

**Міністерство освіти і науки України**  
**Донбаська державна машинобудівна академія**

**С. С. Красовський, О. В. Жартовський, О. В. Кабацький**

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

## **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

**(для студентів технічних спеціальностей)**

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України

**Краматорськ 2008**

**УДК 514.18**  
**ББК 22.151.2**  
**К 78**

**Рецензенти:**

**Пивоваров Л. В.**, професор, д-р техн. наук, Слов'янський державний педагогічний університет;

**Марченко І. К.**, професор, д-р техн. наук, Краматорський економіко-гуманітарний інститут;

**Козлов В. І.**, професор, канд. техн. наук, проректор з науково-методичної роботи, Донбаський інститут техніки і менеджменту Міжнародного науково-технічного університету.

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1.4/18-Г-1808 від 15.07.08)

**Красовський, С. С.**

**К 78** Нарисна геометрія : навчальний посібник до самостійної роботи / С. С. Красовський, О. В. Жартовський, О. В. Кабацький. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 84 с.

ISBN 978-966-379-283-5.

Навчальний посібник призначено для самостійної роботи студентів усіх спеціальностей, що вивчають курс «Нарисна геометрія», і буде корисним студентам при вивченні теорії, виконанні навчальних завдань і під час підготовки до екзаменів.

**УДК 514.18**

**ББК 22.151.2**

ISBN 978-966-379-283-5

© С. С. Красовський, О. В. Жартовський,  
О. В. Кабацький, 2008

© ДДМА, 2008

## З М І С Т

Вступ.....	4
1 ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ЗОБРАЖЕННЯ .....	6
1.1 Види проєкціювання .....	6
1.2 Метод Монжа.....	8
1.3 Проєкції точки на три взаємно перпендикулярні площини .....	9
1.4 Класифікація розташування точок простору .....	10
2 ПРОЄКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ.....	12
2.1 Точка на прямій. Сліди прямої.....	12
2.2 Різні положення прямої відносно площини проєкцій .....	13
2.3 Взаємне положення прямих .....	18
3 ПЛОЩИНА.....	22
4 РІЗНІ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИНИ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ.....	25
4.1 Площина загального положення.....	25
4.2 Площини особливого положення .....	25
4.3 Площини рівня.....	26
4.4 Пряма і точка в площині.....	27
4.5 Головні лінії площини.....	27
5 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН.....	29
5.1 Перетин прямої загального положення з площиною загального положення .....	29
5.2 Побудова точки зустрічі прямої з площиною загального положення .....	29
5.3 Побудова лінії перетину площин загального положення трикутника ABC та трикутника DEF .....	31
6 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ, ДВОХ ПЛОЩИН .....	32
6.1 Паралельність прямої і площини .....	32
6.2 Паралельність двох площин .....	32
6.3 Побудова перпендикуляра до площин загального положення .....	33
6.4 Заміна площин проєкцій (проєкціювання на додаткову площину проєкцій) ...	34
6.5 Знаходження натуральної величини відрізка прямої проєкціювання на додаткову площину проєкцій.....	36
6.6 Знаходження натуральної величини плоскої фігури проєкціюванням на додаткову площину проєкцій.....	37
7 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЄКЦІЇ.....	40
7.1 Прямокутна ізометрія .....	41
7.2 Прямокутна симетрія .....	43
8 ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ .....	44
8.1 Розрахунково-графічна робота 1.....	44
8.2 Розрахунково-графічна робота 2.....	54
8.3 Розрахунково-графічна робота 3.....	67
8.4 Розрахунково-графічна робота 4.....	74
9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ .....	77
ЛІТЕРАТУРА.....	83

## ВСТУП

Нарисна геометрія входить до складу навчальної дисципліни «Нарисна геометрія і інженерна графіка». Інженерна графіка – це єдина дисципліна, метою якої є безпосереднє навчання студентів роботі з різною по вигляду і змісту графічною інформацією, основам графічного представлення інформації, методам графічного моделювання геометричних об'єктів, правилам розробки і оформлення конструкторської документації, графічних моделей явищ і процесів.

Графічна інформація є засобом спілкування людини в усіх сферах діяльності. І в цьому сенсі під час вивчення графічних дисциплін студент повинен набути навичок працювати з будь-якою за призначенням і виглядом графічною інформацією – від традиційного креслення і текстового документа, виконаних за допомогою креслярських інструментів, до креслення та текстового документа, виконаних засобами комп'ютерної графіки.

**Нарисна геометрія** – розділ геометрії, у якому просторові фігури, а також методи вирішення і дослідження просторових задач вивчаються за допомогою їх зображень на площині (математичний енциклопедичний словник). У техніці креслення є основним засобом створення та передачі людських ідей. Методи нарисної геометрії є теоретичною базою для вирішення задач технічного креслення. Вони повинні не тільки визначати форму і розміри предметів, але й бути достатньо простими і точними в графічному виконанні, допомагати всебічно досліджувати предмети і їх окремі деталі. Для того щоб правильно передати свої думки за допомогою рисунка, ескіза, креслення, потрібне знання теоретичних основ створення зображень геометричних об'єктів, їх різноманіття і відносини між ними, що і складає предмет нарисної геометрії. Зображення фігури на площині як графічний спосіб представлення інформації про неї має переваги порівняно з іншими способами:

– спілкування стає більш доступним, тому що образи, створювані на основі візуального (зорового) сприйняття, мають більшу, ніж слова, асоціативну силу;

– зображення є інтернаціональною мовою спілкування. Таким чином, теоретичні основи візуалізації інформації про геометричні об'єкти, різноманіття геометричних об'єктів простору, відносини між ними і їх графічного відображення на площині складають предмет нарисної геометрії.

Задача цієї науки – створення оптимальних геометричних форм об'єктів машинобудування, архітектури і будівництва, розробка теорії графічного відображення об'єктів і процесів. Нарисна геометрія з часів її засновника Г. Монжа (1746–1818) посіла гідне місце у вищій школі як наука. Найважливіше прикладне значення нарисної геометрії як навчальної дисципліни полягає в тому, що вона вчить володіти графічними засобами, виконувати і читати креслення й інші зображення геометричних об'єктів, без чого не є можливим формування інженера. Вона забезпечує спадкоємність між шкільними курсами геометрії і креслення і графічними дисциплінами вищого технічного навчального закладу. Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторової уяви і навиків правильного логічного мислення, удосконалюючи нашу здатність по плоскому зображенню подумки створювати уявлення про форму предмета і, навпаки, створення зображень подумки створених образів – візуалізація думки. Проте не будь-яке зображення відображає геометричні властивості оригіналу і не може бути прийнятий для всебічного його дослідження.

Принципова відмінність методів зображення, що вивчаються в курсі нарисної геометрії, від деяких сучасних технічних засобів відображення (фотографія, голографія і ін.), полягає в можливості з великою наочністю і метричною достовірністю відобразити не тільки існуючі предмети, але і образи проєктованого об'єкта, що виникають у нашому уявленні.

Зображення, яке дозволяє визначати взаємозв'язок елементів об'єкта, називають **повним**.

Зображення, за яким можна визначити розміри об'єкта, називається **метрично визначеними**.

Із площинних зображень об'єкта найширше застосування в практиці отримали рисунки і креслення. **Рисунок** – зображення предмета від руки і на око з уявними відносними розмірами і положеннями окремих його елементів. **Креслення** – зображення предмета, побудоване за особливими правилами за допомогою креслярських інструментів у точній залежності від розмірів і положення в просторі відповідних ліній предмета.

У техніці креслення є основним засобом вираження ідей. Вони повинні не тільки визначати форму і розміри предметів, але і бути достатньо простими і точними в графічному виконанні, допомагати всебічно досліджувати предмети і їх окремі деталі. Ці вимоги до креслень і привели до створення теорії зображень – складової основи нарисної геометрії. Правила побудови зображень засновані на методі проєкцій. Тому проєкційний метод побудови зображень є основним методом нарисної геометрії

Отже, у курсі нарисної геометрії вивчаються:

- методи відображення просторових об'єктів на площині;
- способи графічного і аналітичного розв'язання різних геометричних задач;
- прийоми збільшення наочності і візуальної достовірності зображень проєктованого об'єкта;
- способи перетворення і дослідження геометричних властивостей зображеного об'єкта;
- основи моделювання геометричних об'єктів.

# 1 ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦІПИ ПОБУДОВИ ЗОБРАЖЕННЯ

## 1.1 Види проєкціювання

В основі побудови зображень, які розглядаються в нарисній геометрії та застосовуються в технічному кресленні, є метод проєкціювання.

Апарат проєкціювання включає в себе промені і площину проєкцій.

Кожний геометричний образ можна розглядати як сукупність точок. Для побудови зображення цього образу потрібно побудувати проєкції кожної з них та з'єднати їх між собою. У нарисній геометрії до кожної точки тривимірного простору ставиться у відповідність певна точка двовимірного простору – площини. Геометричними елементами відображення служать точки, лінії, поверхні простору. Геометричний об'єкт, що розглядається як точкова множина, відображається на площину за законом проєкціювання. Результатом такого відображення є зображення об'єкта.

В основу будь-якого зображення покладена операція проєкціювання, яка полягає в такому. У просторі вибирають довільну точку  $S$  (рис. 1) як центр проєкціювання і площину  $\Pi_i$ , що не проходить через точку  $S$ , як площину проєкцій. Щоб спроектувати точку  $A$  на площину  $\Pi_i$ , через центр проєкціювання  $S$  проводять у напрямку  $L$  промінь  $SA$  до його перетину з площиною  $\Pi_i$  у точці  $A_i$ . Точку  $A_i$  прийнято називати центральною проєкцією точки  $A$ , а промінь  $SA$  – проєкціювальним променем.

Описані побудови виражають сутність операції центрального проєкціювання точок простору на площину. Із заданого центру проєкціювання  $S$  може бути отримана незліченна кількість проєкцій точок на площину проєкцій  $\Pi_i$ . Точки, що знаходяться на одному промені, проєкціюються в одну точку (рис. 1).

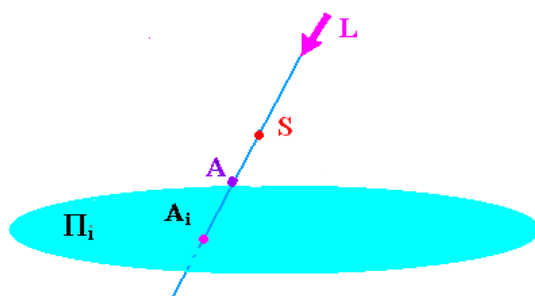


Рисунок 1

Центральне проєкціювання є загальним випадком проєкціювання геометричних об'єктів на площину.

Основними і незмінними його властивостями (інваріантами) є такі:

- 1) проєкція точки – точка;
- 2) проєкція прямої – пряма;
- 3) якщо точка належить прямій, то проєкція цієї точки належить проєкції прямої.

За принципом центрального проєкціювання працюють фотоапарати і кінокамери. Спрощена схема роботи людського ока близька до цього виду проєкціювання: роль центру проєкціювання виконує оптичний центр кришталіка, роль проєкціювальних прямих – промені світла; площиною проєкцій служить сітківка ока. Тому зображення, побудовані за принципом центрального проєкціювання, найбільш наочні і їх широко використовують у своїй роботі архітектори, дизайнери та інші фахівці.

Окремий випадок центрального проєкціювання – паралельне проєкціювання, якщо центр проєкціювання віддалений в нескінченність, при цьому проєкційовальні промені можна розглядати як паралельні проєкційовальні прямі. Положення проєкціюючих прямих щодо площини проєкцій визначається напрямком проєкціювання  $S$  (рис. 2). У цьому випадку отримане зображення називають паралельною проєкцією об'єкта. При паралельному проєкціюванні зберігаються властивості центрального і додаються такі:

- 1) проєкції паралельних прямих паралельні між собою;
- 2) відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх проєкцій;
- 3) відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню їх проєкцій (рис. 2).

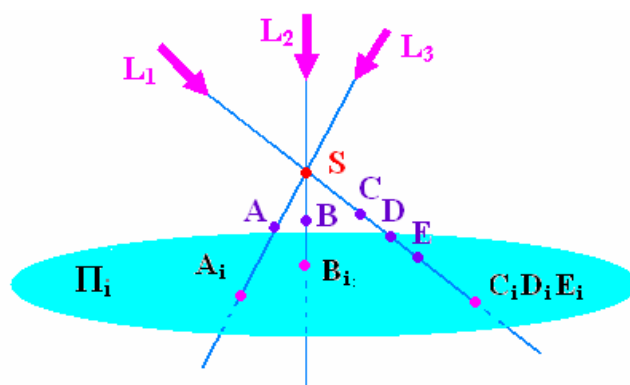


Рисунок 2

У свою чергу, паралельні проєкції підрозділяються на прямокутні, якщо проєкційовальні прямі перпендикулярні площині проєкцій, і косокутні, якщо напрямок проєкціювання утворює з площиною проєкцій кут, який не дорівнює  $90^\circ$ . Таким чином, ортогональне (прямокутне) проєкціювання є окремим випадком паралельного, а отримана цим методом проєкція об'єкта називається ортогональною.

Ортогональному проєкціюванню притаманні всі властивості паралельного і центрального проєкціювання і, крім того, справедлива теорема про проєкціювання прямого кута: якщо хоча б одна сторона прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга не перпендикулярна їй, то прямий кут на цю площину проєкціюється в прямий кут.

До проєкційних зображень у нарисній геометрії висуваються такі основні вимоги:

1) *оборотність* – відновлення оригіналу за його проєкційними зображеннями (кресленням) – можливість визначити форму і розміри об'єкта, його положення і зв'язок з навколишнім середовищем;

2) *наочність* – креслення повинне створювати просторове уявлення про форму предмета;

3) *точність* – графічні операції, виконані на кресленні, повинні давати достатньо точні результати;

4) *простота* – зображення повинне бути простим за побудовою і повинне допускати однозначний опис об'єкта у вигляді послідовності графічних операцій.

## 1.2 Метод Монжа

Якщо інформацію про відстань точки до площини проекції дати не за допомогою числової відмітки, а за допомогою другої проекції точки, побудованої на другій площині проекцій, то креслення називають двокартинним або комплексним. Основні принципи побудови таких креслень висловлені Г. Монжем. (Окремі правила і прийоми таких зображень, що поступово нагромадилися, були зведені в систему і розвинуті в праці Г. Монжа «Geometrie descriptive»). Монжем запроваджений метод ортогонального проєкціювання, при якому використовують дві проєкції на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій із послідовним суміщенням цих площин (рис. 3) і який був і залишається основним методом складання технічних креслень.

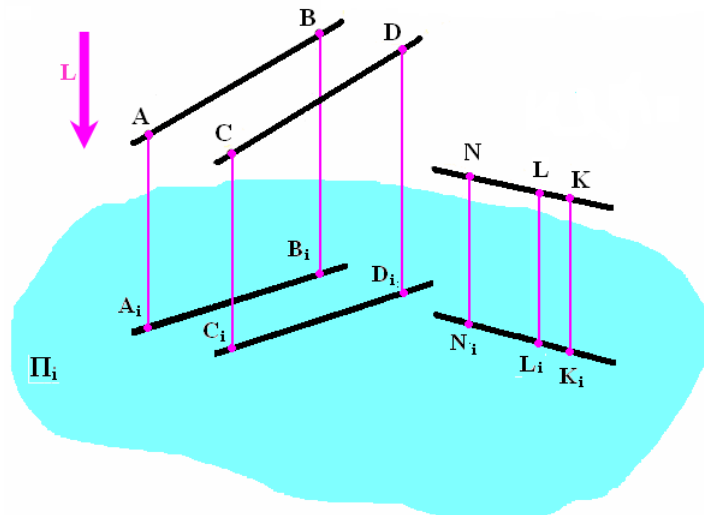


Рисунок 3

Повернувши площину  $\Pi_1$  навколо осі  $OX$  до суміщення з продовженням площини  $\Pi_2$ , одержимо зображення, яке називається епюром або комплексним. Дві проєкції однозначно визначають положення точки в просторі кресленням (рис. 4). Лінією зв'язку називається перпендикуляр до осі проєкцій, що проходить через дві проєкції точки.  $A_1$ ;  $A_2$  – горизонтальна та фронтальна проєкції точок.  $A_1A_2$  – лінія зв'язку.  $\Pi_1$  – горизонтальна площина проєкцій;  $\Pi_2$  – фронтальна площина проєкцій;  $OX$  – вісь проєкцій;  $OX = \Pi_1 \cap \Pi_2$ .

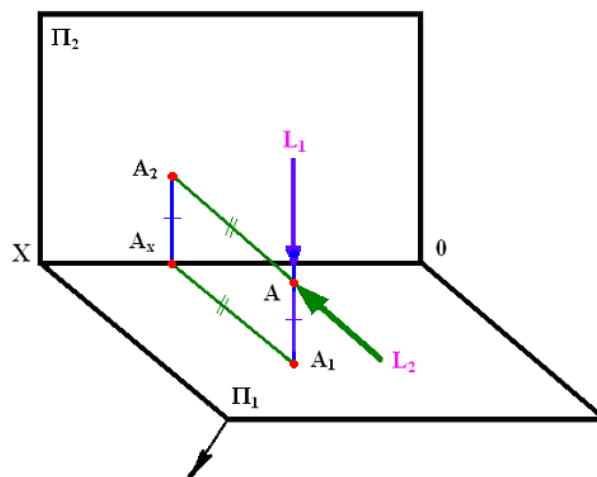


Рисунок 4



### 1.3 Проекції точки на три взаємно перпендикулярні площини

Для повного виявлення зовнішніх і внутрішніх форм складних деталей буває необхідно три і навіть більше зображення. Тому вводять три і більше площин проекцій.

Система площин  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  утворюється введенням у систему площин  $\Pi_1, \Pi_2$  ще однієї вертикальної площини проекцій, перпендикулярної фронтальній і горизонтальній площинам. Її називають профільною площиною проекцій і позначають  $\Pi_3$ . Лінії перетину профільної площини проекцій із фронтальною і горизонтальною позначають  $z$  і  $y$ . Точка  $O$  – перетин усіх трьох осей проекцій. Системою площин  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  простір розподіляється на октанти. Утворюються вісім октантів (рис. 5).

$\Pi_1$  – горизонтальна площина проекцій;

$\Pi_2$  – фронтальна площина проекцій;

$\Pi_3$  – профільна площина проекцій;

$ox, oy, oz$  – осі координат;

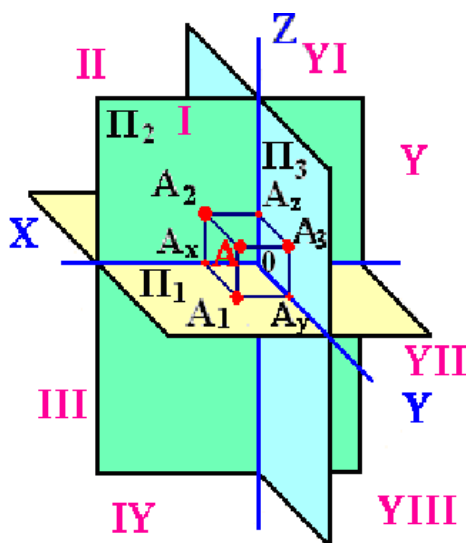


Рисунок 5

Координатою називається відстань від точки до площини проекцій:

$AA_1$  – координата  $z_A$  (апліката), відстань від точки  $A$  до площини  $\Pi_1$ ;

$AA_3$  – координата  $x_A$  (абсциса), відстань від точки  $A$  до площини  $\Pi_3$ ;

$AA_2$  – координата  $y_A$  (ордината), відстань від точки  $A$  до площини  $\Pi_2$ .

Після суміщення площин проекцій утворюється епюра (рис. 6).

Точки і проекції точок визначаються координатами:  $A(x_A, y_A, z_A)$ ;  $A_1(x_A, y_A)$ ;  $A_2(x_A, z_A)$ ;  $A_3(y_A, z_A)$ .  $A_3$  – профільна проекція точки  $A$ .

У тривимірному просторі, розподіленому площинами проекцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , утворено 8 октантів. У кожному з октантів у залежності від напрямку вісі утворюються різні сполучення знаків координат (табл. 1, рис. 7).

Таблиця 1 – Знаки координат у октантах тривимірного простору

Октанти	Знаки координат		
	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-

Октанти	Знаки координат		
	X	Y	Z
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

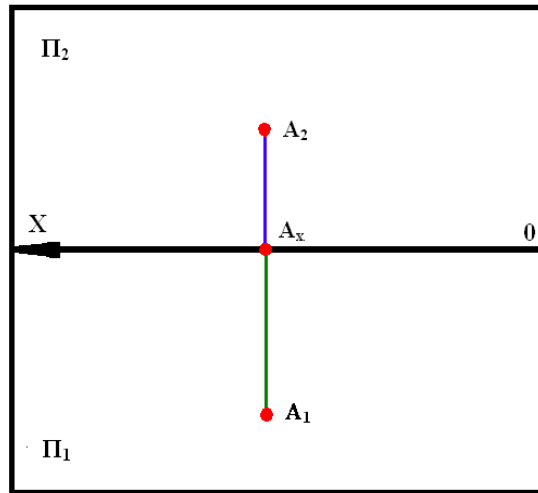


Рисунок 6

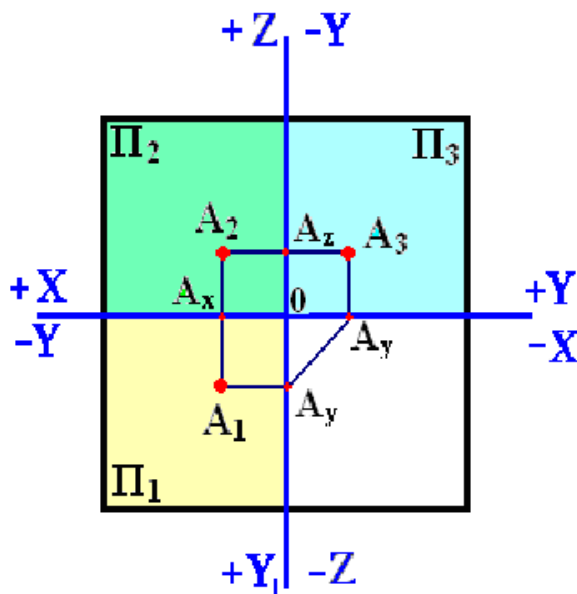


Рисунок 7

#### 1.4 Класифікація розташування точок простору

Із усієї множини точок простору  $R$  можна виділити такі підмножини.  
Трипараметрична – точки, що мають три значущі координати (рис. 5).

$$A \in R \Rightarrow \begin{cases} A_1 \in \Pi_1 \\ A_2 \in \Pi_2 \\ A_3 \in \Pi_3 \end{cases}$$

Двопараметрична – точки, що лежать на площині і мають дві значущі координати.

$$A \in \Pi_1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 \equiv A \in \Pi_1 \\ A_2 \in OX \\ A_3 \in OY \end{cases} \\ Z_A = 0$$

$$A \in \Pi_2 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = OX \\ A_2 \equiv A \in \Pi_2 \\ A_3 \in OZ \end{cases} \\ Y_A = 0$$

$$A \in \Pi_3 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = OY \\ A_2 = OZ \\ A_3 \equiv A \in \Pi_3 \end{cases} \\ X_A = 0$$

Однопараметрична – точки лежать на вісі проєкцій і мають одну значущу координату.

$$\begin{array}{l|l}
 A \subset OX \Rightarrow & A_1 \equiv A_2 \equiv A \subset OX \\
 Y_A = O & A_3 \equiv O \\
 Z_A = O & \\
 \hline
 A \subset OY \Rightarrow & A_1 \equiv A_3 \equiv A \subset OY \\
 X_A = O & A_2 \equiv O \\
 Z_A = O & \\
 \hline
 A \subset OZ \Rightarrow & A_1 \equiv O \\
 X_A = O & A_2 \equiv A_3 \equiv A = OZ \\
 Y_A = O &
 \end{array}$$

## 2 ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ

Пряма являє собою множину точок і в просторі безмежна.

Відрізком прямої називається множина, що складається з двох різних точок та усіх точок між ними.

Напрямний промінь складається з однієї точки і прямої без граничної в одному напрямку.

### 2.1 Точка на прямій. Сліди прямої

Якщо в просторі точка належить прямій, то проєкції цієї точки лежать на однойменних проєкціях цієї прямої і на спільній лінії проєкційного зв'язку.

На рис. 8 зображена точка  $A$ , що належить прямій  $\ell$ , бо її проєкції  $A_1$  і  $A_2$  розташовані відповідно на горизонтальній  $\ell_1$  і фронтальній  $\ell_2$  проєкціях прямої.

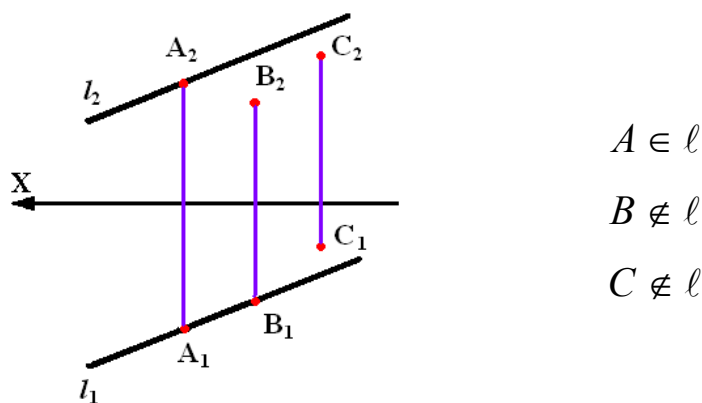


Рисунок 8

Точка не належить прямій лінії, якщо жодна з проєкцій точки, наприклад точка  $C$ , не належить відповідній проєкції прямої, або одна з проєкцій точки належить однойменній проєкції прямої лінії, наприклад точка  $B$ .

Точка перетину прямої з площиною проєкцій називається слідом прямої.

Точка  $M$  перетину прямої  $\ell$  із горизонтальною площиною проєкцій  $\Pi_1$  має назву горизонтального сліду; точка  $N$  перетину прямої  $\ell$  з фронтальною площиною проєкцій  $\Pi_2$  – фронтального сліду; точка  $P$  перетину прямої  $\ell$  з профільною площиною проєкцій  $\Pi_3$  – профільного сліду.

На рис. 9 наведено приклад побудови для прямої  $\ell$  горизонтального і фронтального сліду. Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проєкцію  $\ell_2$  до перетину з віссю  $OX$ . Далі з точки перетину  $M_2$  – фронтальної проєкції горизонтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з горизонтальною проєкцією прямої. Точка перетину  $M_1$  – горизонтальна проєкція горизонтального сліду, яка збігається з самим горизонтальним слідом  $M$ .

Для знаходження фронтального сліду прямої  $\ell$  необхідно продовжити горизонтальну проєкцію прямої  $\ell_1$  до перетину з віссю  $OX$ . Далі з точки перетину  $N_1$  – горизонтальної проєкції фронтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з фронтальною проєкцією прямої. Точка перетину  $N_2$  – фронтальна проєкція фронтального сліду, яка збігається з самим фронтальним слідом  $N$ .

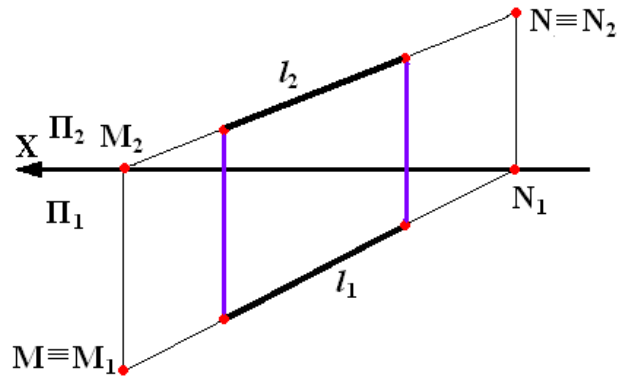


Рисунок 9

## 2.2 Різні положення прямої відносно площини проєкцій

### Прямі загального положення

Прямими загального положення називаються прямі, не паралельні жодній із площин проєкцій (рис. 10).

