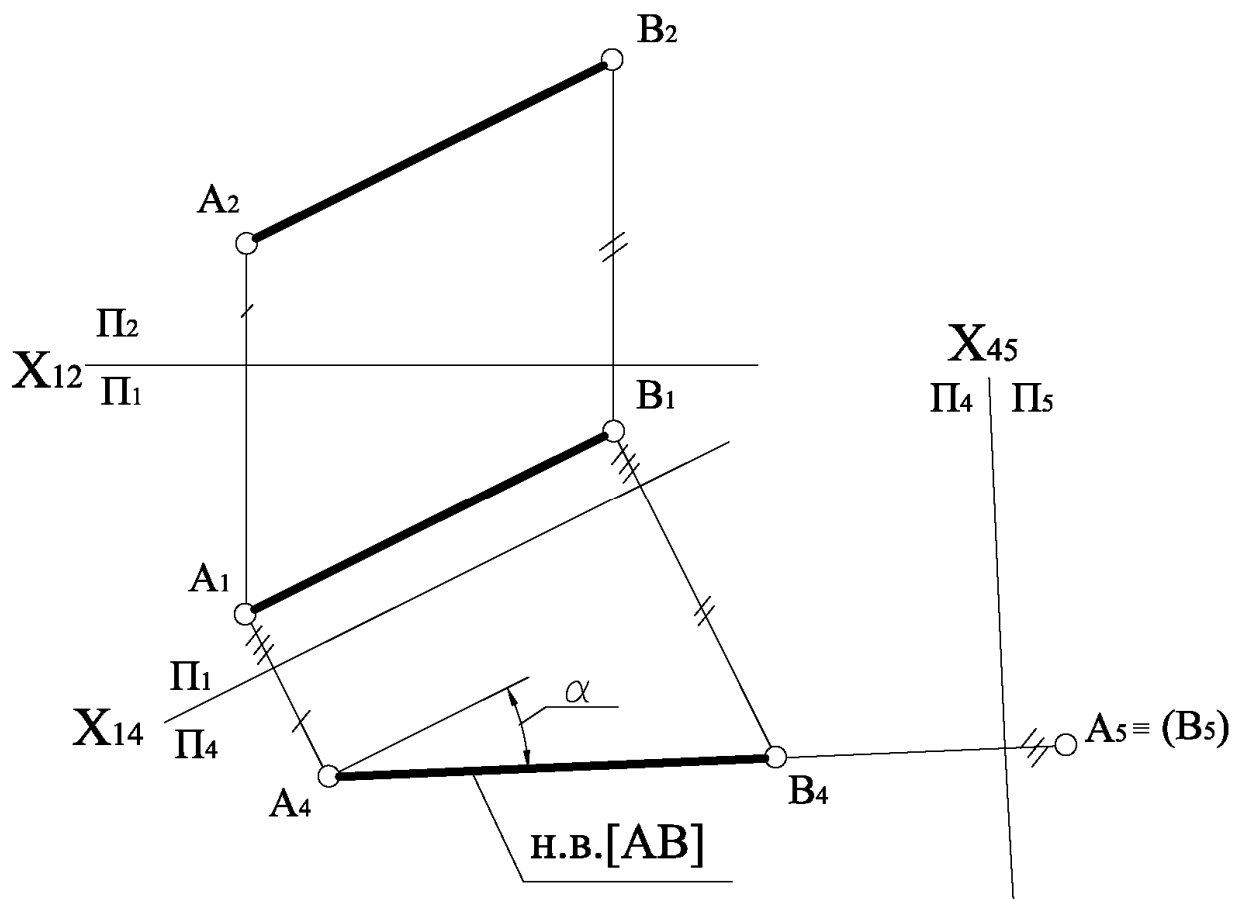


Рисунок 4.5

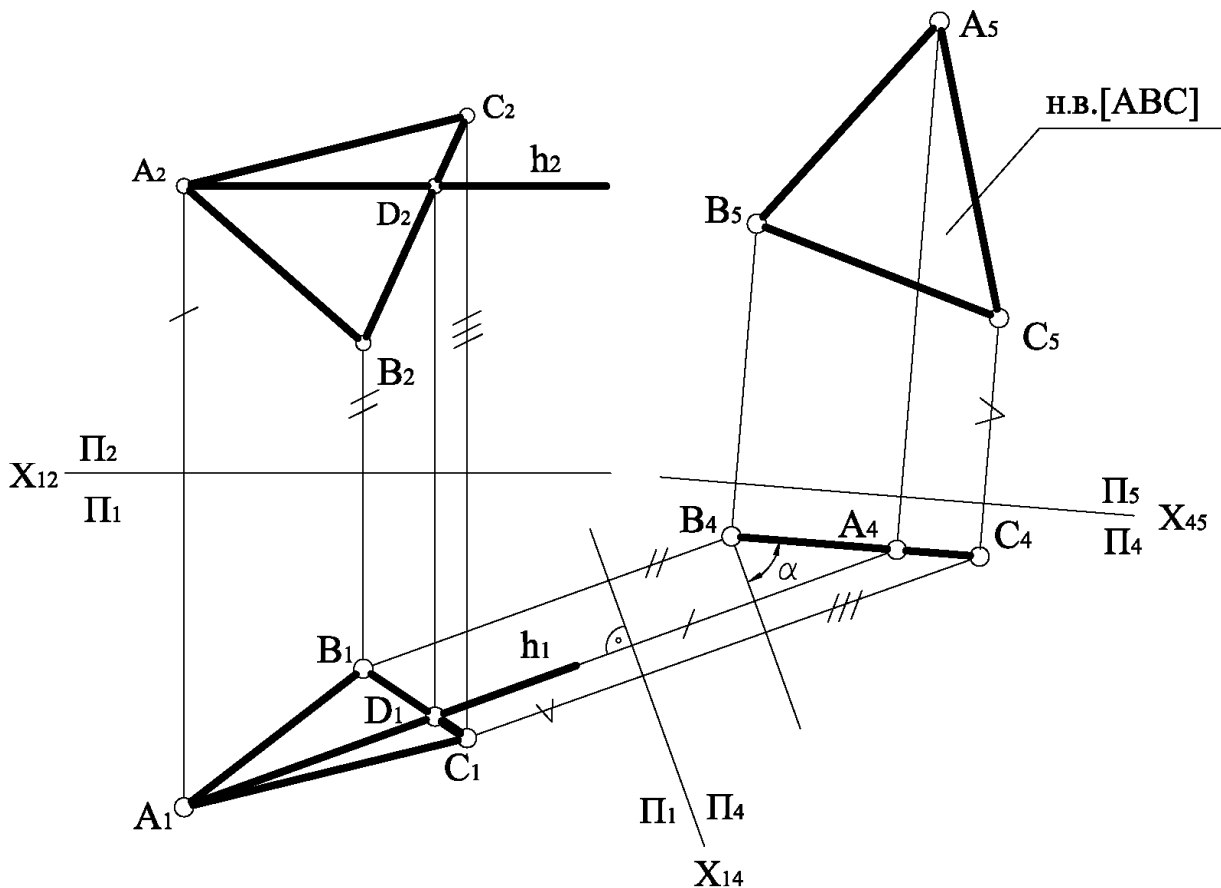
Щоб отримати натуральну величину відрізка, від осі x_{14} відкладаємо відстані, що дорівнюють відстаням від точок A_2 і B_2 до осі x_{12} . У системі $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ відрізок прямої AB стає прямою рівня і на площині проєкцій Π_4 проєкціюється в натуральному вигляді.

Для перетворення відрізка прямої рівня в проєкціювальне положення необхідно перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину Π_5 , слідом якої буде x_{45} . Проекція прямої у вигляді точки $A_5 \equiv (B_5)$ розміститься від осі x_{45} на відстані, що дорівнює відстані від проєкцій A_1 та B_1 до осі x_{14} .

Спільне розв'язання першої і другої задач дозволяє знаходити:

- а) відстань від точки до прямої;
- б) відстань між двома паралельними прямими;
- в) відстань між мимобіжними прямими.

На рис. 4.6 зображено розв'язання третьої та четвертої задач перетворення площини загального положення в проєкціювальну та перетворення її в площину рівня. При цьому здійснено дві заміни площин проєкцій.



$$\alpha = x_{14} \wedge (B_4 A_4 C_4) = (ABC) \wedge \Pi_1$$

Рисунок 4.6

При першій заміні відсік площини (ABC) переведено в проекціювальне положення, а при другій заміні знайдено натуральну величину відсіку. Щоб перевести відсік у проекціювальне положення, необхідно в межах відсіку побудувати лінію рівня, бо для її перетворення в точку досить однієї заміни. На рисунку у відсіку проведено горизонталь AD, а нову вертикальну площину Π_4 побудовано перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (A_1D_1). У системі площин проекцій $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ площина

ABC перетворилась у проекціювальну площину і на площині проекцій Π_4 спроектувалась у відрізок прямої B_4C_4 . При другій заміні вісь x_{45} проводять паралельно відрітку B_4C_4 , а від осі x_{45} відкладають відрізки, що дорівнюють відстані від точок горизонтальної проекції до осі x_{14} .

У системі площин проекцій $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ площина ABC перетворилась у площину рівня і на площині проекцій Π_5 спроектувалась у натуральному вигляді $A_5B_5C_5$.

Спільне розв'язання третьої та четвертої задач дозволяє знаходити:

- а) натуральні величини плоских фігур;
- б) відстань від точки до площини;
- в) кути нахилу площини до площини проекцій;
- г) відстань між паралельними площинами.

4.2 Обертання навколо проекціювальних осей

Площини проекцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру обертають навколо прямої лінії (осі), яка перпендикулярна до якоїсь із площин проекцій, у нове окреме положення. У новому положенні будують ортогональні проекції геометричної фігури. Для кожної точки геометричної фігури має бути своя площина обертання і свій радіус обертання.

На рис. 4.7 показано визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення способом обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекції.

Через точку A проведено вертикальну вісь i , яка є горизонтально проекціювальною прямою. Навколо цієї осі повернуто відрізок загального положення AB до положення паралельного фронтальній площині проекцій Π_2 . Точка A, яка належить осі обертання, залишається на місці, а точка B повертається навколо вертикальної осі в площині, перпендикулярній до неї, тобто в горизонтальній. Відрізок $\overline{A_2B_2}$ – його натуральна величина.

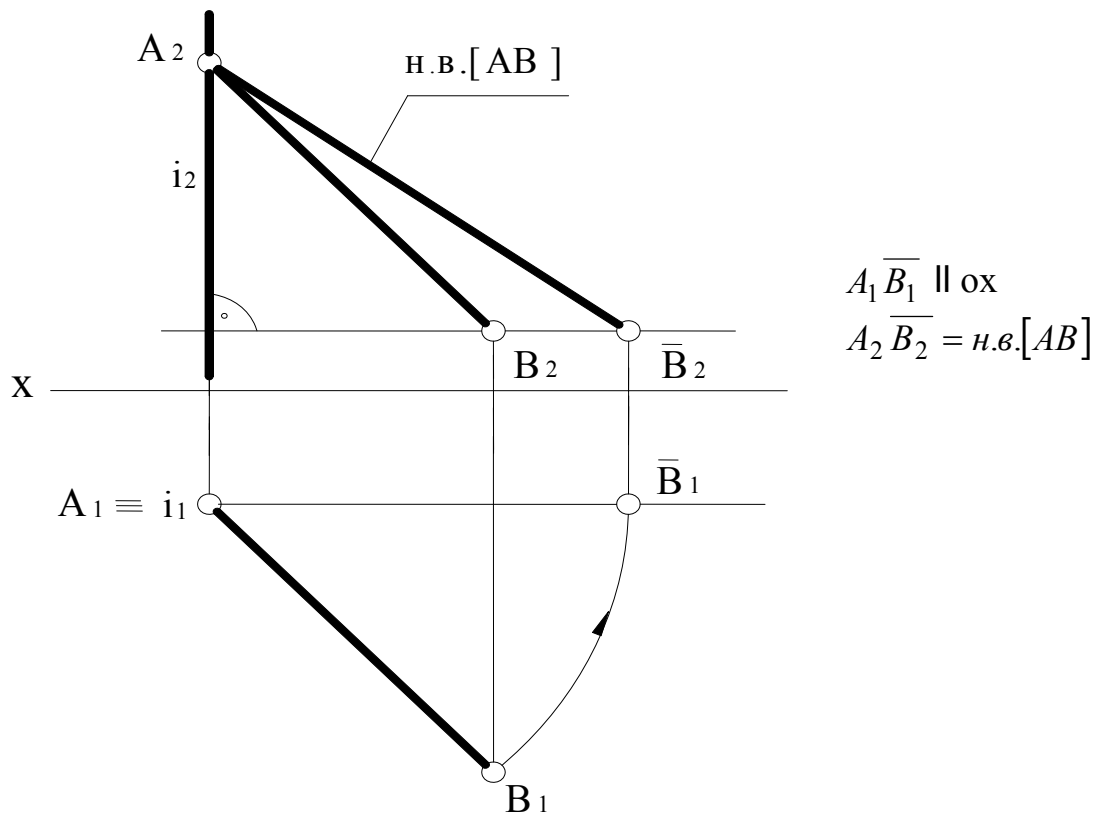


Рисунок 4.7

4.3 Метод плоскопаралельного переміщення

Плоскопаралельне переміщення розглядають як обертання навколо невизначених осей. Площини проєкцій залишаються незмінними, а геометрична фігура переводиться в окреме положення шляхом її зміщення в просторі, причому всі точки фігури повинні рухатися в площинах, паралельних певній площині проєкцій.

На рис. 4.8 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відсіка методом плоскопаралельного переміщення. Для цього спочатку необхідно побудували головну лінію площини ABC – фронталь DC. Потім поворотом навколо горизонтальної осі відсік площини встановлено у горизонтально проєкціювальне положення. Після цього поворотом навколо горизонтально проєкціювальної осі відсік площини встановлено у фронтальну площину рівня, при цьому відсік площини на полі Π_2 зобразиться в натуральну величину.

4.4 Метод обертання навколо прямих рівня

Площини проєкцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру, яка належить площині, обертають навколо лінії рівня цієї площини до паралельного положення до тієї площини проєкцій, до якої лінія рівня паралельна.

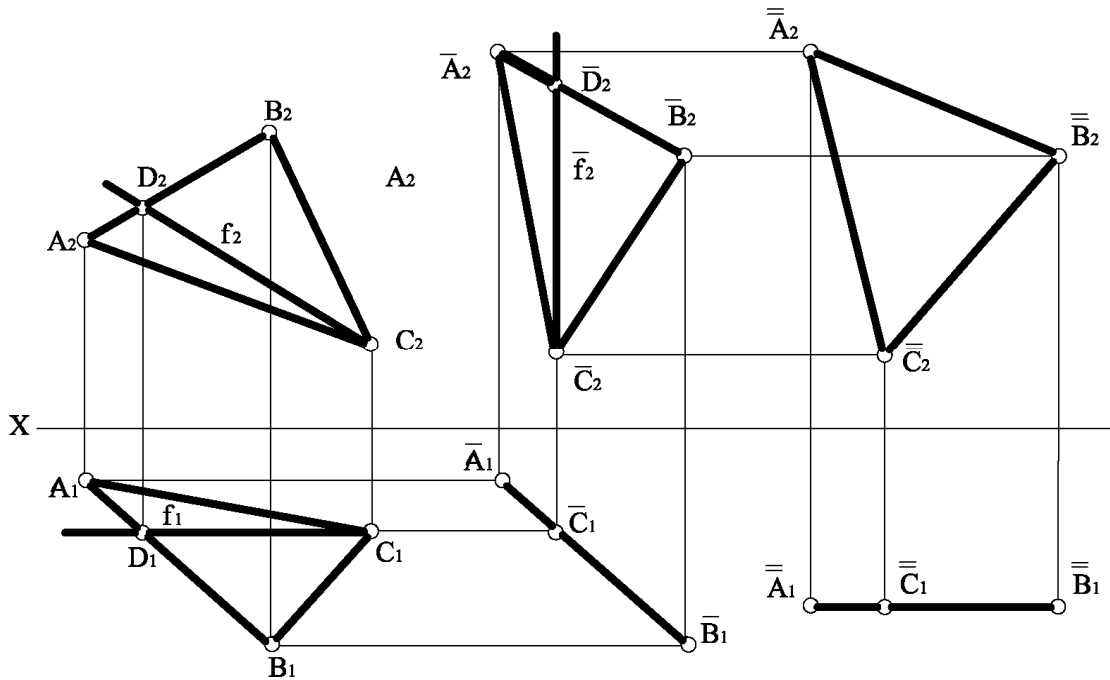


Рисунок 4.8

При цьому плоска фігура буде без спотворень проєкціюватися на цю площину проєкцій. При обертанні навколо горизонталі плоска фігура переводиться в положення, паралельне горизонтальній площині проєкцій, при обертанні навколо фронталі – у положення, паралельне фронтальній площині проєкцій.

На рис. 4.9 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відсіку ABC методом обертання навколо фронталі AD.

При цьому точки A і D, які лежать на фронталі, залишаються на місці, а точки B і C обертаються у фронтально проєкціювальних площинах, які перпендикулярні до фронтальної проєкції фронталі. Проекції відрізка прямої B_2O_2 та B_1O_1 є проєкціями радіуса обертання в даний момент точки B навколо фронталі AD. Це відрізок прямої загального положення. Для визначення натуральної величини радіуса обертання $[BO]$ застосовують спосіб прямокутного трикутника. При цьому на горизонтальній площині проєкцій визначають різницю координат точок B та O, а на фронтальній площині будують прямокутний трикутник $B_2^*B_2O_2$, гіпотенуза якого $B_2^*O_2$ є натуральною величиною радіуса обертання точки B. Потім гіпотенузою роблять засічку на лінії траєкторії руху точки B і отримують $\overline{B_2}$. Для визначення положення точки C користуються точкою D, яка після обертання залишається на місці. Точку $\overline{C_2}$ визначають як перетин прямої $\overline{B_2D_2}$ із траєкторією руху точки C. Фронтальна проєкція трикутного відсіку після обертання $A_2\overline{B_2C_2}$ є натуральною величиною трикутного відсіка.

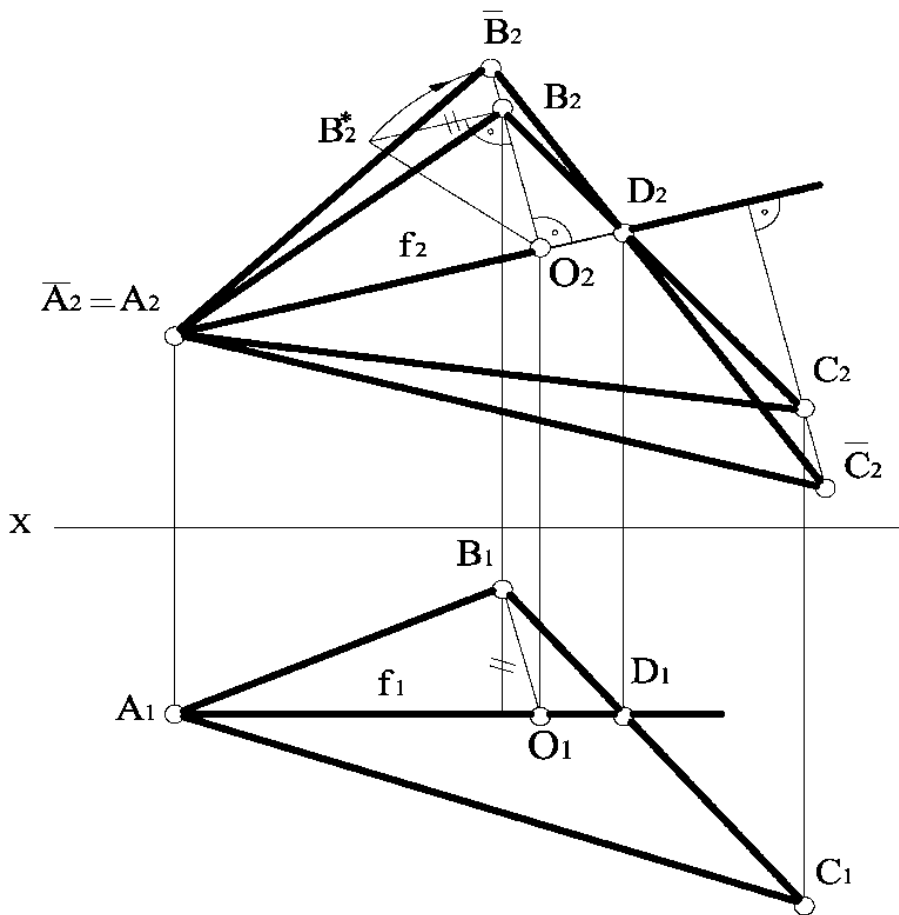


Рисунок 4.9

4.5 Метод обертання навколо сліду площини

Цей метод є окремим випадком обертання площини навколо горизонталі або фронталі, при цьому за вісь обертання береться не будь-яка горизонталь або фронталь площини, а її горизонтальний або фронтальний слід (нульова горизонталь або фронталь). У цьому випадку внаслідок обертання площини вона збігається з площиною проєкцій. Тому цей метод називають методом суміщення. При обертанні площини навколо горизонтального сліду вона збігається з горизонтальною площиною проєкцій або з фронтальною площиною проєкцій при її обертанні навколо фронтального сліду.

Метод суміщення застосовують тоді, коли необхідно визначити натуральний вигляд фігури або побудувати в площині загального положення фігуру, яка має певну конфігурацію та розміри.

На рис. 4.10 наведено приклад обертання площини загального положення Q , яка задана слідами, навколо горизонтального сліду Q_1 до суміщення з горизонтальною площиною проєкцій.

При цьому перетворенні слід Q_1 як вісь обертання залишається на місці. Для знаходження суміщеного положення площини достатньо знайти суміщене положення тільки однієї точки цієї площини, яка не належить сліду Q_1 .

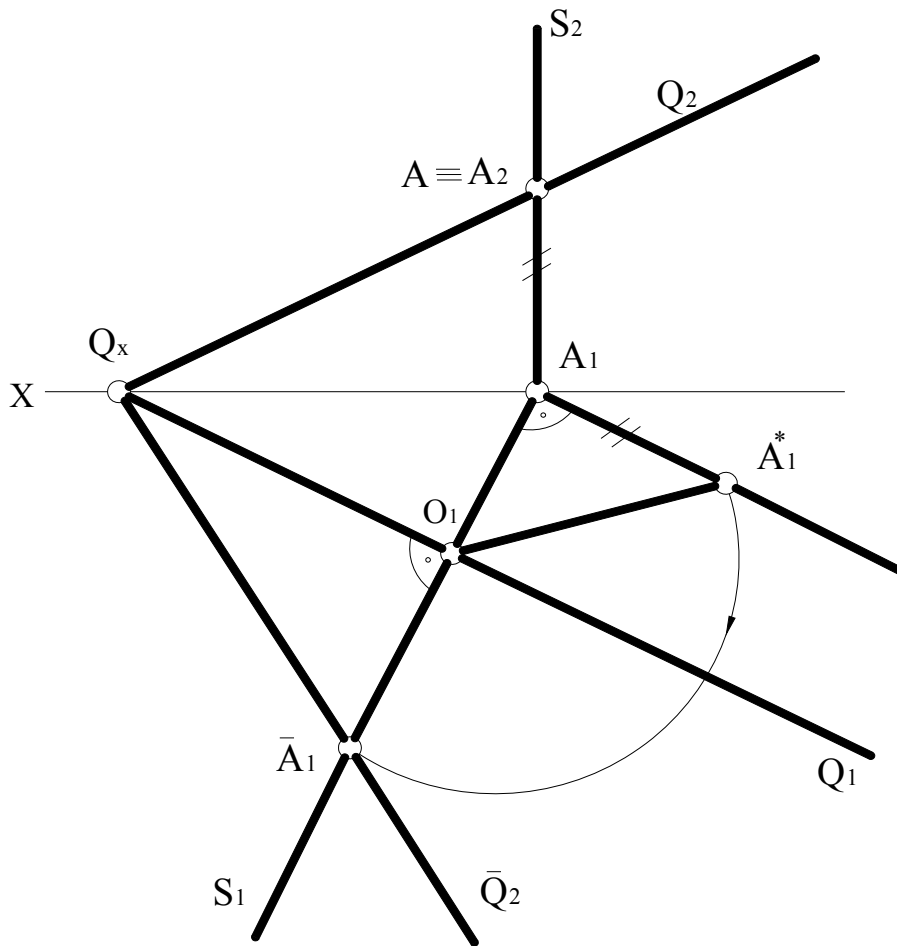


Рисунок 4.10

Для спрощення геометричних побудов доцільно використати точку A , яка належить фронтальному сліду Q_2 .

Точка A при обертанні навколо осі Q_1 буде переміщатися по дузі кола, яке належить горизонтально проєкціювальній площині S , перпендикулярній до осі обертання Q_1

Методом прямокутного трикутника знаходять натуральну величину радіуса обертання $[OA] = O_1A_1^*$. Потім гіпотенузою $O_1A_1^*$ роблять засічку на лінії траєкторії руху точки A і отримують \bar{A}_1 . Через отриману точку будують фронтальний слід площини \bar{Q}_2 при суміщенні її з горизонтальною площиною проєкцій.

Необхідно зазначити, що суміщене положення точки A і сліду $Q_2 - \bar{Q}_2$, а також будь-якої точки, яка належить площині Q , можна побудувати, не користуючись центром і радіусом обертання (рис. 4.11). Для цього достатньо на фронтальному сліді площини Q взяти довільно точку $A \equiv A_2$, а потім побудувати горизонтальну проєкцію точки A . Через побудовану точку A будують горизонтально проєкціювальну площину S , у площині якої переміщається точка A , причому горизонтальний слід цієї площини перпендикулярний до горизонтального сліду площини $\theta: S_1 \perp Q_1$.

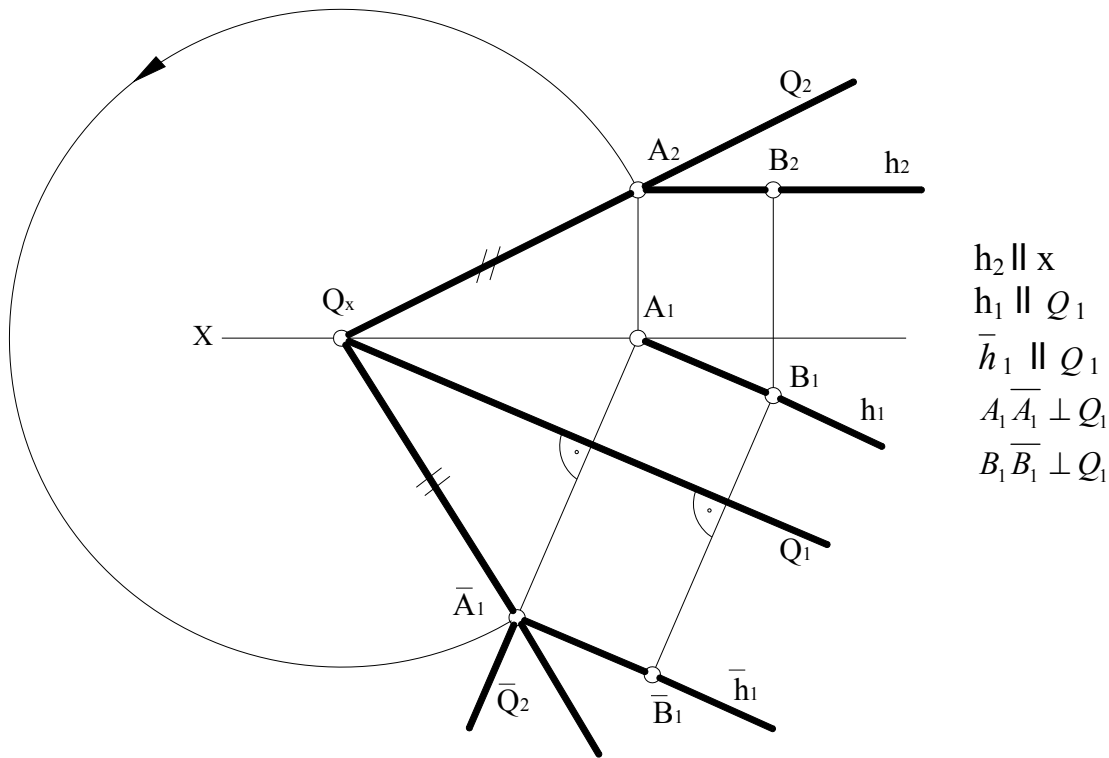


Рисунок 4.11

Потім із точки Q_x описують дугу радіусом, який дорівнює відстані від $|\theta_X A_2|$ до її перетину з горизонтальним слідом S_1 . Через отриману точку \bar{A}_1 будують фронтальний слід площини \bar{Q}_2 при суміщенні його з горизонтальною площиною проєкцій.