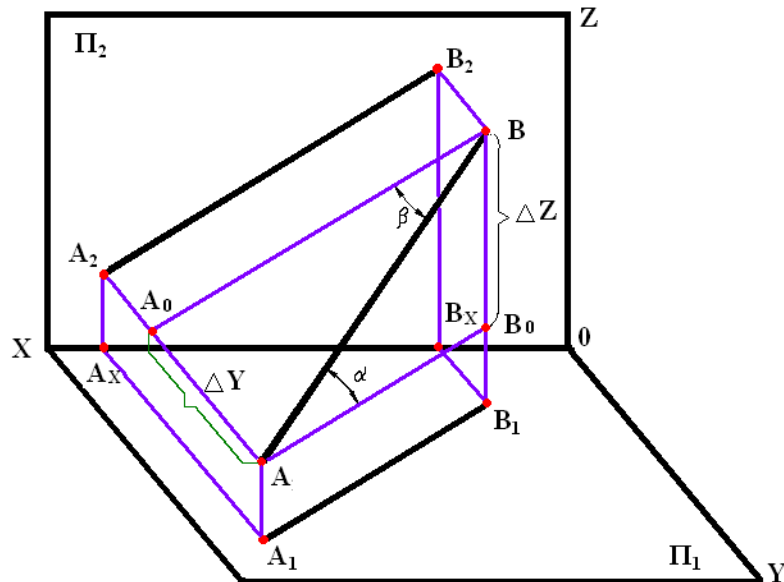


Рисунок 10

### Правило прямокутного трикутника

Для прямої загального положення виникає потреба у визначенні натуральної величини відрізка та кутів нахилу до площин проєкцій. Розглянемо рис. 10, з якого впливає правило прямокутного трикутника.

Візьмемо відрізок  $AB$  і побудуємо його ортогональну проєкцію на горизонтальну і фронтальну площини проєкцій. Отримаємо два прямокутних трикутники  $\triangle AB_0V$  і  $\triangle AA_0V$ , у яких  $AB$  – гіпотенуза, є натуральною величиною,  $\alpha = \angle BAV_0$  – кут нахилу прямої до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\beta = \angle ABA_0$  – кут нахилу прямої до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ . Для трикутника  $\triangle AB_0V$  катет  $AB_0$  дорівнює величині горизонтальної проєкції  $A_1B_1$  відрізка  $[AB]$ , другий катет  $VB_0$  дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка (точки  $A$  і  $B$ ) до горизонтальної площини проєкцій, тобто  $\Delta Z$ .

Аналогічні висновки випливають також із розгляду трикутника  $\Delta AA_0B$ .

Для визначення натуральної величини відрізка прямої та кута нахилу прямої до певної площини проекції потрібно на комплексному кресленні (рис. 11) побудувати прямокутний трикутник на тій площині проекцій, відносно якої визначається кут нахилу прямої, тоді натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція відрізка на тій площині проекцій, а другим катетом є різниця відстаней від кінців відрізків до тієї ж площини проекцій, а кут між відповідною проекцією цього відрізка та його гіпотенузою дорівнює куту нахилу прямої до цієї площини проекцій.

Натуральна величина відрізка прямої і кут нахилу прямої до площини проекцій на епюрі можуть бути знайдені з прямокутного трикутника, у якому один катет дорівнює проекції відрізка на цій площині проекцій, другий – різниці відстаней кінців відрізка від цієї площини проекцій.

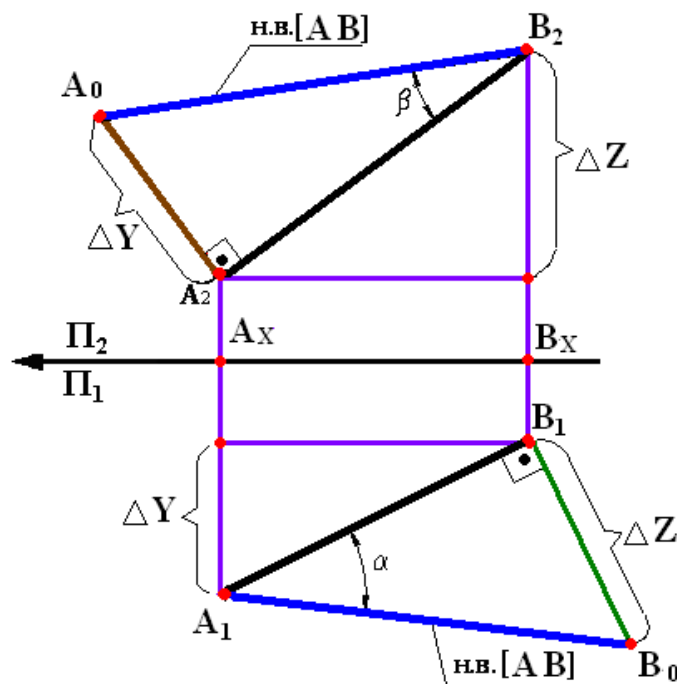


Рисунок 11

### **Прямі особливого положення**

Прямими особливого положення називаються прямі, паралельні одній або двом площинам проекцій.

До прямих особливого положення відносяться прямі рівня та проєкціювальні прямі.

### **Прямі рівня**

Прямі, паралельні одній площині проекцій, називаються прямими рівня (горизонтальна, фронтальна, профільна прямі).

Прямі рівня на відповідну площину проекцій проєкціюються натуральною величиною.

Горизонтальна пряма  $h \parallel \Pi_1$  (рис. 12, 13).

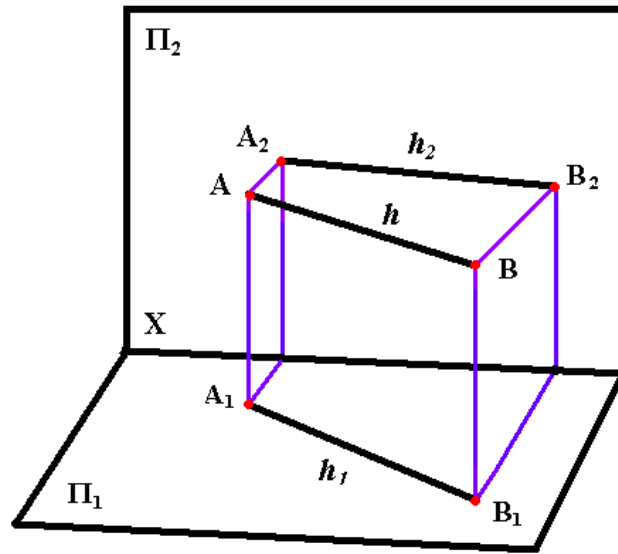


Рисунок 12

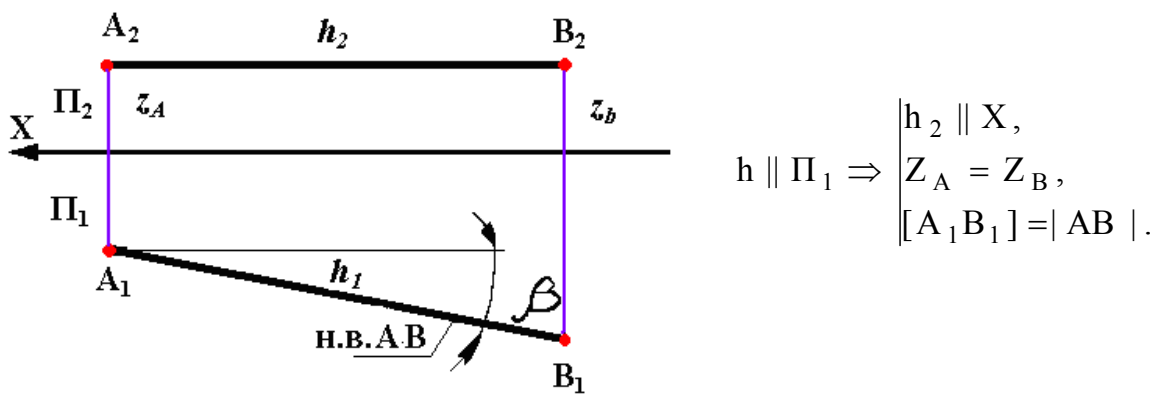


Рисунок 13

Фронтальна пряма  $f \parallel \Pi_2$  (рис. 14, 15)

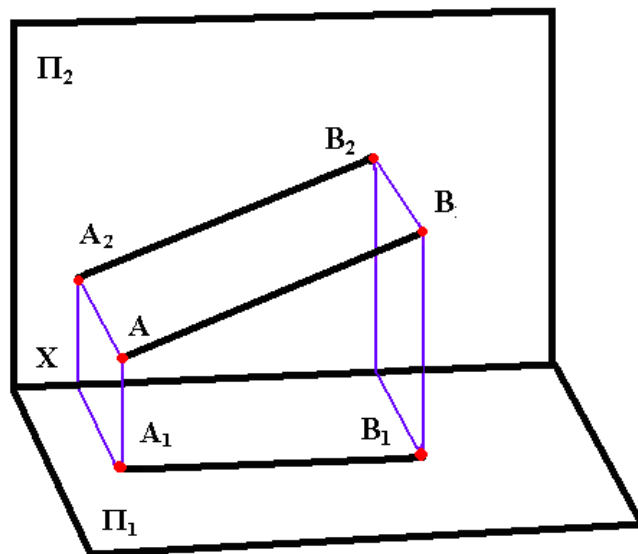
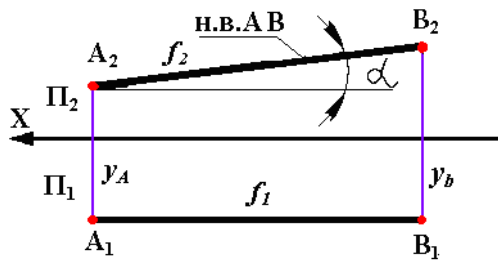


Рисунок 14



$$F \parallel \Pi_2 \Rightarrow \begin{cases} f_1 \parallel X, \\ Y_A = Y_B, \\ [A_2B_2] = |AB|. \end{cases}$$

Рисунок 15

Профільна пряма  $P \parallel \Pi_3$  (рис. 16, 17).

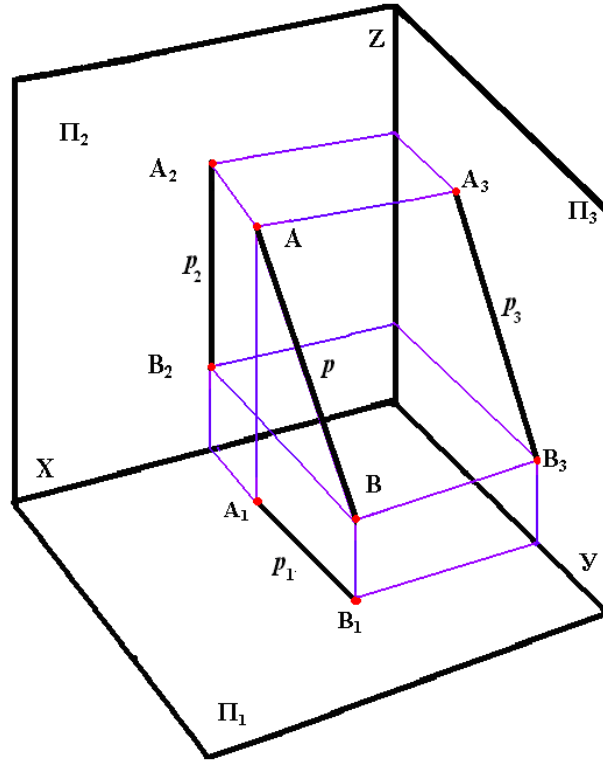
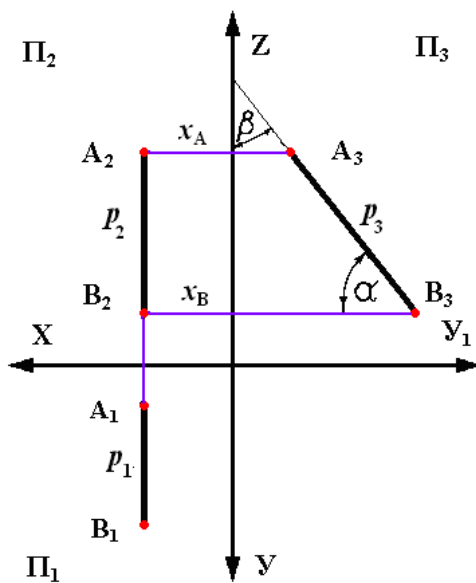


Рисунок 16



$$P \parallel \Pi_3 = \begin{cases} P_1 \perp x, \\ P_2 \perp x, \\ x_A = x_B, \\ [A_3B_3] = |AB|. \end{cases}$$

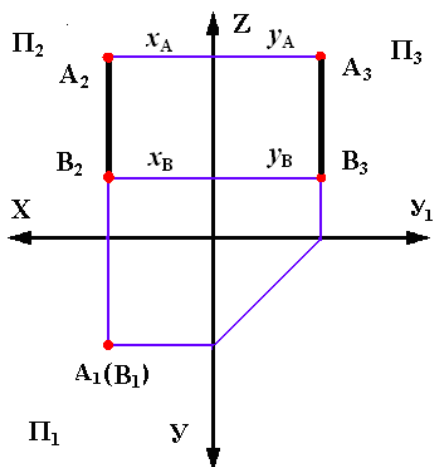
Рисунок 17



### Проекціювальні прямі

Проекціювальними прямими називаються прямі, паралельні двом площинам проекцій, перпендикулярні до третьої (горизонтально проекціювальні, фронтально проекціювальні, профільно проекціювальні).

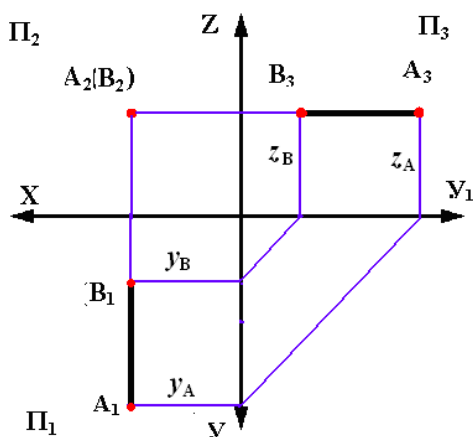
Горизонтально проекціювальна пряма зображена на рис. 18.



$$AB \perp \Pi_1 \Rightarrow \begin{cases} [A_2 B_2] \perp X, \\ A_1 \equiv B_1, \\ X_A = X_B, \\ Y_A = Y_B, \\ [A_2 B_2] = |AB|. \end{cases}$$

Рисунок 18

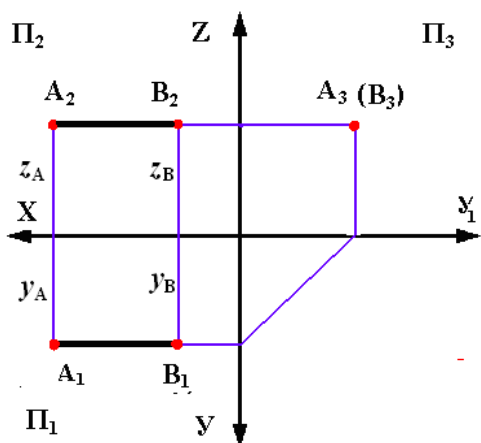
Фронтально проекціювальна пряма зображена на рис. 19.



$$AB \perp \Pi_2 \Rightarrow \begin{cases} [A_1 B_1] \perp x; \\ [A_3 B_3] \perp z; \\ A_2 \equiv B_2, \\ z_A \equiv z_B, \\ x_A \equiv x_B. \end{cases}$$

Рисунок 19

Профільно проекціювальна пряма зображена на рис. 20.



$$AB \perp \Pi_3 \Rightarrow \begin{cases} [A_2 B_2] \perp Z; = |AB|, \\ [A_1 B_1] \perp Y; = |AB|, \\ A_3 \equiv B_3, \\ Z_A = Z_B, \\ Y_A = Y_B. \end{cases}$$

Рисунок 20

### 2.3 Взаємне положення прямих

Дві прямі в просторі можуть співпадати, бути паралельними, перетинатися, бути перехресними.

#### Паралельні прямі

Якщо прямі паралельні, то їх однойменні проєкції паралельні (в окремому випадку – співпадають) (рис. 21).

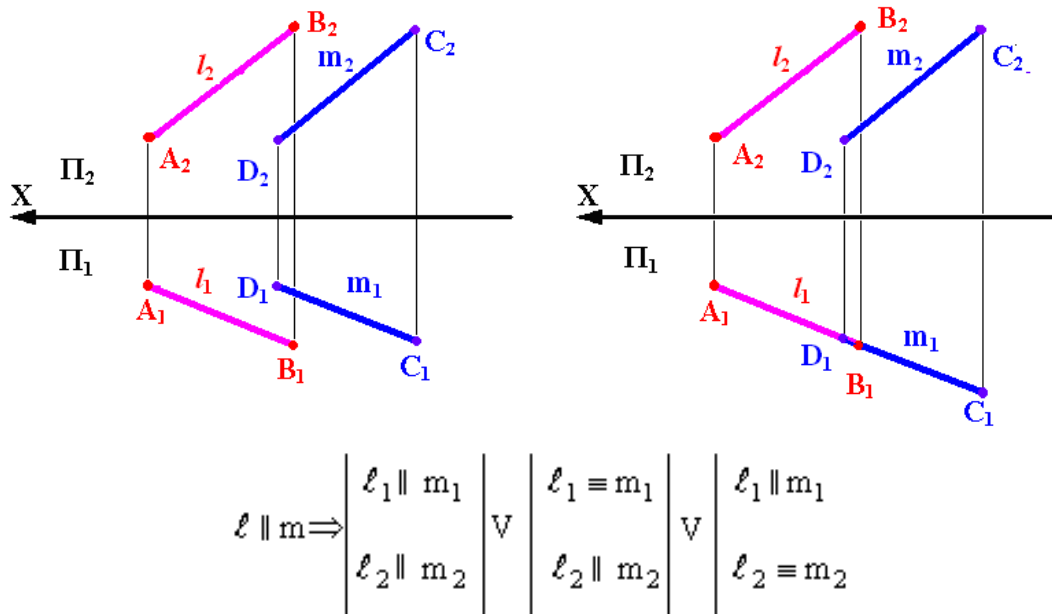
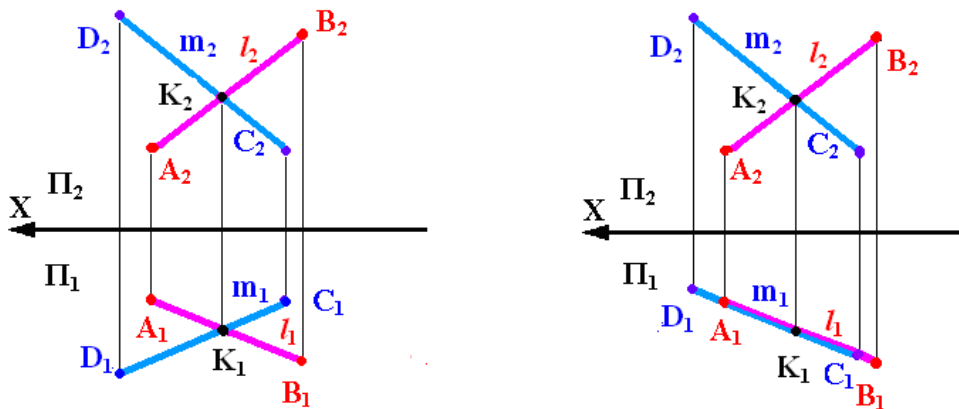


Рисунок 21

#### Перетинні прямі

Однойменні проєкції перетинних прямих перетинаються (в окремому випадку – співпадають) (рис. 22).

Точки перетину проєкцій прямих мають проєкціювальний зв'язок, тобто є проєкціями спільних для цих прямих точок.



$$\ell \cap m = k \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \ell_1 \cap m_1 = k_1, \\ \ell_2 \cap m_2 = k_2, \end{array} \right| \vee \left| \begin{array}{l} \ell_1 \equiv m_1 \equiv k_1, \\ \ell_2 \cap m_2 \equiv k_2. \end{array} \right.$$

Рисунок 22

### Перехресні прямі

Перехресні прямі не перетинаються, не паралельні, спільних точок не мають (рис. 23).

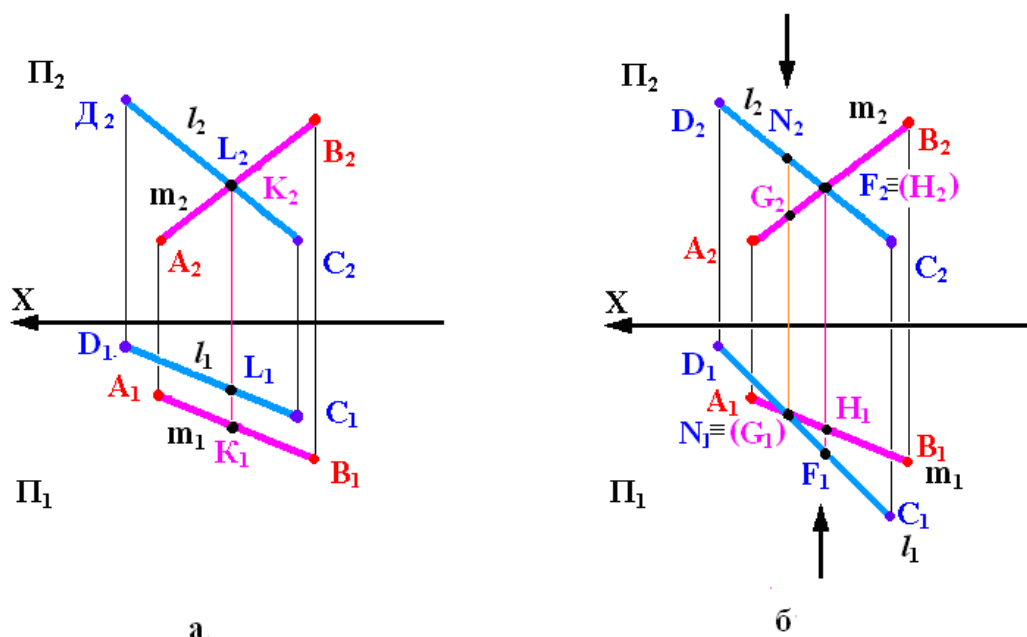


Рисунок 23

Точки, які належать одному проєкціювальному променю, але належать різним прямим, називаються конкуруючими.

Конкуруючі точки використовуються для визначення видимості елементів на кресленні. Видимими є точки, які розташовані далі від площини проєкцій (ближче до спостерігача).

На рис. 23а зображені перехресні прямі АВ ( $m$ ) і CD ( $l$ ). Фронтальні проєкції їх перетинаються в точці  $K_2 \equiv L_2$ , а на горизонтальній площині проєкцій видно, що точка  $K_1$  належить  $A_1B_1$  ( $m_1$ ), а точка  $L_1$  належить  $C_1D_1$  ( $l_1$ ).

На рис. 23б зображено дві перехресні прямі АВ ( $m$ ) і CD ( $l$ ). Фронтальні проєкції їх перетинаються в точці  $F_2 \equiv H_2$ , а горизонтальні – у точці  $N_1 \equiv G_1$ . Для визначення «перекривання» відрізків на проєкціях застосовують конкуруючі точки, які лежать на одному проєкціювальному промені, належать різним прямим і на одній площині проєкцій збігаються.

При цьому точки G і H належать відрізку АВ ( $m$ ), а точки N і F відрізку CD ( $l$ ). Оскільки точка N розміщена вище від точки G на полі  $\Pi_1$ , то відрізок CD ( $l$ ) «перекриває» відрізок АВ ( $m$ ), невидиму проєкцію точки  $G_1$  беруть у дужки.

Точка  $F_1$  лежить ближче до спостерігача, ніж точка  $H_1$ , тому на полі  $\Pi_2$  відрізок CD ( $l$ ) «перекриває» відрізок АВ ( $m$ ), невидиму проєкцію точки  $H_2$  беруть у дужки.

### 2.4 Проекції прямого кута

Якщо хоча б одна зі сторін прямого кута паралельна площині проєкцій, то кут проєкціюється на цю площину прямим кутом.

Якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга їй не перпендикулярна, то при ортогональному проєкціюванні прямий кут проєкціюється на цю площину проєкцій без спотворень. (рис. 22).

На рис. 24 зображено прямий кут  $ABC$ , у якого сторона  $AB$  паралельна площині  $\Pi_1$ . Проекційвальна площина  $Q$  перпендикулярна площині  $\Pi_1$ .  $AB \perp \Sigma$ , оскільки  $AB \perp BC$  та  $AB \perp BB$ , тому  $AB \perp B_1C_1$ . Оскільки  $AB \parallel A_1B_1$ , то  $A_1B_1 \perp B_1C_1$ .

На рис. 25 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є горизонтальна пряма рівня  $h$ , яка є паралельною до  $\Pi_1$ , тому на цю площину прямий кут проєкціюється як прямий.

На рис. 26 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є фронтальна пряма рівня  $f$ , яка є паралельною до  $\Pi_2$ , тому на цю площину прямий кут проєкціюється як прямий.

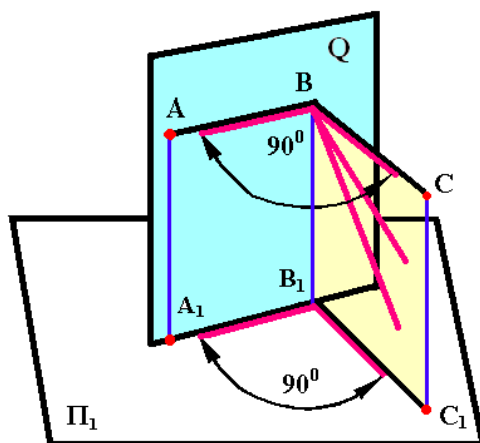
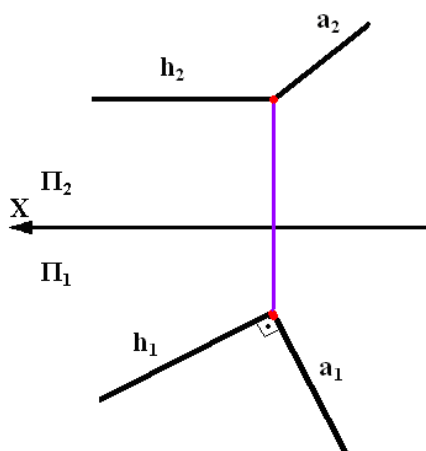
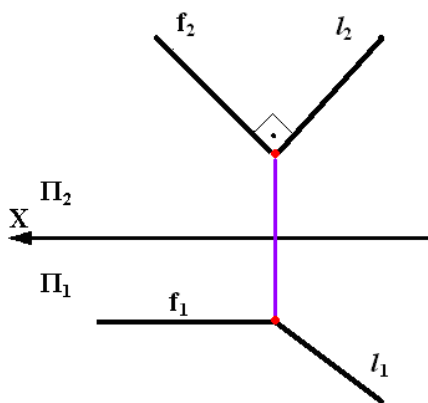


Рисунок 24



$h_2 \parallel OX$   
 $h_1 = \text{н.в.}$   
 $h \parallel \Pi_1$   
 $h \perp a$

Рисунок 25



$f_1 \parallel OX$   
 $f_2 = \text{н.в.}$   
 $f \parallel \Pi_2$   
 $f \perp l$

Рисунок 26

Правило проєкціювання прямого кута використовується при розв'язанні задач зі знаходження відстані від точки до прямої особливого розташування. На рис. 27 наведено приклад зі знаходження відстані від точки  $C$  до горизонтальної прямої рівня  $h$ .

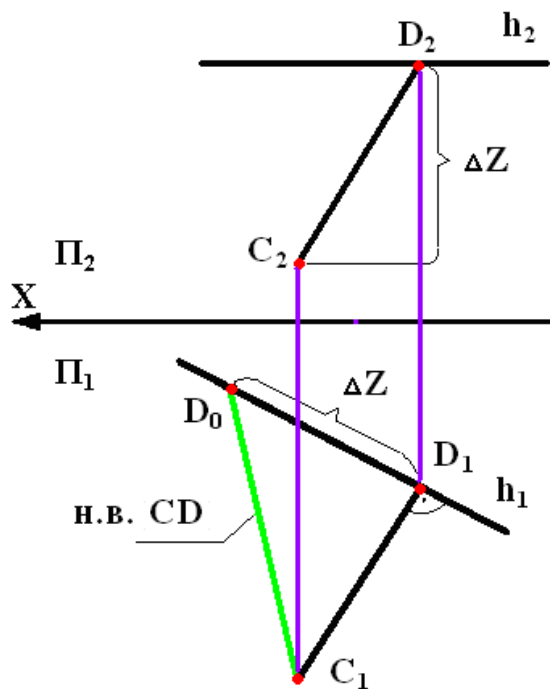


Рисунок 27

Із точки  $C$  необхідно опустити перпендикуляр на пряму  $A$ . Оскільки  $h \parallel \Pi_1$ , тому прямий кут спроектується на  $\Pi_1$  без спотворень. Натуральну величину ( $CD$ ) знаходимо методом прямокутного трикутника.

### 3 ПЛОЩИНА

Площиною називається нерозривна множина послідовних положень твірної прямої ( $m$ ), яка переміщується паралельно самій собі за напрямною прямою ( $l$ ) (рис. 28).

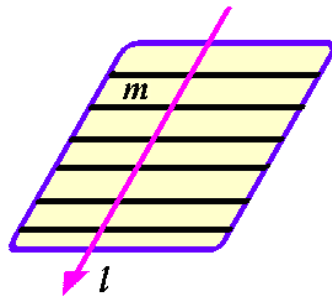


Рисунок 28

На епюрі площина може бути заданою:

- 1 Трьома точками, що не належать одній прямій (рис. 29).

$$A, B, C \notin \ell \Rightarrow \text{пл.}(A, B, C)$$

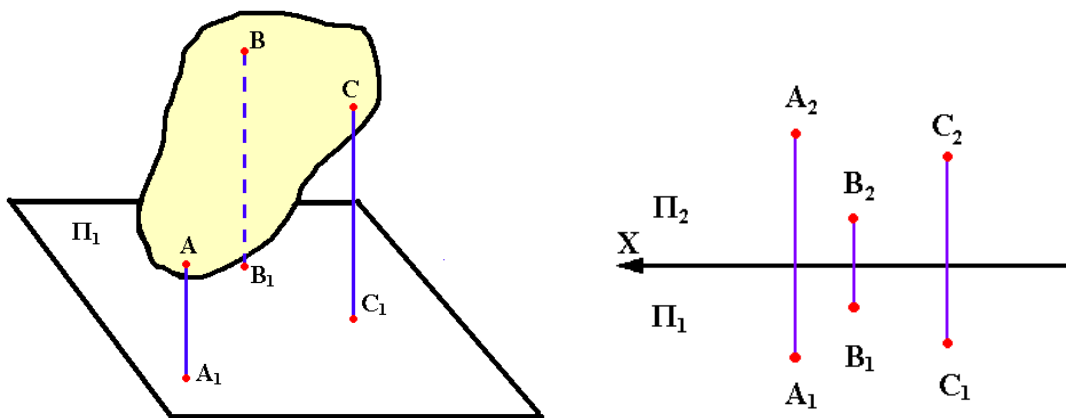


Рисунок 29

- 2 Прямую і точкою, що не належить цій прямій (рис. 30).

$$\ell \not\ni A \Rightarrow \text{пл.}(\ell, A)$$

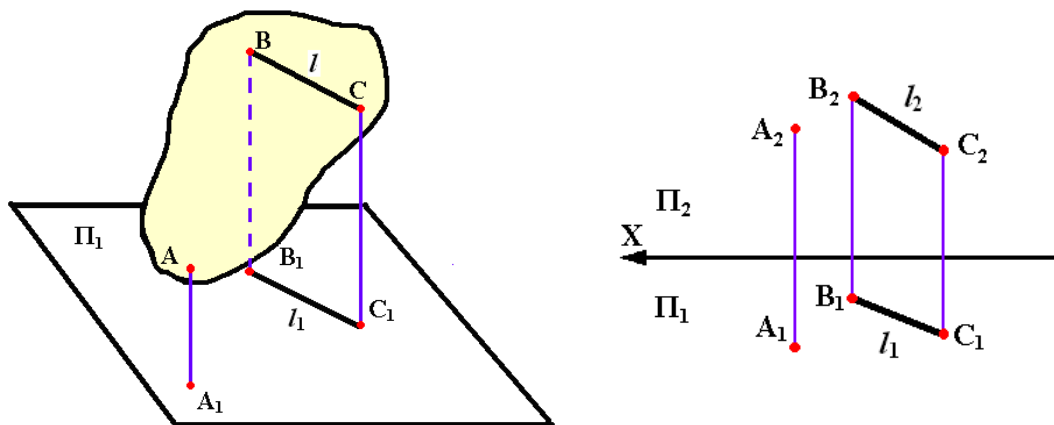


Рисунок 30

- 3 Паралельними прямими (рис. 31).  
пл. ( $l \parallel m$ )

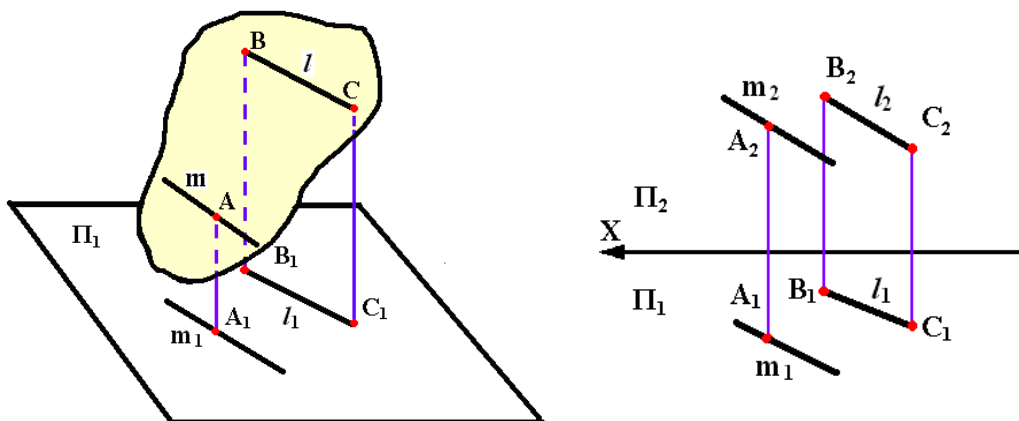


Рисунок 31

- 4 Перетинними прямими (рис. 32).  
пл. ( $l \cap m$ )

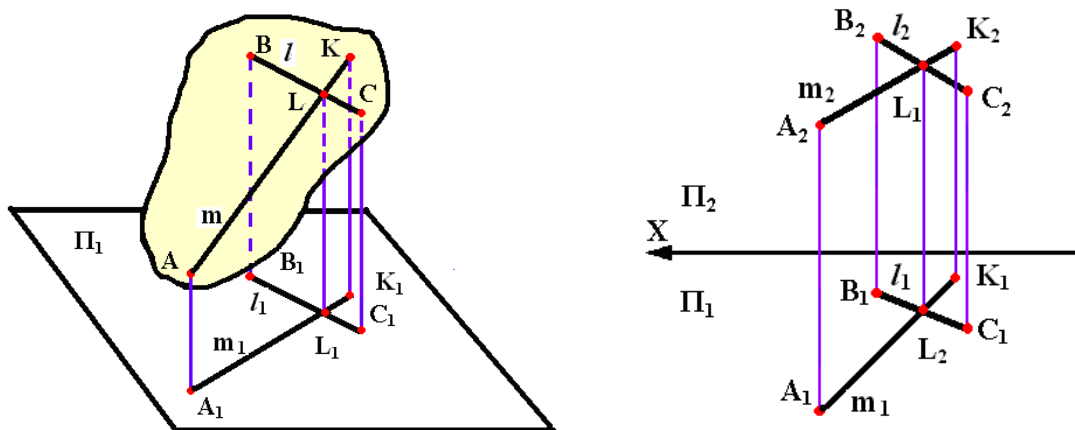


Рисунок 32

- 5 Плоскою фігурою (трикутником) (рис. 33).  
пл. ( $ABC$ )

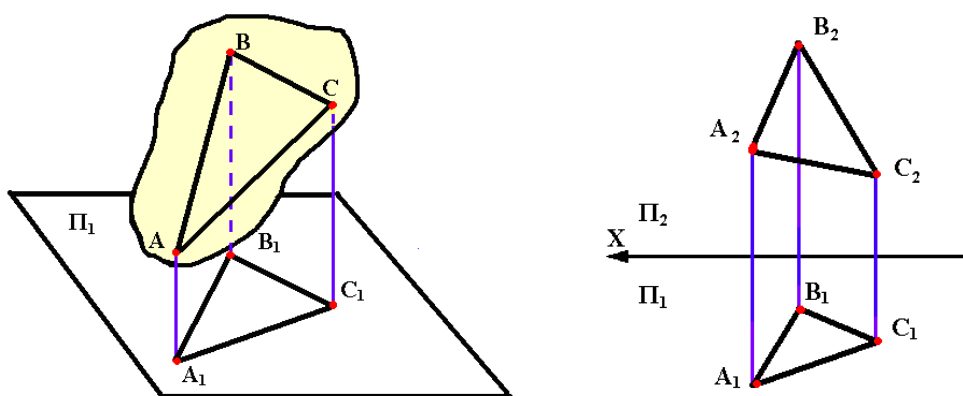
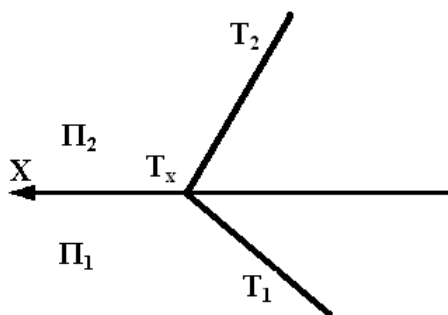


Рисунок 33

6. Слідами площин (рис. 34).

Слідами площин називають лінії перетину площин з площинами проєкцій.



*Рисунок 34*



## 4 РІЗНІ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИНИ ВІДНОСНО ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

### 4.1 Площина загального положення

Площиною загального (довільного) положення називають площину, не перпендикулярну жодній із площин проєкцій.

### 4.2 Площини особливого положення

Площини особливого положення поділяються на площини проєкціовальні і площини рівня.

Проєкціовальною площиною називають площину, перпендикулярну одній із площин проєкцій:

- горизонтально проєкціовальна площина ( $\Gamma \perp \Pi_1$ ) (рис. 35);
- фронтально проєкціовальна площина ( $\Phi \perp \Pi_2$ ) (рис. 36);
- профільно проєкціовальна площина ( $E \perp \Pi_3$ ). (рис. 37).

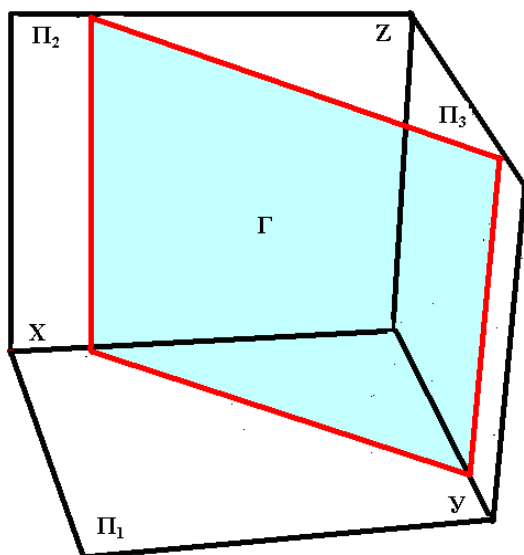


Рисунок 35

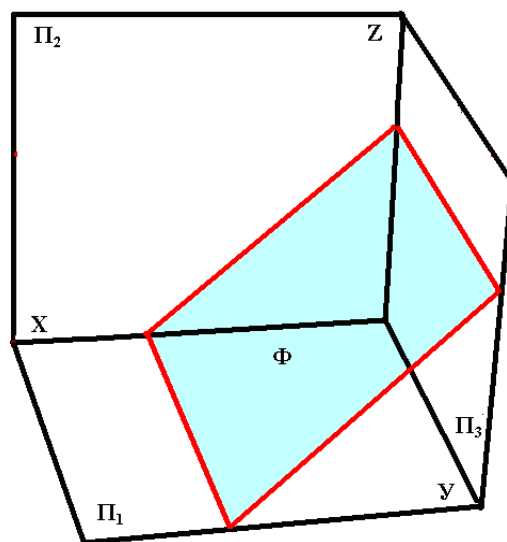


Рисунок 36

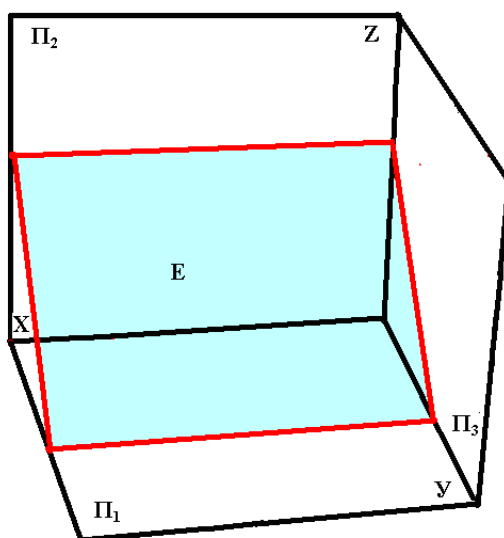


Рисунок 37

Проекційвальні площини часто використовуються як допоміжні площини при розв'язанні задач.

Проекційвальні площини мають збірну властивість, яка полягає в тому, що всі елементи проекційвальної площини проєкціюються в одну лінію на площині проєкцій, до якої вона перпендикулярна (рис. 38). Ця лінія зветься головною проєкцією або слідом площини.

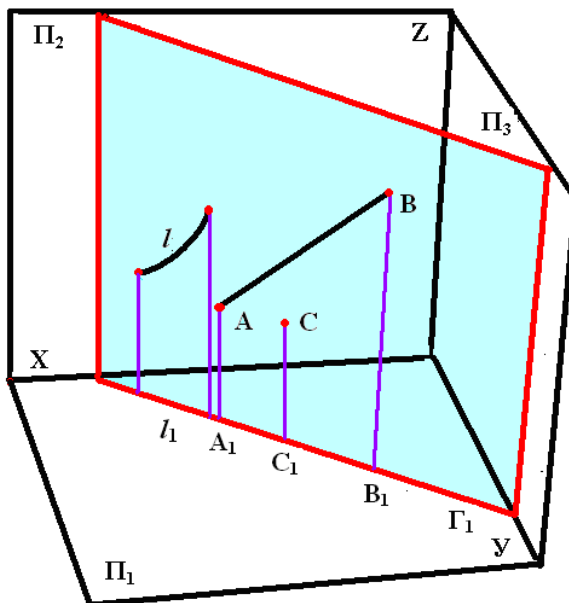


Рисунок 38

### 4.3 Площини рівня

Площиною рівня називають площину, паралельну до однієї з площин проєкцій і, відповідно, перпендикулярну до двох інших (рис. 39):

- горизонтальна площина рівня ( $\Gamma$ );
- фронтальна площина рівня ( $\Phi$ );
- профільна площина рівня ( $E$ ).

Фігури, розташовані у площині рівня, проєкціюються до однієї з площин проєкцій у натуральну величину.

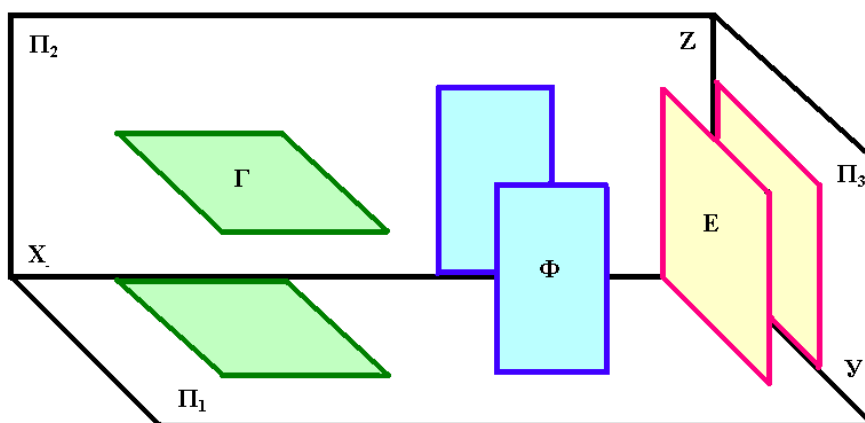
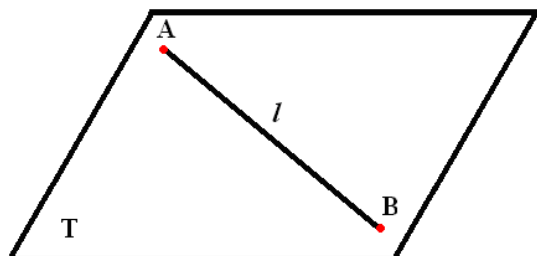


Рисунок 39

#### 4.4 Пряма і точка в площині

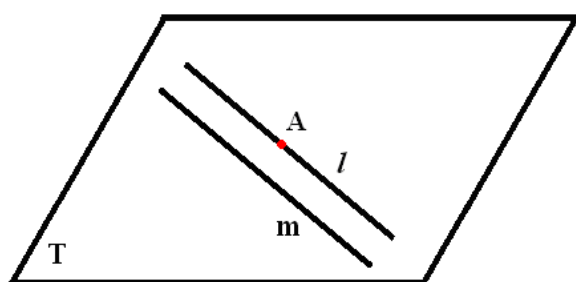
В основі належності прямої площині є дві ознаки:

- 1) якщо проходить через дві точки цієї площини (рис. 40);
- 2) якщо пряма проходить через точку, що належить площині і паралельна будь-якій прямій цієї площини (рис. 41).



$$\begin{aligned} \ell \supset A; A \subset T \\ \ell \supset B; B \subset T \end{aligned} \Rightarrow \ell \subset T$$

Рисунок 40



$$\begin{aligned} \ell \supset A; A \subset T \\ \ell \parallel m; m \subset T \end{aligned} \Rightarrow \ell \subset T$$

Рисунок 41

#### 4.5 Головні лінії площини

Головні лінії – це лінії, що належать площині і одночасно паралельні будь-якій площині проєкцій.

За розташуванням відносно площин проєкцій головні лінії розподіляються на горизонтальні, фронтальні та профільні прямі.

Горизонталь – h;  $h \parallel \Pi_1$ ;  $h_2 \parallel OX$  (рис. 42).

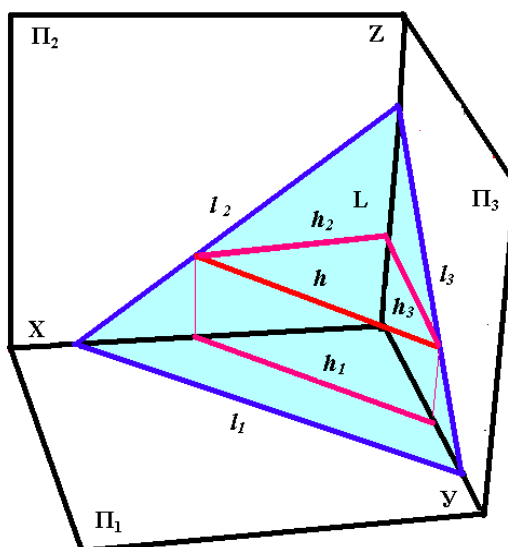


Рисунок 42

Горизонталь на епюрі завжди починають будувати з фронтальної проекції, бо вона завжди паралельна осі ОХ.

Фронталь –  $f$ ;  $f \parallel \Pi_2$ ;  $f_1 \parallel OX$  (рис. 43).

Фронталь на епюрі завжди починають будувати з її горизонтальної проекції, бо вона завжди паралельна осі ОХ.

Профільна пряма –  $p$ ;  $p \parallel \Pi_3$  (рис. 44).

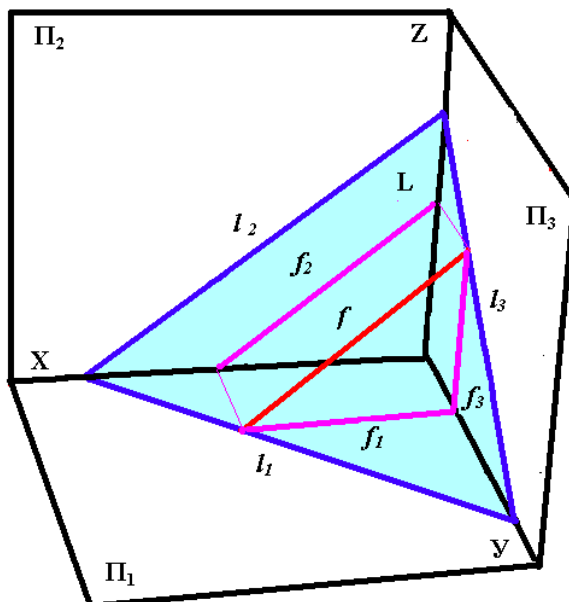


Рисунок 43

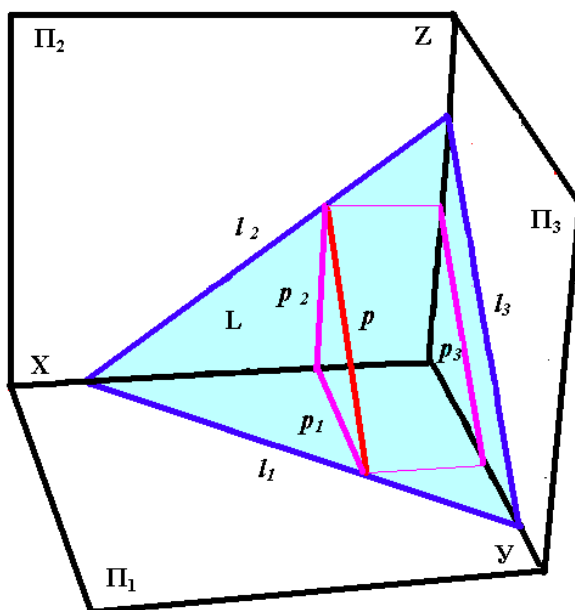


Рисунок 44

## 5 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Спільним елементом прямої і площини, що перетинаються, є точка.

### 5.1 Перетин прямої загального положення з площиною загального положення

Для побудови точки перетину (точки зустрічі) прямої загального положення  $\ell$  з площиною загального положення  $Q$  (рис. 45) необхідно виконати побудови:

- 1 Через пряму  $\ell$  проводимо допоміжну січну проєкціовальну площину  $T$ .

$$\ell \subset T; T \perp Q$$

- 2 Будуємо лінію перетину заданої площини  $Q$  з допоміжною  $T$ .

$$AB = Q \cap T$$

- 3 Знаходимо спільну точку заданої прямої  $\ell$  із лінією перетину площин  $AB$ .

$$K = (AB \cap \ell)$$

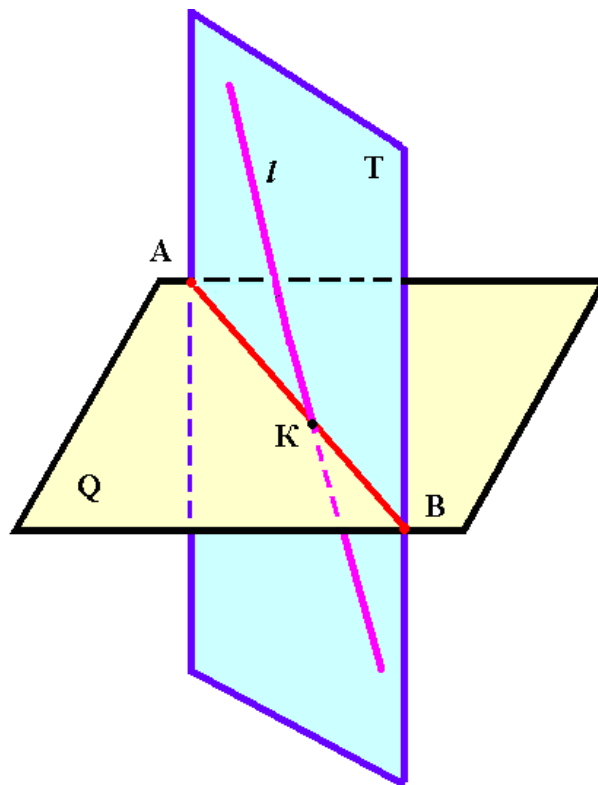


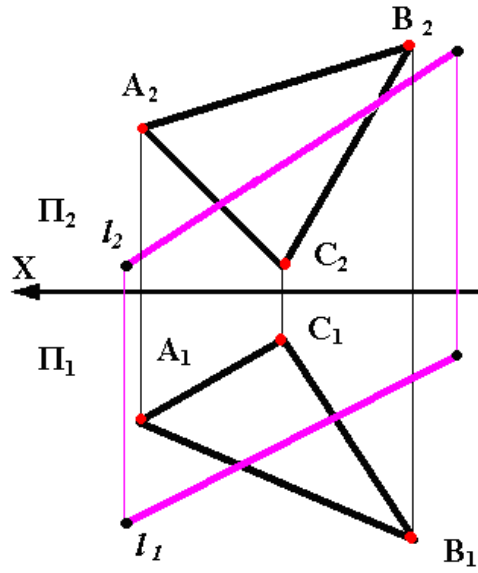
Рисунок 45

### 5.2 Побудова точки зустрічі прямої з площиною загального положення

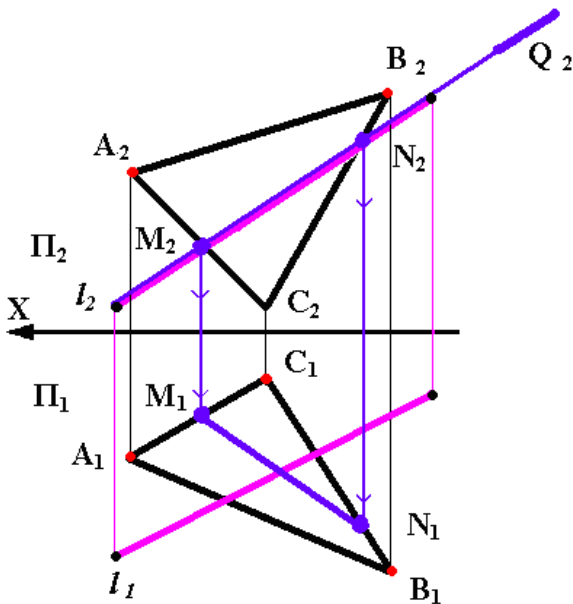
Дано: пл.  $\triangle ABC$  – площина загального положення;

$\ell$  – пряма загального положення (рис. 46).