На рис. 4.12 наведено приклад побудови для площини загального положення Q , а також фронтальної проєкції ΔABC , який належить цій площині, визначення натуральної величини ΔABC обертанням навколо горизонтального сліду Q_1 .

Для знаходження горизонтальної проєкції відрізка $(A_1 B_1 C_1)$ використовуємо головні лінії площини – горизонталі. Через фронтальні проєкції точок $A_2 B_2 C_2$ проводимо паралельно осі x фронтальні проєкції горизонталей до перетину з фронтальним слідом Q_2 , потім будуємо горизонтальні проєкції горизонталей паралельно горизонтальному сліду Q_1 . По вертикальній відповідності будуємо горизонтальну проєкцію відрізка $A_1 B_1 C_1$. Далі суміщаємо задану площину Q з полем Π_1 обертанням навколо горизонтального сліду Q_1 . Для цього на фронтальному сліді площини беремо довільну точку 1 , знаходимо її горизонтальну проєкцію – точку 1_1 . Точку 1_1 обертаємо навколо горизонтального сліду в площині, перпендикулярній до цього сліду. Суміщене з Π_1 положення точки 1 отримуємо, якщо з точки збігу слів Q_x зробимо дугою $|Q_x 1_2|$ засічку на траєкторії повороту точки 1 , отримавши при цьому точку $\bar{1}_1$. Після цього відрізок ABC суміщаємо з Π_1 і отримуємо натуральну величину відрізка $[\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1]$.

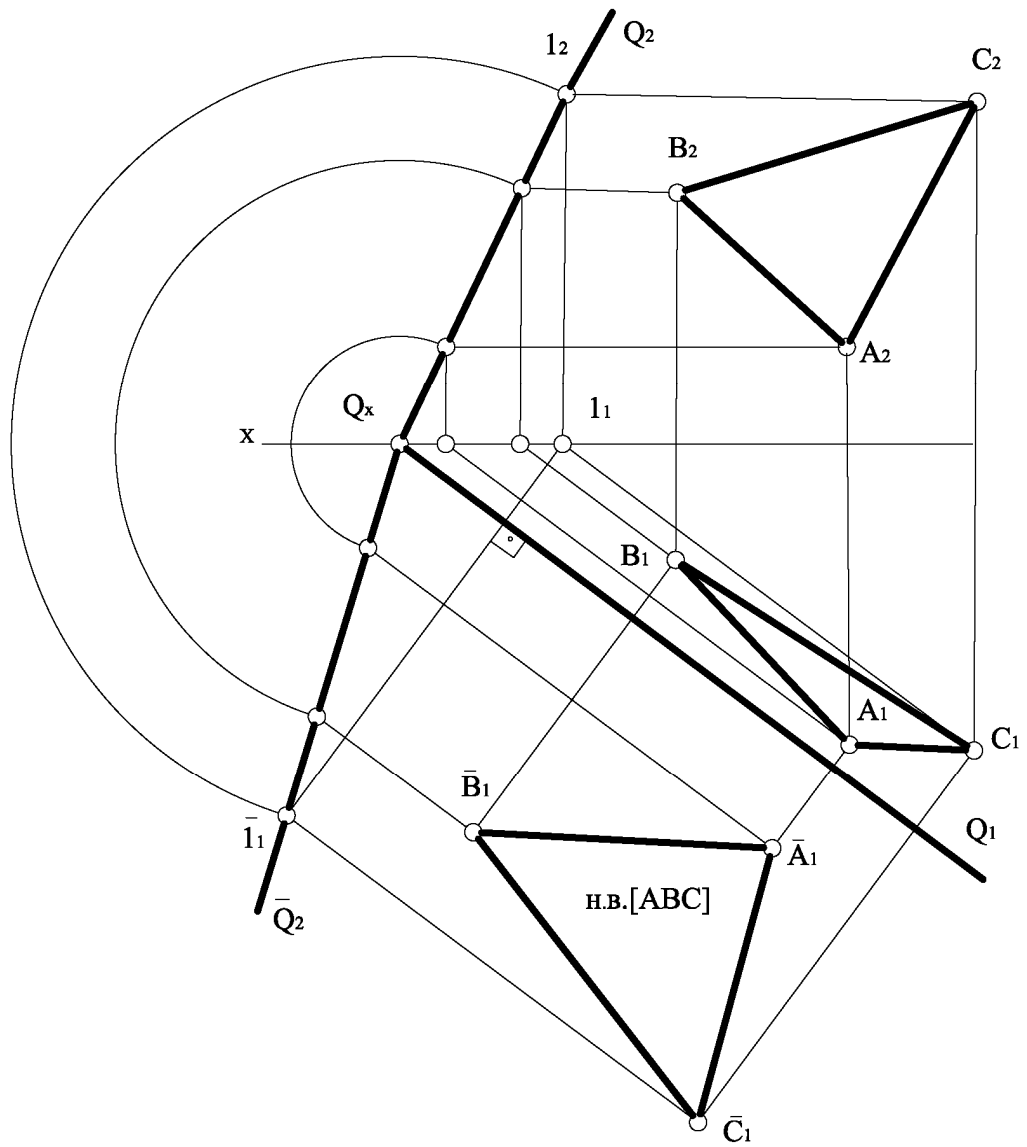


Рисунок 4.12

5 ГРАННІ ПОВЕРХНІ

Гранні поверхні утворюються за допомогою площин. **Багатогранником** називають просторову фігуру, обмежену замкнутою поверхнею, яка складається з відрізків площин, які мають форму плоских багатокутників. Багатокутники, які утворюють поверхню багатогранника, називаються **гранями**, сторони багатокутників – **ребрами**, а вершини – **вершинами** багатогранника.

В інженерній практиці найчастіше використовують такі багатогранники: піраміди, призми, призматоїди та правильні багатогранники.

Пірамідальна поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної l , яка проходить через сталу точку простору S та ковзає по замкнутій ламаній лінії m , яку називають напрямною (рис. 5.1). При перерізі цієї пірамідальної поверхні площиною Σ утворюється піраміда.

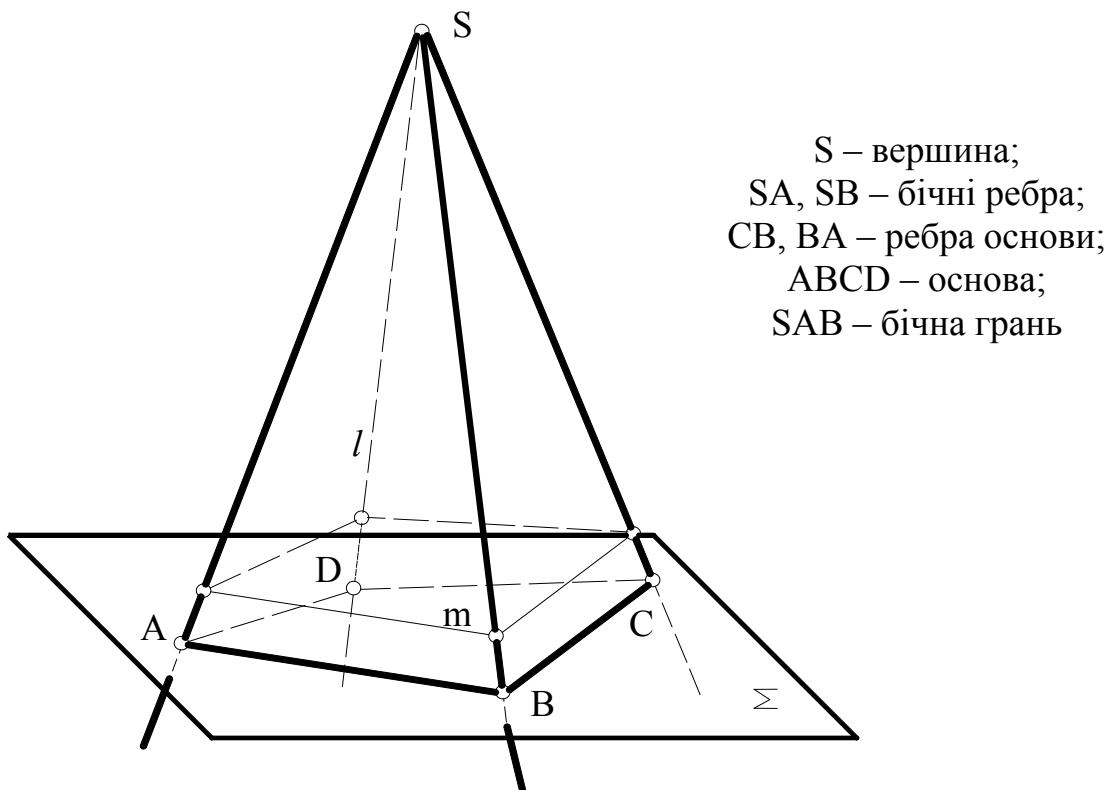


Рисунок 5.1

Піраміда – це багатогранник, основою якого є багатокутник, а бічні грані – трикутники, що мають спільну точку S – вершину піраміди.

Сукупність усіх ребер багатогранника називають його сіткою. Згідно з теоремою Ейлера для випуклого багатогранника існує залежність між числом граней Γ , вершин B та ребер P , яка має вигляд: $\Gamma + B - P = 2$.

Піраміда називається правильною, якщо в її основі лежить правильний багатогранник, а висота проходить через центр основи. **Висота** – це найкоротша відстань від вершини піраміди до площини основи. Бічні грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники.

На рис. 5.2 наведено приклад побудови на комплексному кресленні правильної піраміди, в основі якої лежить чотирикутник.

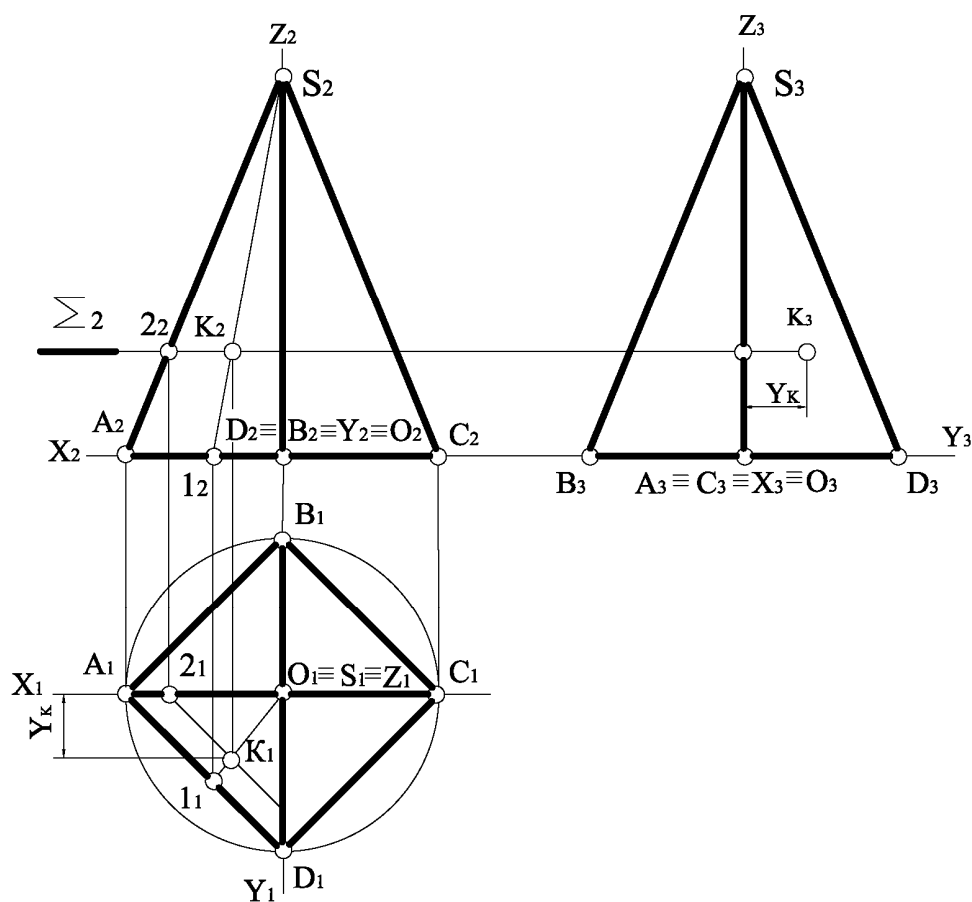


Рисунок 5.2

Будемо вважати, що задана фронтальна проекція K_2 точки K , яка належить бічній грані SAD , яка є площиною загального положення. Точка належить площині, якщо вона належить якійсь прямій цієї площини. Виходячи з цього, проводимо через точки S_2 і K_2 пряму до перетину з фронтальною проекцією A_2D_2 у точці 1_2 . Далі будемо 1_1S_1 і за вертикальною відповідністю K_1 . Профільну проекцію K_3 будемо, використовуючи проекційний зв'язок.

Будувати точки на поверхні можна за допомогою січних площин посередників. У даному випадку вибираємо горизонтальну площину рівня Σ , яку проводимо через точку K .

Фронтальна проекція лінії перетину площини Σ і грані SAD проходить через точки 2_2K_2 . Точка 2 належить ребру SA , тому знаходимо точку 2_1 , через яку паралельно A_1D_1 будемо горизонтальну проекцію лінії перетину і по вертикальній відповідності знаходимо K_1 – горизонтальну проекцію точки K . Профільну проекцію K_3 точки K будемо, як і раніше.

Призматична поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної ℓ по довільній напрямній m замкненій ламаній лінії так, що вона залишається паралельною заданому напрямку S (рис. 5.3).

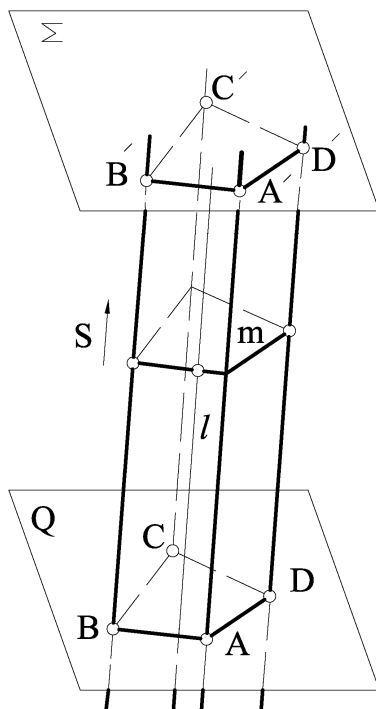


Рисунок 5.3

Призмою називається багатогранник, який утворюється в перерізі призматичної поверхні двома паралельними площинами Σ і Q . Якщо бічні ребра перпендикулярні до основи, то призма називається прямою і її бічні грані – прямокутники. Якщо бічні ребра не перпендикулярні до основи, то призма називається похилою і її бічні грані – паралелограми.

Призма називається **правильною**, якщо в основі її лежить правильний багатокутник.

На рис. 5.4 наведено приклад побудови на комплексному кресленні прямої правильної трикутної призми, яка стоїть на горизонтальній площині проєкцій Π_1 .

Нижня і верхня основи є горизонтальними площинами рівня, тому їх горизонтальні проєкції відображені в натуральну величину. Бічні ребра AA', BB', CC' перпендикулярні до Π_1 , тому бічні грані на горизонтальну площину проєкцій спроекціювались у відрізки прямих, що співпадають із відповідними сторонами трикутника основи.

Площина $BB'CC'$ є профільною площиною рівня, тому вона перпендикулярна до Π_2 і її фронтальна проєкція вироджується в одну пряму.

Будемо вважати, що задана фронтальна проєкція K_2 точки K , яка належить бічній грані $AA'CC'$. Ця грань є горизонтально проєкціовальною площиною, тому A_1C_1 має збиральні властивості і горизонтальна проєкція K_1 належить A_1C_1 . Для побудови профільної проєкції K_3 точки K вимірюємо на Π_1 координату y_K і відкладаємо її на лінії проєкційного зв'язку праворуч від Z_3 .

Призматойд – це опуклий багатогранник, усі бічні грані якого є трикутниками або трапеціями, верхня і нижня основи розташовані в паралельних площинах і є будь-якими багатокутниками.

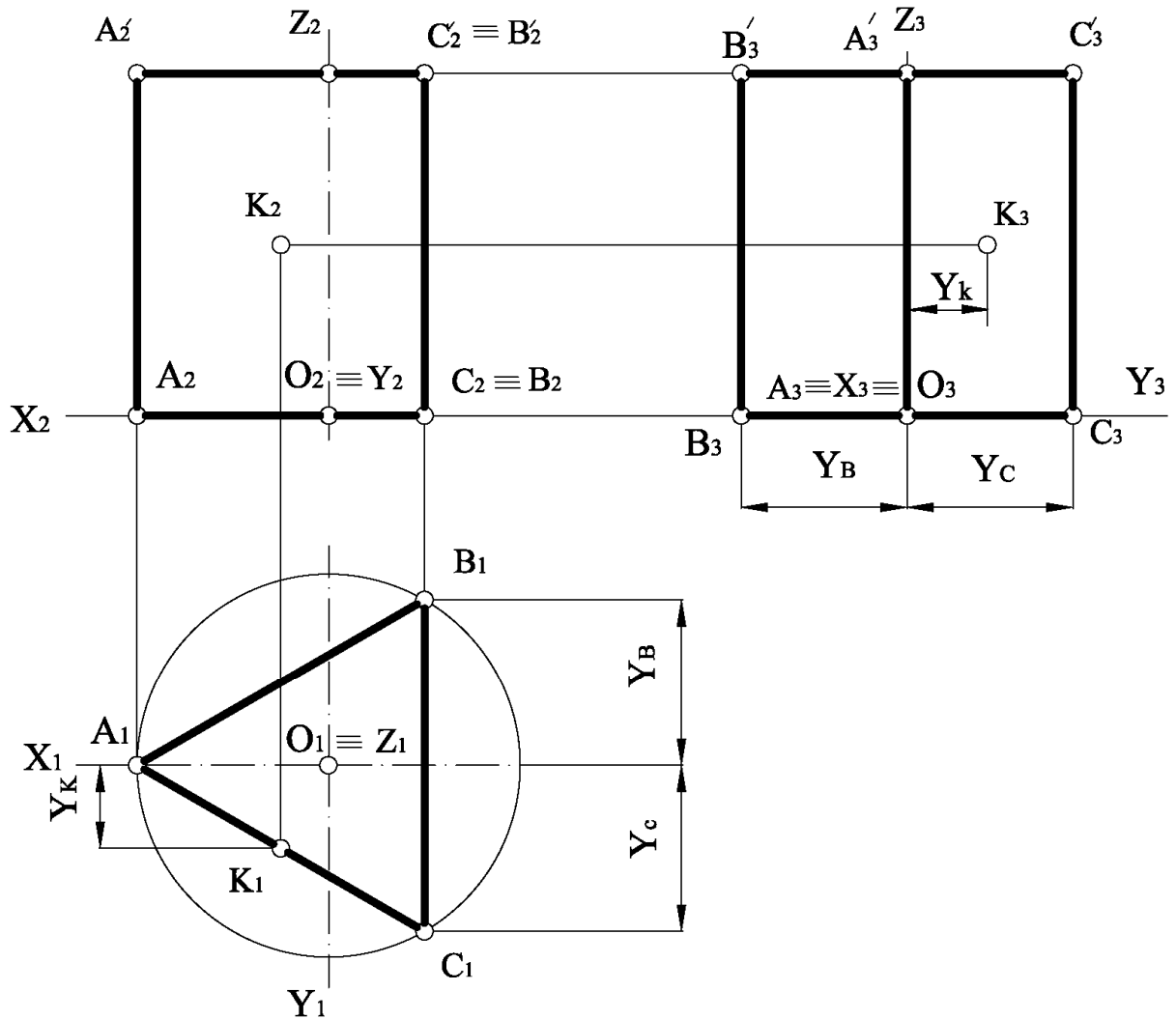


Рисунок 5.4

На рис. 5.5 зображено призматоїд, основами якого є квадрати $ABCD$ та $EFGH$.

Багатогранники називаються правильними, якщо усі ребра, грані, кути (плоскі, двогранні та просторові) рівні між собою, їх називають *тілами Платона*.

Існує n 'ять таких правильних багатогранників:

- правильний чотиригранник (тетраedr), гранями якого є чотири рівносторонні трикутники (рис. 5.6);
- правильний шестигранник (гексаedr), або куб, складається з шести рівних квадратів (рис. 5.7);
- правильний восьмигранник (октаedr), гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників (рис. 5.8);
- правильний дванадцятигранник (додекаedr) складається з дванадцяти правильних п'ятикутників;
- правильний двадцятигранник (ікосаedr), утворений із двадцяти рівносторонніх трикутників.

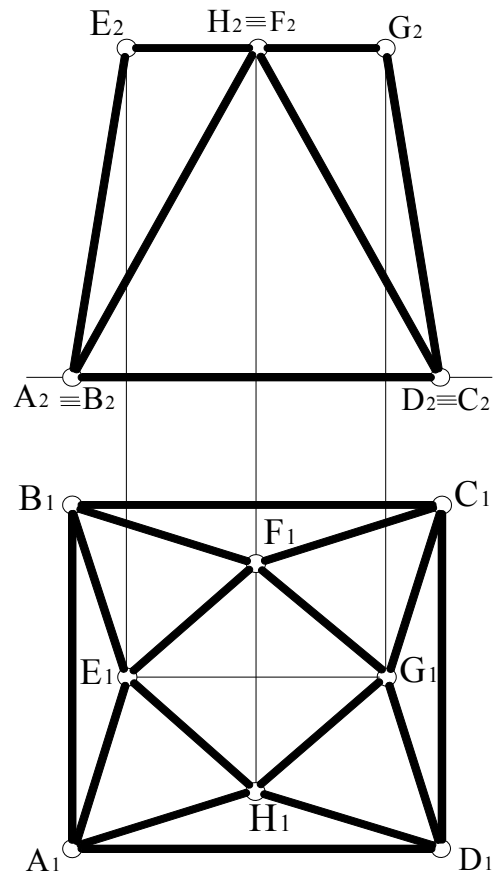


Рисунок 5.5

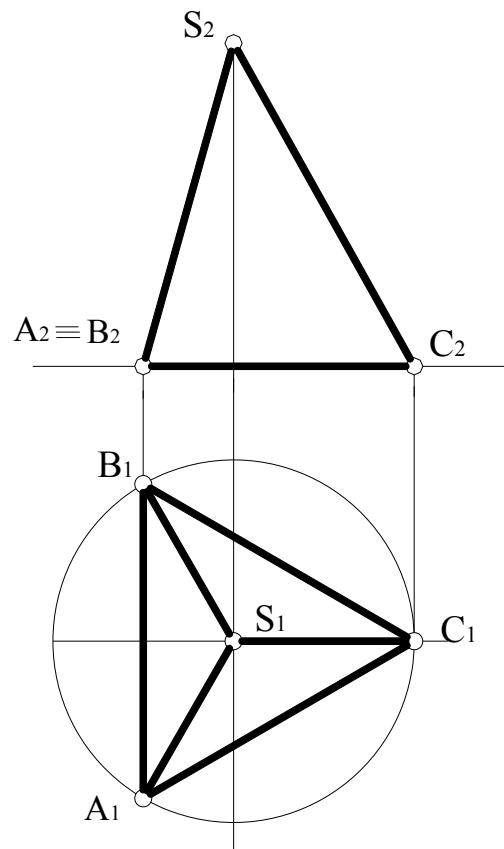


Рисунок 5.6

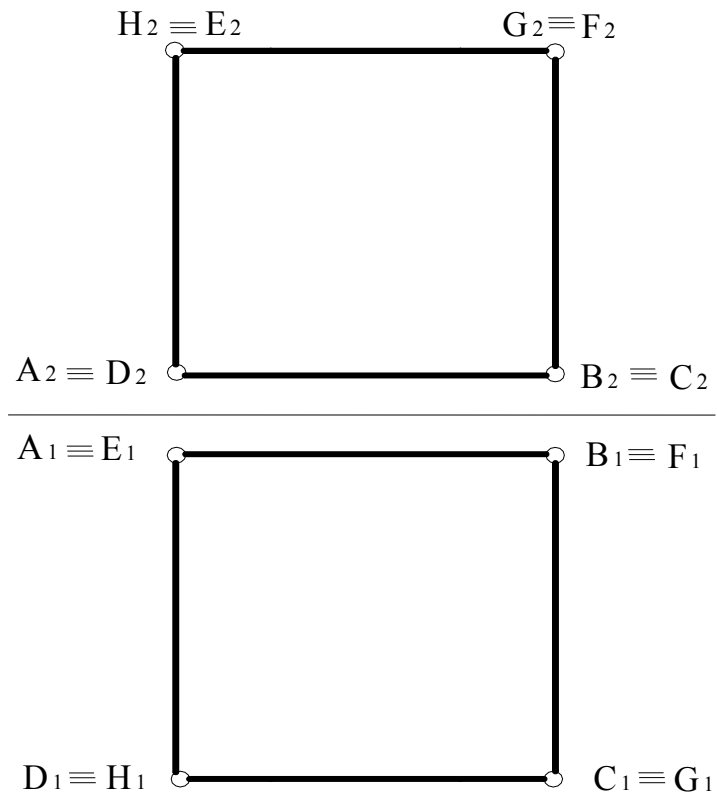


Рисунок 5.7

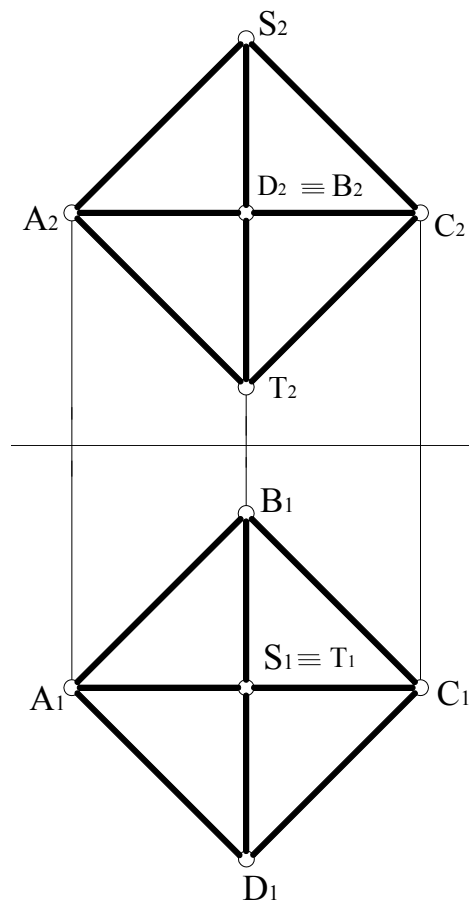


Рисунок 5.8

5.1 Переріз гранних поверхонь площиною

Перерізом називають плоску фігуру, яку отримують при перетині багатогранника площиною. Для побудови перерізів багатогранників використовують два способи: спосіб ребер, спосіб граней. *Спосіб ребер* передбачає розв'язання задачі на перетин прямої з площиною, причому виконується пошук точки перетину кожного бічного ребра з січною площиною.

Побудова перерізу значно спрощується, коли січна площина Σ є проєкціовальною (рис. 5.9).