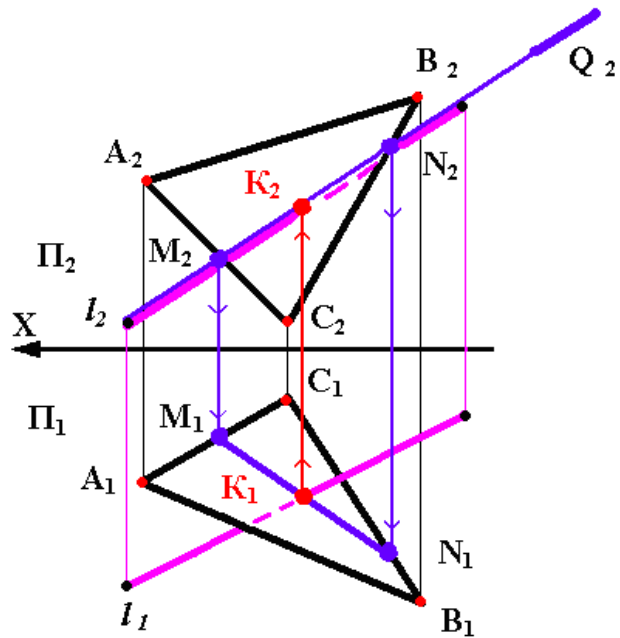
Знайти:  $K = \text{пл. } \triangle ABC \cap \ell$ .



а



б



в

Рисунок 46

### Алгоритм побудови

При розв'язанні таких задач користуються проєкціювальними допоміжними площинами, тому що їх головні проєкції (сліди) мають збиральні властивості.

- 1 Проводимо пл.  $Q$ ;  $Q \perp \Pi_2$  так, щоб  $Q \supset \ell$ .
- 2 Знаходимо лінію перетину заданої і допоміжної площин:  
 $MN = \text{пл. } \triangle ABC \cap Q$ .
- 3 Знаходимо точку зустрічі прямої  $\ell$  з лінією перетину  $MN$ :  $K = \ell \cap MN$ .

Видимість прямої  $\ell$  відносно площини  $\triangle ABC$  визначається за допомогою конкуруючих точок.

### 5.3 Побудова лінії перетину площин загального положення трикутника ABC та трикутника DEF

На рис. 47 дана побудова лінії перетину двох трикутників з визначенням видимих та невидимих ділянок цих трикутників.

Побудова зводиться до визначення точок M та N, у яких сторони DF та EF трикутника DEF перетинають трикутник ABC. При цьому через сторони DF та EF проводяться допоміжні фронтально проєкціювальні площини Q та S, що перетинають трикутник ABC по прямим 1-2 та 3-4. У перетині проєкції прямою  $1_1-2_1$  з проєкцією сторони  $D_1F_1$  одержана проєкція точки  $M_1$ .  $M_1 \rightarrow M_2 \subset D_2F_2$ . Далі  $N_1 = 3_1 - 4_1 \cap E_1F_1$ ;  $N_1 \rightarrow N_2 \subset E_2F_2$ . Видимість ділянок трикутників визначається при допомозі конкуруючих точок.

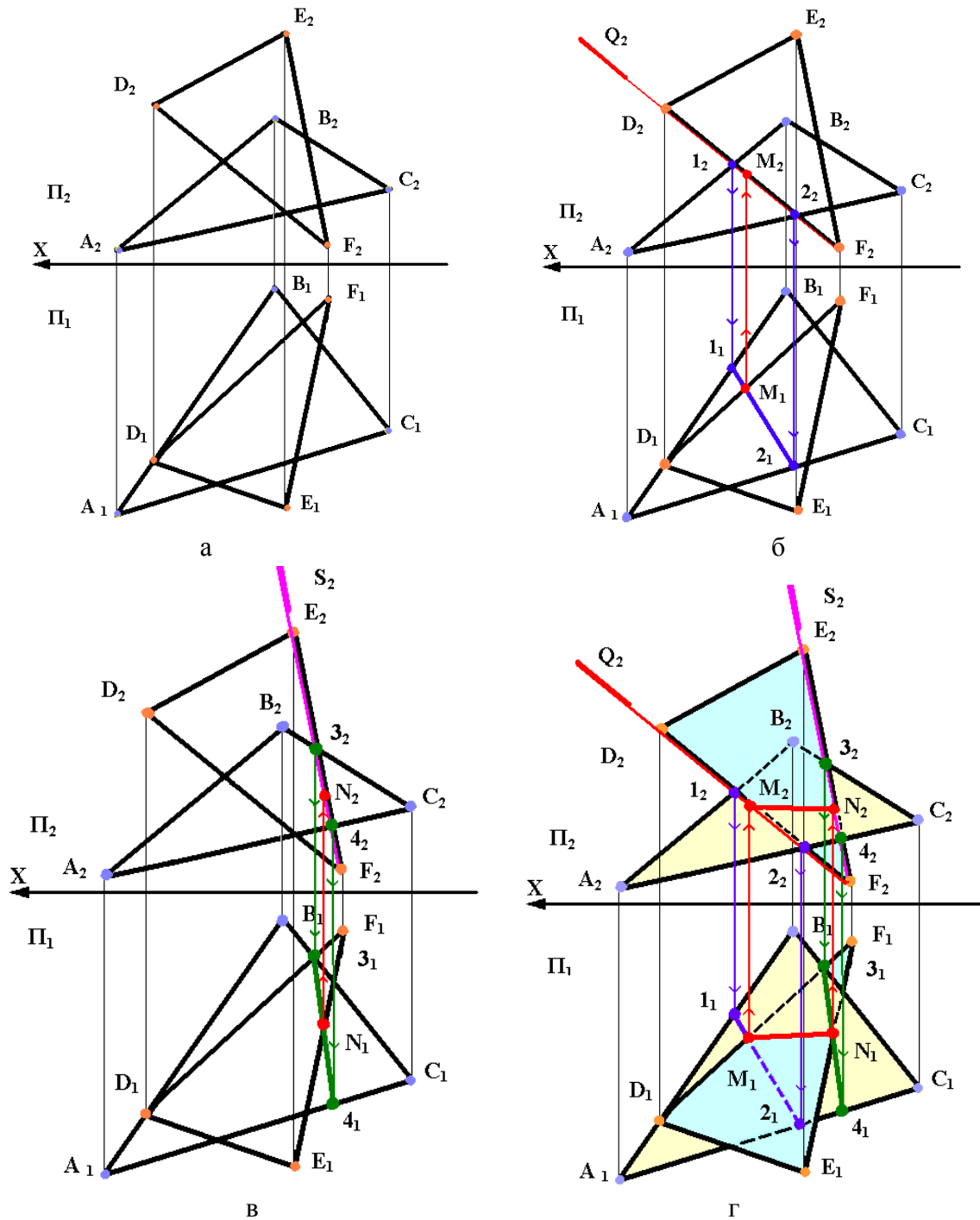


Рисунок 47

## 6 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ, ДВОХ ПЛОЩИН

### 6.1 Паралельність прямої і площини

Пряма і площина взаємно паралельні, якщо в площині існує пряма, паралельна даній прямій. Задача побудови прямої, паралельної заданій площині, досить проста (рис. 48).

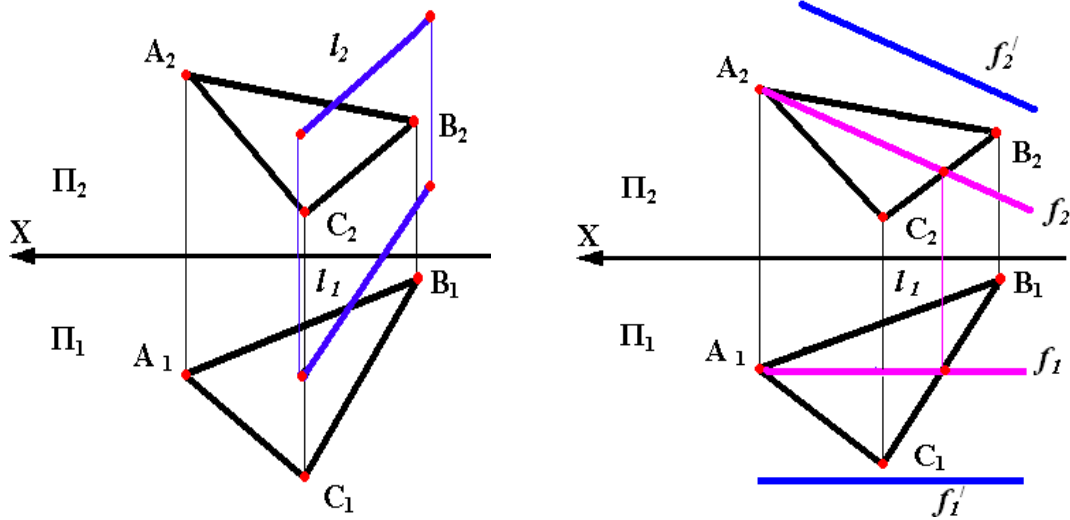


Рисунок 48

Нехай треба побудувати пряму, паралельну площині  $\triangle ABC$ . Можна провести прямі, паралельні одній зі сторін  $ABC$ , на рис. 48.  $l \parallel BC$ , або побудувати в площині допоміжну пряму  $i$  паралельно їй провести пряму  $f' \parallel f$ .

### 6.2 Паралельність двох площин

Відомо, що дві площини взаємно паралельні, якщо дві прямі, що паралельні, в одній площині відповідно паралельні двом прямим, що паралельні в другій площині; якщо дві прямі, що перетинаються, в одній площині відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, в другій площині.

Такими лініями можуть бути прямі загального положення (рис. 49), головні лінії площин (рис. 50) або сліди площин (рис. 51).

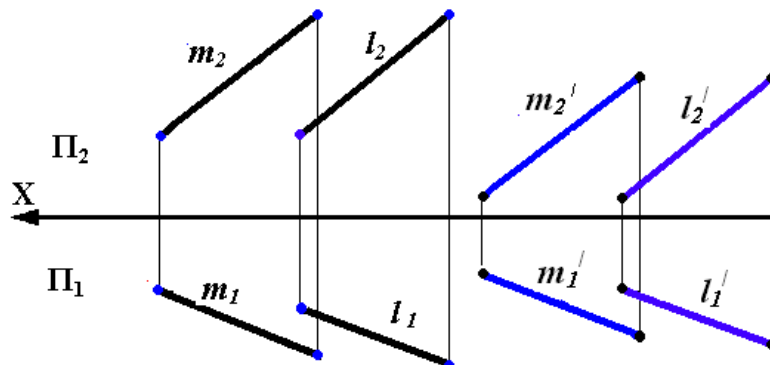


Рисунок 49



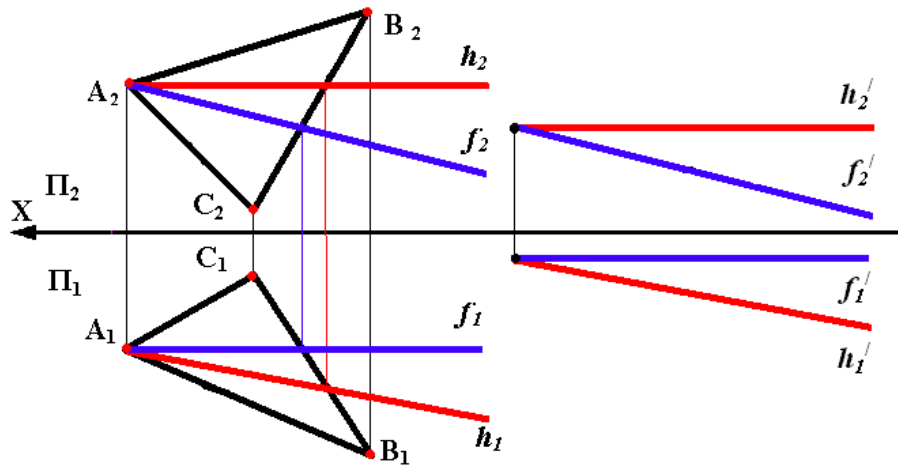


Рисунок 50

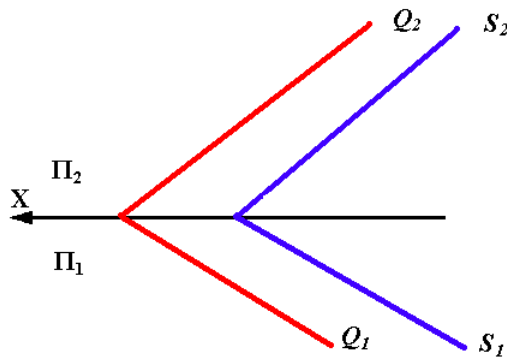


Рисунок 51

### 6.3 Побудова перпендикуляра до площин загального положення

Перпендикуляр до площини перпендикулярний до будь-якої прямої, проведеної у цій площині. Але, щоб на епюрі проекція перпендикуляра до площини загального положення була перпендикулярною до однойменної проекції будь-якої прямої цієї площини, пряма повинна бути або горизонталлю або фронталлю, або профільною прямою площини. Тому для побудови перпендикуляра  $\ell$  до площини беруться, у загальному випадку, дві такі прямі, як, наприклад, горизонталь і фронталь (рис. 52).

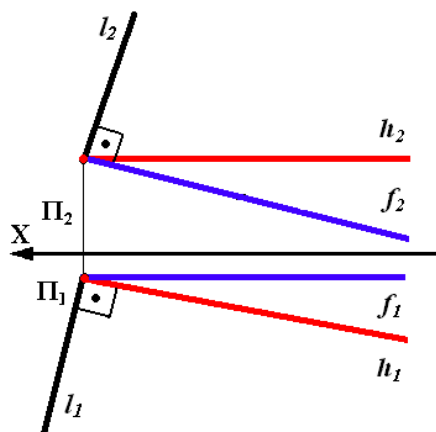


Рисунок 52

На рис. 53 маємо епюру побудови перпендикуляра  $m$  із точки  $M$  до площини, заданої  $\triangle ABC$ .

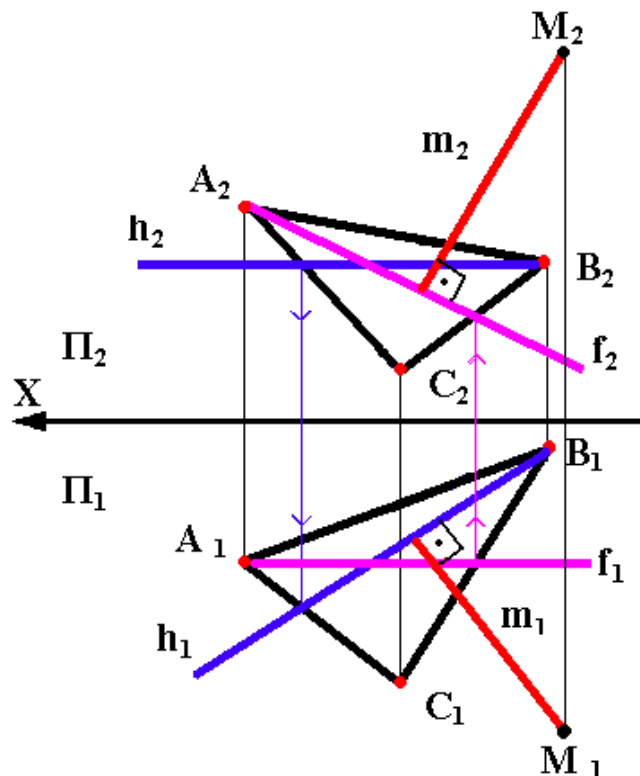


Рисунок 53

#### 6.4 Заміна площин проєкцій (проєкціювання на додаткову площину проєкцій)

Для отримання зображення геометричного образу в особливому положенні вводиться додаткова площина, перпендикулярна до однієї з площин проєкцій.

Таблиця 2 – Використання способу заміни площин проєкцій для розв'язання графічних задач

Графічні побудови	Кількість додаткових площин проєкцій
1 Перетворення прямої загального положення: а) у пряму рівня (знаходження дійсної величини відрізка прямої і кутів її нахилу до площини проєкцій); б) у проєкціювальну пряму (знаходження відстані між двома прямими паралельними або перехресними: двогранного кута, утвореного двома перетинними площинами)	Одна  Дві
2 Перетворення площини загального положення: а) у площини рівня (знаходження дійсної величини плоскої фігури); б) у проєкціювальну площину (знаходження кутів нахилу площини до площин проєкцій, відстань від точки до площини)	Дві  Одна

Розглянемо суть способу на прикладі проєкціювання точки (рис. 54).

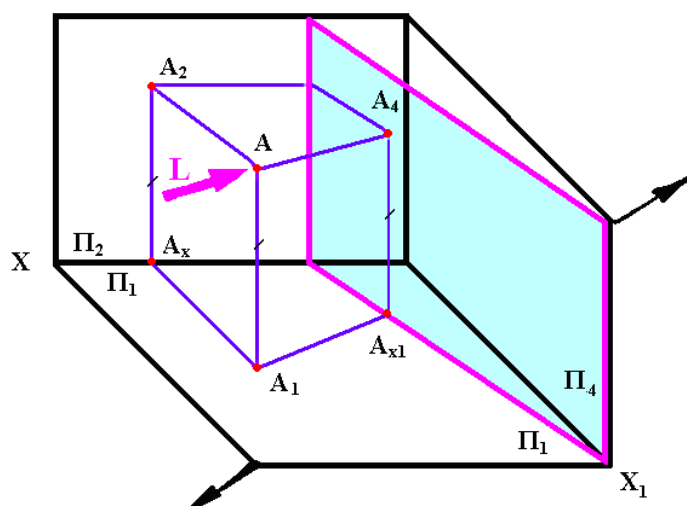


Рисунок 54

Маємо точку  $A$ , координатні площини  $\Pi_1, \Pi_2$ . Точка  $A$  задана проєкціями  $A_1$  та  $A_2$  у системі площин проєкцій  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ . Треба побудувати проєкцію  $A_4$  на додаткову площину  $\Pi_4$ .

Проведемо додаткову площину проєкцій  $\Pi_4$ ;  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ , яка замінить площину проєкцій  $\Pi_2$ .

Точку  $A$  проєкціюємо на взаємно перпендикулярні площини проєкцій. У просторі утворюються паралелограми, у яких протилежні сторони рівні:

$$[A_2 A_x] = [A A_1] = [A_4 A_{x1}].$$

Координата на додатковій площині проєкцій дорівнює координаті на заміненій площині:

$$[A_4 A_{x1}] = [A_2 A_x].$$

Після суміщення трьох площин проєкцій із однією площиною утворюється епюра (рис. 55).

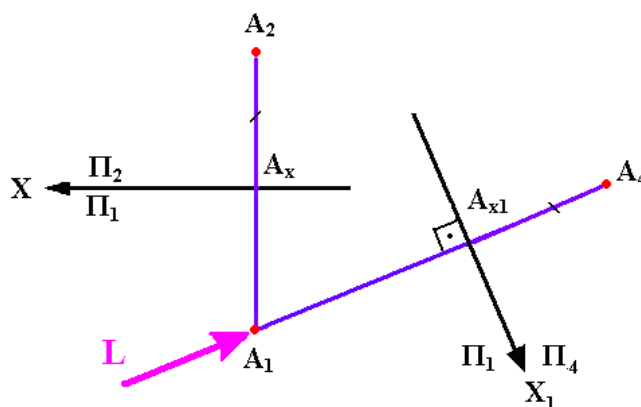


Рисунок 55

### Алгоритм побудови

- 1 Перейдемо від системи  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  до  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ . Проведемо вісь  $x_1 \perp S$ .
- 2 З точки  $A_1$  проведемо лінію зв'язку перпендикулярно до осі  $x_1$ , відмітимо точку  $A_{x_1}$ .
- 3 На продовженні лінії зв'язку відкладаємо відрізок  $A_4A_{x_1} = A_2A_x$ . Точка  $A_4$  – проекція точки на додатковій площині.

### 6.5 Знаходження натуральної величини відрізка прямої проєкціюванням на додаткову площину проєкцій

Для знаходження дійсної величини відрізка прямої додаткову площину проєкцій розташовують паралельно відрізку (рис. 56).

Під час перетворення прямої рівня в проєкціювальну пряму додаткова площина проєкцій розташовується перпендикулярно прямій рівня.

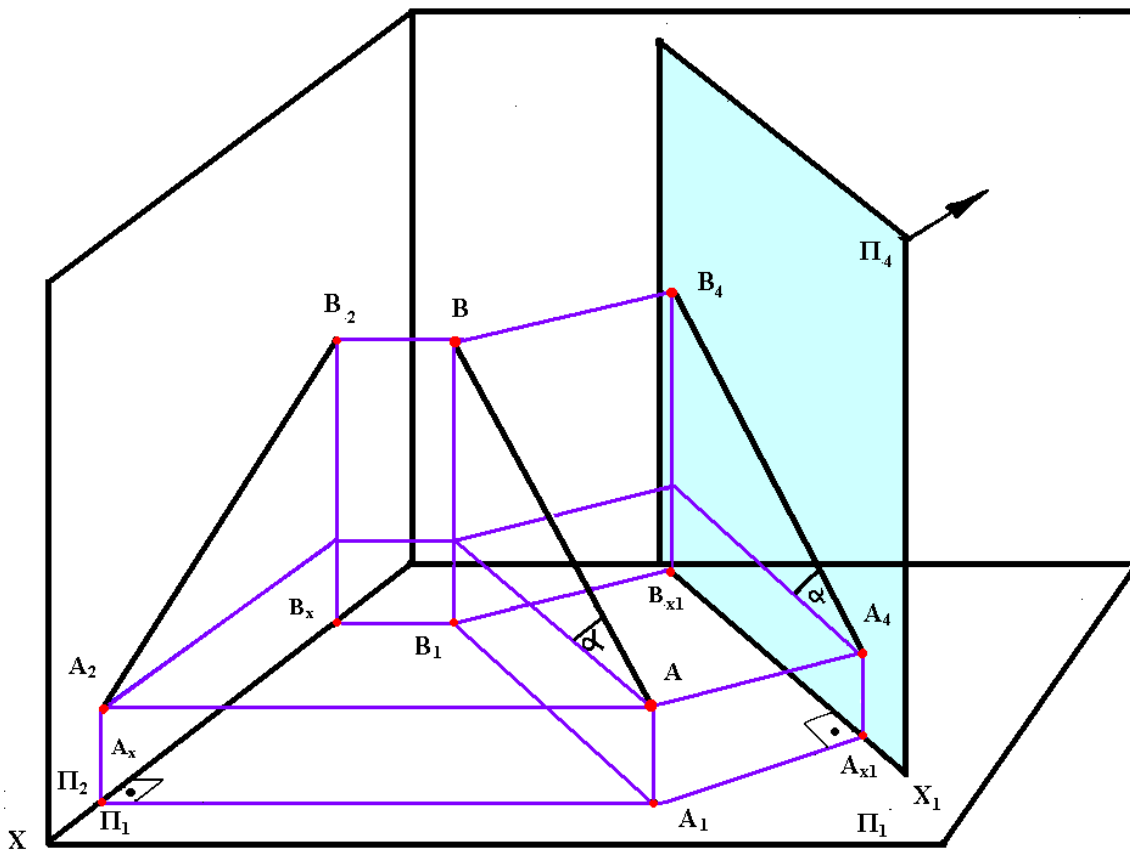


Рисунок 56

### Алгоритм побудови

1-й етап

- 1 Замінімо  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ , де  $\Pi_4 \parallel [AB]$ ;  $x_1 \parallel [A_1B_1]$ .
- 2 Проведемо лінії зв'язку  $[A_1A_{x_1}] \perp x_1$ ;  $[B_1B_{x_1}] \perp x_1$ .
- 3 Відкладемо  $[A_4A_{x_1}] = [A_2A_x]$ ;  $[B_4B_{x_1}] = [B_2B_x]$ .

4 Отримаємо:  $[A_4B_4] = |AB|$  – дійсну величину відрізка.

Якщо потрібно отримати пряму АВ у якості проекцію вальної, потрібно перейти до другого етапу (рис. 57).

2-й етап

1 Замінімо  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ , де  $\Pi_5 \perp [AB]$ ;  $x_2 \perp [A_4B_4]$ .

2 Проведемо лінії зв'язку  $[A_4A_{x2}] \perp x_2$ .

3 Відкладемо  $[A_5A_{x2}] = [A_1A_{x1}]$ .

4 Отримаємо  $A_5B_5 \perp \Pi_5$ ; проекціювальну пряму АВ у системі  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ .

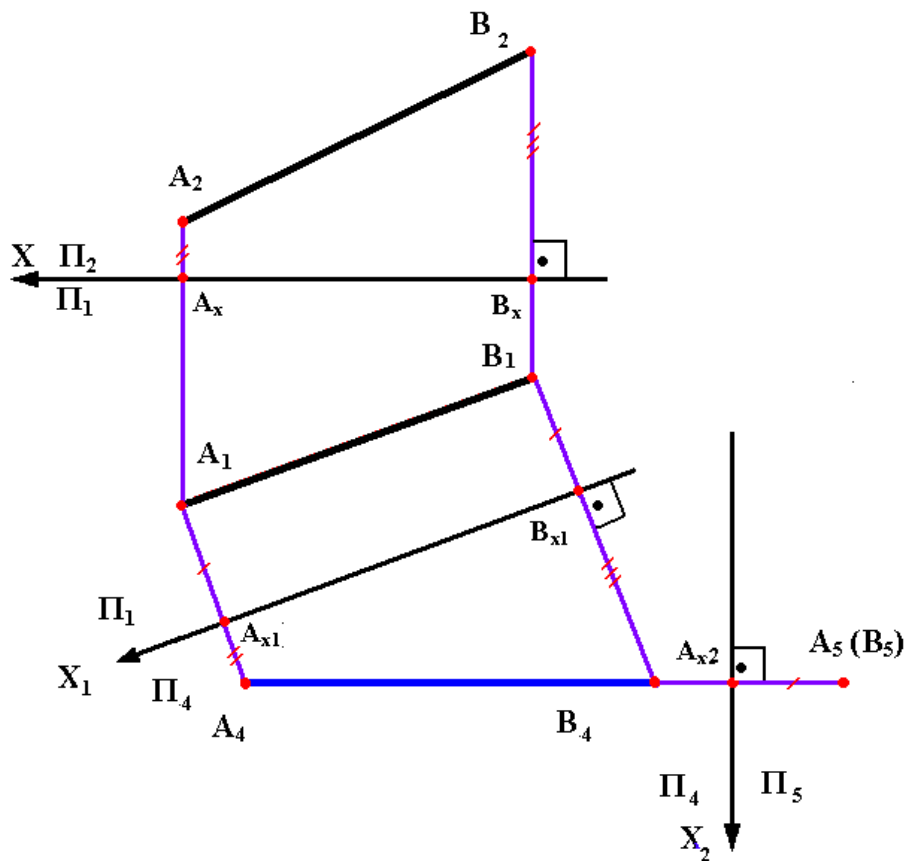


Рисунок 57

### 6.6 Знаходження натуральної величини плоскої фігури проєкціюванням на додаткову площину проєкцій

Дійсна величина плоскої фігури, що займає загальне положення, знаходимо шляхом введення двох додаткових площин, проєкцій.

При введенні першої додаткової площини проєкцій площину загального положення перетворюємо у проєкціювальну. При введенні другої додаткової площини задана площина перетворюється у площину рівня. Для того, щоб площина загального положення стала проєкціювальною, вісь нової системи проєкцій повинна бути перпендикулярною до горизонтальної проєкції горизонталі або перпендикулярною до фронтальної проєкції фронталі.

Дано: пл. (ABC) загального положення.  
 Побудувати: дійсну величину пл. (ABC).