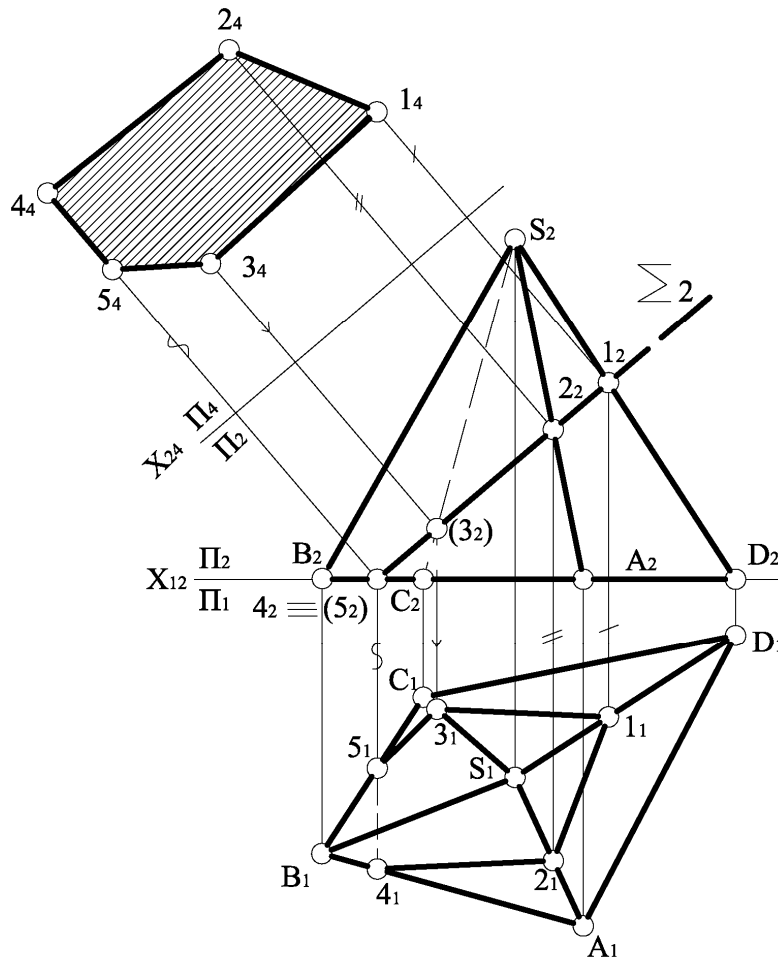


Рисунок 5.9

У цьому випадку фронтальна проєкція перерізу 12345 вже відома, оскільки вона збігається з фронтальним слідом січної фронтально проєкціовальної площини Σ . Горизонтальну проєкцію перерізу будемо за законом належності точки ребру і по вертикальній відповідності. Далі методом заміни площин проєкцій перетворюємо площину перерізу, яка є проєкціовальною в системі $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$, у площину рівня. Для цього будемо вісь нової системи площин $x_{24} \parallel \Sigma_2$. Координати точок перерізу заміряємо на Π_1 від осі x_{12} і переносимо відповідно на Π_4 . Проєкція площини перерізу 1₄2₄4₄5₄3₄ є натуральною величиною.

На рис. 5.10 наведено приклад побудови перерізу похилої трикутної призми, яка перетинається фронтальною проекційною площиною Σ .

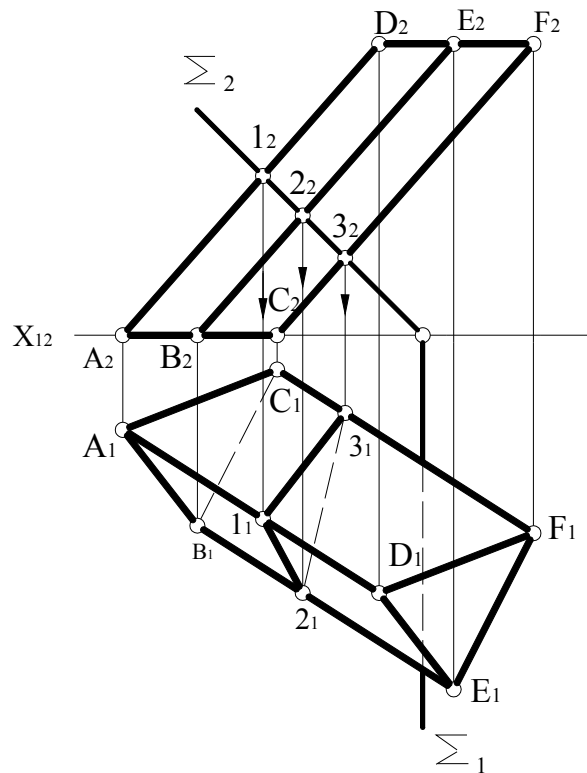


Рисунок 5.10

Фронтальна проекція площини перерізу $1_2 2_2 3_2$ збігається з фронтальним слідом площини Σ . Горизонтальну проекцію перерізу визначаємо за допомогою вертикальної відповідності.

На рис. 5.11 наведено приклад побудови перерізу вертикальної призми січною площиною загального положення Σ .

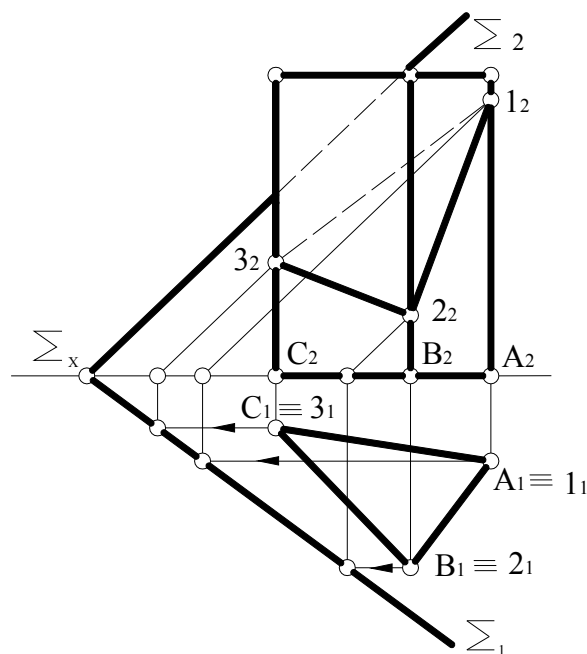


Рисунок 5.11

Грані призми займають горизонтально проєкціювальне положення, тому горизонтальна проєкція перерізу $1_1 2_1 3_1$ збігається з горизонтальною проєкцією призми. Фронтальну проєкцію перерізу будуюмо за допомогою фронталей, які проводимо через вершини горизонтальної проєкції призми. Фронтальні проєкції фронталей паралельні Σ_2 і при перетині з ребрами призми дають фронтальну проєкцію перерізу $1_2 2_2 3_2$.

На рис. 5.12 наведено приклад побудови перерізу піраміди січною площиною загального положення Σ .

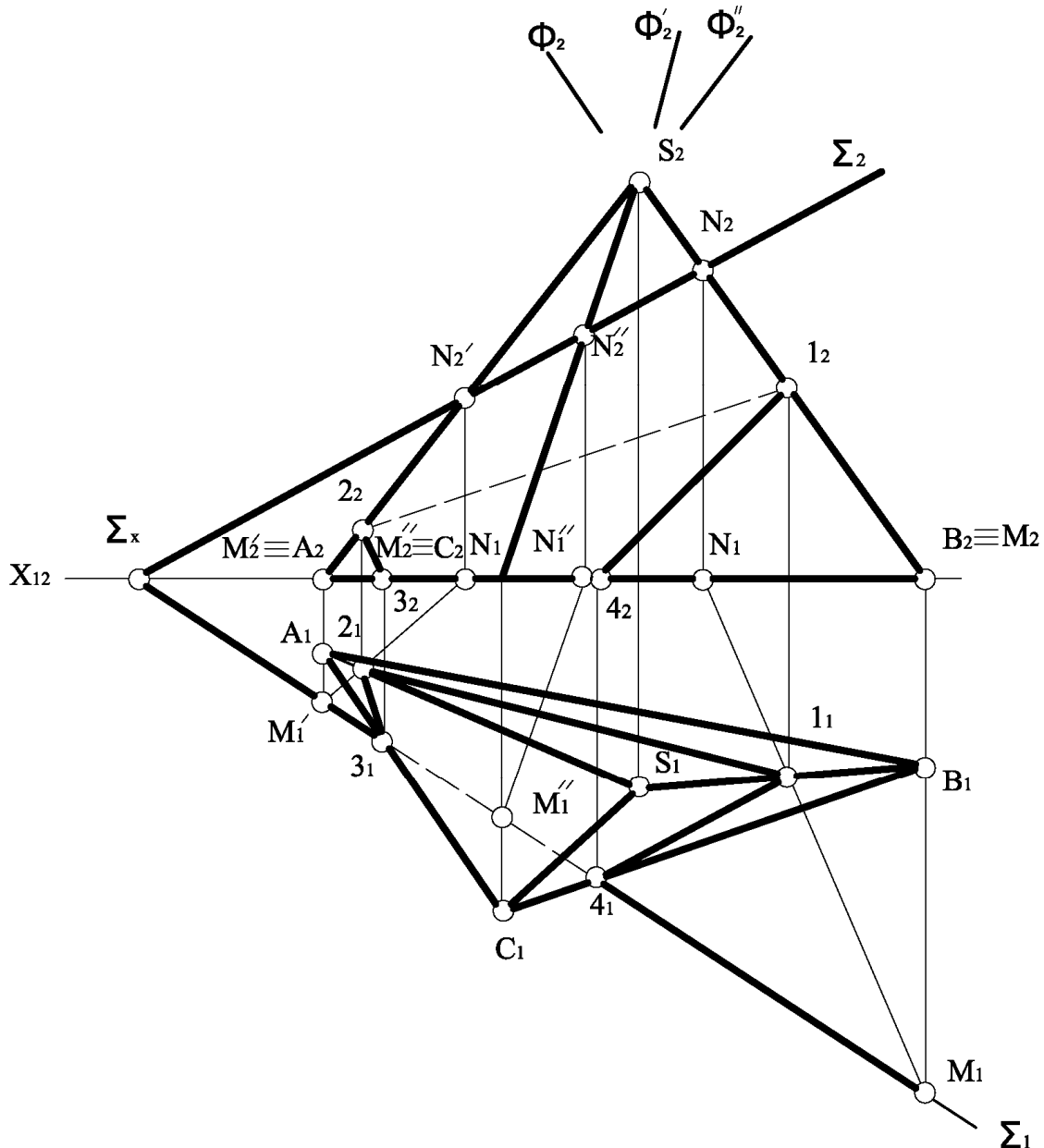


Рисунок 5.12

Грані піраміди $SABC$ займають загальне положення, тому для побудови перерізу січною площиною загального положення необхідно застосувати спосіб ребер, який передбачає знаходження точки перетину кожного бічного ребра піраміди з січною площиною Σ .

Розглянемо, наприклад, знаходження точки перетину ребра SB із січною площиною Σ . Спочатку проводимо через задане ребро SB фронтально проекціювальну площину Φ . Потім знаходимо лінію перетину площини Σ і Φ : $\Sigma \cap \Phi = NM$. Після цього знаходимо горизонтальну проекцію точки перетину: $S_1B_1 \cap N_1M_1 = 1_1$. Фронтальну проекцію точки перетину 1_2 знаходимо по вертикальній відповідності. Як бачимо, січна площина не перетинає ребро SC у межах заданої піраміди. Точки 3_1 і 4_1 визначаються безпосередньо на перетині горизонтального сліду Σ_1 із A_1C_1 і C_1B_1 . Фронтальні проекції 3_2 і 4_2 отримуємо за допомогою ліній проекційного зв'язку. Таким чином, ми одержали переріз 4123 .

5.2 Побудова точок перетину лінії з поверхнею

Багатогранну опуклу поверхню пряма лінія перетинає у двох точках. Точки перетину прямої з поверхнею багатогранника називаються точками зустрічі.

При перетині багатогранників прямою лінією можливі такі випадки:

- 1 Грані багатогранника займають проекціювальне положення.
- 2 Грані багатогранника займають загальне положення.

У першому випадку точки перетину прямої з гранями відразу визначають на одній із проекцій, до якої грані займають проекціювальне положення. У другому випадку пряму заточують у якусь площину, частіше – у проекціювальну, будують лінію перетину цієї площини з багатогранною поверхнею, а потім визначають точки перетину отриманої лінії (багатокутника) і прямої.

На рис. 5.13 наведено приклад побудови точок перетину прямої загального положення ℓ з прямою трикутною призмою ABC .

Бічні грані призми ABC займають горизонтально проекціювальне положення, тому горизонтальна проекція прямої трикутної призми виглядає як трикутник $A_1B_1C_1$. Завдяки збиральним властивостям проекціювальних площин точки перетину K і L прямої ℓ з гранями визначаємо безпосередньо на горизонтальній площині проекцій Π_1 . Фронтальні проекції точок K і L визначають за вертикальною відповідністю. Відрізок між точками входу та виходу невидимий на обох проекціях.

На рис. 5.14 наведено приклад побудови точок входу і виходу прямої загального положення ℓ з поверхнею піраміди $SABCD$.

Через пряму ℓ проводимо фронтально проекціювальну площину Σ . На Π_2 визначаємо точки перетину ребер піраміди зі слідом площини Σ_2 .

Потім будуюмо горизонтальну проекцію перерізу $1_12_13_14_1$ за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку. Перетин горизонтальної проекції ℓ_1 прямої ℓ із побудованою горизонтальною проекцією перерізу $1_12_13_14_1$ дає точки K_1 і L_1 – горизонтальні проекції точок входу і виходу. Фронтальні проекції K_2 і L_2 визначаємо за законом належності та за вертикальною відповідністю.

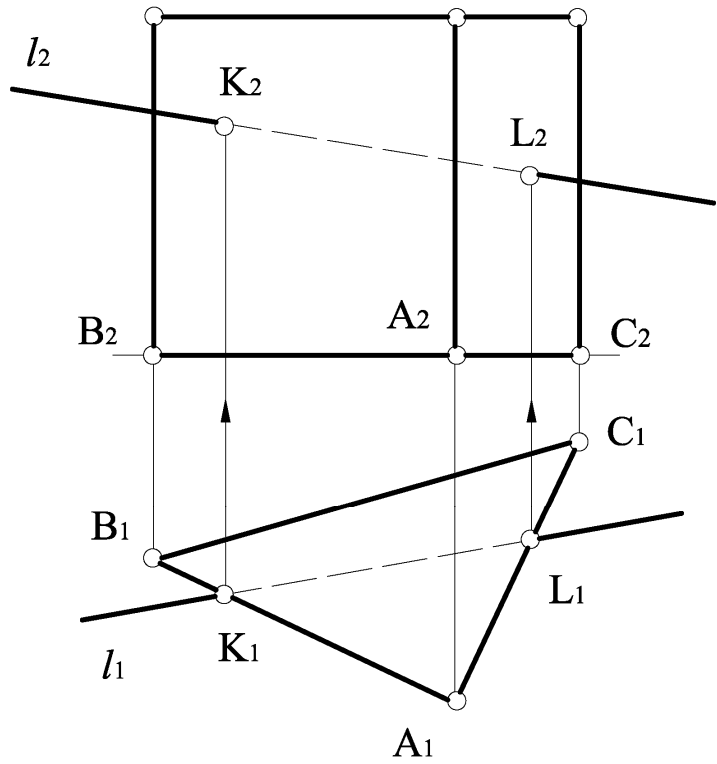


Рисунок 5.13

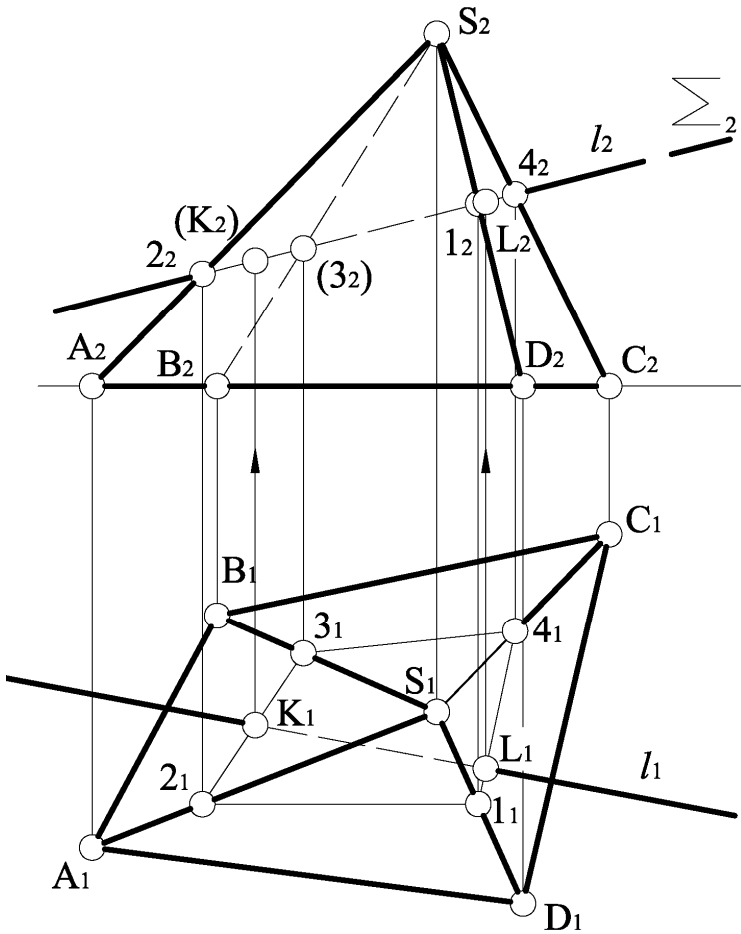


Рисунок 5.14

Іноді зручніше одержувати розв'язання задачі за допомогою площини загального положення (рис. 5.15).

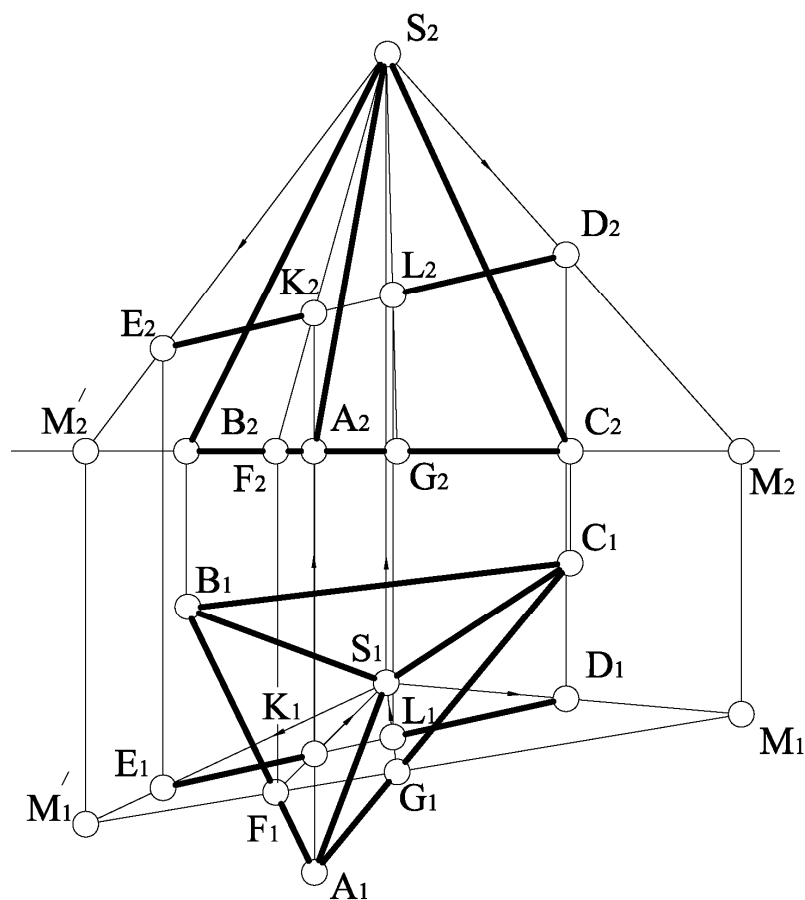


Рисунок 5.15

Допоміжну площину задаємо прямою ED і вершиною піраміди S. З'єднуємо вершину піраміди S з точками E і D. Далі знаходимо сліди для цих прямих M і M¹, через які проходить горизонтальний слід M¹M₁ допоміжної площини. Цей слід перетинає основу піраміди в точках F і G, через які проходять прямі SF і SG, що є лініями перетину допоміжної площини з поверхнею піраміди. Пряма ED належить допоміжній площині і вона перетинає прямі SF і SG в точках K і L, які є точками входу і виходу.

5.3 Розгортки гранних поверхонь

Для виготовлення багатогранників з листового матеріалу необхідно мати їх розгортки. Будують розгортки за допомогою послідовного суміщення граней багатогранника з площиною. Грані багатогранника на розгортці відображаються в натуральну величину, їх розташування може бути різним, але при цьому треба досягти найвигіднішого використання листового матеріалу та скорочення шва розгортки.

Для побудови розгорток багатогранних поверхонь використовують такі способи:

- 1) спосіб трикутників;
- 2) спосіб нормального перерізу;
- 3) спосіб розкатки.

1 Спосіб трикутників (триангуляції) використовують для побудови розгорток пірамід, бічна поверхня яких складається з трикутників – граней піраміди. Для побудови розгортки піраміди необхідно визначити дійсну величину всіх ребер піраміди. На рис. 5.16 наведено приклад побудови розгортки бічної поверхні піраміди $SABC$.

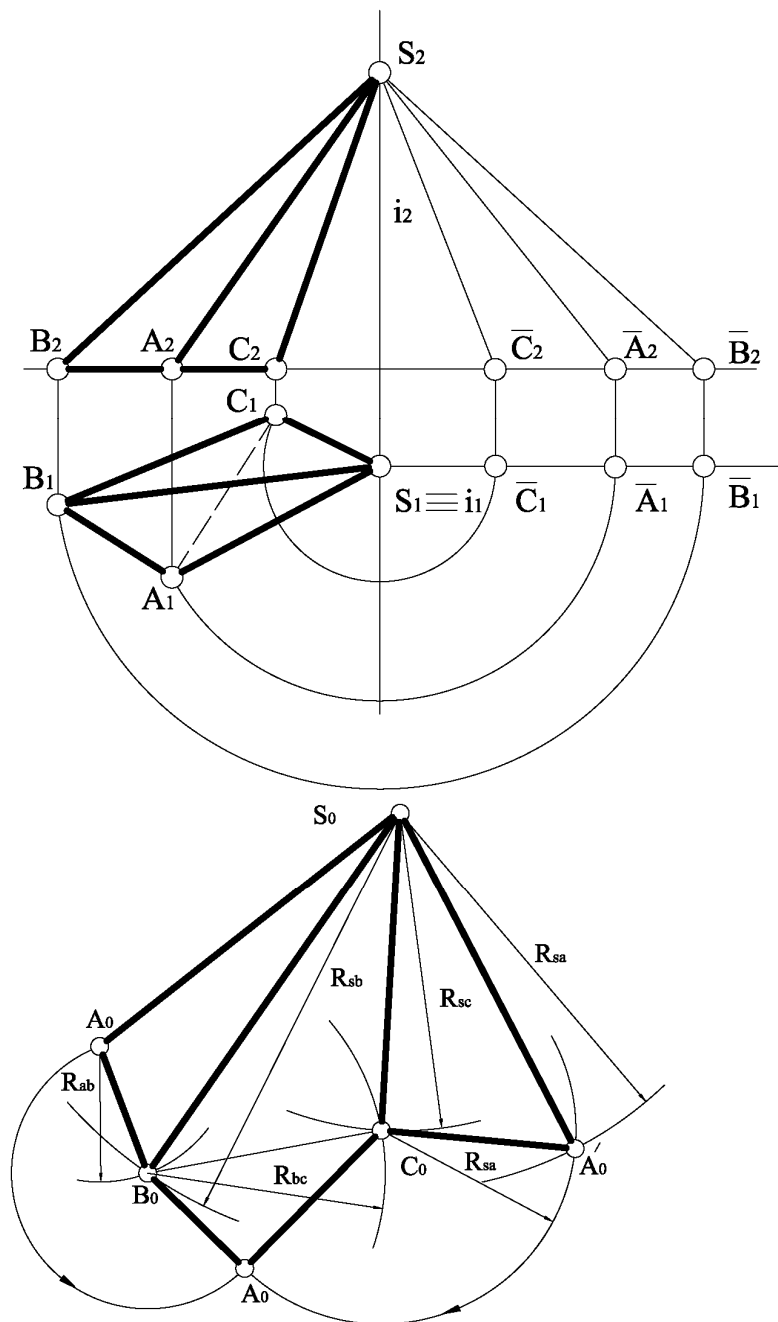


Рисунок 5.16

Через вершину піраміди S проводимо вісь i , яка перпендикулярна до Π_1 . Дійсну величину ребер піраміди визначаємо шляхом обертання кожного ребра піраміди навколо осі i до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій, а потім на Π_2 визначаємо їх дійсну величину $S_2 \overline{A_2}, S_2 \overline{B_2}, S_2 \overline{C_2}$. Основа піраміди належить Π_1 , і ребра основи мають на кресленні дійсну величину ребер, тобто $A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 A_1$. Розгортку будуємо з довільної точки S_0 , і при цьому під довільним кутом будуємо відрізок $S_0 A_0 = S_2 \overline{A_2}$. Далі з точки A_0 проводимо дугу радіусом $R_{AB} = [A_1 B_1]$, а з точки S_0 – дугу радіусом $R_{SB} = [S_2 \overline{B_2}]$. Перетин дуг дає точку B_0 – вершину трикутника $\Delta S_0 A_0 B_0$.

Аналогічно знаходимо точки C_0 і A'_0 . Потім методом засічок будуємо основу піраміди.

Метод трикутників можна використати для побудови розгорток призм, бічні грані яких є чотирикутниками. За допомогою діагоналі чотирикутник розбивають на два трикутники, визначають дійсну довжину сторін цих трикутників і методом засічок будують розгортку.

2 Спосіб нормального перерізу використовують для побудови розгортки поверхні призми тоді, коли бічні ребра призми паралельні до однієї з площин проєкцій і на кресленні при цьому є дійсна величина бічних ребер призми.

На рис. 5.17 наведено приклад побудови розгортки бічної поверхні призми $ABCA'B'C'$, у якої бічні ребра є фронталями.

Для побудови розгортки призму перерізаємо фронтально проєкціоувальною площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ перпендикулярно до бічних ребер призми і визначаємо дійсну величину перерізу $\Delta 1_4 2_4 3_4$ методом заміни площин проєкцій. Потім на горизонтальній прямій від довільної точки 1_0 відкладаємо відрізки $[1_0 2_0] = [1_4 2_4]$, $[2_0 3_0] = [2_4 3_4]$, $[3_0 1_0] = [3_4 1_4]$ і через отримані точки проводимо прямі лінії, які перпендикулярні до горизонтальної прямої. Фронтальна проєкція ребер призми є дійсною величиною. Умовно позначаємо від фронтального сліду площини Σ_2 нижню і верхню частини призми. Відповідні відрізки ребер відкладаємо на відповідних вертикальних лініях, внаслідок чого отримуємо точки $A_0, B_0, C_0, \overline{A_0}, A'_0, B'_0, C'_0, \overline{A'_0}$. З'єднуємо їх послідовно прямими лініями і отримуємо розгортку бічної поверхні призми. Методом засічок будуємо верхню та нижню основи призми.

3 Спосіб розкатки використовують для побудови розгортки поверхні призми тоді, коли її основа паралельна одній площині проєкцій, а бічні ребра паралельні другій площині проєкцій. На рис. 5.18 наведено приклад побудови розгортки похилої тригранної призми, у якої основи ABC та $A'B'C'$ паралельні горизонтальній площині проєкцій, а бічні ребра паралельні фронтальній площині проєкцій.