### Алгоритм побудови

1-й етап (рис. 58)

- 1 Проводимо  $h_2 \parallel oX$ ;  $h_2 \rightarrow h_1$ .
- 2 Замінюємо  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ ;  $\Pi_4 \perp$  пл. (ABC)  $\Pi_4 \perp h$ ;  $x_1 \perp h_1$ .
- 3 Проводимо лінії зв'язку  $[B_1B_{x1}]$ ;  $[A_1A_{x1}] \perp x_1$ ;  $[C_1C_{x1}] \perp x_1$ .
- 4 Відкладаємо  $B_{x1}B_4 = B_2B_x$ ;  $A_{x1}A_4 = A_2A_x$ ;  $C_{x1}C_4 = C_2C_x$ .
- 5 Отримуємо  $C_4A_4B_4$  – проекцію проекціовальної площини.

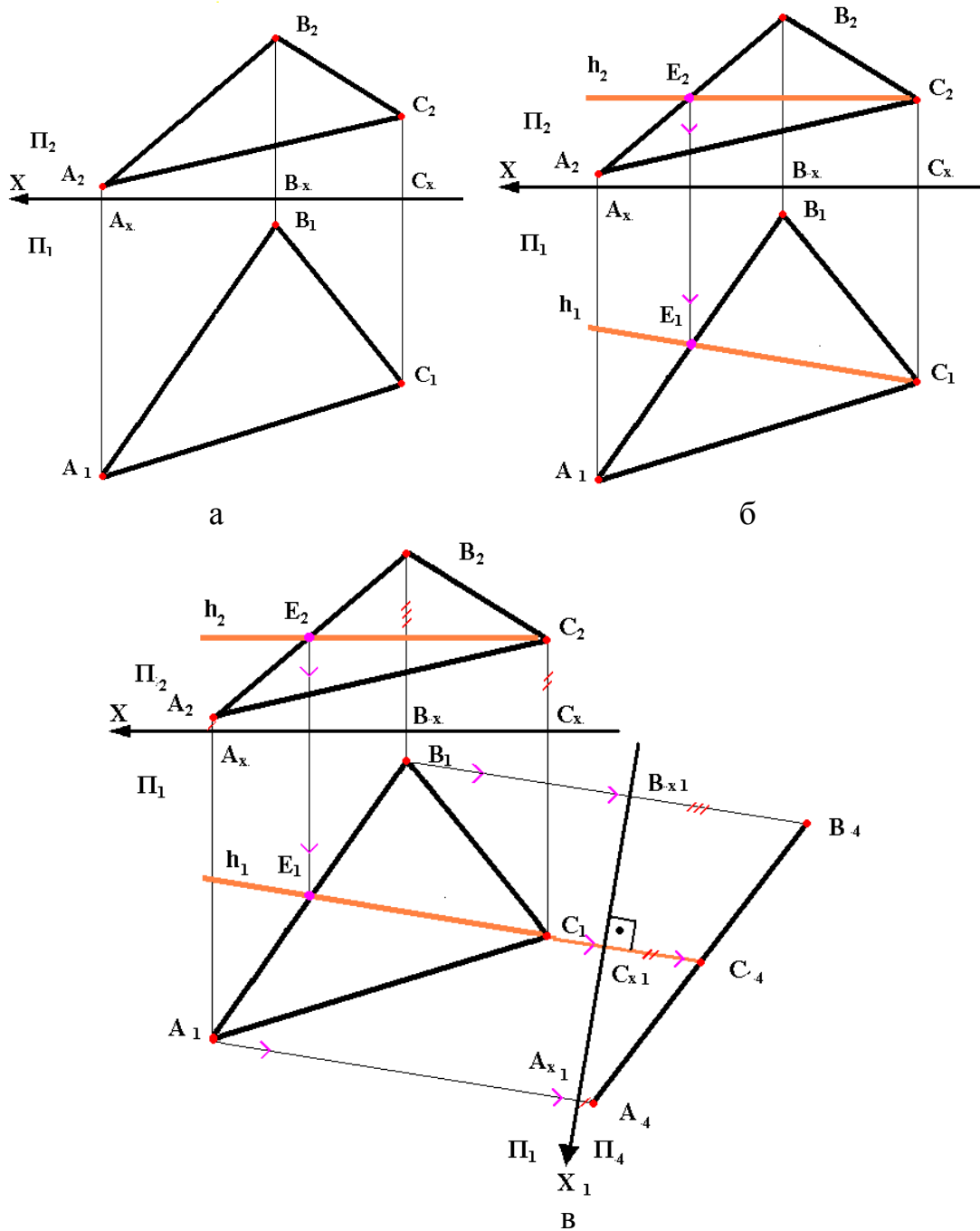


Рисунок 58

2-й етап (рис. 59)

1 Замінюємо  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow \frac{\Pi_5}{\Pi_4}$ ;  $\Pi_5 \parallel \text{пл. } (ABC)$ ;  $x_2 \parallel (C_4A_4B_4)$ .

2 Проводимо лінії зв'язку  $[B_4B_{x2}] \perp x_2$ ;  $[A_4A_{x2}] \perp x_2$ ;  $[C_4C_{x2}] \perp x_2$ .

3 Відкладаємо  $B_{x2}B_5 = B_1B_{x1}$ ;  $A_{x2}A_5 = A_1A_{x1}$ ;  $C_{x2}C_5 = C_1C_{x1}$ .

4 Отримуємо  $A_5B_5C_5$  – проєкцію площини рівня, паралельну додатковій площині.

$A_5B_5C_5 = |ABC|$  – натуральна величина трикутника.

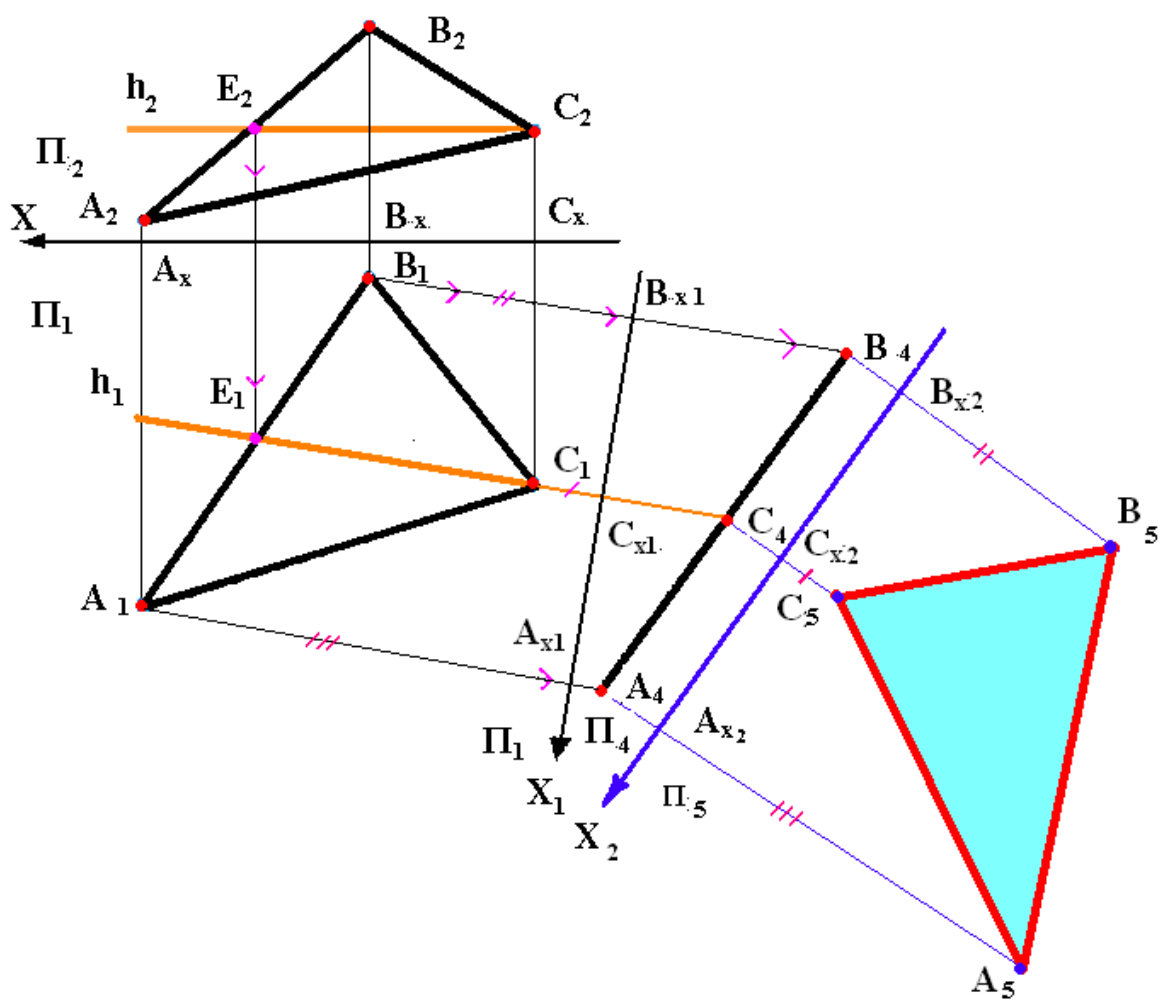


Рисунок 59

## 7 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

АксонOMETРИЧНОЮ проекцією називається зображення предмета на одній площині проекцій разом із системою прямокутних осей координат, до яких відноситься предмет.

На рис. 60 точка  $A$  разом із прямокутною системою координат спроектована в напрямку  $S$  на аксонометричну площину проекцій  $P$ .

Значення  $l_{x_0}, l_{y_0}, l_{z_0}$  залежать від розташування площини  $P$  у відношенні до просторової системи координат і напрямку проєкціювання.

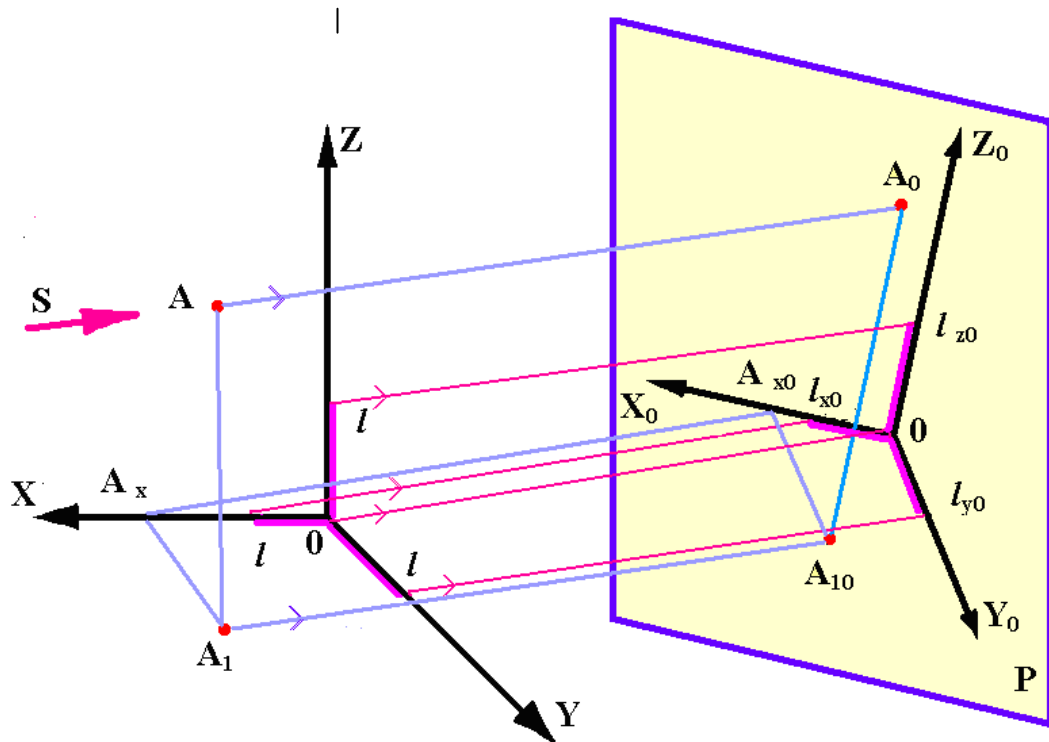
Коефіцієнтом або показником спотворення називається відношення аксонометричної проекції відрізка, паралельного осі координат, до його дійсної величини.

У залежності від напрямку проєкціювання проекції розділяються на:

- 1) прямокутні, якщо  $S \perp P$ ;
- 2) косокутні, якщо  $S$  не перпендикулярна  $P$ .

У залежності від відношення коефіцієнтів спотворення аксонометричні проекції розділяються на:

- 1) ізометричні, якщо  $k = m = n$ ;
- 2) диметричні, якщо  $k = m \neq n$ ;
- 3) триметричні, якщо  $k \neq m \neq n$ .



$P$  – площина аксонометричних проєкцій;  $OX, OY, OZ$  – осі прямокутної системи координат;  $S$  – напрям проєкціювання;  $OX_0, OY_0, OZ_0$  – аксонометричні осі;  
 $A$  – точка в просторі, віднесена до системи прямокутних осей координат;  
 $A_0$  – аксонометрична проєкція точки  $A$ ;  $OA_xA_1A$  – просторова координатна ламана лінія;  
 $OA_{x_0}A_{10}A_0$  – плоска ламана лінія;  $l$  – натуральна величина відрізка;  
 $l_{x_0}, l_{y_0}, l_{z_0}$  – аксонометричні проєкції відрізка

Рисунок 60



## 7.1 Прямокутна ізометрія

Відношення коефіцієнтів спотворення:

$$k = m = n .$$

Розрахункові коефіцієнти спотворення:

$$k_2 + m_2 + n_2 = 2 ;$$

$$3k^2 = 2 ;$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$k = m = n = 0,82 .$$

Для спрощення побудови відповідно до ГОСТ 2317-69 розрахункові коефіцієнти спотворення замінюються зведеними:

$$k = m = n = 1 .$$

При цьому аксонометричне зображення предмета виходить збільшеним у 1,22 рази:

$$\frac{1}{0,82} = 1,22 .$$

Аксонометричні осі в прямокутній ізометрії спрямовані одна до одної під кутом  $120^\circ$  (рис. 61).

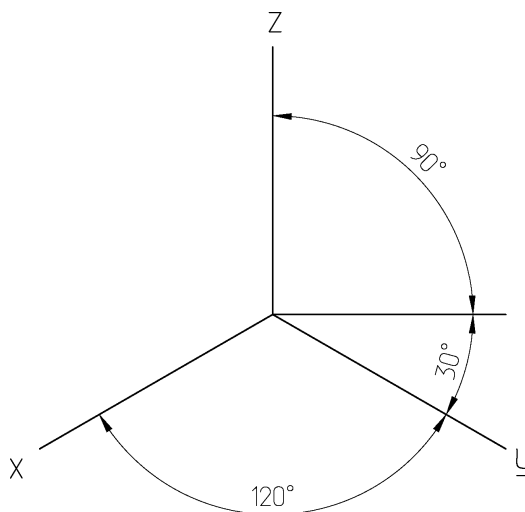


Рисунок 61

Для визначення напрямку штрихування в ізометрії на аксонометричних осях потрібно побудувати трикутник, для цього уздовж аксонометричних осей відкладаються рівні відрізки довільної довжини.

Аксонометрія кривої лінії будується за точками.

**Приклад.** Побудувати прямокутну ізометричну проекцію кривої лінії за її ортогональним кресленням (рис. 62).

Кожна точка кривої лінії знаходиться на кінці ламаної лінії. Кожна ланка ламаної лінії дорівнює відповідній координаті точки.

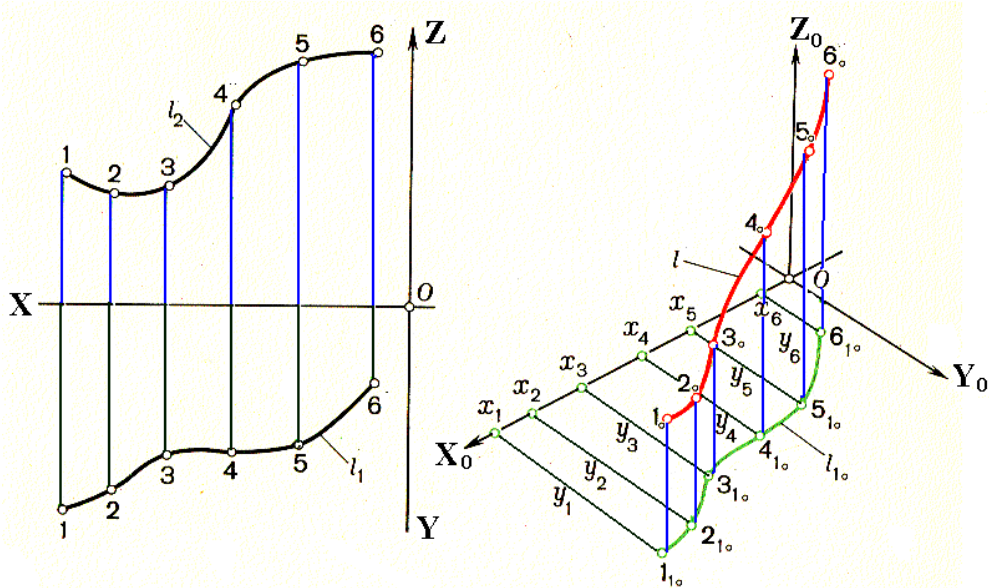


Рисунок 62

Аксонетричні проекції кіл, які лежать на площинах проекцій або на площинах, паралельних площинам проекцій, зображуються еліпсами, які набувають значення осей:

велика вісь –  $AB = 1,22d$ ;

мала вісь –  $CD = 0,7d$ .

Напрямок малої осі збігається з напрямком аксонетричної осі, перпендикулярної до площини проекцій, напрямок великої осі перпендикулярно малій осі.

**Приклад.** Побудувати прямокутну ізометрію трьох кіл, розташованих на горизонтальній, фронтальній та профільній площинах проекцій, з  $d = 30$  мм (рис. 63).

Велика вісь еліпса  $AB = 1,22d = 1,22 \times 30 = 36,6$  мм.

Мала вісь еліпса  $CD = 0,7d = 0,7 \times 30 = 21$  мм.

На напрямках, паралельних аксонетричним осям, відкладаються  $EF = d = 30$  мм.

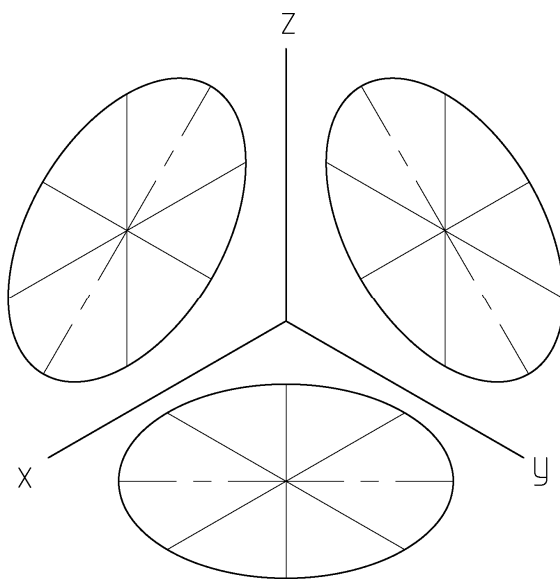


Рисунок 63

## 7.2 Прямокутна диметрія

Розрахункові коефіцієнти спотворення :

$$k = n = 0,94;$$
$$m = \frac{k}{2} = \frac{0,94}{2} = 0,47.$$

Зведені коефіцієнти спотворення:

$$k = n = 1; m = \frac{k}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

При використанні зведених коефіцієнтів спотворення зображення предмета одержується збільшеним у 1,06 рази ( $\frac{1}{0,94} = 1,06$ ).

Аксонетричні осі в прямокутній диметрії розташовані під кутами  $7^{\circ}10'$  і  $41^{\circ}25'$  до горизонталі (рис. 64).

Аксонетричні проекції кіл (рис.65), розташованих на площинах проекцій або на площинах, паралельних площинам проекцій, зображуються еліпсами, які набувають значення осей:

велика вісь  $AB = 1,06d$  – для всіх площин проекцій;

мала вісь  $CD = 0,35d$  – для горизонтальної і профільної площин проекцій;

мала вісь  $C_1D_1 = 0,94d$  – для фронтальної площини проекцій.

На напрямках паралельних аксонетричним осям, відкладаються  $EF \parallel ox_0$  і  $EF \parallel 0Z_0$  і  $EF = d$ ;  $E_1F_1 \parallel oy_0 = 0,5d$ .

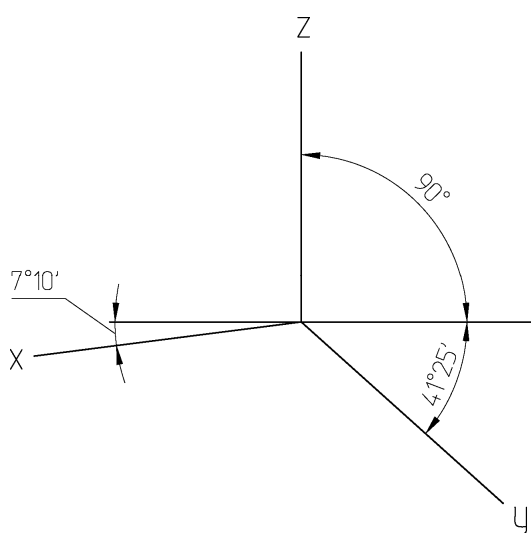


Рисунок 64

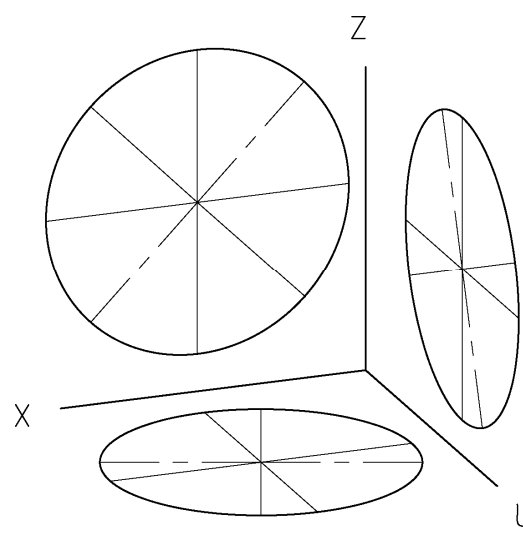


Рисунок 65

## 8 ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

### 8.1 Розрахунково-графічна робота 1

#### Завдання

У розрахунково-графічній роботі необхідно:

- 1) визначити відстань від точки D до площини, утвореної трикутником ABC;
- 2) побудувати точку, симетричну точці D відносно площини трикутника;
- 3) визначити площу трикутника ABC.

#### Вихідні дані

За умовою студенту задаються координати точок A, B, C, D, вимірювані в міліметрах.

Наприклад:

	X	Y	Z
A	50	140	200
B	100	160	300
C	200	150	50
D	150	30	40

Розрахунково-графічна робота (РГР) виконується на аркуші ватману формату А3, який розташовується вертикально. На аркуші виконується рамка та основний напис. Графи основного напису заповнюються в останню чергу (рис. 66).

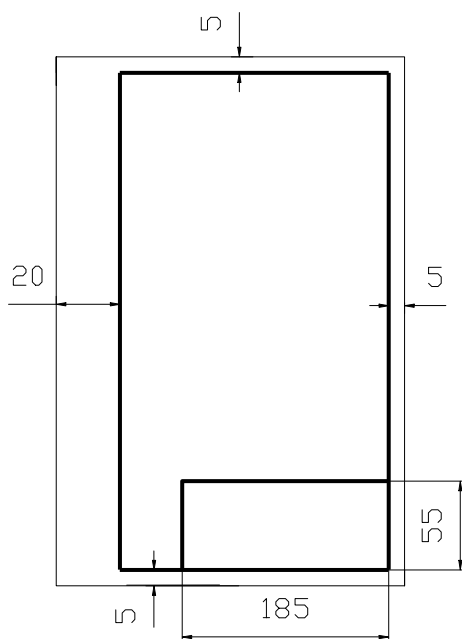


Рисунок 66

#### Виконання РГР 1

Представимо умову РГР у графічному вигляді, для чого побудуємо за координатами трикутник ABC і точку D.

Введемо систему координат. Початок координат вибирається так:

а) визначимо найбільші для заданих за завданням точок координати X та Y ( $X_{\max}$  і  $Z_{\max}$ ). У прикладі наведених вище вихідних даних це:  $X_C = 200$  мм і  $Z_B = 300$  мм;

б) від лівого краю рамки відступимо ( $X_{\max} + 10$  мм) і проведемо горизонтальну лінію;

в) від верхнього краю рамки відступимо ( $Z_{\max} + 10$  мм) і проведемо вертикальну лінію. Точка перетину проведених ліній є початком координат.

Будь-яка точка будується на епюрі за координатами (рис. 67).

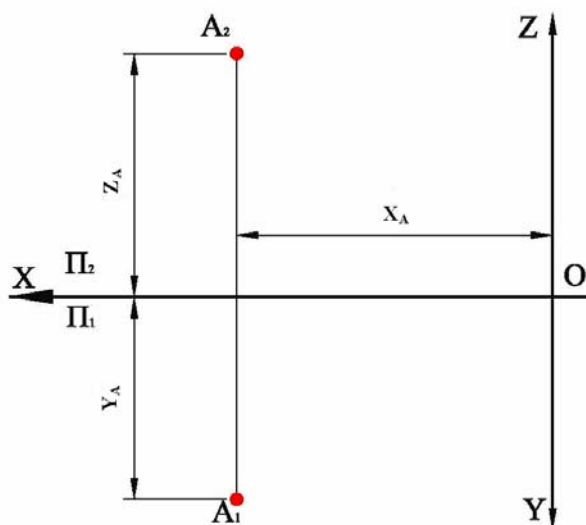


Рисунок 67

Побудувавши проекції всіх точок, одержуємо умову РГР у графічному вигляді (рис. 68).

#### 1 Загальний метод

Для того щоб визначити відстань від точки до площини трикутника ABC, потрібно знати такі положення:

а) відстань від точки до площини визначається довжиною перпендикуляра, опущеного з точки на площину;

б) перпендикуляр проводиться з відповідних проекцій точки перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі і перпендикулярно фронтальній проекції фронталі;

в) перпендикуляр перетинає площину в точці K, яку потрібно знайти;

г) знайшовши точку перетину, одержимо дві проекції відрізка, що має натуральним розміром відстань від точки до площини;

д) натуральну величину визначеного відрізка можна знайти методом прямокутного трикутника.

У площині, заданій трикутником ABC (рис. 68), необхідно побудувати горизонталь і фронталь (рис. 69). Горизонталь і фронталь можна побудувати, використовуючи довільні точки трикутника, але очевидним є використання для побудови однієї з проекцій вершин трикутника (див. рис. 69). Відповідно до положення будуюмо проекції.

Знайдемо точку перетину перпендикуляра та площини, що задана трикутником ABC (рис. 70). На даному етапі виконання побудов зводиться до знаходження точки перетину прямої та площини загального положення. Як допоміжну площину, у яку заключаємо перпендикуляр  $l$ , використовуємо фронтально проекціювальну площину, однак рівнозначним є також застосування горизонтально проекціювальної площини, (рис. 71).