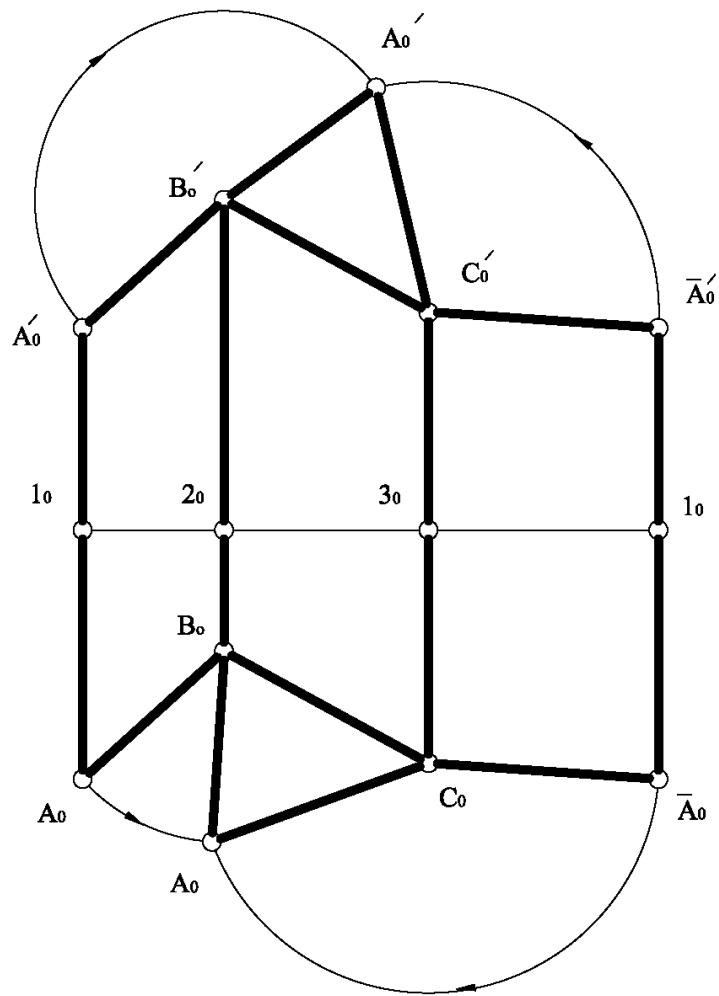
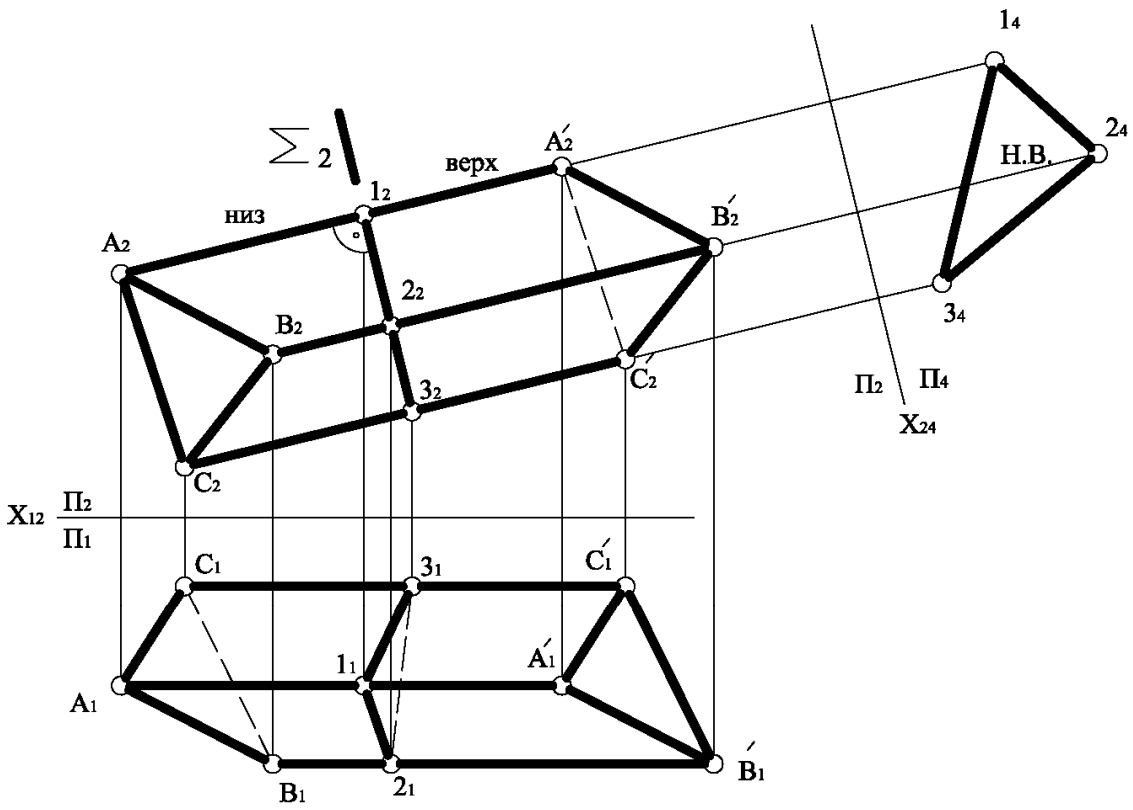


Рисунок 5.17

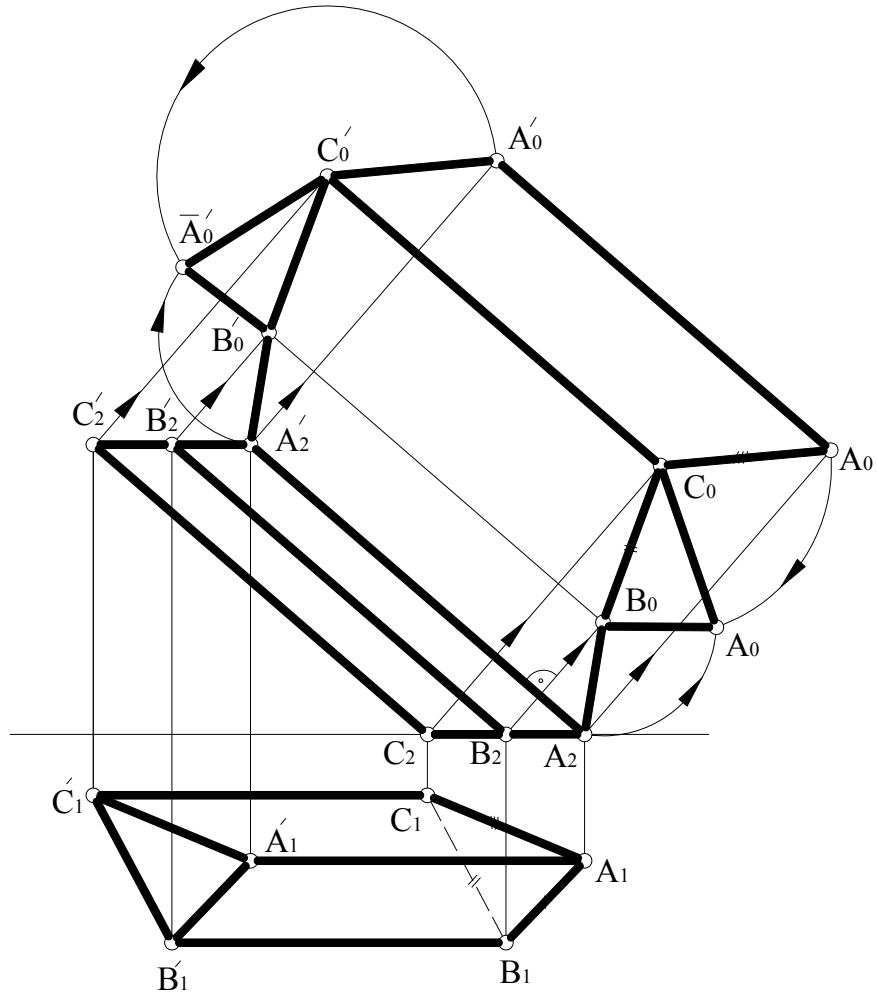


Рисунок 5.18

Будемо вважати, що площина θ розгортки бічної поверхні призми проходить через ребро AA' паралельно фронтальній площині проєкцій. Розрізаємо уявно бічну поверхню призми уздовж ребра AA' і обертаємо площину $ABB'A'$ навколо ребра AA' до суміщення з площиною розгортки θ . Для цього з точок B_2 і B'_2 проводимо промені, які перпендикулярні осі обертання $A_2A'_2$, а потім на цих променях робимо засічки радіусом $[A_1B_1]$, які проводимо з точок A_2 та A'_2 . У результаті отримуємо точки B_0 і B'_0 . Далі навколо осі $B_0B'_0$ обертаємо грань $BB'C'C$ до суміщення з площиною розгортки θ . Для цього з точок C_2 і C'_2 проводимо промені, які перпендикулярні осі обертання $B_0B'_0$, а потім на цих променях робимо засічку радіусом $[B_1C_1]$, які проводимо з точок B_0 та B'_0 . У результаті отримуємо точки C_0 і C'_0 . Аналогічно будуюмо точки A_0 і A'_0 . З'єднуємо побудовані точки і отримуємо плоску фігуру $A_2B_0C_0A_0A'_0C'_0B'_0A'_2$ – розгортку бічної поверхні призми. Для побудови повної розгортки призми достатньо приєднати до бічної розгортки призми її верхню та нижню основи. Цю побудову здійснюємо за допомогою засічок, внаслідок чого отримуємо точки \bar{A}_0 та \bar{A}'_0 .

5.4 Побудова лінії взаємного перетину гранних поверхонь

Лінія перетину – це загальна лінія для двох поверхонь, які перетинаються. Для побудови лінії перетину двох багатогранників використовують два способи:

- 1 Спосіб ребер.
- 2 Спосіб граней.

Спосіб ребер дозволяє визначити лінію перетину багатогранників за точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого. Розв'язання задачі зводиться до побудови точки перетину прямої з площиною.

Спосіб граней дозволяє визначити лінію перетину багатогранників як пряму, по якій перетинаються певні грані багатогранників. Розв'язання задачі зводиться до побудови лінії перетину двох площин.

Лініями перетину двох багатогранників є просторові замкнені багатокутники. Якщо один багатогранник частково перетинає поверхню другого, то матимемо тільки одну замкнену ламану лінію їх взаємного перетину, це називається *неповним проникненням* або *врізанням*.

Якщо один багатогранник повністю перетинає другий, то отримаємо дві лінії перетину – лінію входу і лінію виходу, це називається *повним проникненням*.

Просторова лінія перетину багатогранників складається з відрізків прямих ліній, по яких перетинаються їх грані, при цьому вершини багатогранників є точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого.

На рис. 5.19 наведено приклад побудови ліній перетину піраміди $SABC$ і чотиригранної призми $DEFG$.

Тригранна піраміда своєю основою розташована на горизонтальній площині проєкцій. Дві бічні грані призми $DEE'D'$ і $GFF'G'$ – горизонтальні площини рівня, а дві інші $DGG'D'$ і $EFF'E'$ – фронтально проєкціювальні площини, тому їх фронтальні проєкції перетворюються в прямі лінії, які мають збиральні властивості, а бічні ребра призми проєкціюються в точки. Тому фронтальна проєкція лінії перетину цих фігур відома. Оскільки призма повністю перетинає піраміду, то отримуємо дві лінії перетину – лінію входу і лінію виходу. Для побудови горизонтальної проєкції лінії перетину проводимо через грані $DEE'D'$ і $GFF'G'$ горизонтальні площини рівня $\alpha(\alpha_2)$ і $\Sigma(\Sigma_2)$, які паралельні основі піраміди і, таким чином, лінії перетину з бічною поверхнею піраміди дадуть фігури, подібні основі. Фронтальна проєкція горизонтальної площини рівня α_2 перетинає ребро піраміди S_2B_2 у точці T_2 . Далі за законом належності та за допомогою лінії проєкційного зв'язку будемо її горизонтальну проєкцію T_1 . Потім проводимо через T_1 пряму паралельну B_1A_1 і здобуваємо точки 1_1 і 3_1 . Через точку 3_1 проводимо пряму, паралельну A_1C_1 , і здобуваємо точку 4_1 . Потім через T_1 проводимо пряму, паралельну B_1C_1 , і здобуваємо точки 2_1 і 5_1 .

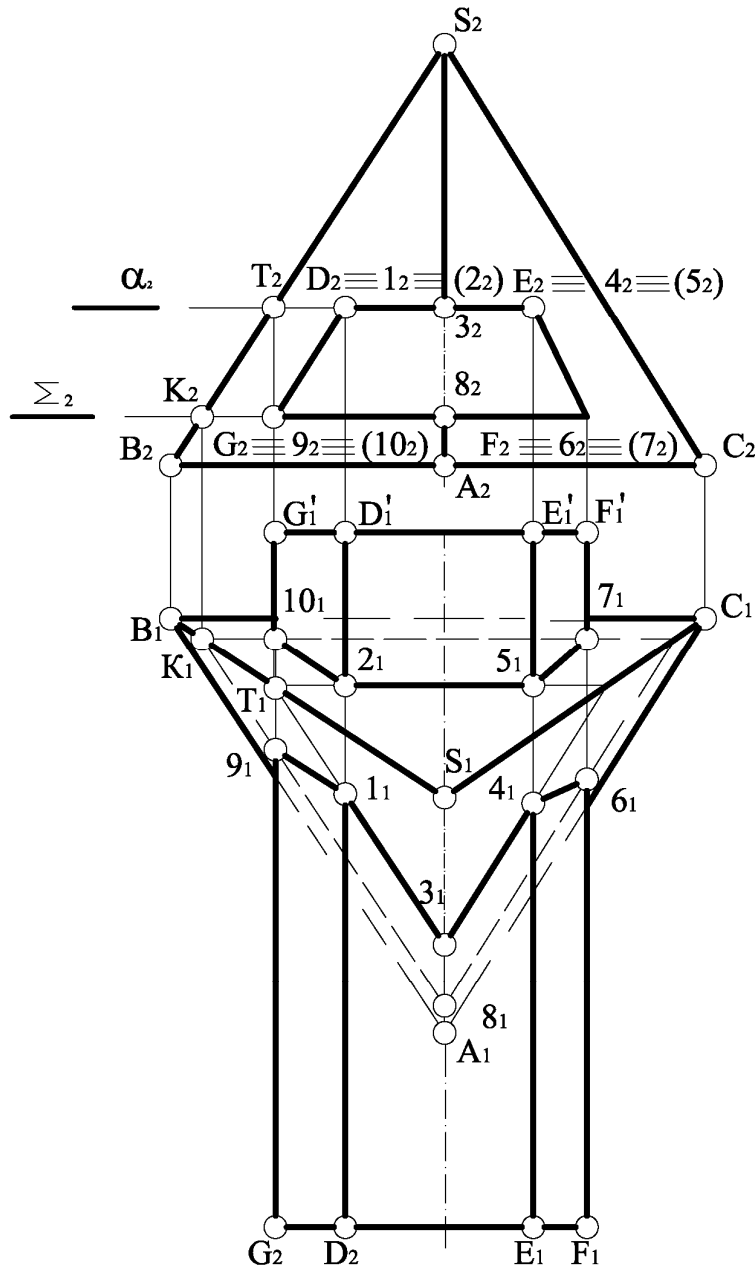


Рисунок 5.19

Аналогічно, завдяки горизонтальній площині рівня $\Sigma(\Sigma_2)$, яку перетинає ребро піраміди SB у точці K , будемо трикутник перетину бічної поверхні піраміди подібний основі і на ньому знаходимо точки $9_1, 8_1, 6_1, 7_1, 10_1$. Послідовність відповідних точок очевидна з креслення з урахуванням видимості елементів.

На горизонтальній площині проєкцій усі грані піраміди $SABC$ видимі, а з граней призми невидима тільки одна $GG'F'F$. Тому на горизонтальній площині проєкцій невидимі тільки відрізки $10_1 7_1, 9_1 8_1$ і $8_1 6_1$, які належать грані $GG'F'F$.

На рис. 5.20 наведено приклад побудови лінії перетину піраміди $SABC$ і піраміди $HEDF$.

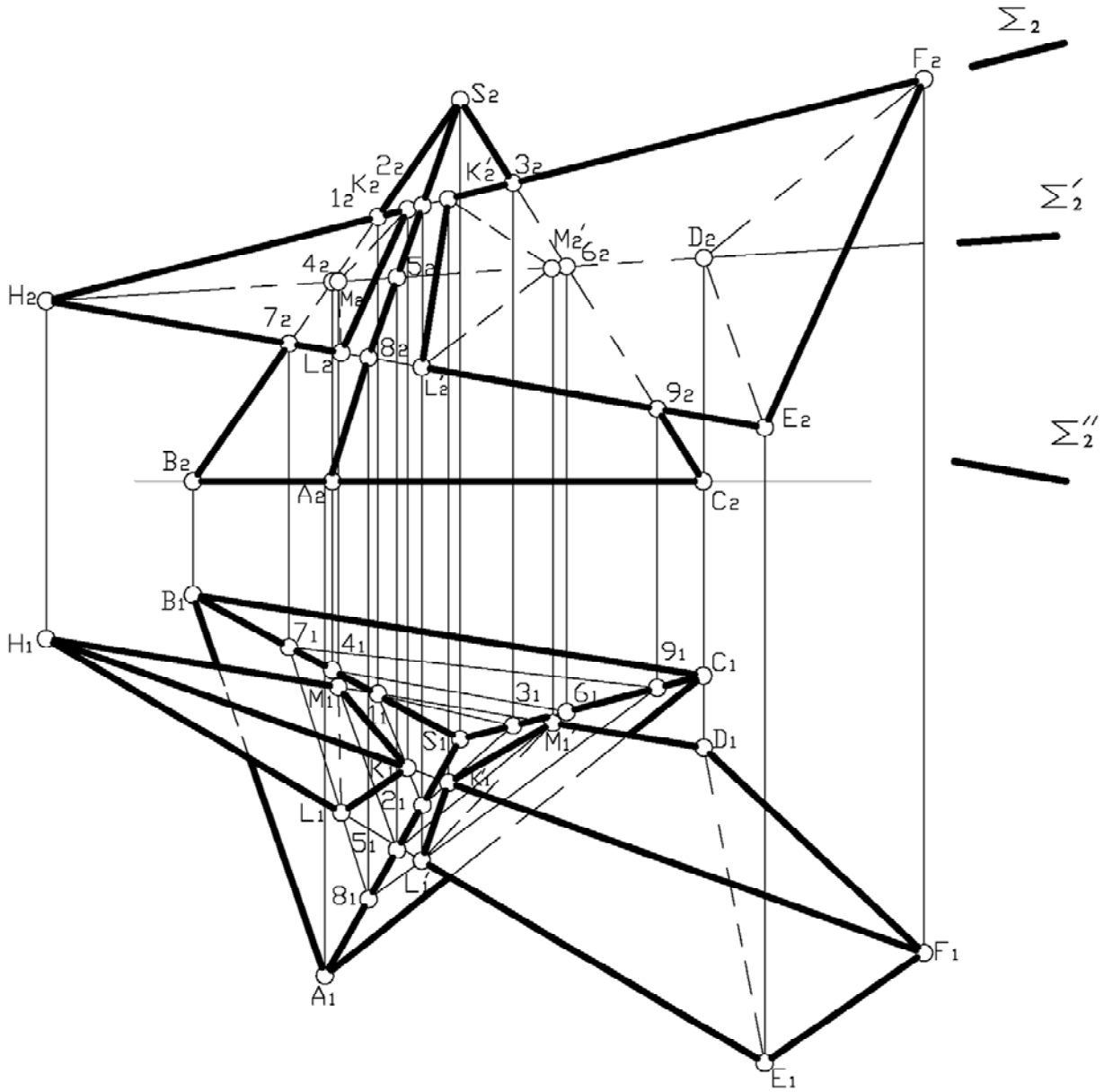


Рисунок 5.20

Тригранна піраміда $SABC$ своєю основою розташована на горизонтальній площині проєкцій. Тригранна піраміда $HEDF$ займає загальне положення.

Тому для побудови лінії перетину двох пірамід використовуємо спосіб ребер, який зводиться до побудови точки перетину прямої з площиною. Для цього через ребра піраміди $HEDF$ проводимо фронтально проєкціювальні площини $\Sigma(\Sigma_2), \Sigma'(\Sigma'_2), \Sigma''(\Sigma''_2)$. Кожна з цих площин перетинає піраміду $SABC$ по трикутнику і точки лінії перетину знаходяться на перетині цього трикутника з ребром піраміди $HEDF$. Наприклад, фронтально проєкціювальна площина Σ перетинає піраміду $SABC$ по трикутнику 123 . Тоді горизонтальні проєкції K_1 і K'_1 точок перетину K і K' піраміди $SABC$ з ребром HF піраміди $HEDF$ знаходимо на перетині горизонтальної проєкції $1_1 2_1 3_1$

трикутника 123 з горизонтальною проекцією H_1F_1 , а фронтальні проекції K_2 і K'_2 цих точок знаходимо по вертикальній відповідності, використовуючи властивість належності. Аналогічно визначаємо точки L, L', M, M' лінії перетину двох пірамід. Потім з'єднуємо отримані точки прямими і знаходимо дві лінії перетину: лінію входу $K'L'M'$ і лінію виходу KLM , це називається повним проникненням.

Видимість лінії перетину визначається видимістю граней, на яких знаходиться ця лінія. На горизонтальній площині проекцій усі грані піраміди $SABC$ видимі, а із граней піраміди $HEDF$ невидима тільки одна – HDE . Тому на горизонтальній площині проекцій невидимі тільки відрізки M_1L_1 і $M'_1L'_1$, які належать лінії перетину.

На фронтальній площині проекцій видимими є дві грані піраміди $SABC$ – SBA і SAC , а також грань піраміди $HEDF$ – HEF . Тому видимими є відрізки KL і $K'L'$, які належать грані HEF .

Задача на побудову лінії перетину гранних поверхонь значно спрощується, коли одна з фігур займає проекціювальне положення. На рис. 5.21 наведено приклад побудови лінії перетину прямої тригранної призми з тригранною пірамідою.

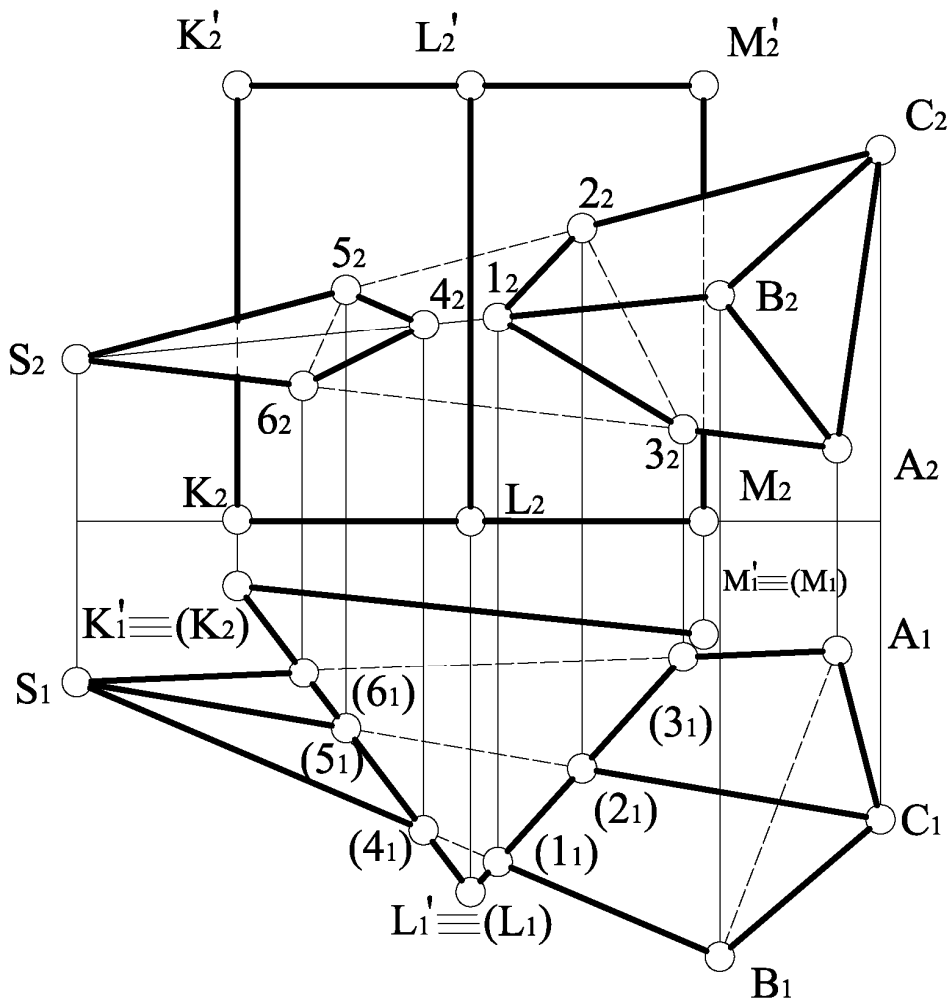


Рисунок 5.21

Грані призми займають горизонтально проєкціовальне положення і на горизонтальній площині проєкцій проєкціюються в прямі лінії. Горизонтальні проєкції $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1$ точок перетину ребер піраміди з гранями призми знаходимо на перетині горизонтальних проєкцій відповідних граней призми і ребер піраміди, а фронтальні проєкції $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2$ знаходимо по вертикальній відповідності з використанням властивості належності.

Видимість лінії перетину визначаємо відповідно видимості граней, на яких знаходиться ця лінія. На фронтальній площині проєкцій призма має дві видимі грані $KK'L'L$, $LL'M'M$ і одну невидиму $KK'M'M$, а з граней піраміди видимими є грані SBC , SBA , а невидимою – грань SAC . Тому видимими на фронтальній площині проєкцій є відрізки 1_22_2 , 1_23_2 , а також 4_25_2 , 4_26_2 , які лежать на видимих гранях.

6 КРИВІ ПОВЕРХНІ

Поверхню можна утворити при переміщенні твірної (лінія яка утворює поверхню) по напрямній.

Циліндрична поверхня утворюється переміщенням прямолінійної твірної l по криволінійній напрямній m , причому твірна l залишається постійно паралельною заданому напрямку s (рис. 6.1).

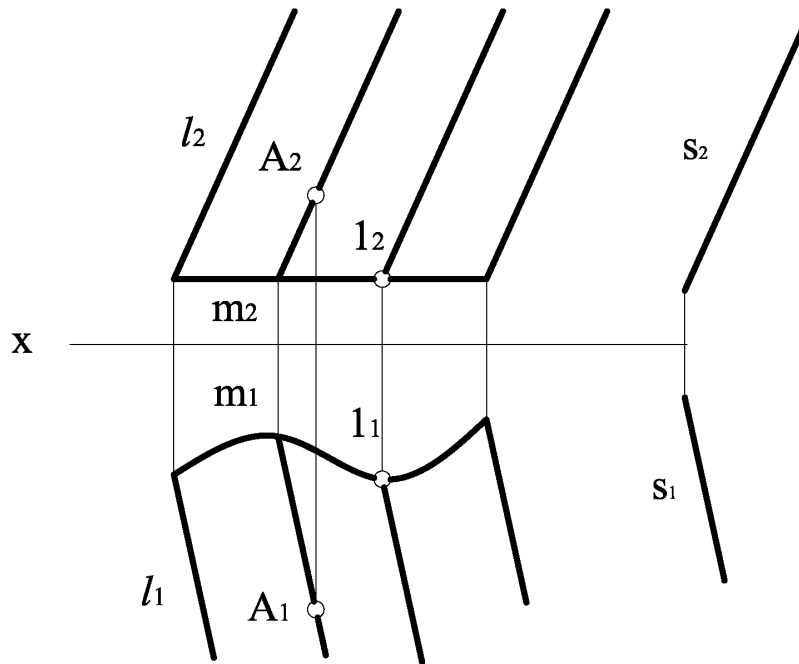


Рисунок 6.1

Якщо точки належать поверхні, то вона належить її твірній. Тіло, обмежене циліндричною поверхнею із замкнутою напрямною та двома паралельними площинами, називається **циліндром**. Частини площин, які обмежують циліндр, називають *основами*. Якщо твірні перпендикулярні до основи, то такий циліндр називають *прямим*, якщо ця умова не виконується – *нахиленим*. Циліндр називається *кововим*, якщо в його основі коло.

Конічна поверхня утворюється при переміщенні прямолінійної твірної l по криволінійній напрямній m , причому твірна l постійно проходить через нерухому точку S (рис. 6.2).

Циліндроїд утворюється переміщенням прямолінійної твірної l по двом криволінійним напрямним m і n , причому твірна l увесь час паралельна площині паралелізму Σ (рис. 6.3).

Оскільки площина паралелізму Σ – фронтально проєкціювальна, то фронтальні проєкції твірної в усіх її положеннях будуть паралельними між собою і відносно фронтального сліду Σ_2 цієї площини. **Циліндроїд** – це лінійчата поверхня, яка є нерозгортною, вона належить до поверхонь Каталана.

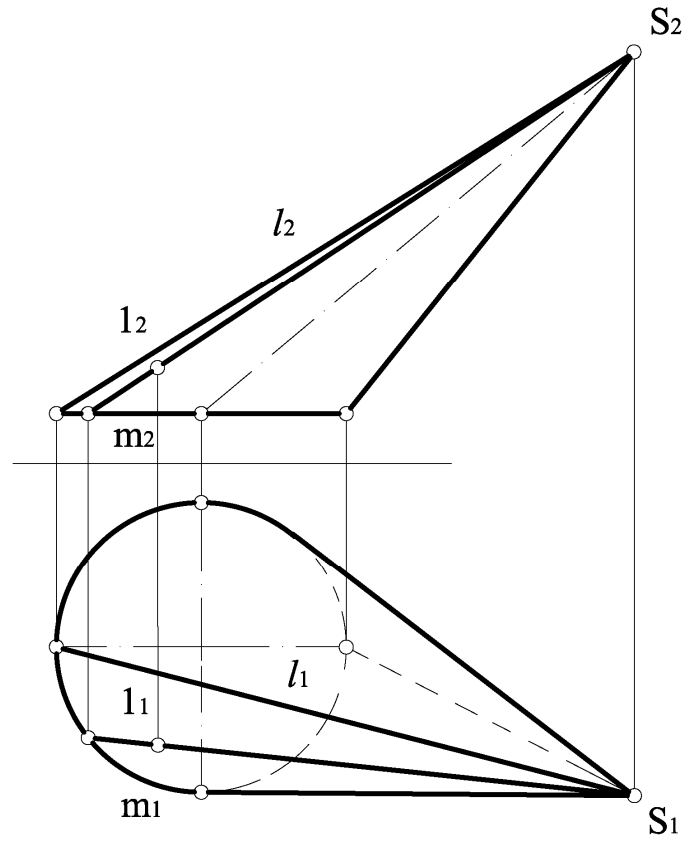


Рисунок 6.2

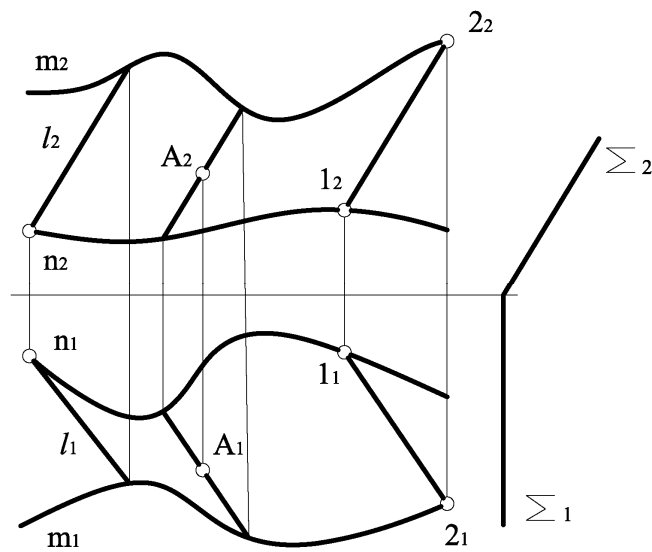


Рисунок 6.3

Кonoïд відрізняється від циліндроїда тим, що одна із напрямних – пряма.

Коса площина відрізняється від циліндроїда тим, що обидві напрямні – прямі. Вони мимобіжні і паралельні площині паралелізму.

Поверхнею обертання називають поверхню, яка утворена будь-якою лінією (плоскою або просторовою) при її обертанні навколо нерухомої осі.

Кожна точка твірної при обертанні навколо осі описує коло, яке називають паралеллю. Найбільша і найменша паралелі називаються відповідно *екватором* і *горлом*.

Площини, що проходять через вісь обертання, називають *меридіональними*, а лінії, по яких вони перетинають поверхню, називаються *меридіанами*. Меридіональну площину, яка паралельна відповідній площині проєкції, називають *головною меридіональною площиною*, а лінію її перетину з поверхнею обертання – *головним меридіаном*.

У техніці знаходять широке застосування поверхні обертання: циліндр, конус, сфера, оскільки їх просто обробляти на токарних верстатах.

Однопорожнинний гіперболоїд обертання утворюється при обертанні гіперболи навколо уявної осі.

Поверхня однопорожнинного гіперболоїда може бути отримана обертанням прямолінійної твірної АВ навколо осі i , причому твірна АВ і вісь i мимобіжні $(AB \dot{-} i)$ (рис. 6.4).

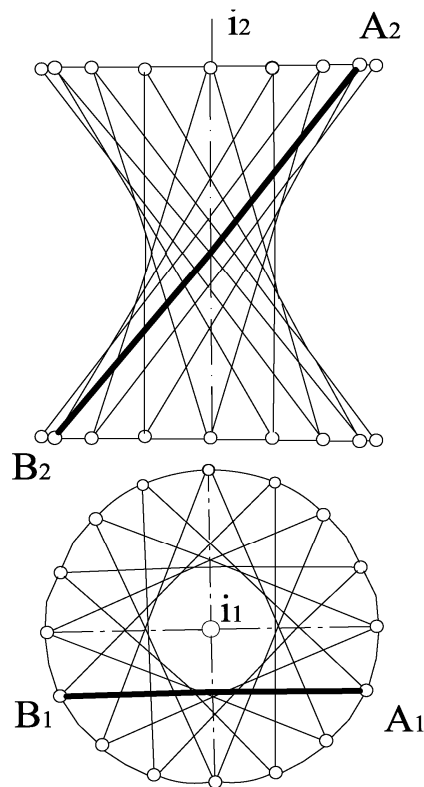


Рисунок 6.4

Такі поверхні часто використовують у машинобудуванні та будівництві, наприклад радіощогла Шухова, це однопорожнинний гіперболоїд, який має високу міцність та легкість.

Двопорожнинний гіперболоїд обертання утворюється обертанням гіперболи навколо дійсної осі Z (рис. 6.5).

Тор утворюється при обертанні кола, яке є твірною l , навколо осі k , що належить площині цього кола (рис. 6.6).

У залежності від положення осі обертання відносно кола можливі такі випадки:

1) відкритий тор (рис. 6.6 а), коли відстань t від центра кола O до осі обертання k більша від радіуса R твірного кола;

2) перехідний тор (рис. 6.6 б), коли вісь обертання k торкається твірного кола l , тобто $t = R$;

3) закритий тор (рис. 6.6 в), коли вісь обертання k перетинає твірне коло l , тобто $t < R$;

4) сфера (рис. 6.6 г), коли вісь обертання k проходить через центр кола l , тобто $t = 0$. Сферу можна розглянути як окремий випадок тора.

До кривих поверхонь належать також гвинтові поверхні, які утворюються при гвинтовому русі твірної. Якщо твірна – пряма лінія, то утворені поверхні називають *гелікоїдами*.

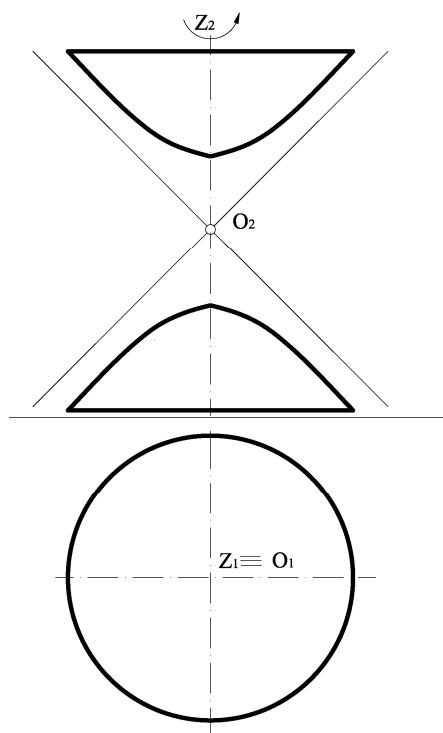


Рисунок 6.5

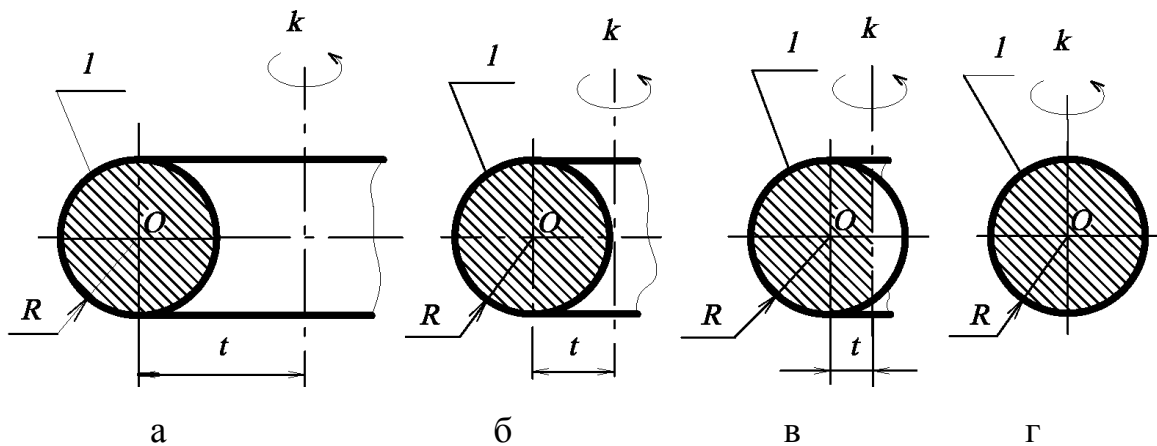


Рисунок 6.6

Лінію можна розглядати як сукупність розташованих по поверхні точок. Виникає запитання: скільки і які точки необхідно побудувати? Побудова великої кількості точок приводить до великих затрат часу.

Спочатку будують опорні точки, до яких належать точки початку і кінця лінії, точки на межі видимості, а також найвищі та найнижчі точки. Потім будують точки, які називають додатковими і вони впливають тільки на точність побудови.

Зазвичай на комплексному кресленні точку задають на одній із проєкцій, і при цьому виникає задача знаходження інших проєкцій цієї точки. Для розв'язання цієї задачі використовують умову належності точки поверхні: якщо точка належить поверхні, то вона належить деякій лінії цієї поверхні. Тому для знаходження необхідної проєкції через задану точку проводять яку-небудь лінію поверхні. Як правило, у якості такої лінії використовують твірну або паралель. Потім знаходять другу проєкцію цієї лінії, а потім, використовуючи властивість належності точки лінії, знаходять другу проєкцію цієї точки.

На рис. 6.7 наведено приклад побудови відсутніх проєкцій лінії l по заданій фронтальній проєкції лінії l , яка належить поверхні прямого кругового конуса.

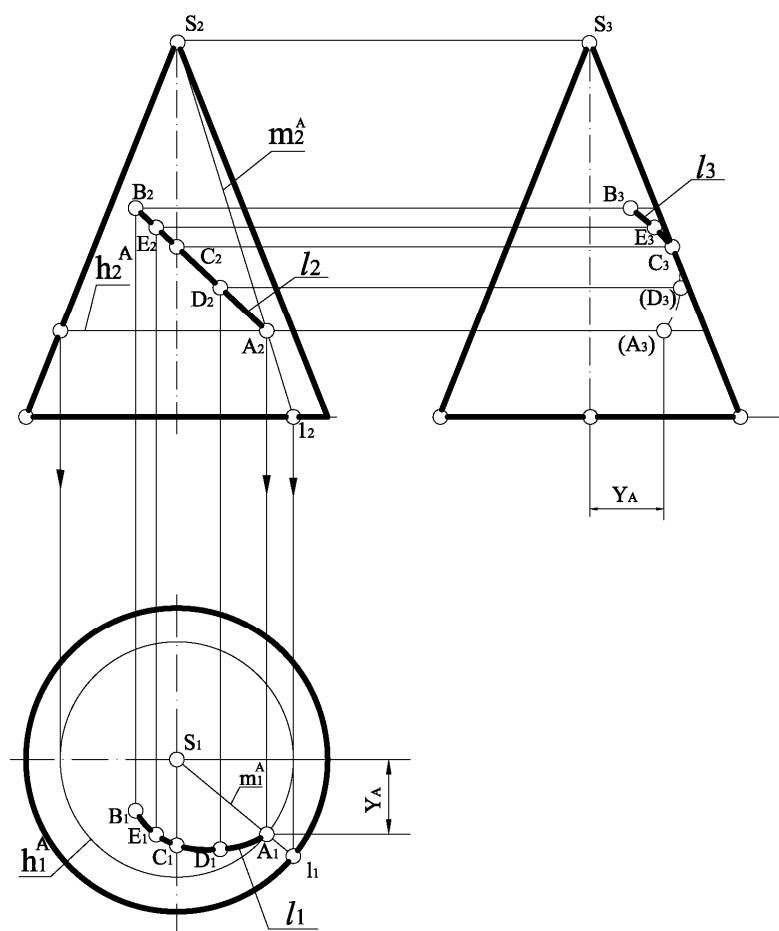


Рисунок 6.7

У якості опорних точок приймаємо точки A і B – начало і кінець лінії, а також точку C , точку перетину лінії ℓ з профільним меридіаном, а для точності побудови вибираємо ще дві допоміжні точки E і D .

Прямий круговий конус можна розглядати як поверхню обертання і як лінійчату поверхню. Тому для побудови горизонтальних проєкцій точок, які належать поверхні конуса, існує два способи.

Якщо конус розглядати як поверхню обертання, то через задану точку, наприклад A , проводимо паралель h^A . Її фронтальна проєкція h^A_2 є прямою, яка проходить через A_2 і перпендикулярно осі конуса, а горизонтальна проєкція h^A_1 – коло радіуса $h^A_2/2$.

Фронтальною межею видимості для конуса є лінія його головного меридіана, а профільною межею видимості є лінія профільного меридіана.

Використовуючи властивість належності точки лінії, а також враховуючи видимість фронтальної проєкції A_2 точки A , знаходимо горизонтальну проєкцію A_1 точки A .

Для побудови профільної проєкції A_3 точки A через A_2 проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо на ній від осі вправо Y_A .

Якщо конус розглядати як лінійчату поверхню, то через точку A проводимо твірну m^A . Фронтальна проєкція m^A_2 проходить через фронтальну проєкцію A_2 точки A і в точці l_2 перетинає фронтальну проєкцію основи конуса. Потім будуємо горизонтальну проєкцію l_1 точки l . Оскільки точка A_2 за умовою видима, то видимою буде і твірна m^A_2 , яка проходить через неї. Тому горизонтальна проєкція l_1 точки l буде належати нижній половині горизонтальної проєкції кола основи конуса.

З'єднуємо прямою точки l_1 і S_1 і отримуємо горизонтальну проєкцію m^A_1 твірної m^A . Використовуючи властивість належності точки лінії, отримуємо горизонтальну проєкцію A_1 точки A .

Аналогічно знаходять горизонтальні проєкції всіх вибраних точок і, з'єднавши їх плавною кривою, отримуємо горизонтальну проєкцію ℓ_1 лінії ℓ .

Далі будуємо профільні проєкції точок, використовуючи лінії зв'язку і відстані до відповідних точок, які беремо з горизонтальної площини проєкцій. Профільна проєкція C_3 точки C належить профільному меридіану. Частина профільної проєкції B_3, E_3, C_3 буде видимою, а частина C_3, D_3, A_3 – невидимою.

На рис. 6.8 наведено приклад побудови відсутніх проєкцій лінії ℓ по заданій фронтальній проєкції лінії ℓ_2 , яка належить поверхні прямого колового циліндра.

У якості опорних точок приймаємо точки A і B – начало і кінець лінії l , а також точку C , точку перетину лінії l з профільним меридіаном, а для точності побудови вибираємо ще дві допоміжні точки E і D .

Бічна поверхня циліндра займає проєкціювальне положення відносно горизонтальної площини проєкцій, при цьому всі паралелі однакові і їх горизонтальні проєкції збігаються з горизонтальним обрисом циліндра, яким є коло.

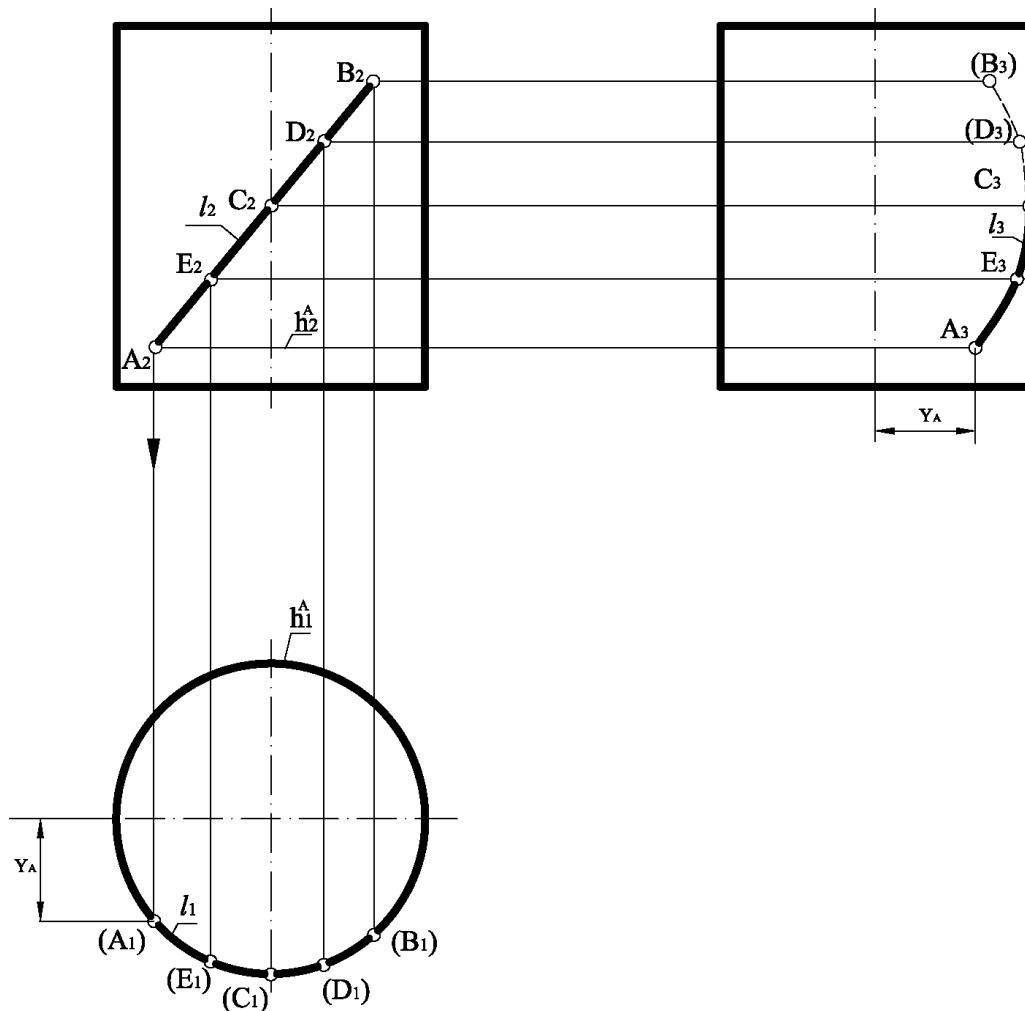


Рисунок 6.8

Тому горизонтальні проекції точок знаходять по вертикальній відповідності на горизонтальному обрисі циліндра. Горизонтальною межею видимості є лінія верхньої основи, тому вся горизонтальна проекція $\in l_1$ лінії l буде невидимою.

Для побудови профільної проекції A_3 точки A через точку A_2 проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо Y_A на ній від осі вправо. Частина профільної проекції $A_3E_3C_3$ буде видимою, а частина $C_3D_3B_3$ – невидимою.

На рис. 6.9 наведено приклад побудови проекцій, яких не вистачає, лінії l , яка належить сфері, по заданій фронтальній проекції l_2 .

У якості опорних точок приймаємо точки A і B – початок і кінець лінії l , а також D і C – точки перетину лінії l з екватором і профільним меридіаном сфери. Оскільки лінія l є кривою лінією, то вибираємо ще додаткові точки E, F, G .

Фронтальна проекція точки D належить фронтальній проекції екватора, тому її горизонтальна проекція належить горизонтальній проекції екватора. Існують дві точки, які задовольняють цій умові: одна на верхній половині обрисового кола, друга – на нижній.

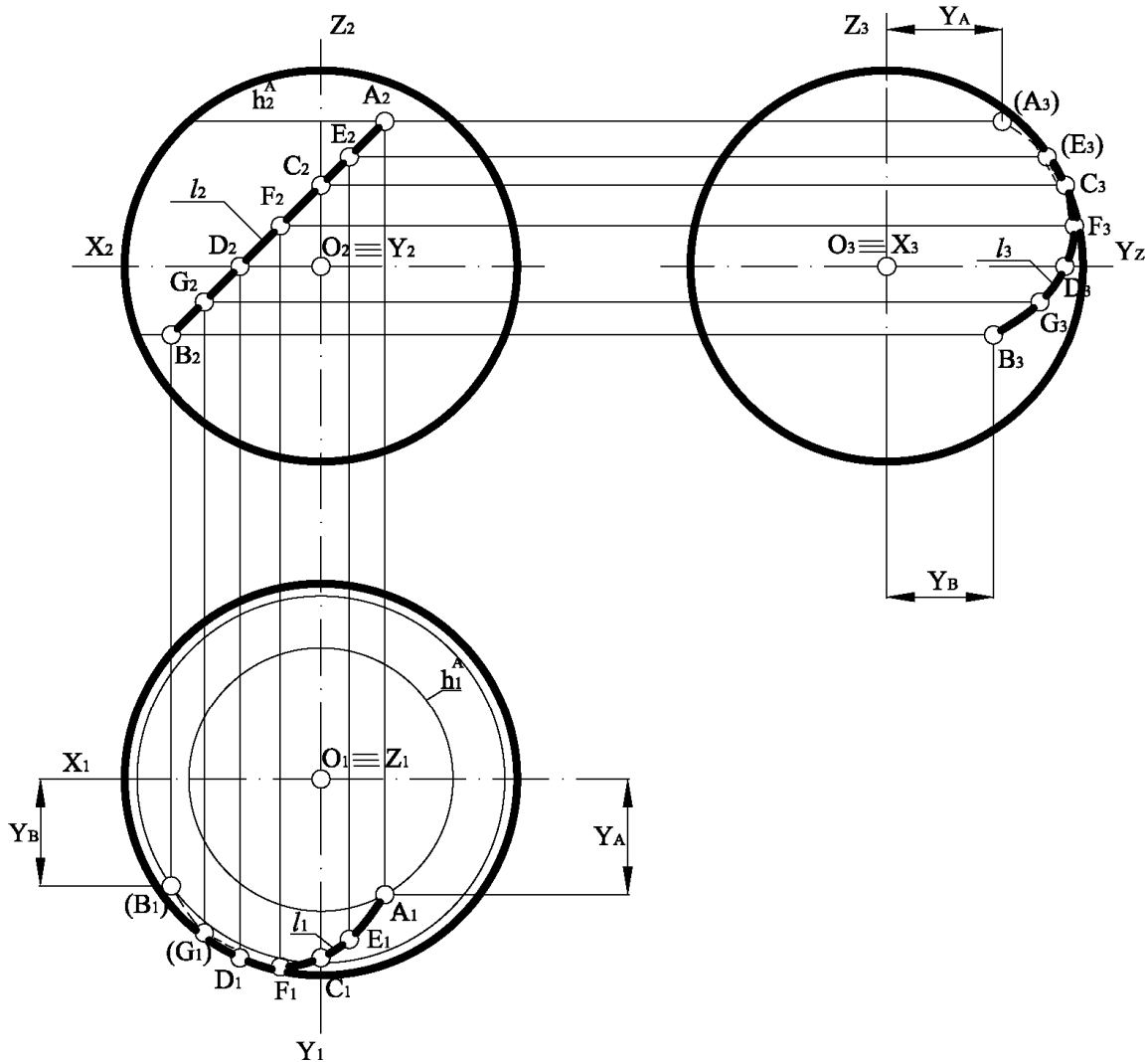


Рисунок 6.9

Для правильного знаходження положення точки використовуємо дані про її видимість на фронтальній площині проєкцій, де вона є видимою. Фронтальною межею видимості для сфери є горизонтальна проєкція головного меридіана, тому горизонтальна проєкція D_1 належить нижній половині обрисового кола сфери.

Порядок знаходження горизонтальних проєкцій інших точок однаковий. Розглянемо знаходження горизонтальної проєкції A_1 точки A . Через точку A проводимо паралель. Її фронтальна проєкція h_2^A є прямою, яка перпендикулярна до фронтальної проєкції осі сфери, а горизонтальна проєкція h_1^A – коло радіуса $h_2^A/2$ з центром, який збігається з горизонтальною проєкцією осі сфери.

Горизонтальною межею видимості для поверхні сфери є екватор. Фронтальна проєкція A_2 лежить вище екватора і є видимою, тому на Π_1 горизонтальна проєкція A_1 є видимою і буде знаходитися на нижній половині кола h_1^A , тому що фронтальною межею видимості для сфери є головний меридіан. Аналогічно знаходимо положення і видимість горизонтальних проєкцій інших точок.

Потім з'єднуємо отримані точки плавною кривою з урахуванням видимості. Частина горизонтальної проекції лінії ℓ_1 буде видимою: $A_1E_1C_1F_1D_1$, а частина $D_1G_1B_1$ – невидимою.

Для побудови профільної проекції A_3 точки A через A_2 проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо на ній від Z_3 вправо величину, що дорівнює U_A . Аналогічно будуюмо профільні проекції інших точок. Для побудови профільної проекції C_3 точки C достатньо провести горизонтальну лінію зв'язку із C_2 до перетину з профільною проекцією профільного меридіану.

Профільною межею видимості для поверхні сфери є профільний меридіан. Частина лінії від точки B до точки C знаходиться перед площиною профільного меридіана, тому профільна проекція цієї частини лінії буде видимою, а частина $C_3E_3A_3$ – невидимою.

6.1. Переріз кривих поверхонь площиною

При перетині кривих поверхонь площиною утворюється плоска фігура, яку називають *перерізом*.

У загальному випадку для побудови лінії перерізу кривої поверхні площиною необхідно виконати такі дії:

1 Визначити, яке положення займає січна площина відносно площин проекцій. Якщо січна площина є проєкціовальною, то одна проєкція перерізу є готовою, вона збігається зі слідом заданої площини. Друга проєкція будується за умовою належності точок перерізу поверхні. Якщо січна площина займає загальне положення, то задачу можна розв'язати методом заміни площин проекцій, або допоміжних січних посередників.

2 Для спрощення побудови лінії перерізу усі точки, через які проходить лінія перерізу, розділяють на опорні, точки перетину і проміжні точки.

3 Іноді січна площина не повністю перетинає задану поверхню, тоді для зручності зображення поверхні продовжують до повного перетину поверхні площиною, але потім умовну частину перерізу треба відкинути.

4 Видимість перерізу визначають за допомогою точок перетину, які належать обрисній твірній, головному меридіану або екватору.

5 Через отримані точки проводять плавну криву лінію перерізу, враховуючи при цьому її видимість.

При перерізі прямого колового циліндра площиною можливі такі випадки:

1 Якщо січна площина не перпендикулярна і не паралельна осі циліндра, то вона перетинає циліндр по еліпсу.

2 Якщо січна площина перпендикулярна осі циліндра, то отримаємо коло.

3 Якщо січна площина паралельна осі циліндра, то отримаємо прямокутник.

4 Якщо січна площина є дотичною до поверхні циліндра, то отримаємо пряму лінію.

На рис. 6.10 наведено приклад побудови перерізу поверхні циліндра фронтально проєкціювальною площиною T .