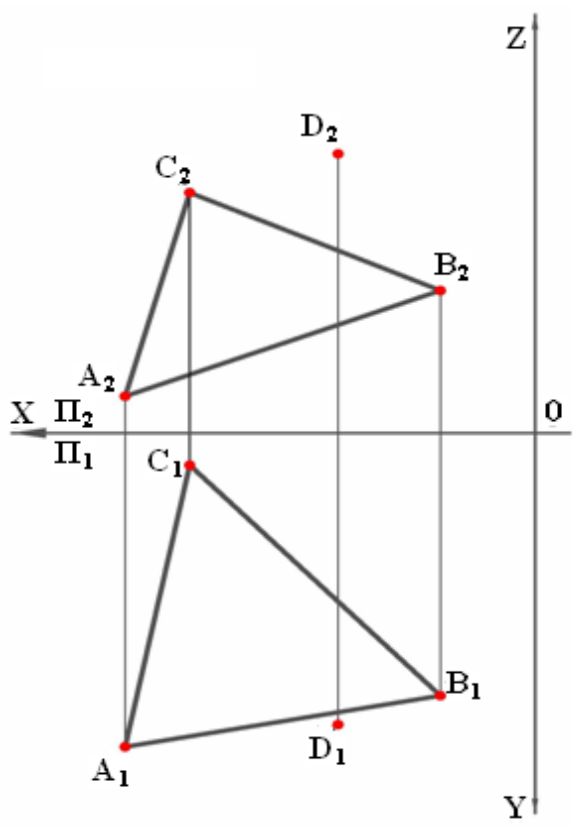


Рисунок 68

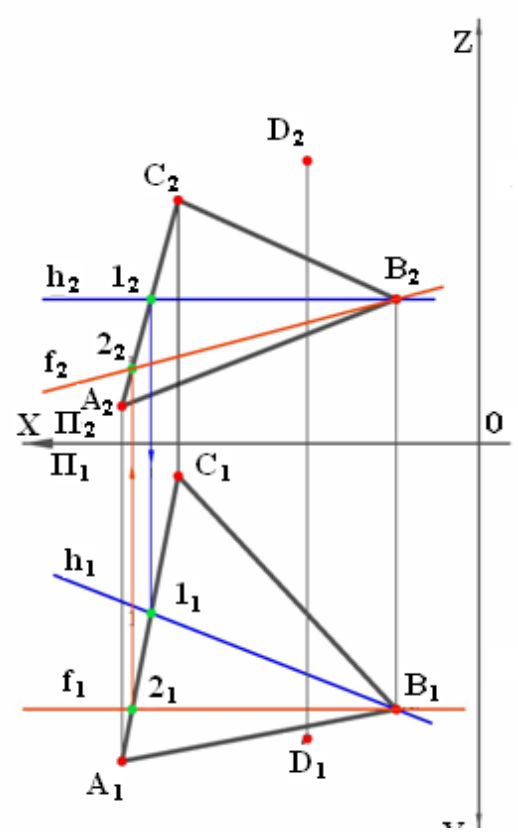


Рисунок 69

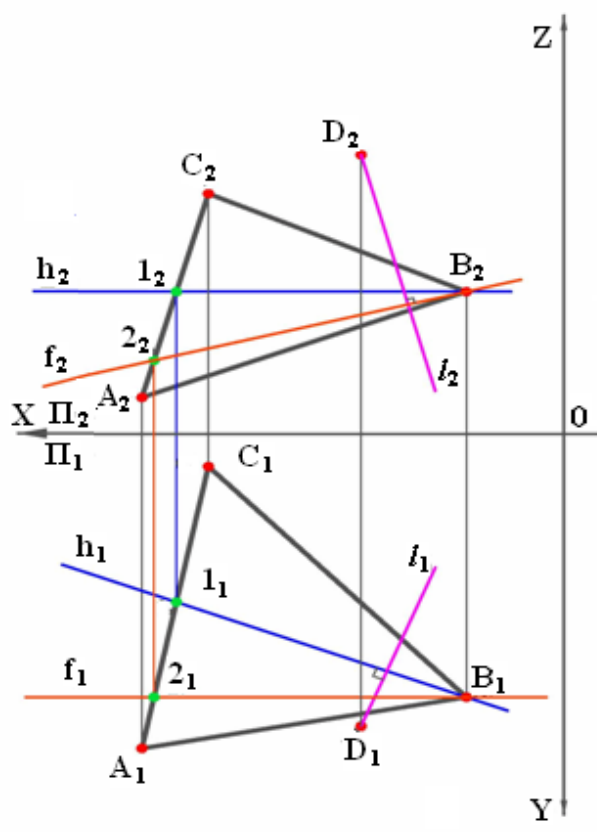


Рисунок 70

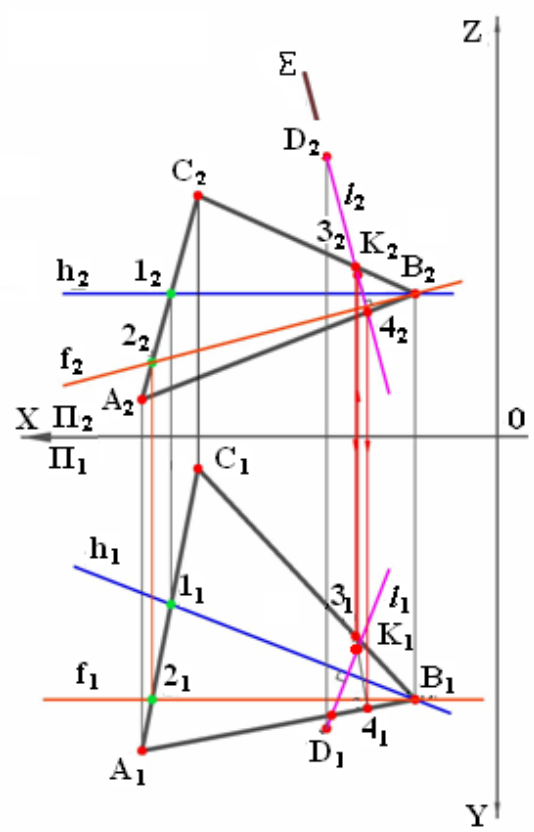


Рисунок 71

Одержавши дві проекції відрізка DK, знаходимо його натуральну величину, використовуючи метод прямокутного трикутника. Для спрощення на рис. 72 усі попередні побудови не показані. Більш докладний опис методу прямокутного трикутника можна знайти в конспекті лекцій і навчальній літературі [1].

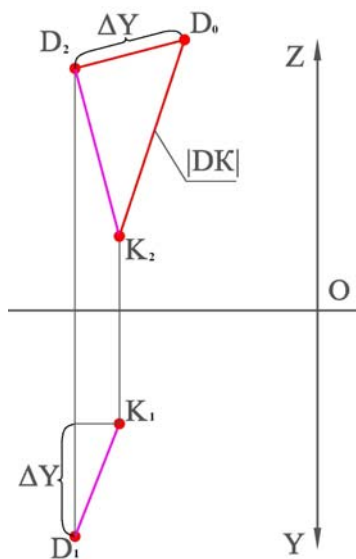


Рисунок 72

Щоб одержати точку M, симетричну точці D відносно площини трикутника ABC, відкладемо на проекціях перпендикуляру від проекцій точки K відрізки, у яких проекції точки K будуть точками симетрії:

$$K_1M_1 = D_1K_1; K_2M_2 = D_2K_2.$$

Результат повного виконання роботи наведено на рис. 73.

Визначення площі трикутника ABC у РГР здійснюється методом перетворення креслення – способом заміни площин проекцій. Методом перетворення креслення також визначаємо в другій частині роботи відстань від точки D до площини трикутника ABC.

## 2 Спосіб заміни площин

Для того щоб визначити відстань від точки до заданої умовою площини способом заміни площин проекцій, потрібно перетворити креслення таким чином, щоб площина, задана трикутником ABC, стала проекціювальною відносно нової площини. Після цього для визначення площі трикутника ABC необхідно виконати ще одну заміну площин, задавши нову площину проекцій  $\Pi_5$  паралельну до заданої умовою площини. Перш ніж почати перетворення, згадаємо схему проєкціювання будь-якої точки на  $\Pi_4$  і  $\Pi_5$  (рис. 53, 54).

Для задання площини  $\Pi_4$  проведемо в площині трикутника ABC горизонталь h, тоді перпендикулярність  $\Pi_4$  до заданої площини буде визначена перпендикулярністю її до горизонталі. Відповідно, за правилом проєкціювання прямого кута, вісь перетину площин  $\Pi_1$  та  $\Pi_4$  слід задавати перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі:  $X_1 \perp h_1$ . Після проведення ліній зв'язку з горизонтальних проєкцій точок перпендикулярно до  $X_1$  проєкції на  $\Pi_4$  знаходимо, беручи координати точок з площини, яку замінюємо, тобто з  $\Pi_2$ :  $A_{x1}A_4 = A_2A_x$ ;  $B_{x1}B_4 = B_2B_x$  і т. д.

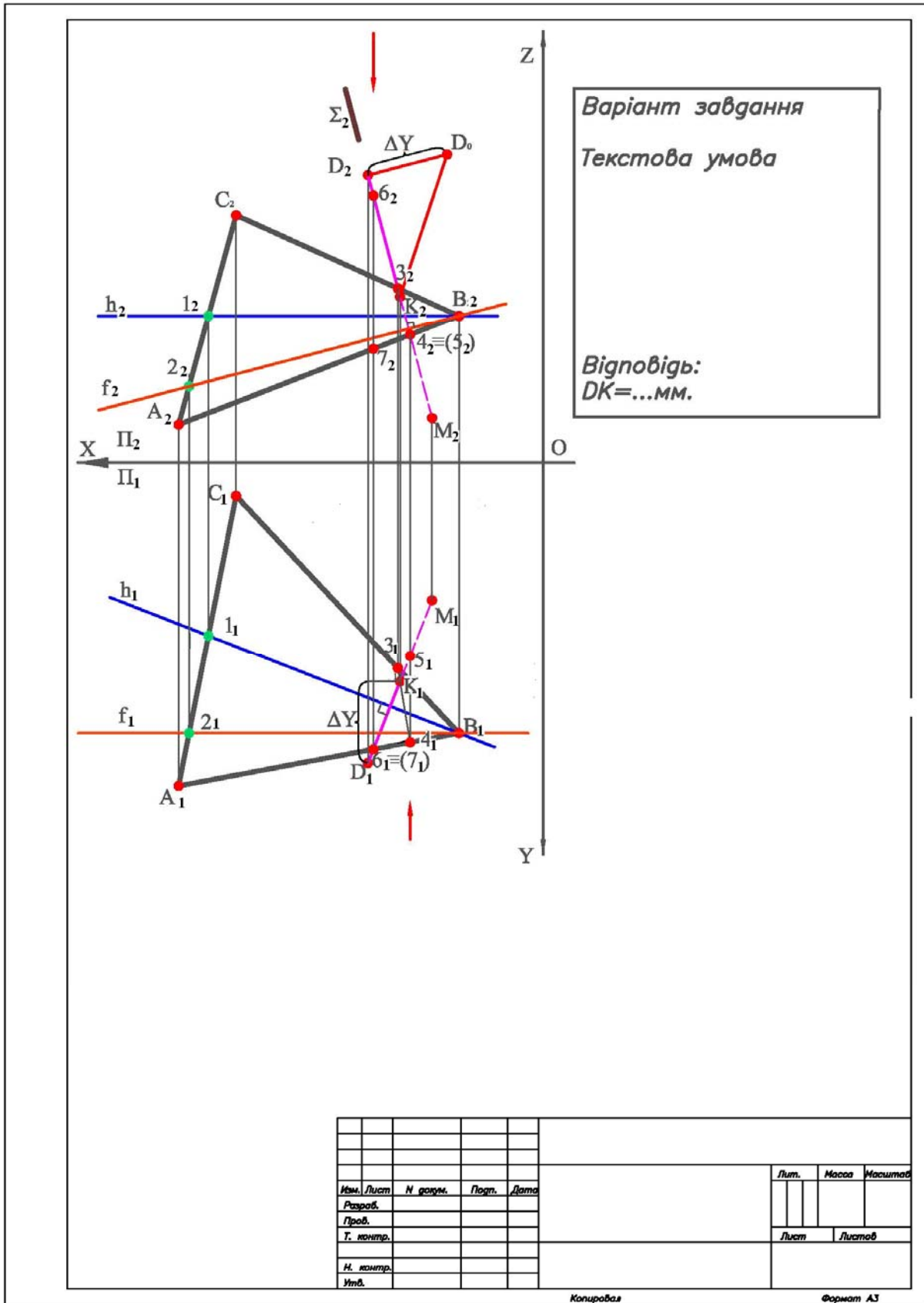


Рисунок 73

Перевіркою правильності побудов на даному етапі є розташування проєкцій  $A_4B_4$  та  $C_4$  на одній прямій, яка є слідом заданої площини на  $\Pi_4$ . При цьому відстань від точки  $D$  до площини трикутника  $ABC$  визначається за перпендикуляром, проведеним



з  $D_4$  до сліду  $A_4B_4C_4$ , і дорівнює довжині відрізка  $D_4K_4$  (рис. 74) ( $K$  – точка перетину перпендикуляра з площиною трикутника  $ABC$ ). Для одержання точки  $M$ , симетричної точці  $D$  відносно площини трикутника  $ABC$ , слід задати положення проєкції  $M_4$  симетрично до  $D_4$  відносно сліду  $A_4B_4C_4$ , тобто  $M_4K_4 = D_4K_4$ .

При побудові проєкції перпендикуляра  $DK$  на горизонтальній площині проєкцій необхідно використати правило проєціювання прямого кута ( $DK \perp (\square A_4B_4C_4) \Rightarrow D_1K_1 \perp h_1$ ). Проєкція точки  $K$  на  $\Pi_2$  знаходиться зворотним перенесенням координат із площини  $\Pi_4$ :  $K_2K_x = K_{x1}K_4$ . (рис. 75). Для знаходження площі трикутника  $ABC$  введемо нову площину  $\Pi_5$ , перпендикулярну до  $\Pi_4$  та паралельну площині трикутника  $ABC$ . Проєціювання точок трикутника на  $\Pi_5$  відбувається аналогічно побудові проєкцій на  $\Pi_4$  перенесенням координат з площини, що замінюється:  $A_{x2}A_5 = A_1A_{x1}$ ;  $B_{x2}B_5 = B_1B_{x1}$  і т. д.. Одержуємо проєкцію трикутника, яка відповідає його натуральному вигляду (рис. 76). Обчислення площі виконується за формулами шкільного курсу геометрії: як половина перемноження основи трикутника на його висоту або за формулою Герона.

Останнім етапом роботи є перевірка правильності виконання РГР шляхом звірення результатів, отриманих обома способами, і оформлення основного напису за ГОСТ 2.104-68. Приклад виконаної роботи наведено на рис. 77.

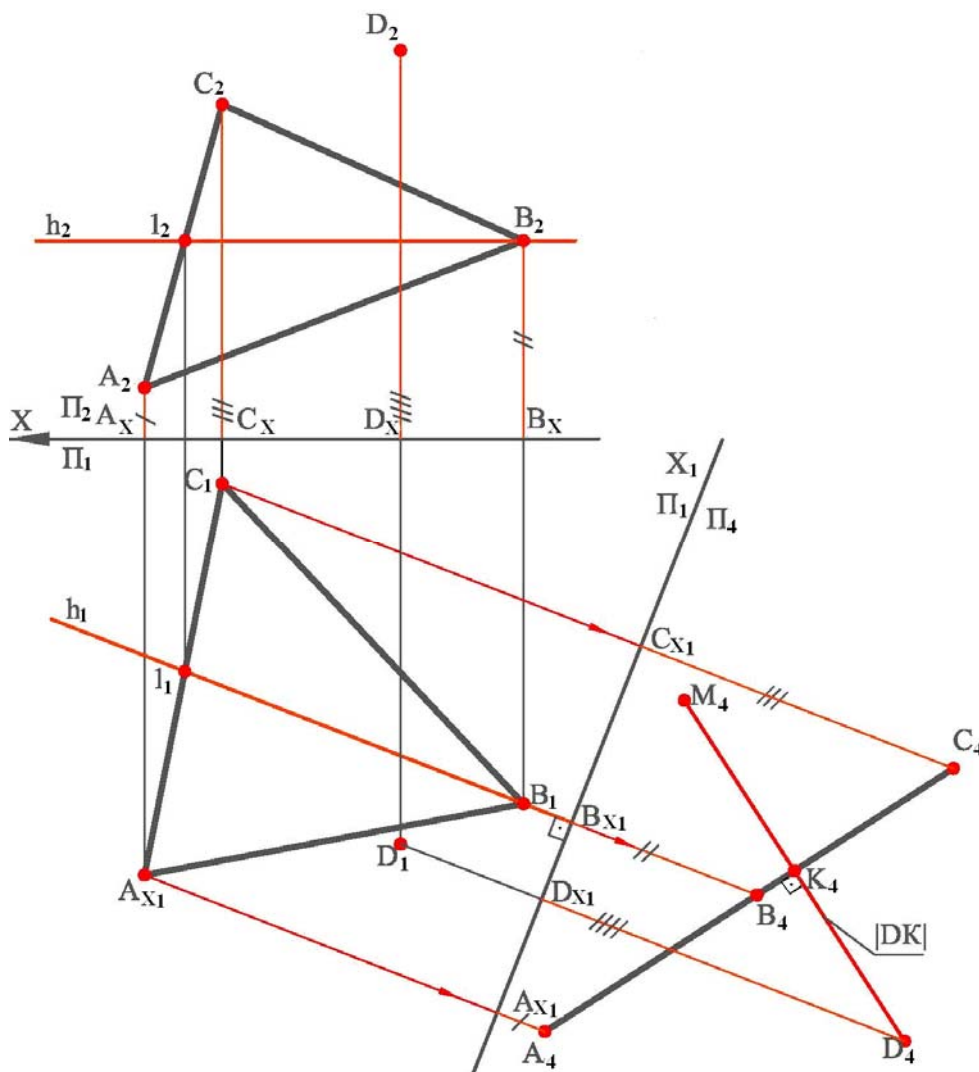


Рисунок 74

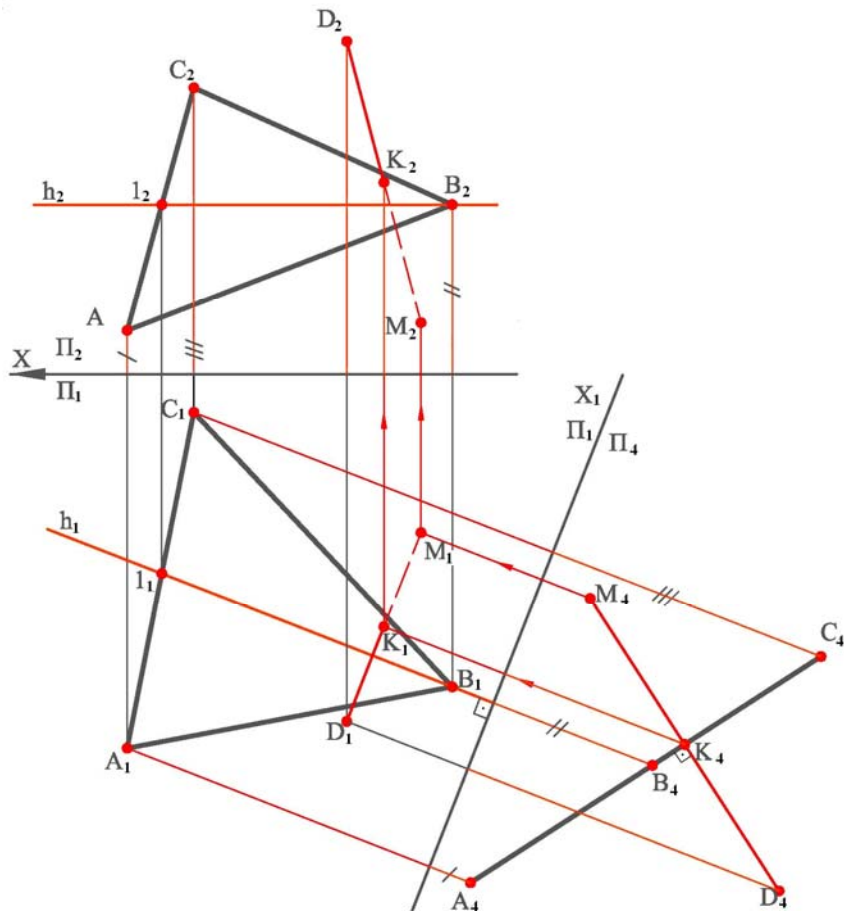


Рисунок 75

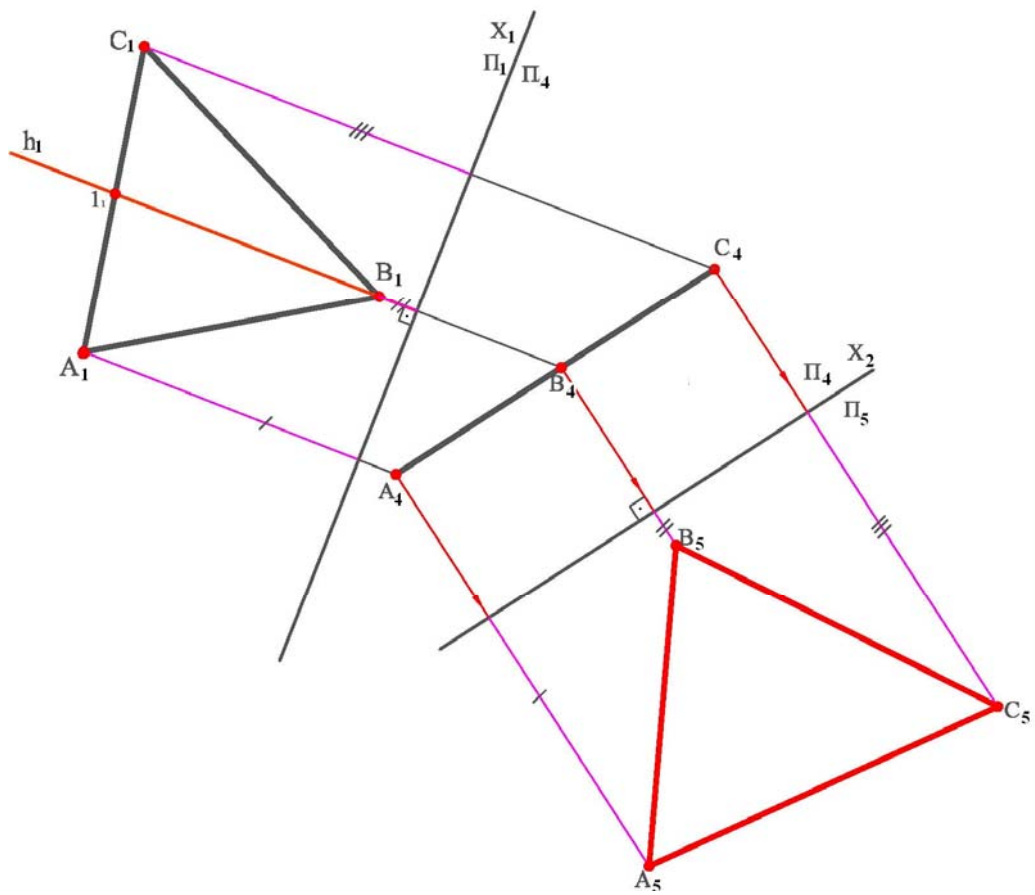


Рисунок 76

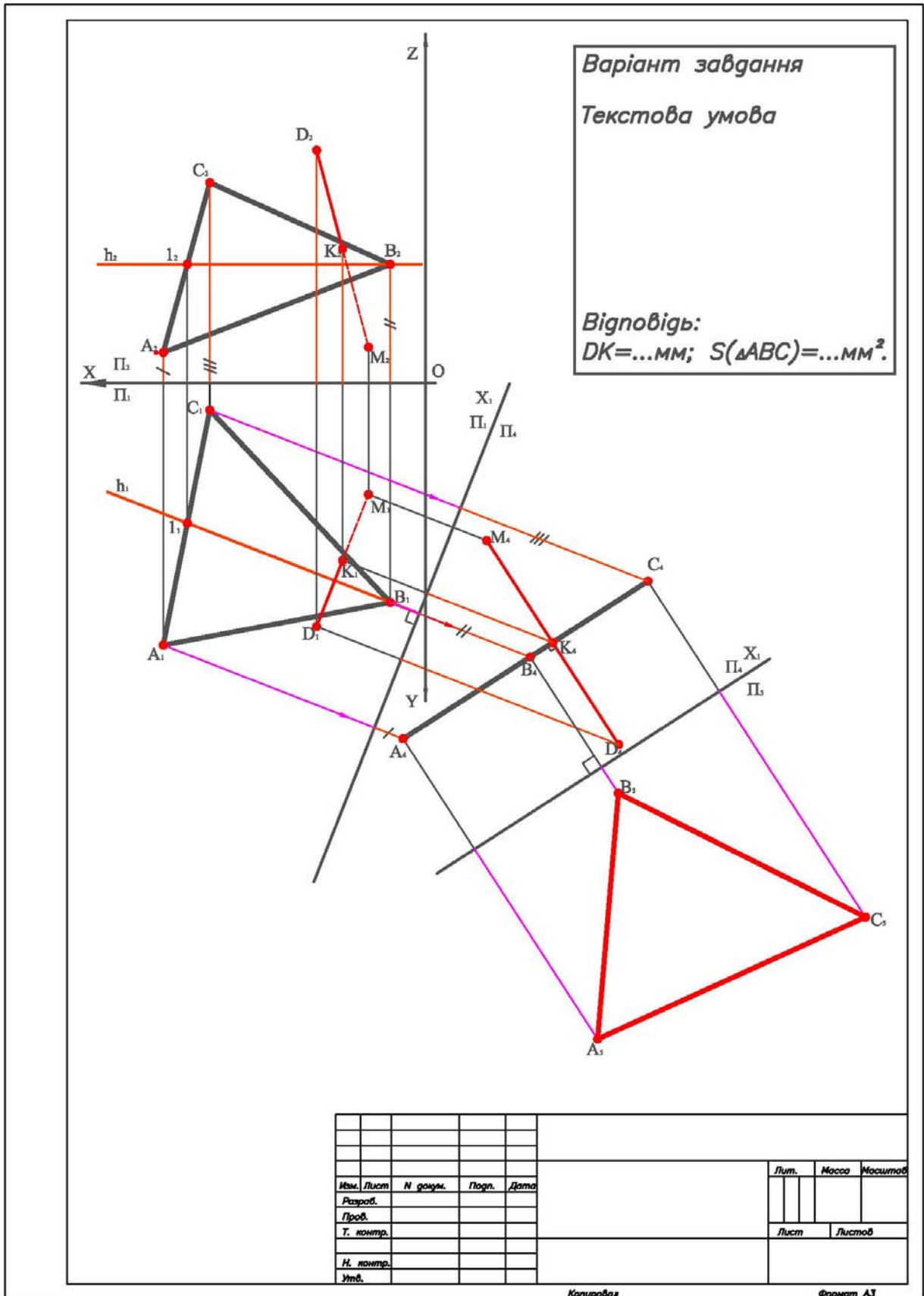


Рисунок 77

Таблиця 3 – Варіанти завдань РГР 1

№п/п	Точка	X	Y	Z
1	2	3	4	5
1	A	115	32	45
	B	74	4	140
	C	25	114	22
	D	105	61	130
2	A	108	46	50
	B	62	13	131
	C	15	98	20
	D	91	77	124
3	A	109	36	46
	B	61	13	128
	C	11	109	25
	D	105	79	134
4	A	103	47	48
	B	71	10	131
	C	25	113	23
	D	97	65	139
5	A	101	41	41
	B	72	5	131
	C	21	108	28
	D	92	70	134
6	A	111	45	37
	B	64	8	139
	C	12	99	18
	D	92	63	131
7	A	116	41	36
	B	76	6	137
	C	20	113	26
	D	107	62	138
8	A	113	44	40
	B	70	2	144
	C	18	117	27
	D	105	79	131
9	A	112	50	40
	B	61	2	127
	C	15	111	19
	D	106	76	127
10	A	112	41	47
	B	64	13	134
	C	18	101	15
	D	97	79	128
11	A	117	39	47
	B	64	2	140
	C	12	114	25
	D	97	68	120
12	A	110	38	49
	B	59	11	137
	C	19	99	14
	D	107	67	125
13	A	110	41	47
	B	65	1	128
	C	11	117	9
	D	94	72	136
14	A	101	32	50
	B	59	2	125
	C	21	98	13
	D	90	70	120
15	A	103	31	49
	B	68	3	132
	C	17	115	28
	D	91	66	139

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5
16	A	98	38	35
	B	72	5	135
	C	22	103	25
	D	100	65	136
17	A	113	37	35
	B	61	14	137
	C	29	105	14
	D	93	66	120
18	A	111	47	50
	B	68	13	130
	C	14	116	21
	D	98	67	127
19	A	104	41	35
	B	57	0	133
	C	13	101	22
	D	93	74	132
20	A	9	33	38
	B	61	5	128
	C	13	107	17
	D	95	68	137
21	A	108	48	44
	B	66	5	141
	C	26	109	28
	D	97	62	123
22	A	111	50	52
	B	68	1	132
	C	15	99	26
	D	101	67	133
23	A	101	46	41
	B	58	2	127
	C	17	99	27
24	D	103	70	135
	A	103	41	48
	B	70	8	126
	C	18	111	15
	D	104	78	136
25	A	114	38	49
	B	63	14	138
	C	16	98	13
	D	88	65	137
26	A	117	47	37
	B	72	3	141
	C	24	100	9
	D	89	66	135
27	A	109	44	35
	B	61	12	127
	C	29	107	14
	D	92	79	137
28	A	102	36	41
	B	73	7	129
	C	27	102	17
	D	95	67	133
29	A	103	43	42
	B	74	3	140
	C	23	100	26
	D	104	66	122
30	A	116	34	45
	B	73	10	132
	C	16	111	11
	D	102	66	123

## 8.2 Розрахунково-графічна робота 2

### Завдання

- 1 Побудувати лінію перетину поверхні конуса площиною, що задана трикутником АВС.
- 2 Побудувати дійсну величину перерізу.
- 3 Побудувати розгортку бічної поверхні конуса з нанесенням на ній лінії перетину поверхні конуса площиною.