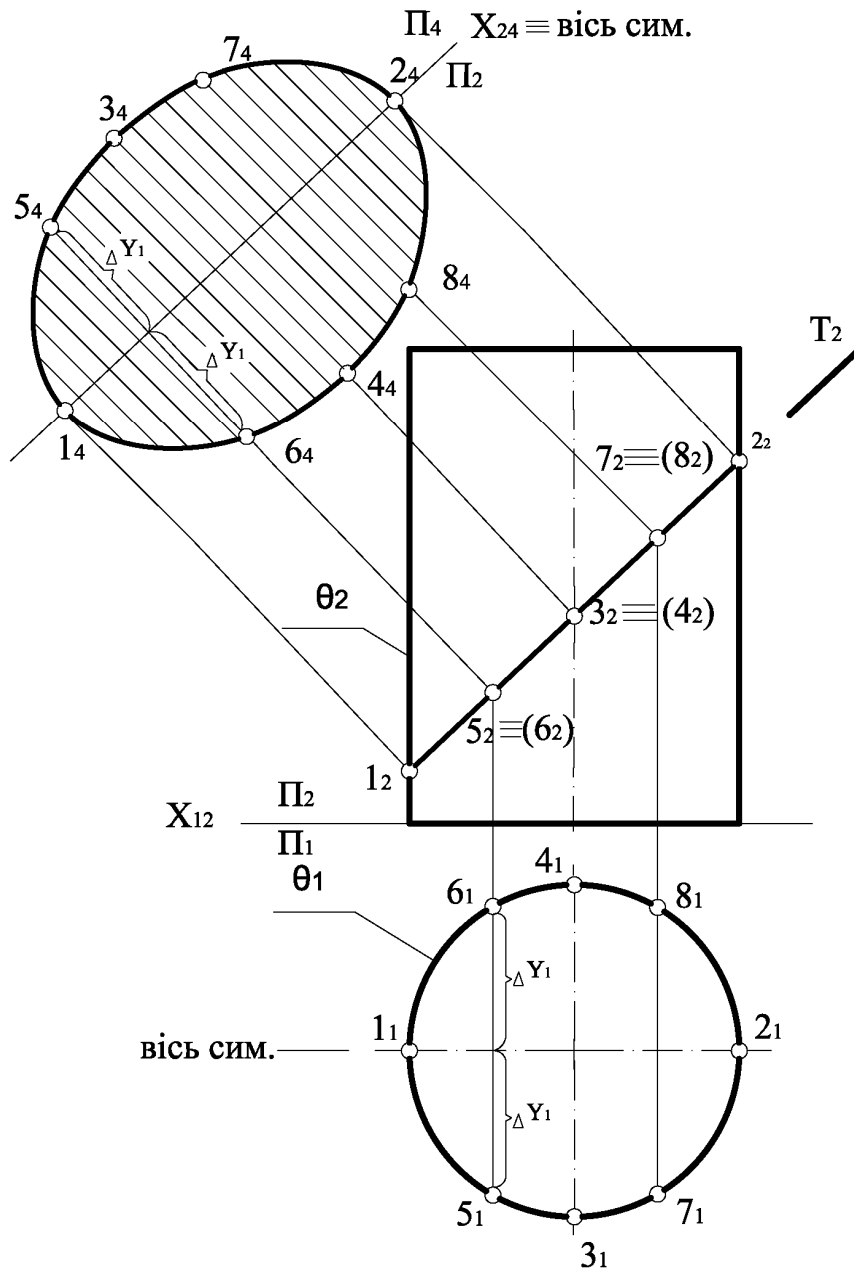


Рисунок 6.10

Завдяки збиральним властивостям проєкціювальних площин на Π_2 маємо готову проєкцію лінії перерізу, яка збігається зі слідом площини T (T_2). Січна площина T не перпендикулярна і не паралельна осі циліндра, вона перетинає циліндр по еліпсу. Велика вісь еліпсу належить площині головного меридіана циліндра θ і дорівнює відстані між точками 1_2 і 2_2 , а мала вісь еліпсу належить площині профільного меридіана і дорівнює відстані між точками 3_1 і 4_1 . Для точності побудови еліпсу вибираємо ще допоміжні проєкції точок 5_2 і 6_2 , а також 7_2 і 8_2 . Далі для побудови натура-

льної величини перерізу циліндра нахиленою площиною T використовуємо метод заміни площини проєкцій. Вісь нової системи проєкцій X_{24} будемо паралельно T_2 . Координати точок еліпсу заміряємо з горизонтальної площини проєкцій і переносимо на Π_4 . Завдяки тому, що еліпс є симетричною фігурою, координати точок краще заміряти від осі 1_1-2_1 .

При перетині конуса січною площиною утворюються криві другого порядку.

На рис. 6.11 наведені всі можливі випадки розташування січної площини відносно визначника конічної поверхні.

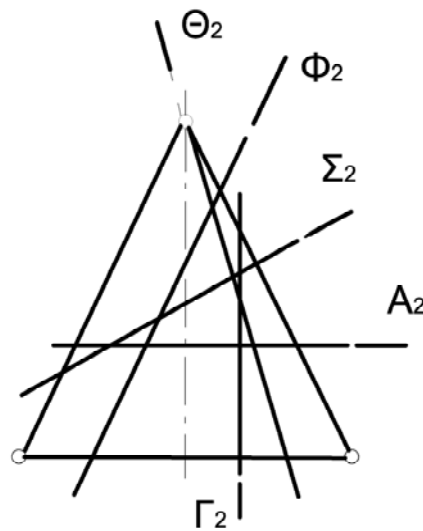


Рисунок 6.11

Якщо січна площина $\Sigma \equiv \Sigma_2$ перетинає всі твірні конуса, то отримаємо еліпс. При перетині конуса площиною $A \equiv A_2$ перпендикулярно до осі конуса отримаємо коло. При перетині конуса площиною $\Phi \equiv \Phi_2$ паралельно одній із твірних отримаємо параболу. Якщо січна площина $\Gamma \equiv \Gamma_2$ перетинає поверхню конуса паралельно осі обертання або яким-небудь двом твірним, то отримаємо гіперболу. При перетині конуса площиною $\Theta \equiv \Theta_2$, яка проведена через вершину конуса, отримаємо трикутник.

На рис. 6.12 наведено приклад побудови перерізу конуса фронтально проєкціювальною площиною $\Sigma \equiv \Sigma_2$.

Площина Σ має на Π_2 збиральні властивості, тому фронтальна проєкція еліпса є відрізком прямої $1_2 2_2$.

Горизонтальна проєкція еліпса визначається за ознакою належності його точок поверхні конуса. Побудову горизонтальної проєкції еліпса виконуємо з використанням допоміжних січних посередників – це горизонтальні площини рівня.

Велика вісь еліпса дорівнює відстані між точками 1_2 і 2_2 , у яких січна площина перетинає обрисові твірні конуса. Якщо мала вісь знаходиться в площині перерізу і перпендикулярна великій осі еліпса, то вона є фронтально проєкціювальною прямою.

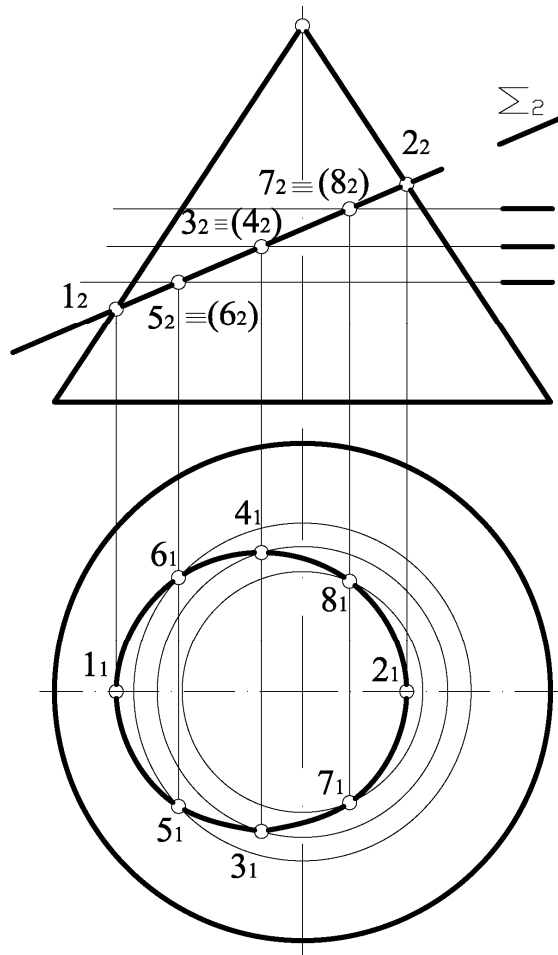


Рисунок 6.12

Для знаходження фронтальної проекції осі ділимо велику вісь $1_2 2_2$ на дві рівних частини і отримуємо точку $3_2 \equiv (4_2)$, яка є фронтальною проекцією малої осі еліпса. Довільно вибираємо ще допоміжні точки $5_2 \equiv (6_2)$, а також $7_2 \equiv (8_2)$. Через задані точки проводимо допоміжні січні площини – це горизонтальні площини рівня, які перетинають конус по колу, будуюмо ці кола на Π_1 і, використовуючи вертикальну відповідальність, знаходимо горизонтальні проекції точок, через які будуюмо плавну криву лінію – це горизонтальна проекція еліпса. Мала вісь еліпса дорівнює відстані між точками 3_1 і 4_1 .

На рис. 6.13 наведено приклад побудови перерізу конуса площиною загального положення Σ .

Оскільки перерізом є еліпс, то починаємо побудову з опорних точок малої та великої осей. Кінці великої осі будуть найнижчою та найвищою точками, тому вони знаходяться на лінії найбільшого нахилу площини Σ , яка проходить через вісь обертання конуса. Горизонтальна проекція лінії найбільшого нахилу ℓ_1 проходить через точку S_1 перпендикулярно до сліду h_1^0 площини Σ . Фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу ℓ_2 будуюмо за ознакою належності площині Σ за допомогою горизонтального M та фронтального N слів цієї лінії.

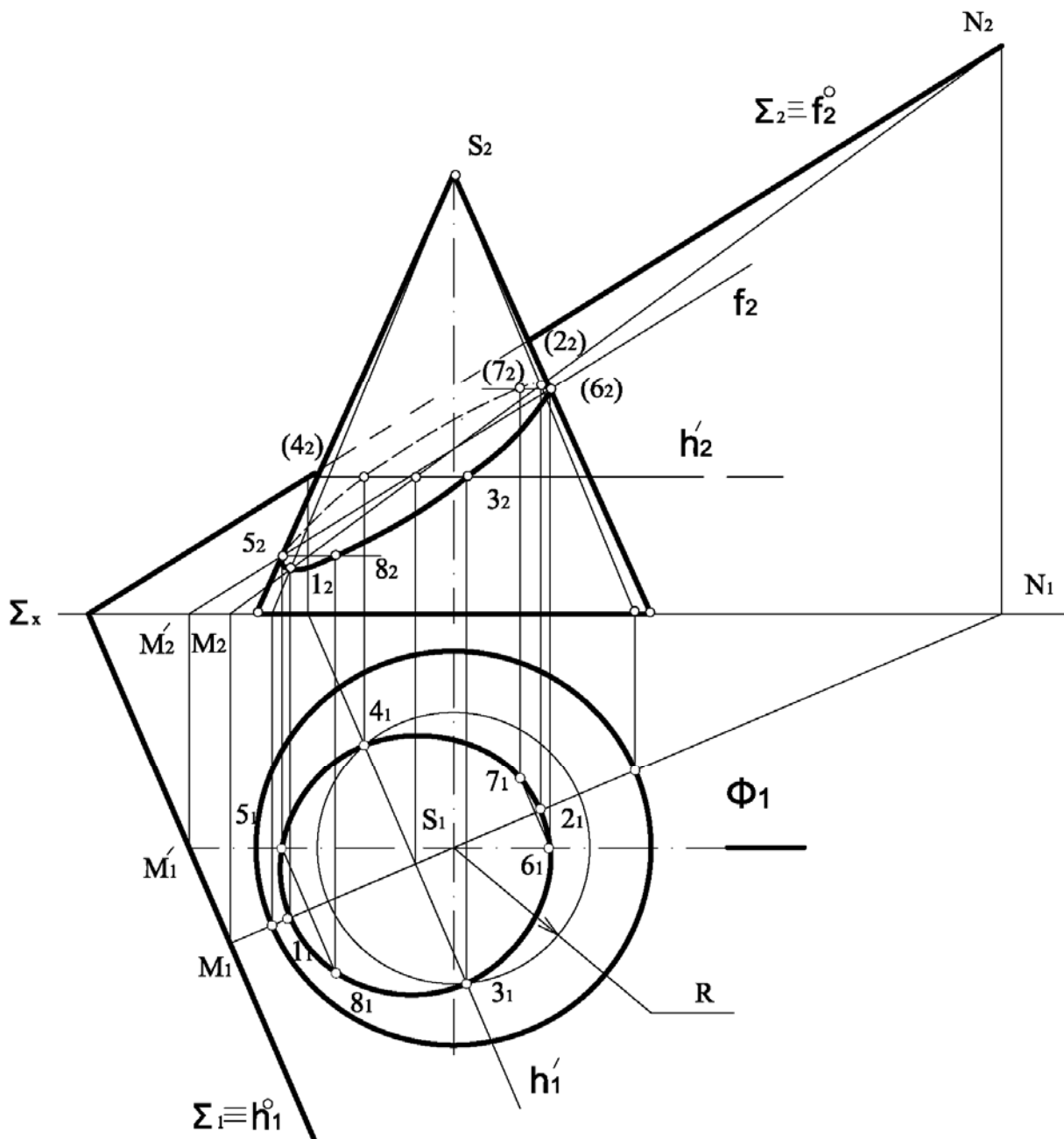


Рисунок 6.13

Для знаходження точок перетину лінії найбільшого нахилу площини Σ із конічною поверхнею через пряму ℓ проведемо горизонтально проєкціювальну площину θ , яка перетинає конус по трикутнику, бічними сторонами якого є твірні конуса m і n . Спочатку знаходимо фронтальні проєкції точок: $l_2 \cap n_2 = 1_2, l_2 \cap m_2 = 2_2$, а потім, використовуючи вертикальну відповідність, знаходимо горизонтальні проєкції точок 1_1 і 2_1 . Унаслідок цього отримаємо проєкції великої осі еліпса $1_1 2_1$ і $1_2 2_2$. Наступними опорними точками є точки малої осі 3 і 4. Знаходимо центр еліпса O (O_1, O_2) за умовою $O_1 = O_2$. Потім через O_1 проводимо горизонтальну проєкцію h_1 прямої h перпендикулярно до l_1 , на якій знаходяться точки малої осі. Оскільки пряма h^1 є горизонталлю площини Σ , її фронтальна проєкція має бути па-

паралельною відносно осі X . Потім через пряму h' проведемо горизонтальну площину рівня $\alpha(\alpha_2)$, яка перетинає конус по колу радіуса R . Пряма h' і коло R розташовані в площині Σ і, перетинаючись, визначають шукані точки 3 ($3_1, 3_2$) і 4 ($4_1, 4_2$).

Наступними опорними точками є точки перетину, які належать обрисним твірним конуса, вони визначають видимість лінії перерізу на фронтальній площині проєкцій. Через обрисні твірні a і b проведемо фронтальну площину рівня $\Phi = \Phi_1$ і знайдемо лінію перетину f (f_1, f_2) з площиною Σ . Точки перетину 5 і 6 спочатку знаходимо на фронтальній площині проєкцій: $a_2 \cap f_2 = 5_2, b_2 \cap f_2 = 6_2$, а потім, використовуючи вертикальну відповідність, знаходимо горизонтальні проєкції точок 5_1 і 6_1 . Далі будуюмо точки симетричні відповідно точкам 5 і 6 відносно осі еліпса – це точки 8 і 9. Далі плавною кривою з'єднуємо побудовані точки і отримуємо горизонтальну і фронтальну проєкції еліпса. За необхідності можна вводити додаткові січні площини у вигляді площини α , які можна проводити нижче від точки 2 і вище від точки 1.

6.2 Побудова точок перетину лінії з поверхнею

Алгоритм побудови точок перетину прямої лінії з кривою поверхнею має такий вигляд:

- 1 Через задану пряму лінію необхідно провести допоміжну проєкціовальну площину.
- 2 Знайти лінію перетину кривої поверхні з допоміжною проєкціовальною площиною.
- 3 Знайти точки перетину прямої лінії з лінією перетину кривої поверхні з допоміжною площиною.

Мають місце випадки, коли найбільш доцільно в якості допоміжної використати площину загального положення.

На рис. 6.14 наведено приклад побудови точок перетину прямої l з прямим конусом обертання.

Якщо через пряму загального положення l провести фронтально проєкціовальну площину, то при її перетині з конусом матимемо еліпс. Якщо через пряму l провести горизонтально проєкціовальну площину, то при її перетині з конусом матимемо гіперболу. Якщо через пряму l провести площину загального положення, яка проходить через вершину конуса, то при перетині її з конусом матимемо трикутник. Цей варіант підвищує точність побудови і скорочує час.

Таким чином, допоміжна площина Σ задана прямою l і вершиною конуса S . Щоб побудувати трикутник перетину, необхідно знайти для площини Σ її горизонтальний слід. Для цього на горизонтальній площині проєкцій необхідно побудувати дві спільні точки для площини Σ і Π_1 . Першою є точка M (M_1, M_2) – це горизонтальний слід прямої l .

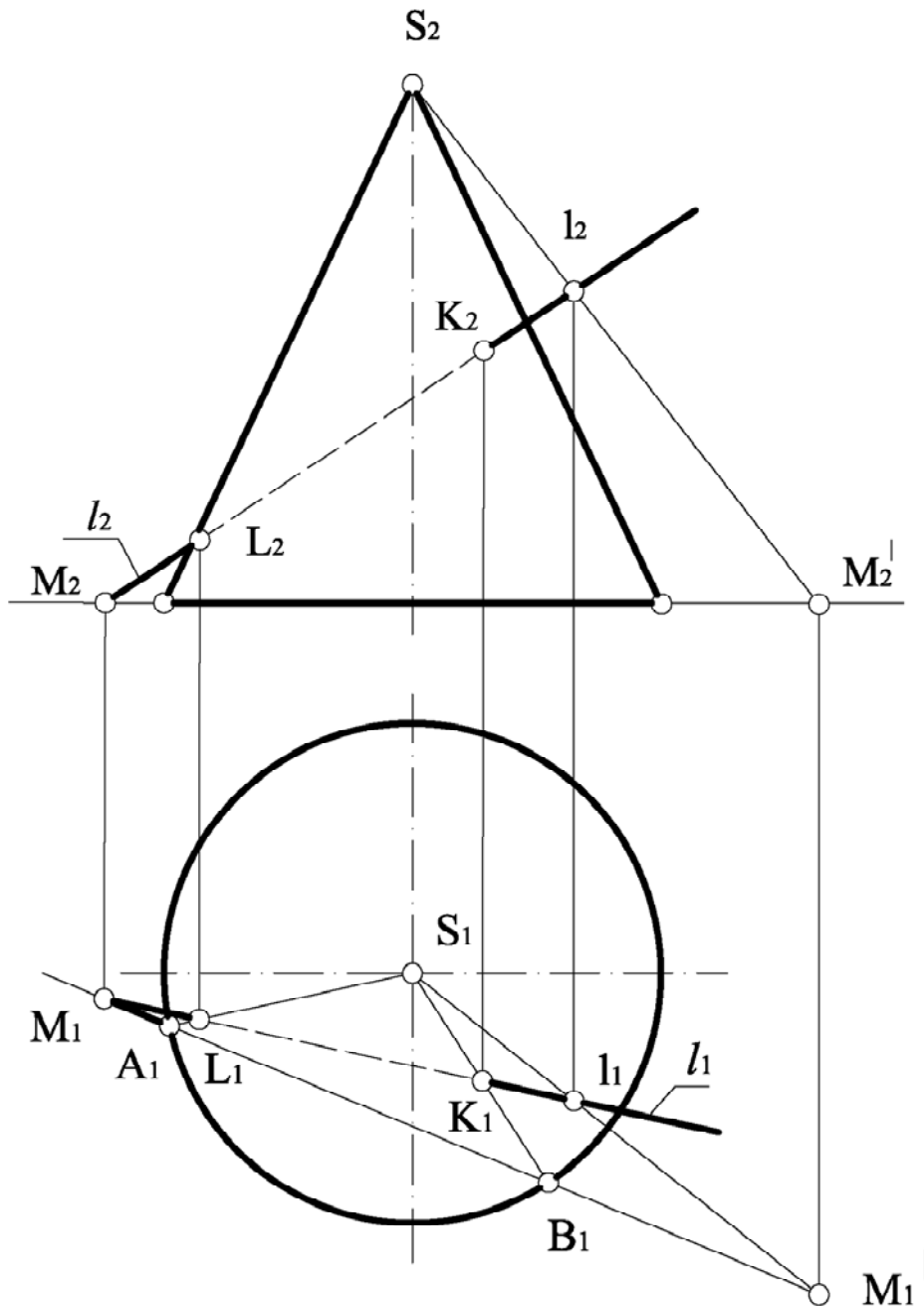


Рисунок 6.14

Для знаходження другої спільної точки M' (M_1' , M_2') будемо довільну пряму $S1$ (S_11_1 , S_22_2). Пряма M_1M_1' є горизонтальним слідом площини Σ , який перетинає основу конуса в точках A і B . У результаті перетину конуса площиною Σ матимемо трикутник SAB . Тому горизонтальні проекції точок перетину прямої ℓ з поверхнею конуса виникали як результат перетину A_1S_1 і B_1S_1 з ℓ_1 . Фронтальні проекції точок L_2 і K_2 отримані за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку.

На рис. 6.15 наведено приклад побудови точок перетину прямої ℓ з поверхнею похилого циліндра.

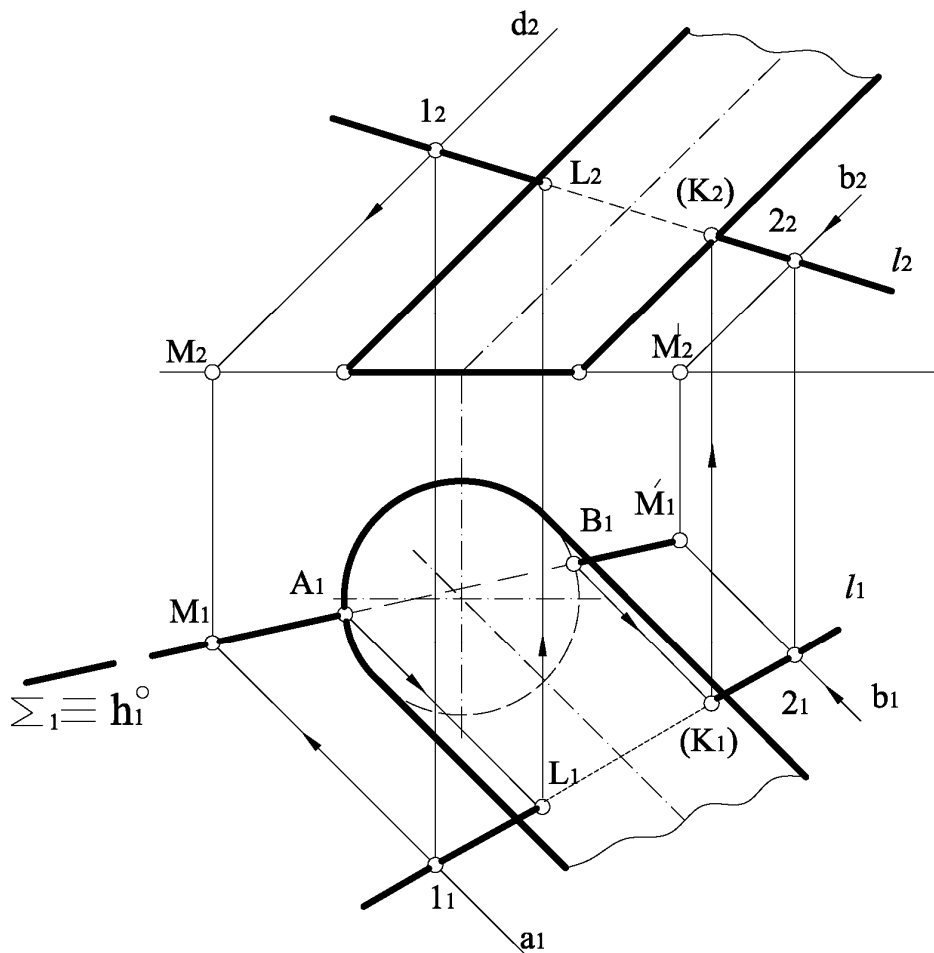


Рисунок 6.15

Якщо через пряму ℓ провести фронтально проєкціювальну площину, то при її перетині з циліндром матимемо еліпс, той же результат буде, якщо використати горизонтально проєкціювальну площину.

На прямій ℓ вибираємо довільні точки 1 ($1_1, 1_2$) і 2 ($2_1, 2_2$), через які будуємо дві паралельні прямі a і b , які одночасно паралельні твірній циліндра. Таким чином, через пряму ℓ провели площину загального положення Σ ($a \parallel b$), яка перетинає циліндричну поверхню уздовж двох прямих.

Далі знаходимо горизонтальний слід $\Sigma_1 \equiv h_1^0$ площини ($a \parallel b$), для цього знаходимо горизонтальні проєкції M_1 і M_1' горизонтальних слідів прямих a і b , з'єднуємо їх прямою і знаходимо точки A_1 і B_1 , через які проходять горизонтальні проєкції твірних циліндра. Горизонтальні проєкції точок перетину L_1 і K_1 знаходимо на перетині горизонтальної проєкції прямої ℓ_1 із твірними з точок A_1 і B_1 . Фронтальні проєкції точок L_2 і K_2 отримані за законом належності та за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

На рис. 6.16 наведено приклад побудови точок перетину прямої m з поверхнею сфери.

Якщо використовувати загальний метод, то проєкцією перерізу буде еліпс, для побудови якого необхідно знайти цілий ряд точок.

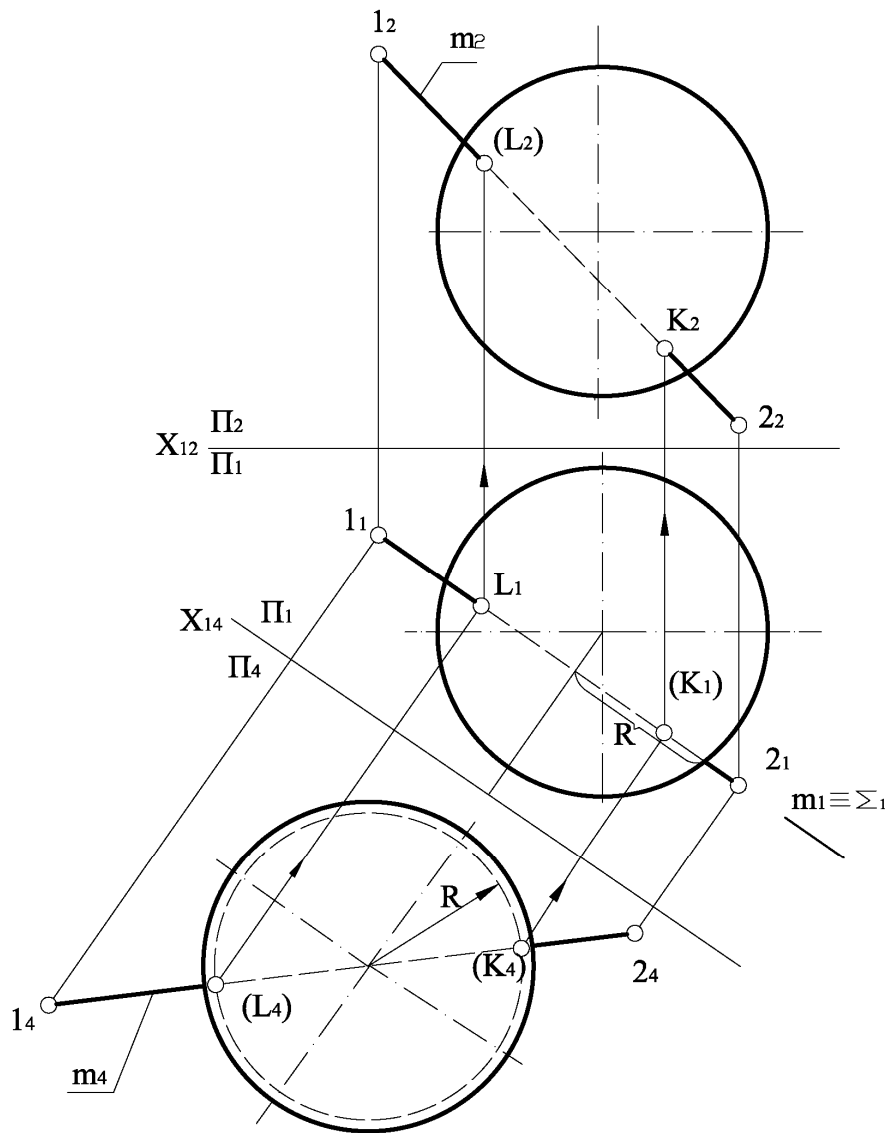


Рисунок 6.16

Розв'язання задачі спрощується, якщо використати метод заміни площин проекцій. Нова вісь X_{14} проходить паралельно горизонтальній проекції відрізка прямої $1_1 2_1$. Через пряму m проводимо горизонтально проекціювальну площину Σ , яка перетинає сферу по колу радіуса R . Це коло на допоміжній площині проекцій Π_4 зображується без спотворень, а перетин його з проекцією відрізка прямої дає допоміжні проекції точок перетину $L_4 K_4$, які проекціюються у зворотному напрямку на проекції прямої.

6.3 Площина дотична до поверхні

Поняття нормалі до поверхні тісно пов'язане з поняттям дотичної площини. Нормаллю до поверхні в деякій її точці називають перпендикулярну пряму до дотичної площини поверхні в цій точці.

У залежності від дотику площини до поверхні, точки, що належать поверхням, поділяють на еліптичні, параболічні та гіперболічні.

До *еліптичних* відносять такі точки, коли дотична площина має з поверхнею одну спільну точку і всі лінії поверхні, які проходять через цю точку, знаходяться по один бік дотичної площини. Поверхні, у яких всі точки еліптичні, належать до опуклих криволінійних поверхонь, наприклад: сфера, еліпсоїд обертання.

Параболічні точки утворюють лінію, по якій площина дотикається до поверхні. Параболічними є точки на циліндрах, на конусах.

До *гіперболічних* відносять такі точки, у яких дотична площина перетинає поверхню. Поверхня, яка складається тільки з гіперболічних точок, називається *увігнутою* – це однопорожнинний гіперболоїд, гелікоїди та інші.

На рис. 6.17 наведено приклад побудови дотичної площини Σ у точці K , що належить поверхні сфери.

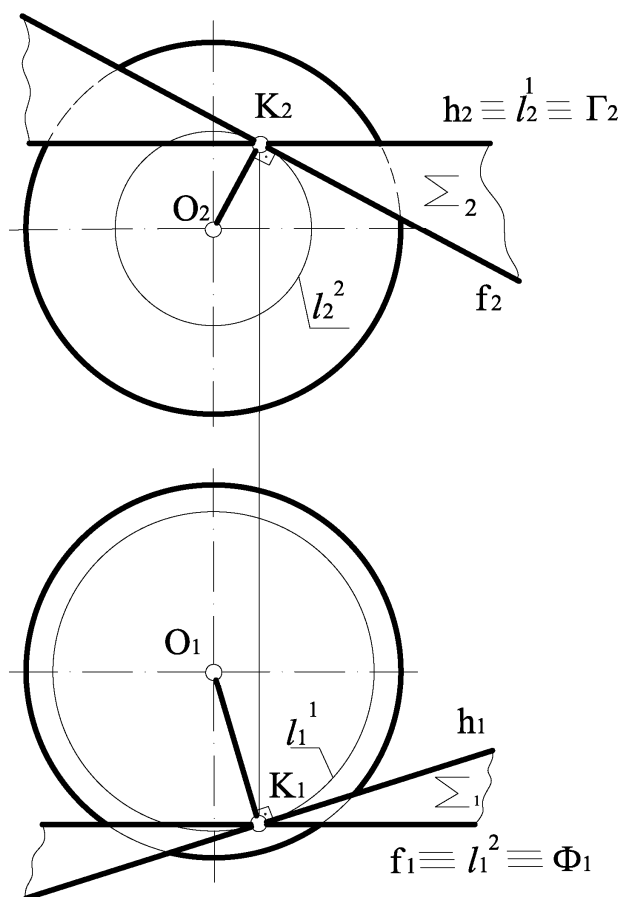


Рисунок 6.17

Площину, яка дотична до поверхні сфери в точці K , задаємо головними лініями: горизонталлю h і фронталлю f , які проходять через точку K .

Фронтальну проекцію h_2 горизонталі h проводимо через точку K_2 паралельно екватору сфери. Для побудови горизонтальної проекції h_1 горизонталі h через точку K проводимо допоміжну горизонтальну площину рівня Γ , яка перетинає сферу по паралелі l_1^1 . Горизонтальна проекція h_1 горизонталі h є дотичною до кола l_1^1 у точці K_1 і тому $O_1K_1 \perp h_1$.

Аналогічно будемо фронталь f дотичної площини.

На рис. 6.18 наведено приклад побудови дотичної площини Σ у точці K , яка належить поверхні конуса.

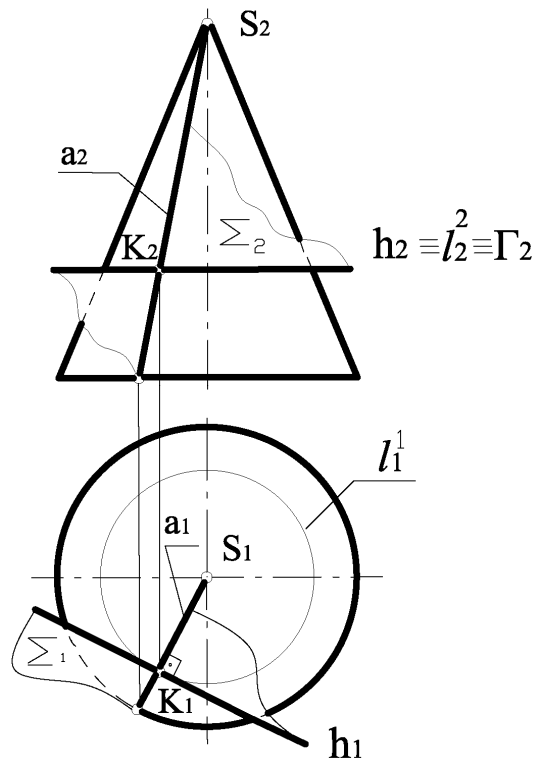


Рисунок 6.18

Площину, яка дотична до поверхні конуса в точці K , задаємо твірною a , яка проходить через точку K , і горизонталлю площини h . Фронтальну проекцію h_2 горизонталі h проводимо через точку K_2 паралельно осі X . Для побудови горизонтальної проекції h_1 горизонталі h через точку K проводимо допоміжну горизонтальну площину рівня Γ , яка перетинає конус по паралелі l^1 . Горизонтальна проекція h_1 горизонталі h є дотичною до кола l_1^1 у точці K_1 , тому $S_1K_1 \perp h_1$.

На рис. 6.19 наведено приклад побудови дотичної площини Σ у точці K , яка належить поверхні похилого циліндра.

Циліндрична поверхня має параболічні точки, які розташовані на її твірній. Тому через задану точку K будемо фронтальну a_2 і горизонтальну a_1 проекції твірної, по якій дотична площина дотикається до поверхні похилого циліндра. Потім через задану точку K будемо горизонталь h , фронтальна проекція h_2 проходить через точку K_2 паралельно осі X . Для побудови горизонтальної проекції h_1 горизонталі h через точку K проводимо допоміжну горизонтальну площину рівня Γ , яка перетинає циліндр паралелі l . Горизонтальна проекція h_1 горизонталі h є дотичною до кола l_1 у точці K_1 , тому $O_1K_1 \perp h_1$.

Таким чином, дотична площина Σ у точці K побудована завдяки двом лініям перетину $(a \cap h)$.

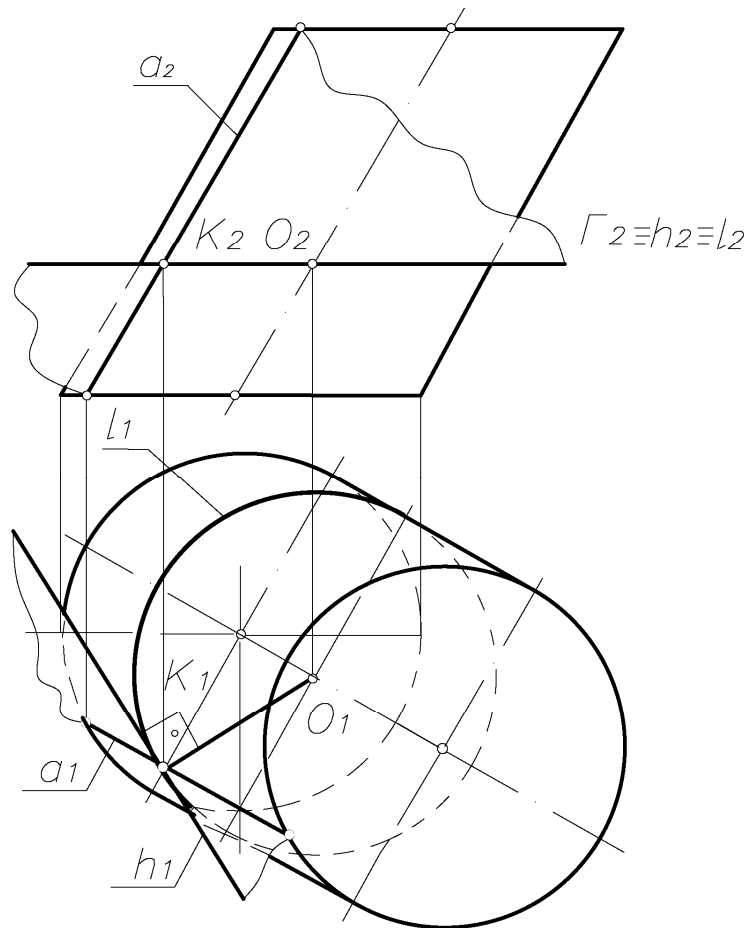


Рисунок 6.19

6.4 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь

Лінія перетину кривих поверхонь складається з множини спільних точок двох поверхонь, які перетинаються. Якщо одна з поверхонь є проєкціовальною, то одна з проєкцій лінії перетину є відомою, завдяки збиральним властивостям проєкціовальна поверхня збігається з відповідною їй проєкцією. Другу проєкцію лінії перетину знаходять за законом про належність. Якщо поверхні, які перетинаються, займають довільне положення відносно площин проєкцій, доцільно виконати перетворення комплексного креслення з метою перевести поверхню в окреме положення.

Спільні точки лінії взаємного перетину кривих поверхонь можна визначити при перетині якоїсь лінії однієї поверхні з лінією другої, при цьому доцільно використати третю поверхню. Січна поверхня при перетині з першою та другою поверхнями повинна давати пряму лінію або коло. Найчастіше такими січними поверхнями є площина або сфера.

Проєкції лінії перетину двох поверхонь повинні бути розташованими в межах перетину однойменних проєкцій. Лінія взаємного перетину може бути плоскою або просторовою, а перетин поверхонь – повним або частковим.

При побудові проєкцій лінії перетину двох поверхонь спочатку будують очевидні точки, для знаходження яких не потрібні додаткові побудови, потім визначають опорні точки, точки перетину і, в останню чергу, визначають допоміжні точки. Після цього визначають видимість окремих ділянок лінії взаємного перетину. Ділянка лінії взаємного перетину буде видимою лише при перетині обох видимих ділянок поверхонь. Якщо один із цих елементів є невидимим, то і точка лінії перетину буде невидимою.

На рис. 6.20 розглянуто приклад побудови лінії перетину на комплексному кресленні циліндра і конуса. Тут маємо наскрізне проникнення, коли лінія взаємного перетину розпадається на дві – лінію входу та лінію виходу. Циліндрична поверхня є проєкціювальною відносно фронтальної площини проєкцій.

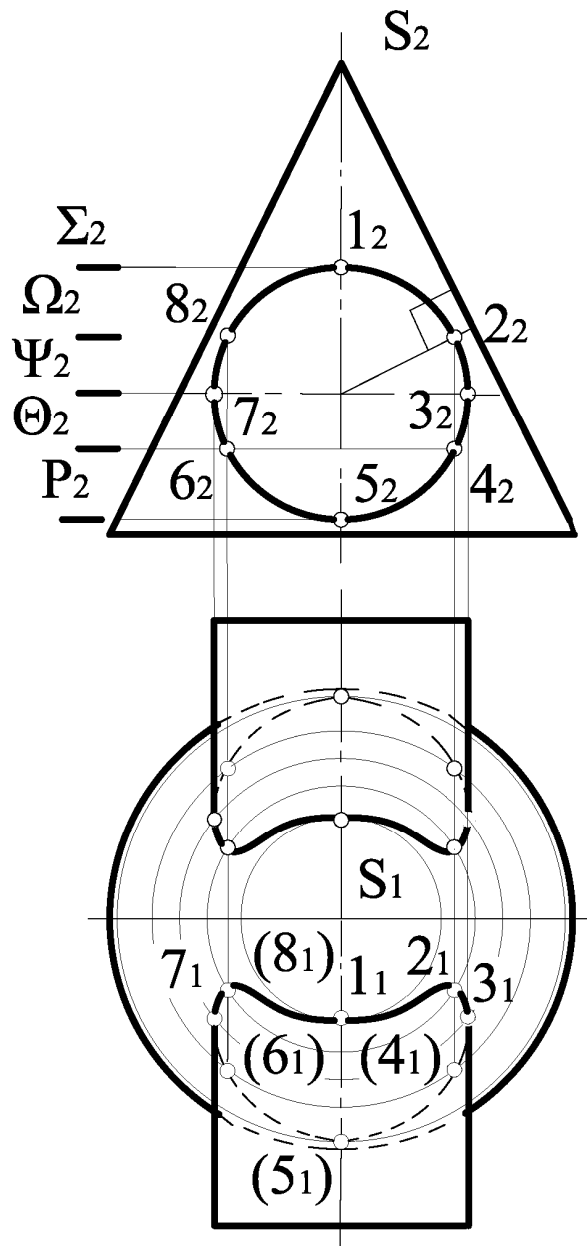


Рисунок 6.20

Фронтальна проекція лінії взаємного перетину збігається з фронтальною проекцією циліндра. Горизонтальну проекцію лінії взаємного перетину конуса і циліндра визначаємо за точками, які знаходимо за допомогою горизонтальних допоміжних січних площин, які перетинають конус по колу відповідного радіуса, а циліндр – по твірних.

З'єднуючи знайдені точки плавною кривою, з урахуванням видимості точок, будуємо горизонтальну проекцію лінії взаємного перетину конуса і циліндра.

На рис. 6.21 розглянуто приклад побудови лінії перетину сфери і прямого колового конуса.

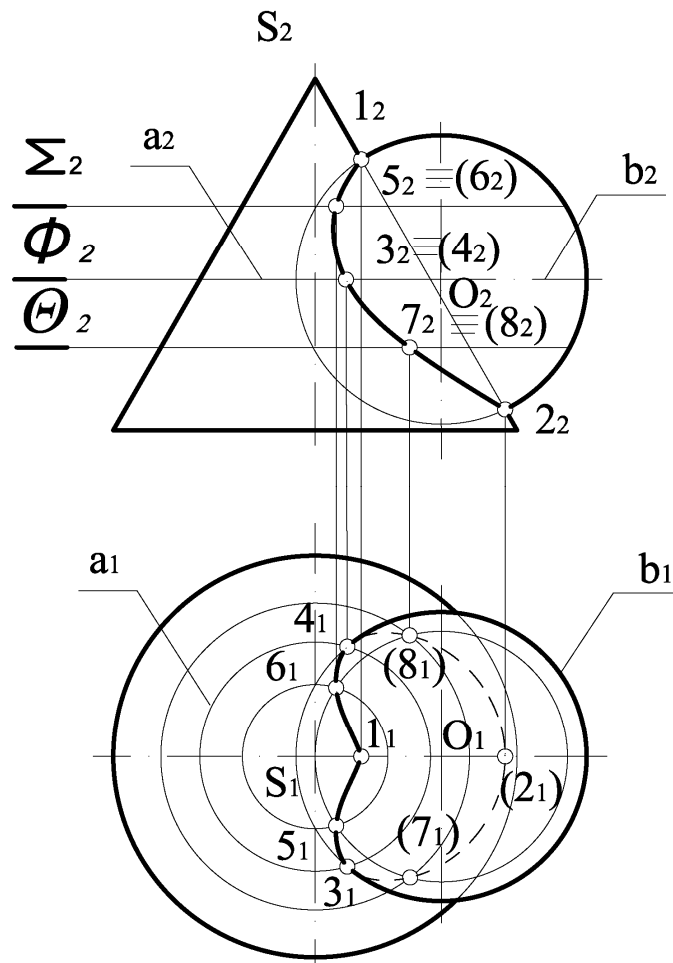


Рисунок 6.21

У цьому прикладі маємо урізання, коли є тільки одна лінія взаємного перетину.

Якщо поверхню обертання перерізати площиною, яка перпендикулярна осі обертання, то у перерізі виникає коло.

Перерізом сфери будь-якою площиною є **коло**.

У цій задачі найбільш доцільно в якості допоміжних січних площин використати горизонтальні площини рівня, які перетинають обидві поверхні по колам, на перетині яких і визначаємо спільні точки лінії взаємного перетину.

Оскільки обидві поверхні мають спільну площину симетрії, яка паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 , то їх головні меридіани перетинаються в точці 1, яка є найвищою точкою лінії перетину поверхонь, а також у точці 2, яка є найнижчою точкою лінії перетину поверхонь.

Фронтальні проєкції $1_2, 2_2$ знаходимо на перетині фронтальних обрисів конуса і сфери, а горизонтальні проєкції 1_1 і 2_1 знаходимо на горизонтальній проєкції спільної площини симетрії.

Горизонтальною межею видимості лінії взаємного перетину є екватор сфери. Для знаходження точок на межі видимості перетинаємо обидві поверхні допоміжною січною площиною Φ , яка проходить через екватор сфери і перетинає обидві поверхні по паралелям a і b , які перетинаються в точках 3 і 4. Причому спочатку визначаємо горизонтальні проєкції 3_1 і 4_1 цих точок, як результат перетину горизонтальних проєкцій a_1 і b_1 , а потім знаходимо їх фронтальні проєкції 3_2 і 4_2 . Аналогічно визначаємо додаткові точки 5 і 6, а також 7 і 8.

Потім з'єднуємо отримані точки з урахуванням їх видимості плавною кривою і отримуємо лінію взаємного перетину конуса і сфери.

Для визначення лінії взаємного перетину кривих поверхонь обертання використовують спосіб січних концентричних та ексцентричних сфер.

На рис. 6.22 розглянуто приклад побудови лінії взаємного перетину прямого колового конуса і колового циліндра з використанням способу концентричних сфер.

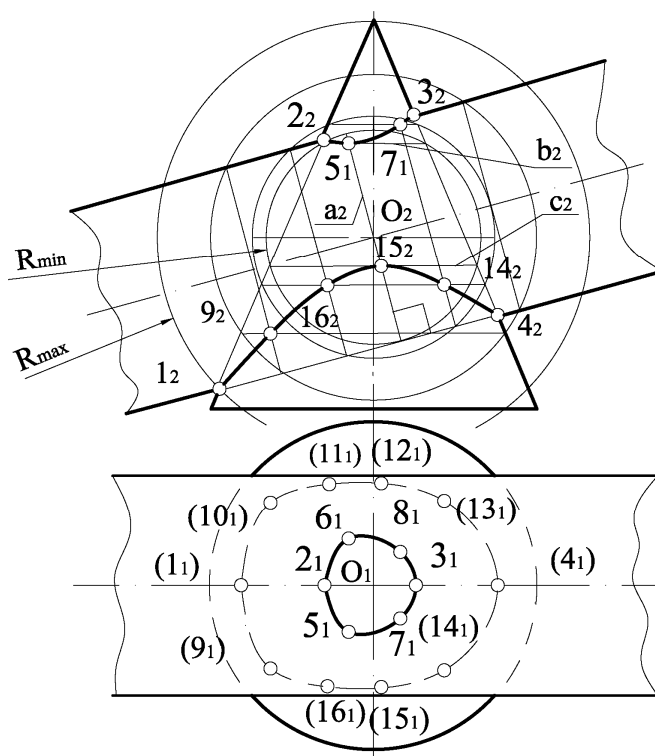


Рисунок 6.22

У цьому прикладі маємо наскрізне проникнення, тобто лінія взаємного перетину розпадається на дві – лінію входу та лінію виходу.

Спосіб концентричних сфер використовують, якщо виконуються дві умови:

- 1) осі поверхонь обертання мають перетинатися;
- 2) дві поверхні обертання мають спільну площину симетрії, яка паралельна одній із площин проєкцій.

У наведеному прикладі умови виконуються: осі перетинаються, площина симетрії паралельна фронтальній площині проєкцій.

Фронтальні обриси конуса і циліндра перетинаються в точках 1, 2, 3, 4, які є опорними. Для визначення додаткових точок використовуємо в якості поверхонь-посередників січні сфери, центром яких є точка O перетину осей заданих поверхонь конуса і циліндра.

У якості мінімального радіуса січних сфер приймаємо перпендикуляр, який опускаємо з центра січних сфер на обрис циліндра. У якості максимального радіуса січних сфер приймаємо відстань від центра O_2 до точки 1_2 перетину фронтальних обрисів конуса і циліндра.

Сфера мінімального радіуса з внутрішньої сторони дотикається до циліндра по колу a , фронтальною проєкцією якого є відрізок a_2 . Січна сфера одночасно перетинає і конус по колам b і c , фронтальною проєкцією яких є відрізки b_2 і c_2 . Оскільки всі ці кола a , b , c належать одній і тій же сфері мінімального радіуса, то вони перетинаються в точках, які визначають лінію їх взаємного перетину. Фронтальні проєкції точок знаходимо на перетині фронтальних проєкцій b_2 і c_2 кіл b і c із фронтальною проєкцією a_2 кола a .

На рис. 6.22 зображено ще дві сфери, які перетинають конус по горизонтальних колах, а циліндр – по нахилених колах. У результаті їх перетину отримуємо ще вісім точок. Для більшої візуалізації лінії перетину на фронтальній проєкції не позначені невидимі точки.

Потім з'єднуємо отримані точки плавною кривою з урахуванням видимості і отримуємо лінію взаємного перетину конуса і циліндра.

Фронтальною межею видимості лінії перетину є спільна площина симетрії, а горизонтальною – лінія перетину циліндра фронтально проєкціювальною площиною, яка проходить через вісь циліндра.

Оскільки всі точки лінії взаємного перетину належать одночасно і поверхні конуса, і поверхні циліндра, то горизонтальну проєкцію лінії перетину можна отримати з умови належності цієї лінії поверхні конуса.

На рис. 6.23 розглянуто приклад побудови лінії взаємного перетину вертикального зрізаного конуса і тора способом ексцентричних сфер, який використовується при взаємному перетині поверхонь обертання, що мають спільну площину симетрії. Найвищу точку 1_2 та найнижчу точку 2_2 визначаємо на перетині обрисних твірних конуса і тора на фронтальній площині проєкцій.

Для знаходження допоміжних точок лінії взаємного перетину обидві поверхні перетинаються двома фронтально проєкціювальними площинами Σ_2 та Θ_2 , які проходять через вісь тора O_2 перпендикулярно до фронтальної площини проєкцій.

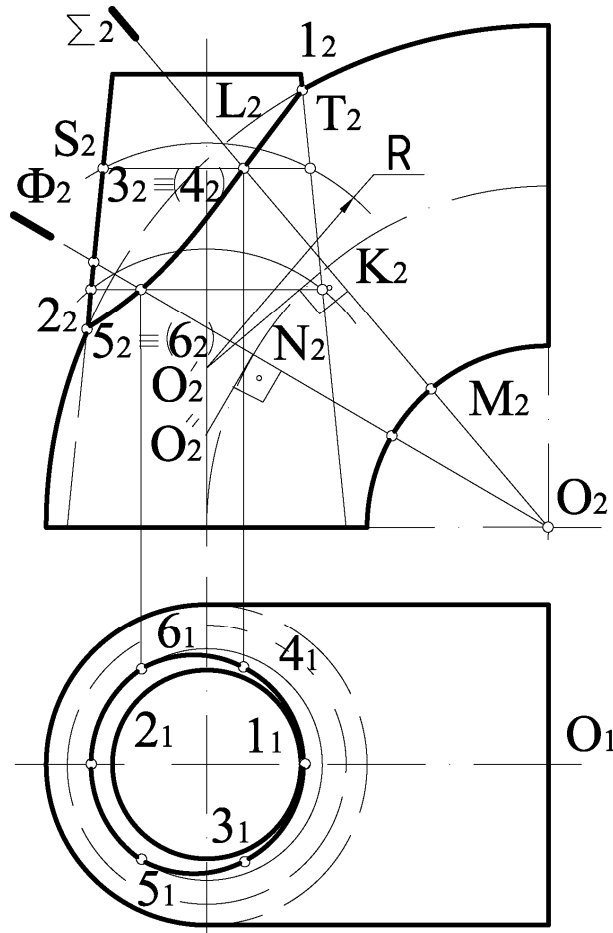


Рисунок 6.23

Площина Σ_2 перетинає тор по колу L_2M_2 із центром у точці K_2 , яка знаходиться на перетині площини Σ_2 із віссю тора. Далі проводимо через точку K_2 пряму, перпендикулярну до сліду площини Σ_2 і визначаємо на перетині її з віссю конуса точку O'_2 , яка є фронтальною проекцією центра січної сфери-посередника. Далі з точки O'_2 проводимо сферу, радіус якої R і яка перетинає тор по колу L_2M_2 , а конус – по колу S_2T_2 . Точка перетину фронтальних проекцій цих кіл визначає точки $3_2, 4_2$, які належать лінії взаємного перетину заданих поверхонь. Коло S_2T_2 на горизонтальну площину проєкцій проєкціюється в натуральну величину, тому горизонтальна проєкція точок $3_1, 4_1$ визначається безпосередньо за допомогою ліній проєкційного зв'язку. На рисунку показано, як за допомогою площини Φ_2 визначено центр O'_2 другої січної сфери-посередника, а потім визначено точки 5_2 та 6_2 .

7 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Комплексне креслення на дві або три взаємно перпендикулярні площини проєкцій має суттєвий недолік – відсутність наочності. Спосіб проєкціювання, при якому предмет зображення жорстко зв'язується з просторовою декартовою системою координат, яка разом з предметом проєкціюється центрально або паралельно на аксонометричну площину проєкцій Π' у заданому напрямі S , одержав назву *аксонометричного*, а отримане зображення називають *аксонометрією*.

Напрямок проєкціювання не повинен збігатися з напрямком хоча б однієї з осей декартової системи координат, тому отримане зображення матиме всі три виміри, що і надає йому наочність.

На рис. 7.1 наведено приклад проєкціювання прямокутної декартової системи координат на площину аксонометричних проєкцій Π' .

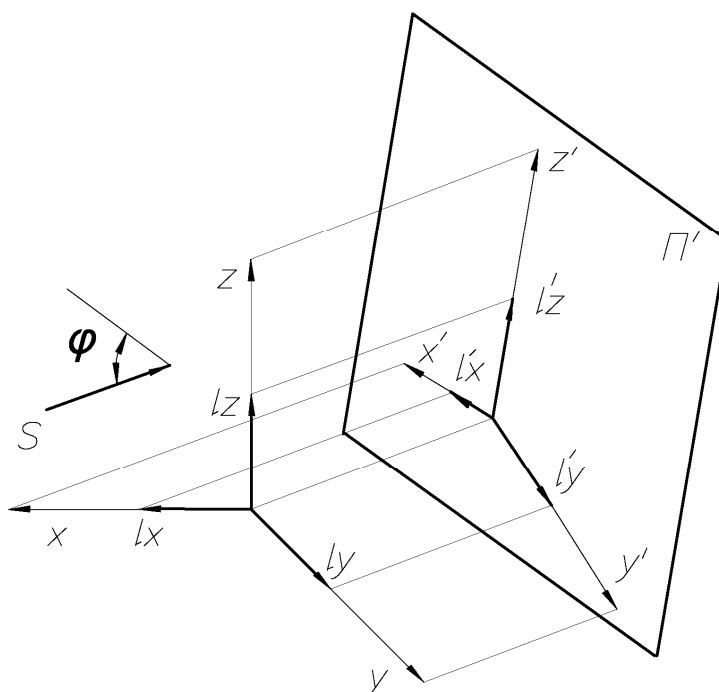


Рисунок 7.1

Залежно від напрямку S відносно Π' при паралельному проєкціюванні аксонометрія може бути косокутною або прямокутною. На кожній із осей прямокутної декартової системи координат відкладемо від початку координат по одиничному відрізку l_x, l_y, l_z , кожен із яких проєкціюється на аксонометричну площину проєкцій Π' відповідним відрізком: l'_x, l'_y, l'_z . Відношення аксонометричних проєкцій до дійсних величин називають *коефіцієнтами спотворень по трьох осях*:

$$p = \frac{l'_x}{l_x}; q = \frac{l'_y}{l_y}; r = \frac{l'_z}{l_z}.$$

У прямокутній аксонометрії залежність між показниками спотворень виражають формулою:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2.$$

Якщо показники спотворень по всіх трьох осях однакові, тобто $p = q = r$, то аксонометрію називають *ізометрією*, якщо $p = r \neq q$, то аксонометрію називають *диметрією*, якщо $p \neq q \neq r$, то аксонометрію називають *триметрією*.

7.1 Прямокутна ізометрія

У прямокутній ізометрії всі три показники спотворень дорівнюють один одному. Показники спотворень у прямокутній ізометрії визначають за формулою:

$$3p^2 = 2, p = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

Для спрощення побудови відповідно до ГОСТ 2317-69 при побудові аксонометричних зображень користуються зведеними показниками спотворення:

$$p = q = r = 1.$$

При цьому аксонометричне зображення предмета виходить збільшеним у 1,22 рази ($1 : 0,82 = 1,22$).

Аксонометричні осі в прямокутній ізометрії спрямовані одна до одної під кутом 120° (рис. 7.2).