У наступних вказівках наведено алгоритм виконання розрахунково-графічної роботи «Перетин поверхні конуса площиною та побудова розгортки бічної поверхні конуса».

Розрахунково-графічна робота виконується на двох аркушах паперу формату А3 (297×420 мм), аркуш розташовується вертикально. Основний напис має розміри 55×185 мм (за ГОСТ 2.104-68).

На першому аркуші виконується побудова лінії перетину поверхні конуса площиною, що задана трикутником АВС, та побудова дійсної величини перерізу. На другому аркуші виконується побудова розгортки бічної поверхні конуса з нанесенням на ній лінії перетину поверхні конуса площиною.

Графічна умова виконується студентами за індивідуальним варіантом завдання (табл. 4). У завданні задано координати точок АВС, що визначають розташування січної площини, координати вершини конуса S, радіус основи конуса R. Для перевірки та самоконтролю правильності побудови натурального вигляду перерізу в завданні наведено також розміри, що визначають велику вісь еліпса (ВВЕ) та малу вісь еліпса (МВЕ). Графічна умова виконується в лівому верхньому куті, якомога ближче до рамки (рис. 78). У правому верхньому куті розташовується текстова умова.

Під текстовою умовою записується варіант завдання. Усі написи виконуються олівцем креслярським шрифтом.

Площина, що задана трикутником, є площиною загального положення, і при такому її розташуванні побудова проєкцій лінії перетину є неможливим. Тому на першому етапі необхідно здійснити перетворення креслення методом заміни площин проєкцій (зручною є заміна площини  $\Pi_2$  новою площиною  $\Pi_4$ ). При цьому площину  $\Pi_4$  треба розташувати перпендикулярно площині трикутника. При такому перетворенні задана за завданням площина займе проєкціювальне положення відносно  $\Pi_4$ . Тому, завдяки збиральній властивості проєкціювальних площин, проєкцію лінії перетину площини з конусом слід визначати на сліді січної площини на  $\Pi_4$ .

Для здійснення перетворення креслення в площині трикутника АВС побудуємо горизонталь  $h$ . Побудову починаємо, як і в РГР 1, з проєкції  $h_2$  ( $h_2 \parallel x$ ); проєкцію  $h_1$  будуємо через проєкції точок перетину  $h$  із трикутником АВС ( $h_2$  проводимо через проєкцію однієї з вершин, знаходимо проєкцію точки перетину з протилежною стороною трикутника, далі знаходимо проєкцію цієї точки на  $\Pi_1$ ).

Перпендикулярність площини  $\Pi_4$  площині, що задана трикутником АВС, буде визначатися перпендикулярністю  $\Pi_4$  прямій  $h$ . Відповідно до правила проєкціювання прямого кута вісь  $X_1$ , яка є лінією перетину площини  $\Pi_1$  з площиною  $\Pi_4$ , слід провести перпендикулярно горизонтальній проєкції горизонталі (рис. 79).



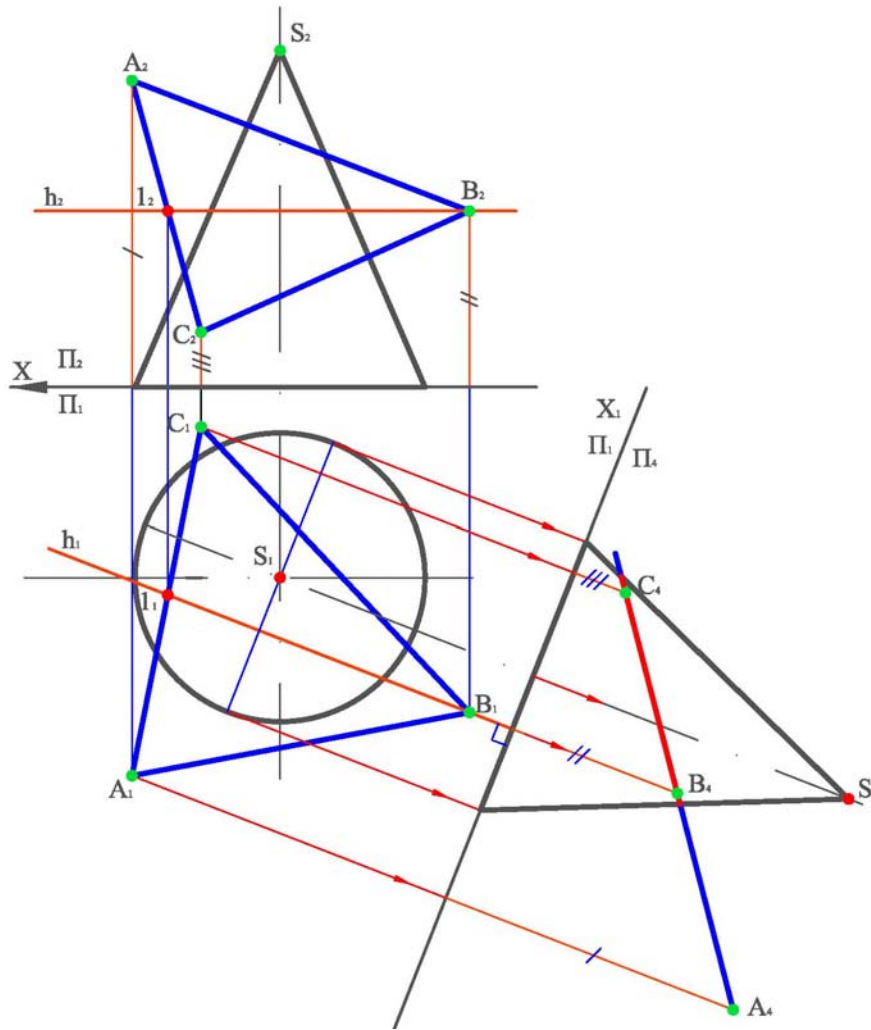


Рисунок 79

Потім на площині  $\Pi_4$  побудуємо проєкції конуса та трикутника  $ABC$ . Для цього через проєкції вершини конуса  $S_1$  і точок  $A_1$ ,  $B_1$  та  $C_1$  проводимо лінії зв'язку на  $\Pi_4$  відповідно перпендикулярно до  $X_1$ . На лініях зв'язку від осі  $X_1$  на площині  $\Pi_4$  відкладемо координати  $Z$  для відповідних точок (виміряємо на площині  $\Pi_2$  від осі  $X$ ). З'єднання проєкцій  $A_4$ ,  $B_4$  та  $C_4$  повинно утворити пряму лінію, яка є слідом заданої площини на  $\Pi_4$ .

На площині  $\Pi_4$  проєкція лінії перетину поверхні конуса заданою площиною визначається ділянкою сліду площини, що перетинає проєкцію конуса. За розташуванням сліду відносно проєкції конуса ми можемо визначити, що лінією перетину буде еліпс. Виходячи з початкових даних, слід площини може або перетинати обидві контурні твірні на  $\Pi_4$ , або перетинати твірну та основу конуса. У останньому випадку лінією перетину буде дуга еліпса, що обмежена точками перетину площини з колом основи.

Для побудови еліпса необхідно визначити розташування його великої та малої осей. Велика вісь еліпса знаходиться між точками перетину сліду січної площини та проєкцій обрисних твірних конуса (або на перетині сліду і твірної, з одного боку, та її продовження, з іншого боку, якщо площина перетинає основу конуса). Позначимо ці точки цифрами I та II (рис. 80). Мала вісь еліпса є перпендикулярною великій осі та поділяє її навпіл, тому на площині  $\Pi_4$  мала вісь еліпса проєкціюється в точку та знаходиться посередині відрізка  $I_4 - II_4$ . Позначимо вершини малої осі еліпса цифрами III та IV, проєкції цих точок на площині  $\Pi_4$  співпадають. Обидві точки лежать на поверхні



конуса, тільки точка III лежить з одного боку, а точка IV— з іншого боку конуса, тому на площині  $\Pi_4$  проєкція точки III видима, а проєкція точки IV невидима (позначення проєкцій невидимих точок береться в дужки). Потім беремо на лінії перетину декілька довільно розташованих проміжних точок (рис. 81). При цьому слід зважати на те, що, як і у випадку з точками III та IV, ми маємо пари точок, проєкції яких на площині  $\Pi_4$  співпадають, тобто одна проєкція буде видимою, а інша – невидимою.

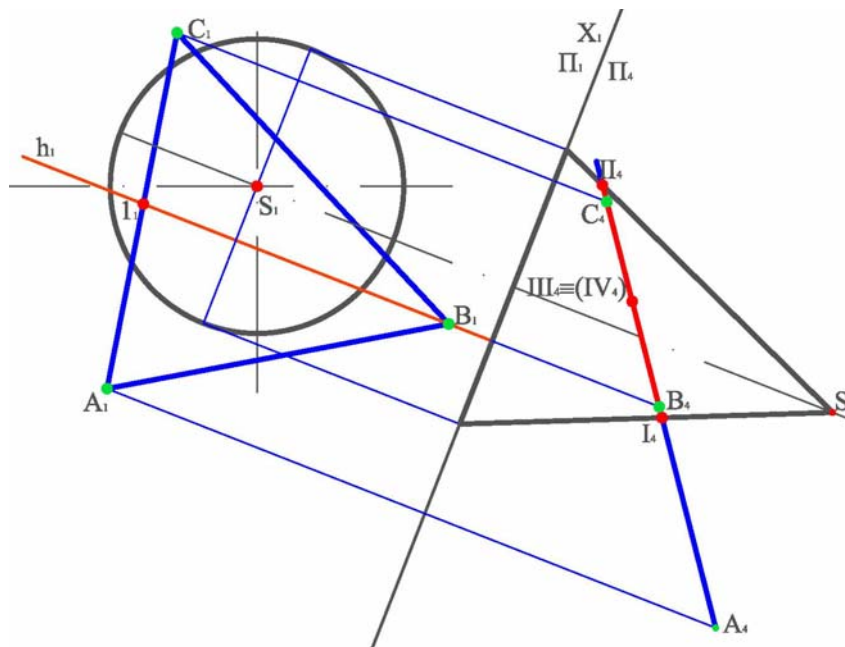


Рисунок 80

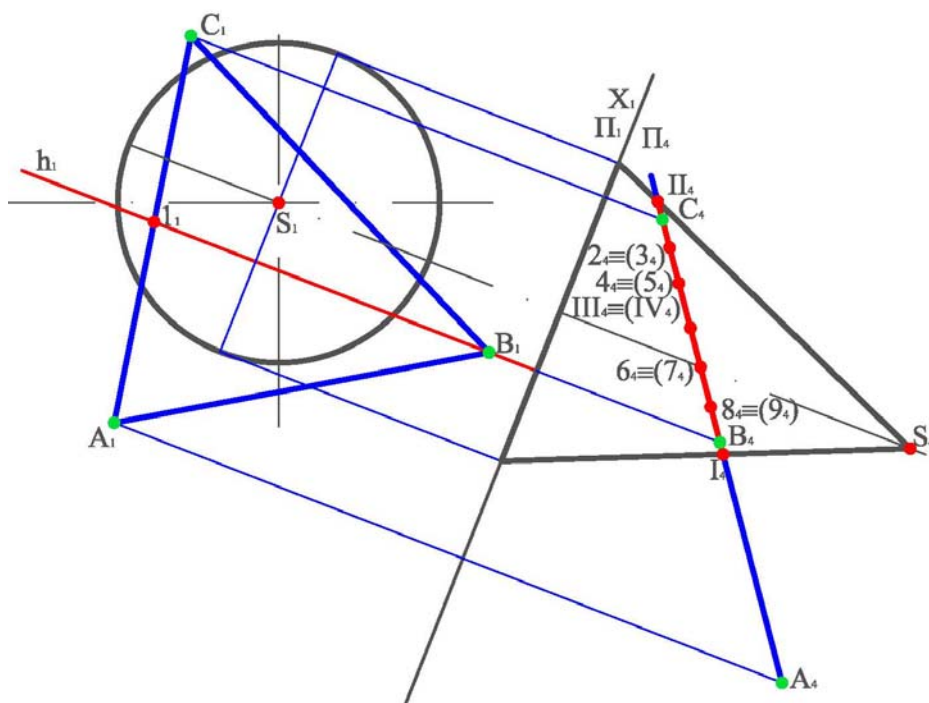


Рисунок 81

Далі виконуємо побудову проєкції лінії перетину на площині  $\Pi_1$ . Почнемо будувати зі знаходження вершин великої та малої осей еліпса при проєкціюванні на горизонтальну площину проєкцій. Проєкції вершин ВВЕ на площині  $\Pi_4$  (точок I та II) лежать

на проєкціях обрисних твірних  $S_4E_4$  та  $S_4F_4$ . Ці обрисні твірні на площині  $\Pi_1$  спроекціуються в ділянки лінії, що з'єднують проєкцію вершини конуса з точками основи  $E_1$  і  $F_1$  та паралельні осі  $X_1$ . Побудуємо цю лінію та на ній за лініями зв'язку визначимо положення проєкцій точок I та II (рис. 81). Як вже вказувалося вище, площина може перетинати основу конуса, і тоді проєкцію  $\Pi_1$  слід знаходити на продовженні проєкції твірної  $S_1F_1$ . При цьому точки обриву будуть лежати на основі конуса, і їх проєкції треба визначити на перетині ліній зв'язку з колом, у яке спроекціювалась основа конуса на площині  $\Pi_1$ . Для побудови проєкцій інших точок задаємо для них допоміжні січні площини, паралельні площині  $\Pi_1$ . На площині  $\Pi_4$  вони спроекціуються в лінії, паралельні осі  $X_1$ . При перетині цих площин із поверхнею конуса отримуємо кола, які спроекціуються на площину  $\Pi_1$  у дійсну величину. Проєкції точок будуть лежати на проєкціях цих кіл. Радіус вимірюється на площині  $\Pi_4$  від осі конуса до його обрисної твірної (див. рис. 82).

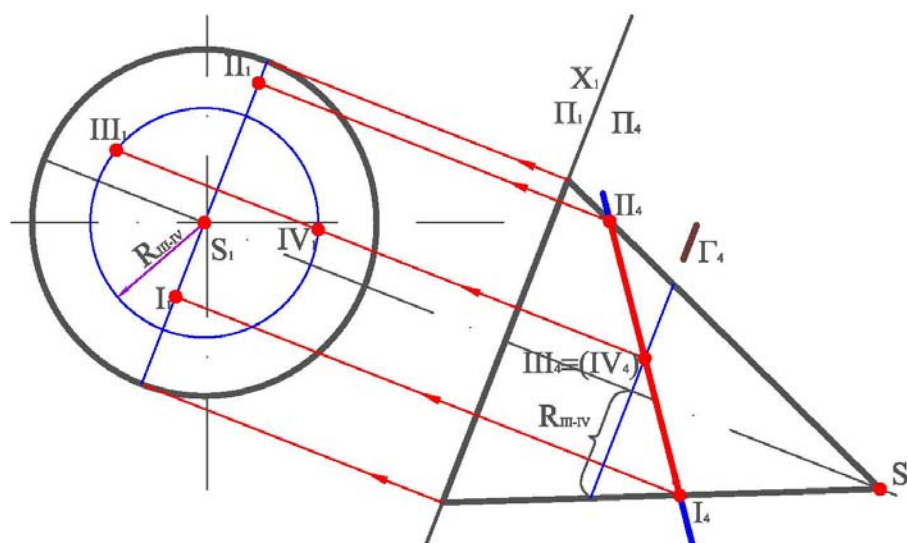


Рисунок 82

Для побудови точок на площині  $\Pi_1$  не обов'язково повністю будувати кола, на яких лежать точки, досить зробити циркулем дужку, попередньо провівши лінії зв'язку від проєкцій точок із площини  $\Pi_4$  на площину  $\Pi_1$ . Побудувавши проєкції точок на площині  $\Pi_1$ , поєднуємо їх плавною кривою лінією за допомогою лекала. При перетині площини трикутника ABC із поверхнею конуса отримуємо еліпс і його проєкція на площині  $\Pi_1$  буде видимою. При перетині площини з основою конуса утворюється пряма лінія і її проєкція на площині  $\Pi_1$  буде невидима (рис. 83). Велика вісь I–II та мала вісь III–IV будуть осями симетрії еліпса.

На площині  $\Pi_2$  конус спроекціювався у вигляді трикутника, бічні сторони цього трикутника – обрисні твірні конуса. Фронтальна площина рівня  $\Phi$ , яка задається цими твірними, є межею видимості. Побудована нами на площині  $\Pi_1$  проєкція еліпса перетинає проєкцію площини  $\Phi$ . Отже, еліпс містить точки, які лежать на межі видимості. Знайдемо точне розташування проєкцій цих точок на площині  $\Pi_1$  таким чином: проведемо проєкції обрисних твірних на площині  $\Pi_1$ , визначивши проєкції їх точок, що належать основі. Потім знайдемо проєкції точок цих твірних, що лежать у січній площині. Позначимо ці точки буквами K та N, визначимо їх проєкції на площині  $\Pi_1$  та визначимо за лініями зв'язку положення проєкцій цих точок на проєкціях обрисних твірних

на площині  $\Pi_2$  (рис. 82). Проекції точок  $K$  та  $N$  на площині  $\Pi_2$  лежать на межі видимості. Отже, та частина еліпса, проекція якої на площині  $\Pi_1$  буде знаходитись нижче від межі видимості, на площині  $\Pi_2$  буде видимою, а інша частина проекції еліпса на площині  $\Pi_2$  – невидимою. Потім побудуємо проекції точок еліпса на площині  $\Pi_2$ . Точки 2 та 3 лежать на основі конуса. Для побудови проекцій інших точок виміряємо їх координати  $Z$  за лініями зв'язку на площині  $\Pi_4$  (від осі  $X_1$ ) та відкладаємо їх за лініями зв'язку на площині  $\Pi_2$  (від осі  $X$ ). Проекції невидимих точок поєднуємо в потрібній послідовності плавною штриховою лінією, а проекції видимих точок – суцільною лінією (рис. 83).

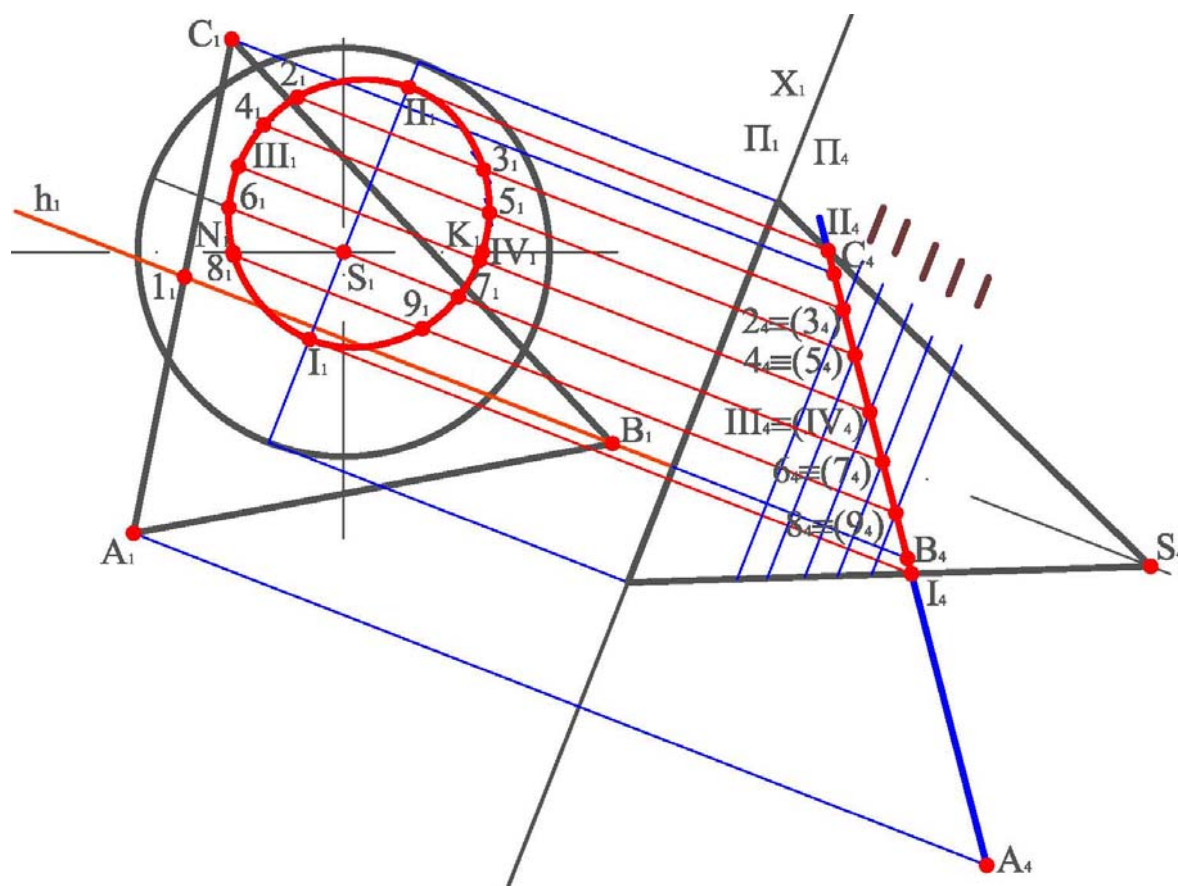


Рисунок 83

Наступний етап розв'язування задачі – побудова дійсної величини перерізу. Для цього задаємо нову площину проекцій  $\Pi_5$  таким чином, щоб вона була розташована паралельно площині трикутника  $ABC$ . При цьому вісь  $X_2$  системи площин  $\Pi_4/\Pi_5$  необхідно розташовувати паралельно до сліду площини трикутника на  $\Pi_4$ . На площині  $\Pi_5$  за лініями зв'язку будуємо проекції точок  $I$  та  $II$ , виміряємо їх координати на площині  $\Pi_1$  від осі  $X_1$  та відкладаємо на площині  $\Pi_5$  від осі  $X_2$  (рис. 84). З'єднуємо точки  $I_5$  та  $II_5$  прямою лінією. Ця лінія – проекція великої осі еліпса на площині  $\Pi_5$ , вона паралельна осі  $X_2$  та є віссю симетрії еліпса. Виходячи з того, що вершини  $MVE$  та пари проміжних точок, які ми брали для побудови проекцій еліпса, лежать на однаковій відстані з обох боків від великої осі еліпса, то, вимірявши їх координати на площині  $\Pi_1$  від проекції осі  $I_1 - II_1$ , ми відкладемо їх на площині  $\Pi_5$  із обох боків від проекції осі  $I_5 - II_5$ . Поєднавши побудовані проекції точок, отримаємо дійсну величину перетину конуса площиною трикутника  $ABC$  (рис. 85).

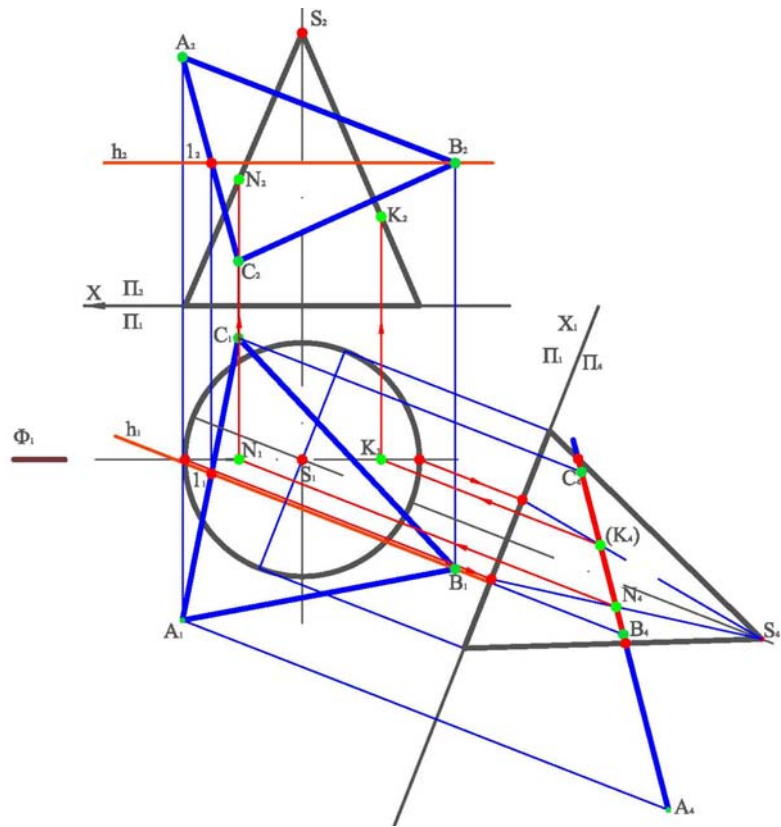


Рисунок 84

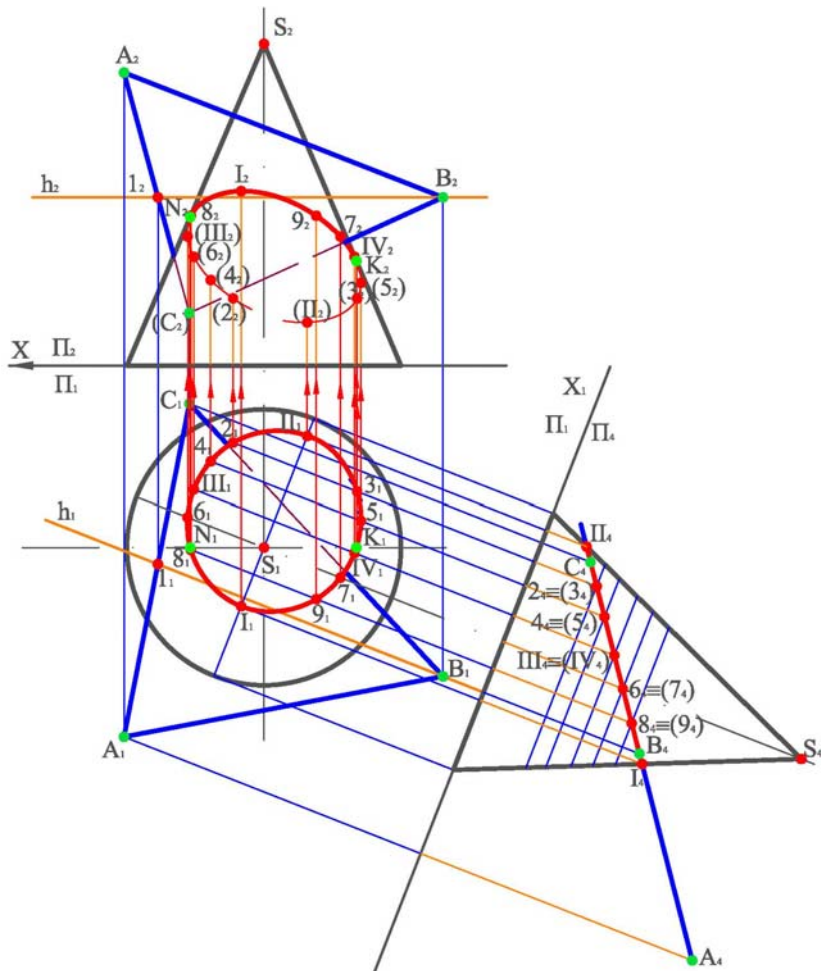


Рисунок 85

Після побудови натуральної величини перетину виміряємо довжину великої та малої осей еліпса та порівняємо з довжиною, яка наведена у варіанті завдання. Якщо розбіг вийшов порядку 2...3 мм, то побудова виконана правильно.