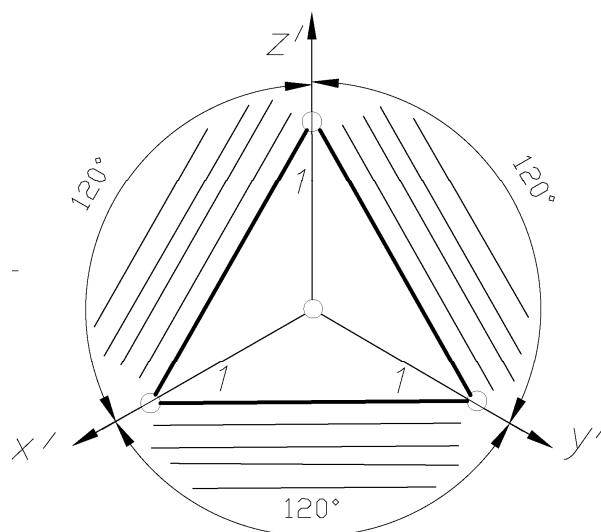


Рисунок 7.2

Для визначення напрямку штрихування в ізометрії на аксонометричних осях потрібно побудувати трикутник, для цього вздовж аксонометричних осей відкладаються рівні відрізки довільної довжини. Штриховка виконується паралельно сторонам побудованого трикутника.

Аксонометричну проекцію будь-якої точки можна отримати, якщо побудувати ламану лінію, яка виходить із точки O – початку системи координат. Ця ламана лінія утворюється з відрізків прямих, які вимірюються величинами x, y, z – прямокутні координати відповідно до точки. При цьому доцільно використовувати практичні коефіцієнти спотворення.

На рис. 7.3 наведено приклад побудови прямокутної ізометрії точки A з натуральними координатами $x = 30, y = 15, z = 45$ із використанням практичних коефіцієнтів спотворень.

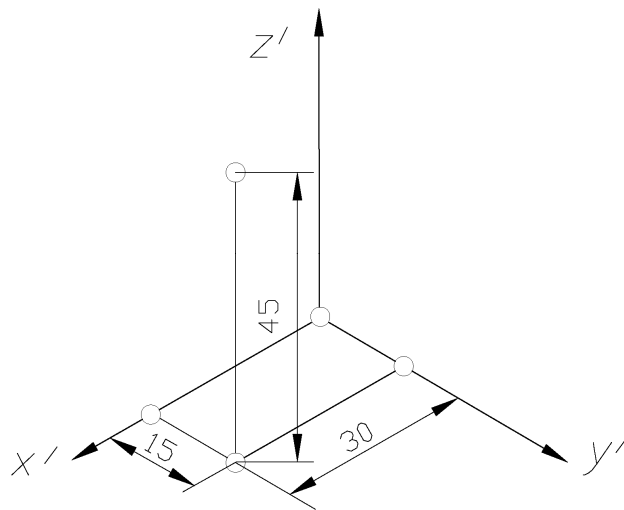


Рисунок 7.3

Таким чином, уздовж осей x', y', z' або за паралельними напрямками відкладають справжні розміри. Точку A_1 називають вторинною проекцією точки A .

Аксонометричні проекції кіл, які лежать на площинах проекцій або на площинах, паралельних площинам проекцій, зображуються еліпсами.

Велика вісь еліпса перпендикулярна до третьої координатної осі, яка не визначає площину еліпса, а мала вісь паралельна їй. Мала вісь еліпса завжди перпендикулярна великій. При вживанні практичних коефіцієнтів спотворення велика вісь еліпса дорівнює $1,22d$, а мала – $0,71d$.

На рис. 7.4 наведено приклад побудови в прямокутній ізометрії трьох кіл, які розташовані на горизонтальній, фронтальній та профільній площинах, з $d = 30$ мм.

Велика вісь еліпса $A'B' = 1,22d = 1,22 \times 30 = 36,6$ мм.

Мала вісь еліпса $C'D' = 0,71d = 0,71 \times 30 = 21,3$ мм.

На напрямках, паралельних аксонометричним осям, відкладаються $E'F' = d = 30$ мм.

На рис. 7.5 наведено приклад побудови в прямокутній ізометрії шестигранної призми з вертикальним отвором, яка задана комплексним кресленням.

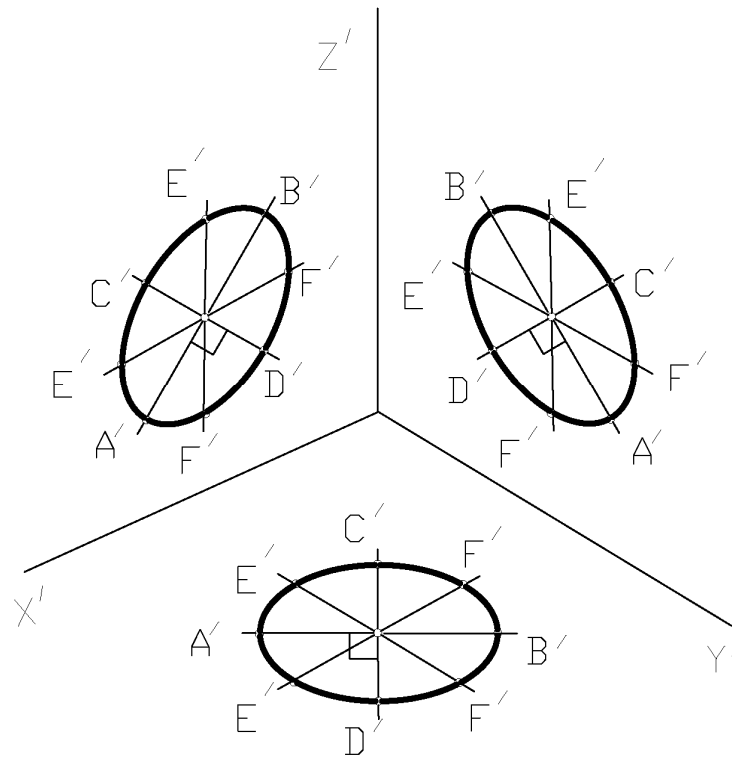


Рисунок 7.4

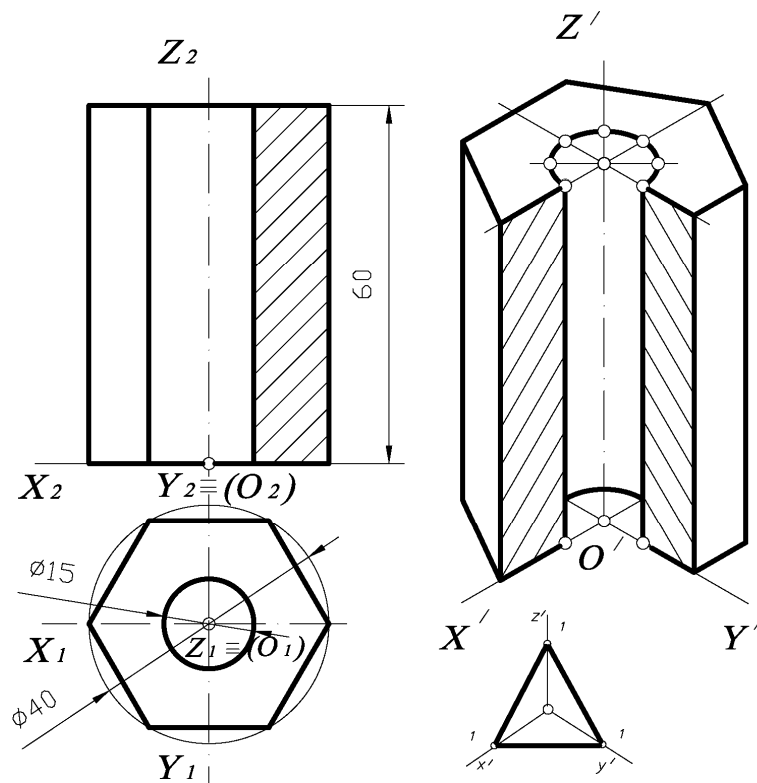


Рисунок 7.5

Для побудови аксонометричного зображення натуральну систему координат O_{xyz} прив'язуємо до комплексного креслення, це дозволяє визначити координати будь-якої точки призми, які знімаються безпосередньо з комплексного креслення. Для побудови еліпса проводимо розрахунки. Велика вісь еліпса дорівнює: $1,22d = 1,22 \times 15 = 18,3$ мм. Мала вісь еліпса дорівнює: $0,71d = 0,71 \times 15 = 10,7$ мм. Для відтворення більш наочного зображення вирізаємо четверту частину призми, а штриховку виконуємо паралельно сторонам трикутника.

7.2 Прямокутна диметрія

Якщо предмет в основі має квадрат, який зорієнтований вершинами на осі, треба застосовувати тільки прямокутну диметрію, а також у випадках, коли найбільша кількість елементів зосереджена на якійсь одній бічній стороні предмета. Показники спотворень у цій системі такі: $p = 0,94$, $q = 0,47$, $r = 0,94$. При використанні зведених коефіцієнтів спотворення: $p = 1$, $q = 0,5$, $r = 1$, зображення предмета одержується збільшеним у 1,06 рази ($1 : 0,94 = 1,06$). Аксонометричні осі в прямокутній диметрії розташовані під кутами $7^{\circ}10'$ і $41^{\circ}25'$ до горизонталі (рис. 7.6).

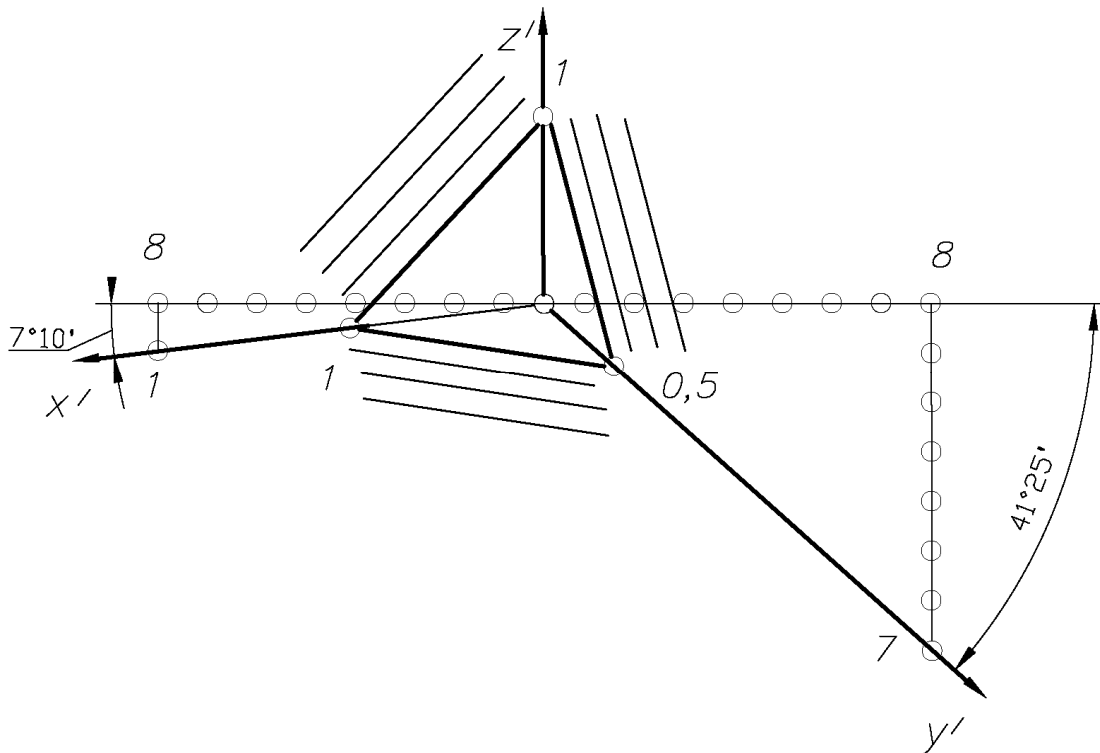


Рисунок 7.6

Штриховка виконується паралельно сторонам побудованого трикутника, для цього вздовж аксонометричних осей X' та Z' відкладаються рівні відрізки довільної довжини, а вздовж осі Y' – скорочують удвічі.

АксонOMETричні проєкції кіл, які лежать на площинах проєкцій або на площинах, паралельних площинам проєкцій, зображуються еліпсами.

На рис. 7.7 наведено приклад побудови в прямокутній диметрії трьох кіл, які розташовані на горизонтальній, фронтальній та профільних площинах, з $d = 40$ мм.

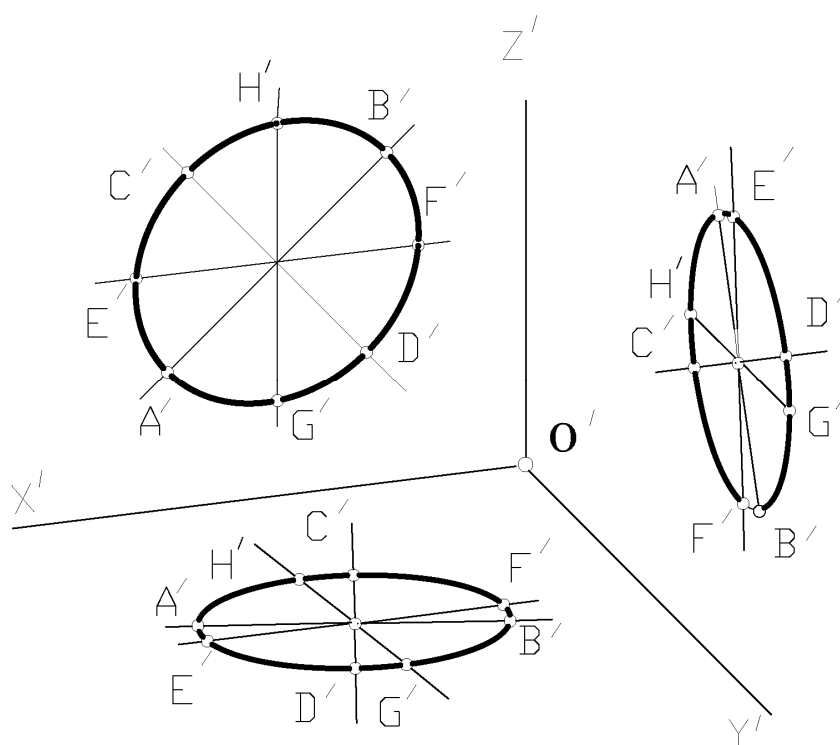


Рисунок 7.7

Велика вісь еліпса $A'B' = 1,06d = 1,06 \times 40 = 42,4$ мм однакова для всіх площин проєкцій. Мала вісь еліпса $C'D' = 0,35d = 0,35 \times 40 = 14$ мм – для горизонтальної і профільної площин проєкцій. Мала вісь еліпса $C'D' = 0,94d = 0,94 \times 40 = 37,6$ – для фронтальної площини проєкцій. На напрямках, паралельних аксонOMETричним осям x' і z' відкладають $E'F' = d = 40$ мм, а в напрямку y' – відкладають $HG = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20$ мм. Велика вісь еліпса перпендикулярна до третьої координатної осі, а мала вісь паралельна їй.

На рис. 7.8 наведено приклад побудови в прямокутній диметрії чотирикутної призми з вертикальним отвором, яка задана комплексним кресленням.

Натуральну систему координат $oxuz$ прив'язуємо до комплексного креслення, це дозволяє визначити безпосередньо з комплексного креслення координати будь-якої точки призми. Велика вісь еліпса дорівнює: $1,06d = 1,06 \times 30 = 31,8$ мм. Мала вісь еліпса дорівнює: $0,35d = 0,35 \times 30 = 10,5$ мм. Штриховку вирізу виконуємо паралельно сторонам побудованого трикутника.

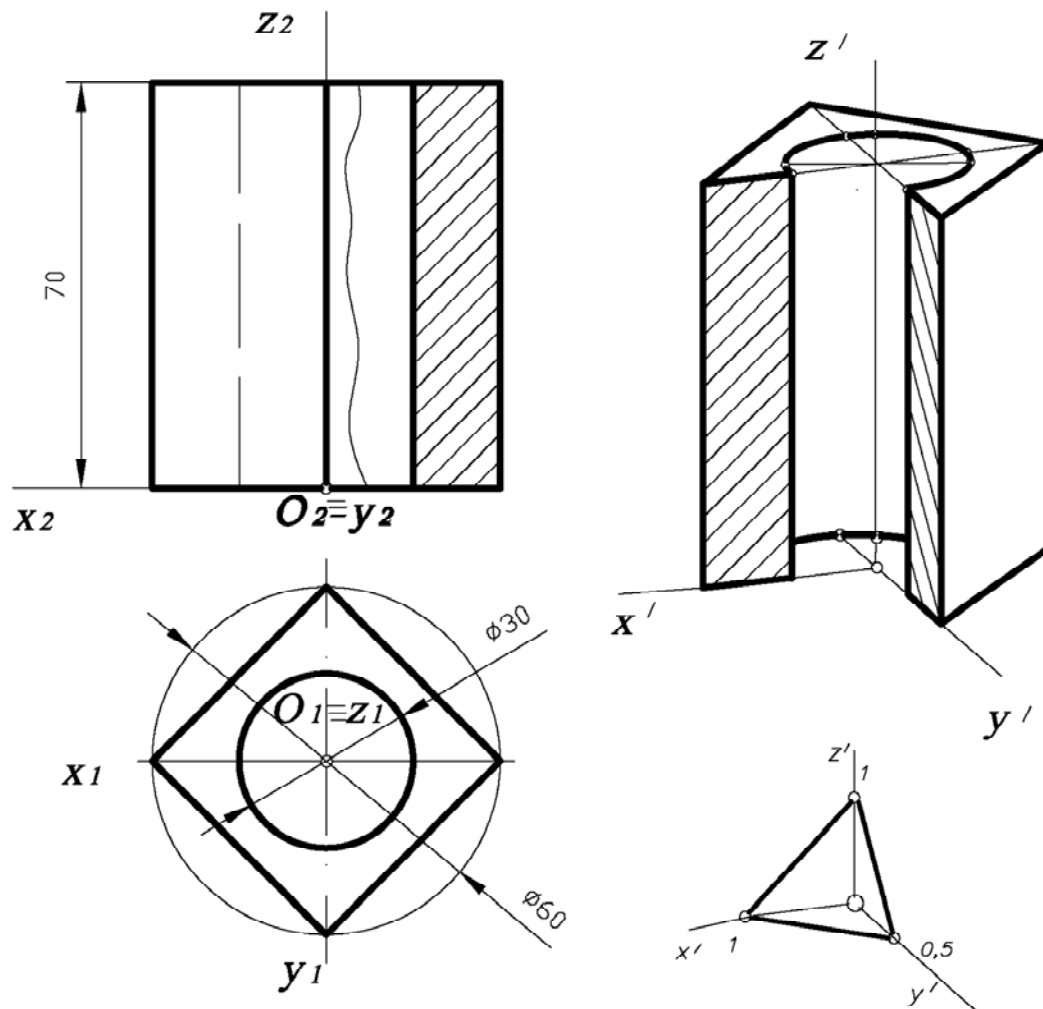


Рисунок 7.8

7.3 Косокутна фронтальна диметрія

У випадках, коли необхідно будувати декілька фронтальних кіл або криволінійних контурів, застосовують косокутну фронтальну диметрію. Зведені показники спотворень у цій системі такі: $p = r = 1$; $q = 0,5$.

Кут між напрямком проєціювання та площиною аксонометричних проєкцій є непрямым, $\varphi = 45^\circ$.

На рис. 7.9 наведено приклад побудови аксонометричних осей у косокутній фронтальній диметрії.

У цій системі осі $o'x'$ та $o'z'$ взаємно перпендикулярні, а вісь $o'y'$ утворює з горизонтальним напрямком кут 45° . Для визначення напрямку штрихування в косокутній фронтальній диметрії на аксонометричних осях потрібно побудувати трикутник, для цього вздовж аксонометричних осей x' і z' відкладаються рівні відрізки довільної довжини, а вздовж осі y' відкладають половину цього відрізка. Штриховка виконується паралельно сторонам побудованого трикутника.

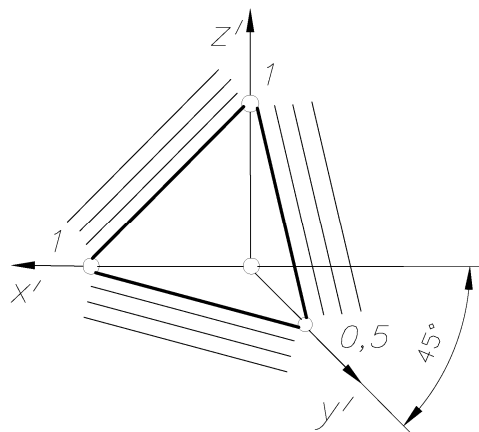


Рисунок 7.9

На рис. 7.10 наведено приклад побудови в косокутній фронтальній диметрії трьох кіл, які розташовані на горизонтальній, фронтальній та профільних площинах, з $d = 40$ мм.

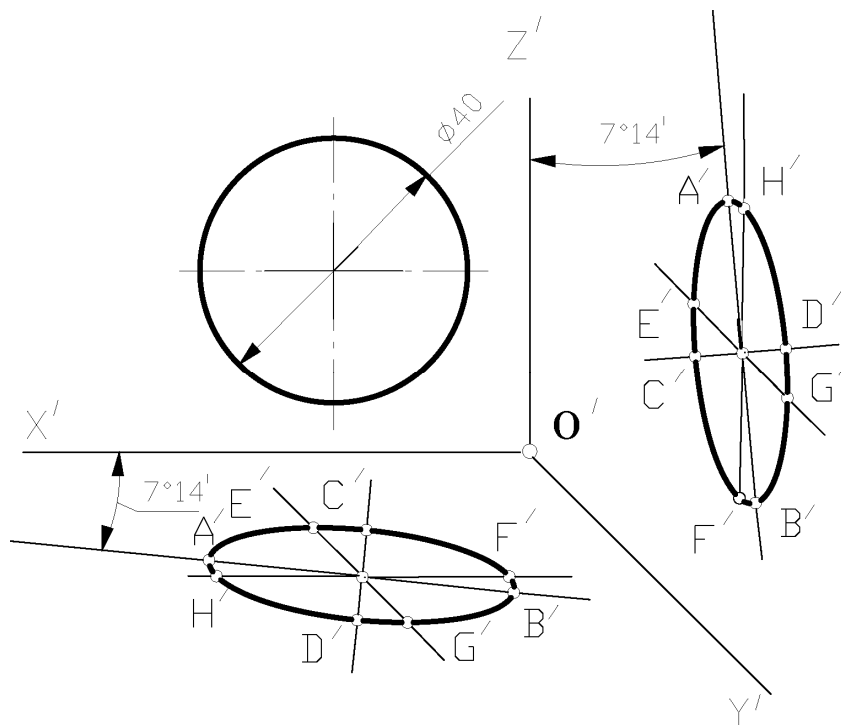


Рисунок 7.10

Коло на фронтальній площині зображується без спотворення, а кола в горизонтальній та профільних площинах зображуються еліпсами, але їхні осі не горизонтальні й не вертикальні. Велика вісь еліпса $A'B' = 1,07d = 1,07 \times 40 = 42,8$ мм. Велика вісь еліпса утворює з вісями x' і z' кут $7^{\circ}14'$. Мала вісь еліпса $C'D' = 0,33d = 0,33 \times 40 = 13,2$ мм. Мала вісь еліпса перпендикулярна до великої осі еліпса. На напрямках, паралельних аксонометричним осям x' і z' , відкладають $HF = 40$ мм, а в напрямку y' – відкладають $E'G' = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20$ мм.

На рис. 7.11 наведено приклад побудови в косокутній фронтальній диметрії циліндричної втулки.

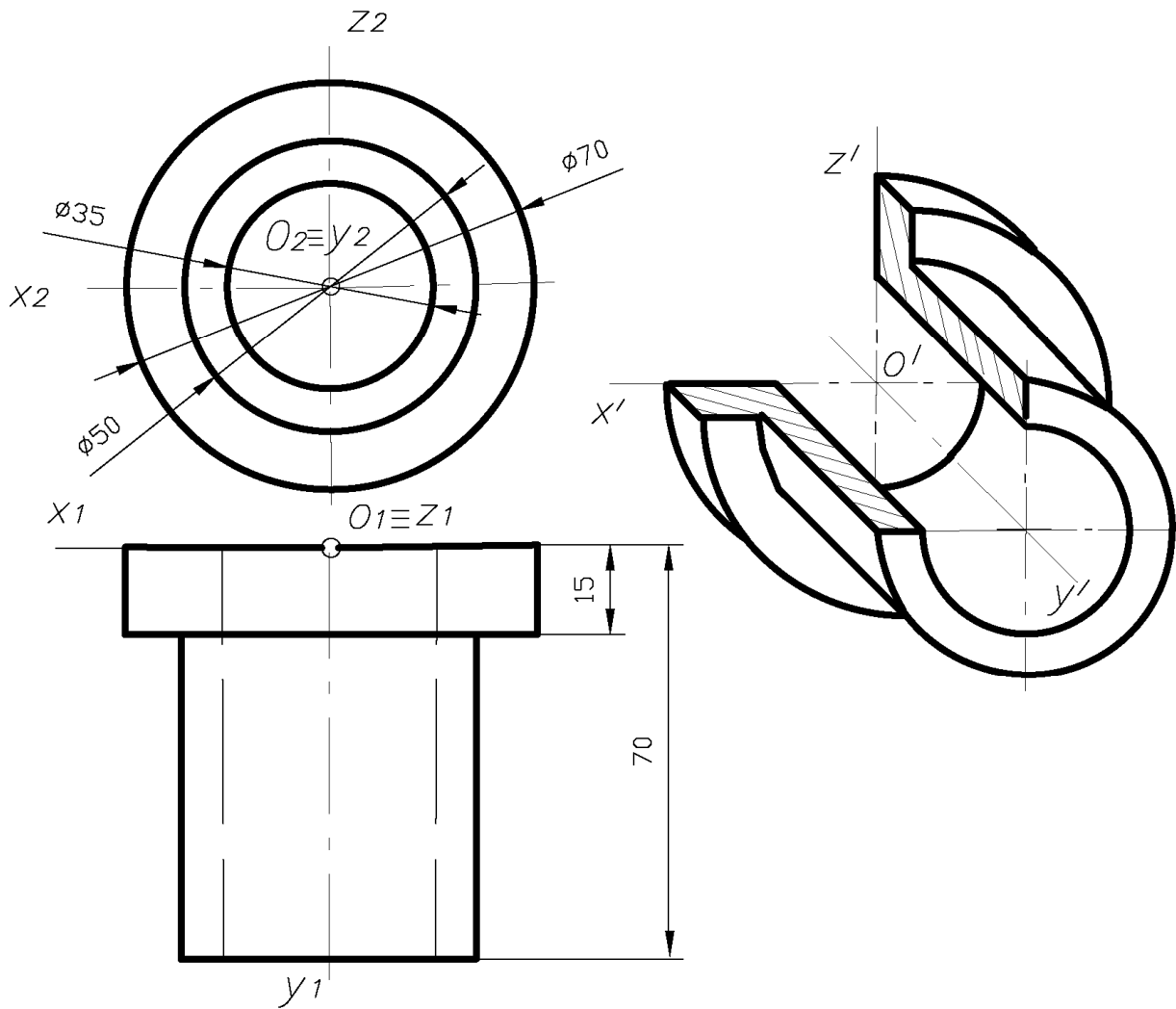


Рисунок 7.11

Кола у фронтальній площині зображуються без спотворення, а штриховка вирізу виконується паралельно сторонам трикутника.

Список додаткової літератури

- 1 **Бубеников, А. В.** Начертательная геометрия / А. В. Бубеников. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 1985. – 288 с.
- 2 **Гордон, В. О.** Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огієвський. – М. : Наука, 1988. – 360 с. – ISBN 5-06-003518-2.
- 3 Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник / В. Є. Михайленко, В. М. Найдис, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан. – К. : Вища школа, 2000. – 342 с. – ISBN 996-642-041-4.
- 4 Нарисна геометрія. Практикум : навчальний посібник / Є. А. Антонович та ін.; за ред. проф. Є. А. Антоновича. – Львів : Світ, 2004. – 528 с. : іл. Є. А. Антонович, О. Василюшин., А. В. Фольта. – ISBN 996-603-177-9.

Навчальний посібник

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

**БАБЕНКО Сергій Олександрович,
КРАСОВСЬКИЙ Сергій Савелійович,
ХОРОШАЙЛО Вадим Вікторович**

Редактор О. М. Болкова

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

107/2008. Підп. до друку 05.06.08. Формат 60 x 84/8.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 8,99.
Тираж 100 прим. Зам. № 121.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.