Необхідним етапом також є визначення видимості проєкцій трикутника ABC. На площині П1 проєкції сторін трикутника стануть невидимими, якщо вони проходять у середині конуса, тобто після перетину проєкцій сторін трикутника з проєкцією еліпса (рис. 83–87). Щоб визначити видимість на площині П2, треба визначитись із конкуруючими точками, які лежать на мимобіжних прямих та дають картину видимості. Такими точками будуть точки на обрисних твірних конуса та на стороні трикутника ABC.

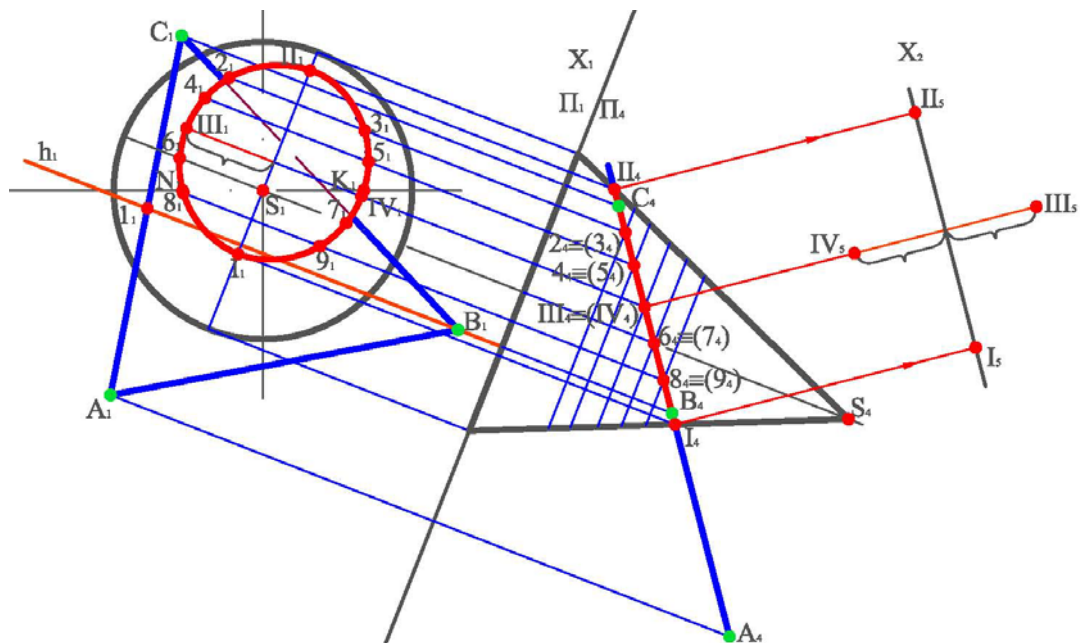


Рисунок 86

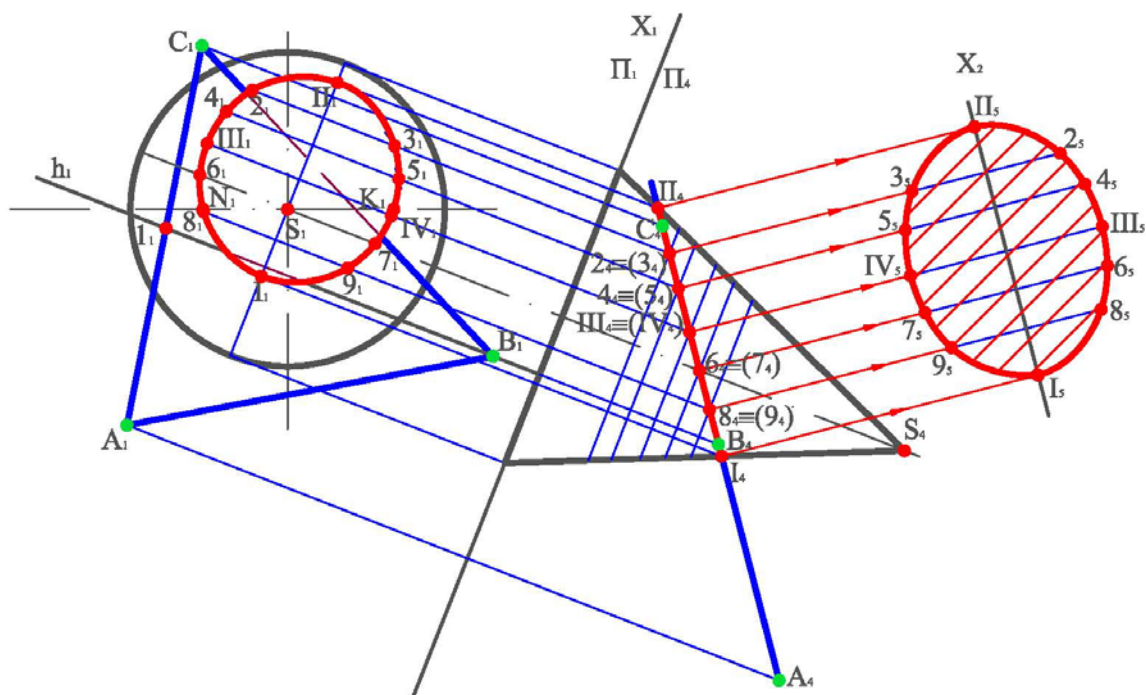


Рисунок 87

Після завершення побудови перший аркуш розрахунково-графічної роботи буде виглядати так, як показано на рис. 88. Лінія перетину площини трикутника з поверхнею конуса є розв'язком задачі, тому всі її проекції обводять кольоровим олівцем.

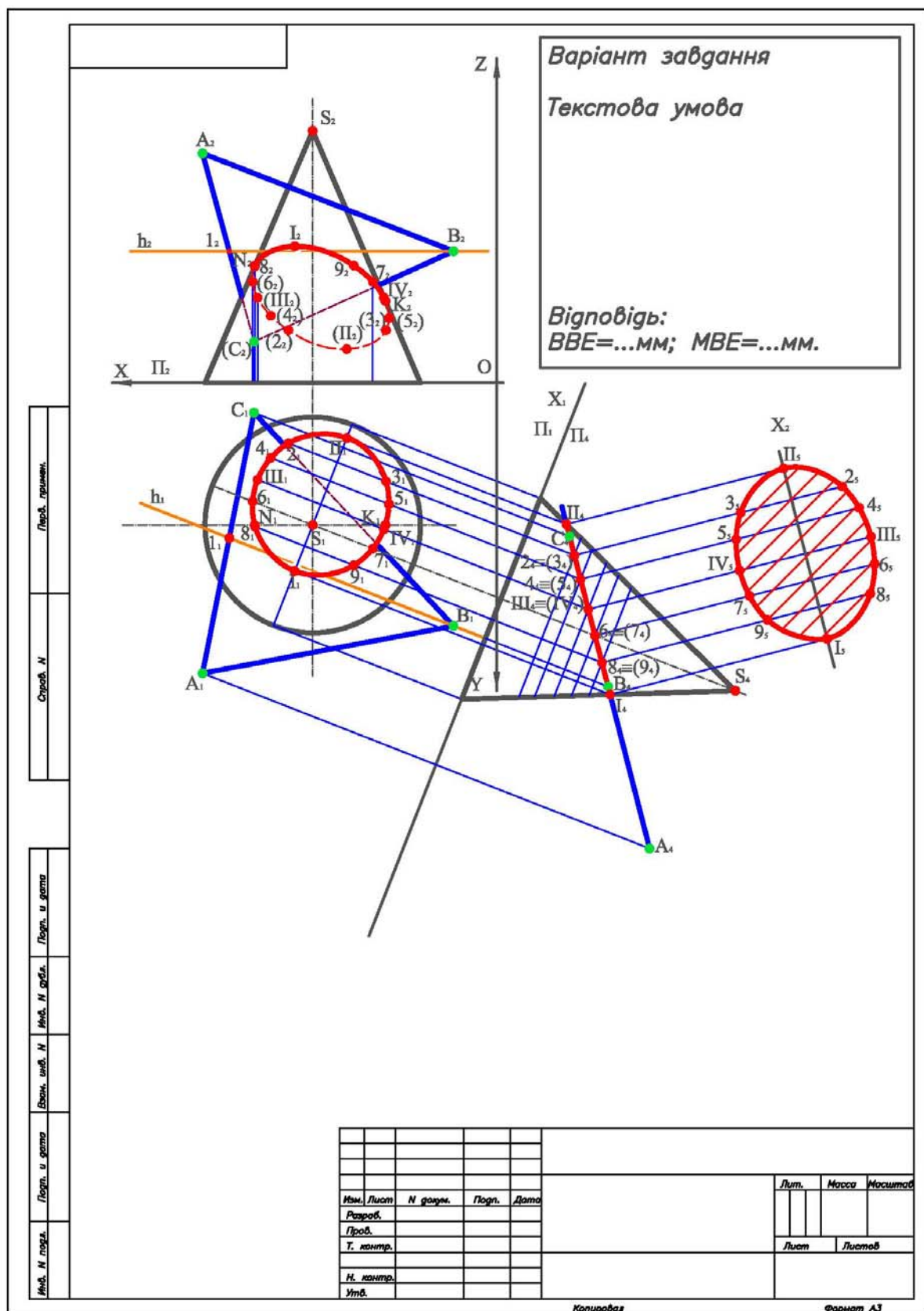


Рисунок 88

На другому аркуші будується розгортка бічної поверхні конуса з нанесенням на ній лінії перетину поверхні конуса площиною трикутника. Для цього поверхню конуса апроксимуємо як поверхню пірамідальну, тобто вписуємо в поверхню конуса поверхню піраміди.

Для цього на першому аркуші на площинах  $\Pi_1$  і  $\Pi_4$  проводимо крізь проекції точок, які ми використовували для побудови еліпса, проекції твірних, відмічаючи їх кінцеві точки на основі конуса (рис. 89). Якщо з'єднати ці точки між собою, то ми отримаємо основу багатогранної піраміди, вписаної в конус. Розгортку цієї піраміди можна наближено вважати розгорткою конічної поверхні.

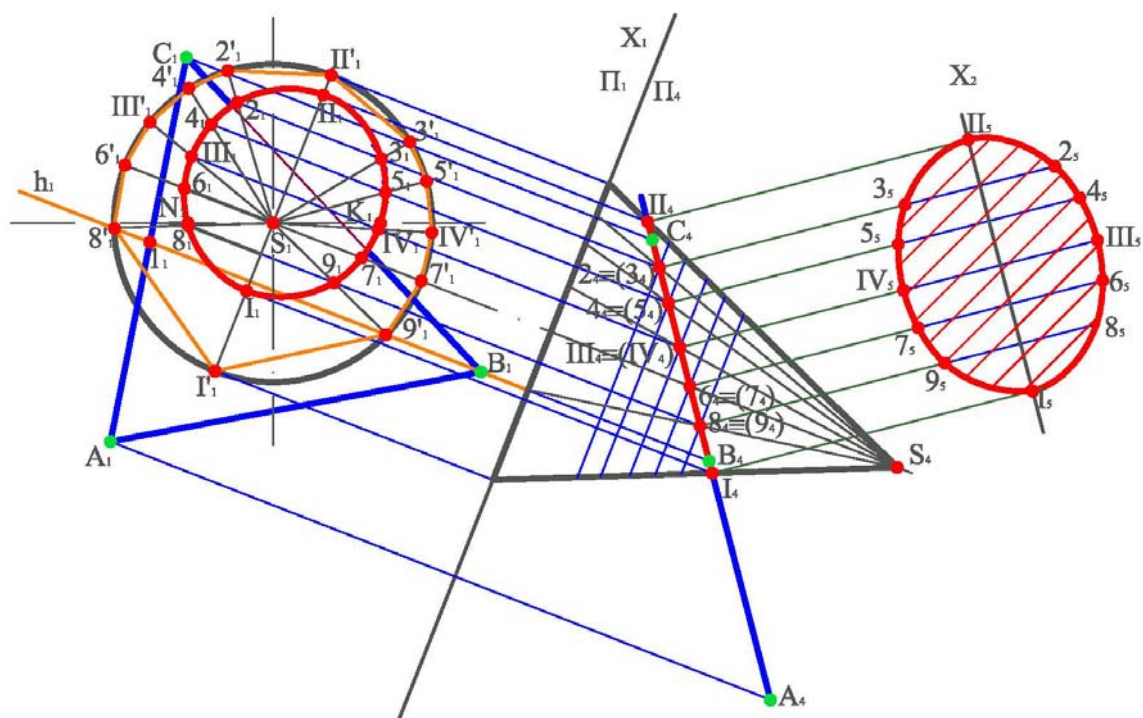


Рисунок 89

Для побудови розгортки необхідно мати натуральні розміри всіх елементів геометричного тіла. Щодо піраміди, її основа спроекціювалась на площині  $\Pi_1$  в дійсну величину, а дійсна величина ребер піраміди – це проекції обрисних твірних конуса на площині  $\Pi_4$ .

Точки, які ми використовували для побудови еліпса, лежать на ребрах піраміди. Для знаходження цих точок на відповідних ребрах на розгортці застосовується метод обертання твірних навколо горизонтально проєкціювальної прямої, яка проходить крізь вершину конуса. Твірні обертаються таким чином, щоб зайняли положення рівня відносно  $\Pi_4$ . При такому перетворенні точки цих твірних рухаються в площинах, паралельних до  $\Pi_1$ . Проекції такого переміщення точок на  $\Pi_4$  виглядають як прямі, паралельні до осі  $X_1$ . Тому, щоб визначити відстань від цих точок до вершини піраміди, треба на площині  $\Pi_4$  перенести за лініями, паралельними осі  $X_1$ , проекції цих точок на проекції обрисних твірних конуса. Тепер побудова розгортки бічної поверхні зводиться до побудови розгортки граней піраміди. Кожна грань піраміди є трикутником.

Для побудови розгортки спочатку довільно (у центрі аркуша) поставимо точку  $S_0'$  – вершину конуса. Потім від точки відкладемо довжину ребра піраміди, яку заміряємо на площині  $\Pi_4$  (вона дорівнює проекції обрисної твірної конуса), і отримаємо точку  $I_0'$

(рис. 90), потім через точку  $I_0'$  проведемо дугу з центром у точці  $S_0'$ . Виміряємо відстань  $I_1' - 8_1'$  на площині  $\Pi_1$  і відкладемо точку  $8_0'$  від  $I_0'$  на побудованій нами дузі. У такий же спосіб побудуємо розгортку інших граней піраміди. При цьому, якщо ми починаємо розгортання з ребра  $S_0' - I_0'$ , то і закінчуємо тим же ребром. Потім побудуємо на розгортці лінію перетину поверхні конуса з площиною трикутника. Для цього ми заміряємо на площині  $\Pi_4$  відстані від проекції вершини конуса за проекцією обрисної твірної до проекцій точок лінії перетину, що ми перенесли на проекцію обрисної твірної, і відкладемо ці відстані від  $S_0'$  на відповідних ребрах піраміди. З'єднавши ці точки між собою, отримаємо лінію перетину конуса площиною трикутника. Ця лінія наводиться кольоровим олівцем.

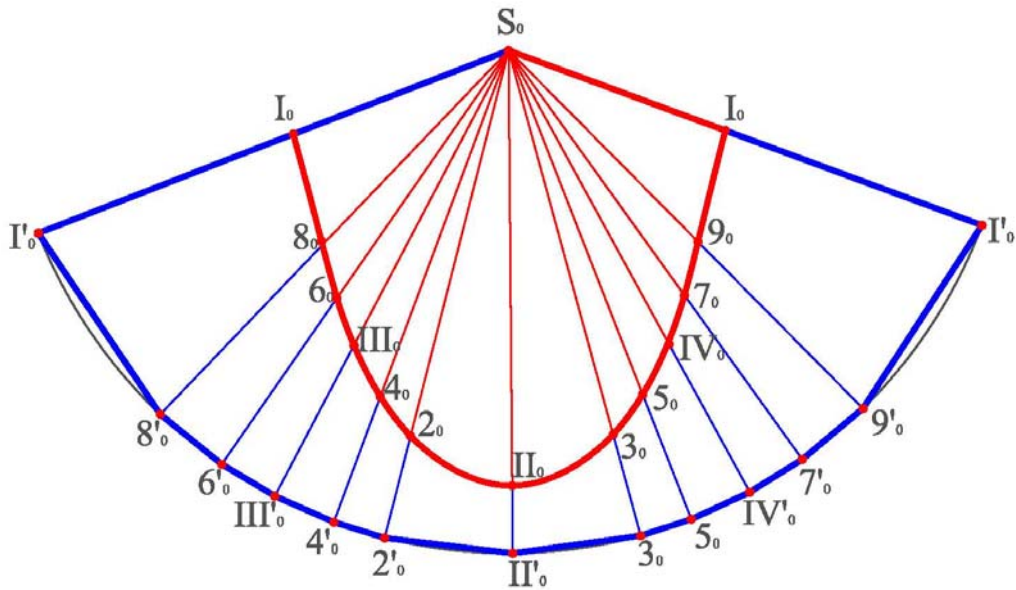


Рисунок 90

Таблиця 4 – Варіанти завдань РГР 2

№ п/п	A	B	C	S	R	BBE	MBE
	(x; y; z)						
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
1	119	76	53	86	43	93,2	50,6
	31	111	56	69			
	71	59	7	103			
2	120	77	34	80	51	99,1	59,1
	44	106	52	65			
	24	38	103	106			
3	125	81	38	80	42	62,7	45,7
	27	108	48	61			
	69	7	56	89			
4	117	64	11	72	42	98,8	50,6
	27	96	42	55			
	17	30	123	96			
5	124	72	20	76	50	103,5	59,7
	38	91	44	57			
	34	83	28	96			



Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6	7	8
6	125	67	30	77			
	30	97	51	64	51	115,9	60,9
	78	74	2	116			
7	117	67	17	76			
	38	113	48	61	43	90,9	51,3
	13	22	106	91			
8	134	84	64	92			
	35	102	55	68	40	110,4	49,1
	75	74	7	106			
9	129	88	48	89			
	31	95	52	65	48	106,1	56,9
	62	81	9	113			
10	122	81	51	87			
	19	100	51	64	47	107,6	55,4
	61	79	10	116			
11	121	82	43	91			
	39	119	56	69	47	106,2	56,3
	29	43	112	104			
12	120	76	32	84			
	42	100	45	58	41	96,8	49,3
	26	22	112	99			
13	117	67	17	72			
	38	113	48	61	43	90,9	51,3
	13	22	106	91			
14	122	61	1	70			
	43	101	51	64	48	107,9	58,3
	4	94	67	101			
15	119	64	10	74			
	44	93	53	66	41	69,5	44,0
	25	92	66	122			
16	120	65	20	66			
	17	98	49	62	48	97,9	56,1
	65	79	5	107			
17	121	61	21	66			
	19	93	47	60	50	96,8	58,0
	89	62	4	107			
18	126	75	45	92			
	29	104	55	68	50	96,9	57,2
	65	61	5	112			
19	118	76	44	81			
	23	99	53	66	48	106,0	56,9
	76	67	8	113			

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6	7	8
20	127	84	41	85			
	28	97	47	60	47	103,2	55,3
	75	80	1	110			
21	133	88	43	89			
	20	104	43	56	40	66,5	43,6
	76	40	69	98			
22	122	82	42	89			
	38	114	53	66	48	160,5	57,3
	40	22	98	99			
23	130	81	33	74			
	47	110	53	66	49	101,3	58,3
	14	15	94	101			
24	121	60	0	67			
	54	113	37	70	52	113,9	63,3
	14	15	94	101			
25	113	73	14	74			
	38	106	46	59	40	91,6	47,2
	15	6	116	98			
26	118	66	15	73			
	37	99	52	65	47	90	53,4
	23	94	44	113			
27	123	68	14	78			
	29	95	44	57	47	83,4	52,1
	16	98	62	114			
28	134	71	9	76			
	22	97	49	62	51	82,9	56,2
	10	57	119	115			
29	122	70	38	77			
	20	85	47	60	45	111,9	53,9
	82	70	2	119			
30	1	90	53	91			
	4	99	48	61	45	107,8	53,7
	8	91	7	115			

## 8.4 Розрахунково-графічна робота 3

### Завдання

Побудувати три вигляди гранованої поверхні:

- 1 Добудувати вигляд зверху.
- 2 Побудувати вигляд зліва.
- 3 Побудувати аксонометричну проекцію заданої поверхні.

Мета завдання – ознайомити студентів з правилами і умовностями, які дає ГОСТ 2.305-68 і які використовуються при побудові комплексних креслень.

Усі предмети виробництва на машинобудівних підприємствах виготовляють за кресленнями, а зображення на цих кресленнях виконують методом прямокутного проектування. При цьому предмет розміщують між спостерігачем і відповідною площиною проекцій.

Для повного виявлення форми предмета державний стандарт установлює різноманітні зображення. Одним із таких зображень є вигляд.

Виглядом називають зображення повернутої до спостерігача видимої частини поверхні предмета. Зображення, побудоване на фронтальній площині проекцій, називають виглядом спереду. Цей вигляд на кресленні вважають основним, тому його ще називають головним. Виконуючи креслення, предмет треба так розміщувати відносно фронтальної площини проекцій, щоб головний вигляд давав найповніше і найвиразніше уявлення про форму і розміри предмета.

Зображення на горизонтальній площині проекцій називають виглядом зверху.

Зображення на профільній площині проекцій називають виглядом зліва. Воно відповідає тому, що ми бачимо, розглядаючи деталь зліва.

Поряд із видами спереду, зверху і зліва для зображення предмета застосовують види справа, знизу, ззаду. Види виконуються методом прямокутного проектування. Кількість видів на кресленні має бути мінімальною, але достатньою для повного виявлення геометричної форми і розмірів усіх частин предмета (рис. 91).



Рисунок 91

Якщо зображення предмета виконано не в проекційному зв'язку, то напрямок визначають стрілкою та літерою. Зображення позначають тією ж літерою.

Додатковий вигляд — це зображення на площину, не перпендикулярну основним площинам проектування. Підписують додатковий вигляд так само, як і основний.

Місцевий вигляд — зображення окремого, обмеженого місця поверхні предмета. Місцевий вигляд може бути обмежений лінією обриву, віссю симетрії тощо. Його можна позначити на кресленні і надписом.

Побудову вигляду зверху необхідно починати з визначення положення граней та ребер тіла; далі треба визначити положення січних площин та ліній їх перетину з площинами основ тіла і між собою. Що стосується січних площин, здебільшого вони є проєкціювальними відносно фронтальної площини проєкцій або площинами рівня до  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$ . Виходячи зі збиральної властивості таких площин, їх проєкцією на  $\Pi_2$  є прямі лінії (сліди). Потім необхідно будувати лінії перетину площин на горизонтальній площині. Оскільки площини, що містять ці лінії, є перпендикулярними до  $\Pi_2$ , лінії перетину також перпендикулярні до фронтальної площини. На цій площині їх проєкції — у точках перетину слідів площин. На  $\Pi_1$  проєкції таких ліній розташовуються перпендикулярно до осі X.

Далі необхідно визначити або побудувати лінії перетину січних площин із бічною поверхнею тіла. У разі, якщо заданим тілом виступає прямокутна призма, на вигляді зверху лінії перетину січних площин із бічними гранями співпадуть із проєкціями цих граней, що мають вигляд ліній (через збиральну властивість проєкціювальних площин). Процес знаходження точок показаний на рис. 92. Видимість відповідних проєкцій точок визначається, виходячи з видимості або невидимості на вигляді грані, якій належить точка, а також за допомогою правил визначення видимості конкуруючих точок. У підсумку вигляд зверху показаний на рис. 93.

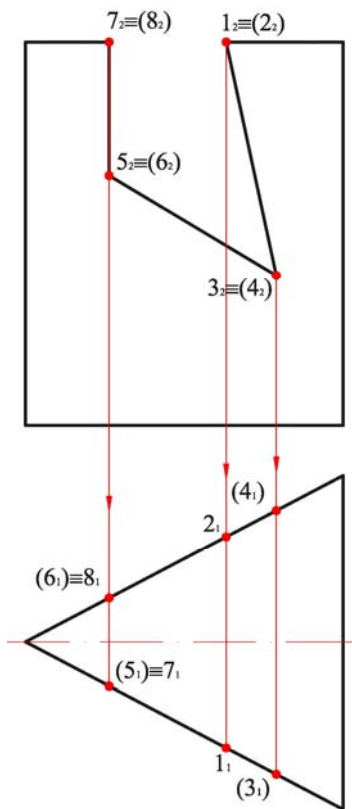


Рисунок 92

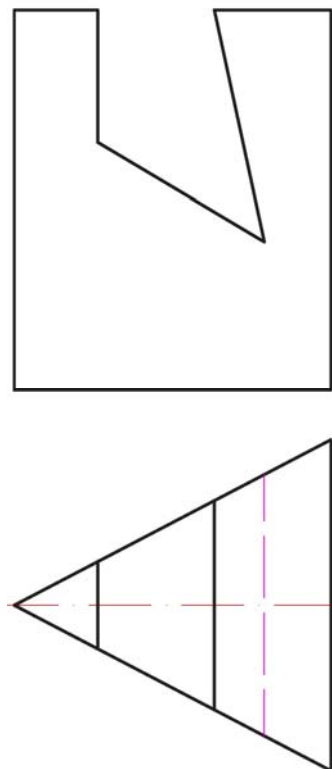


Рисунок 93

У випадку піраміди ділянки ліній будують, використовуючи визначені проекції точок перетину січних площин із ребрами та знайдених раніше ліній взаємного перетину площин із гранями і лініями основи. При цьому для знаходження проекцій точок, що лежать на бічних гранях, слід використовувати побудову ліній, що лежать у площині відповідної грані. Ними можуть бути, наприклад, твірні лінії, що проходять через вершину піраміди, або відрізки, паралельні сторонам основи піраміди (рис. 94).

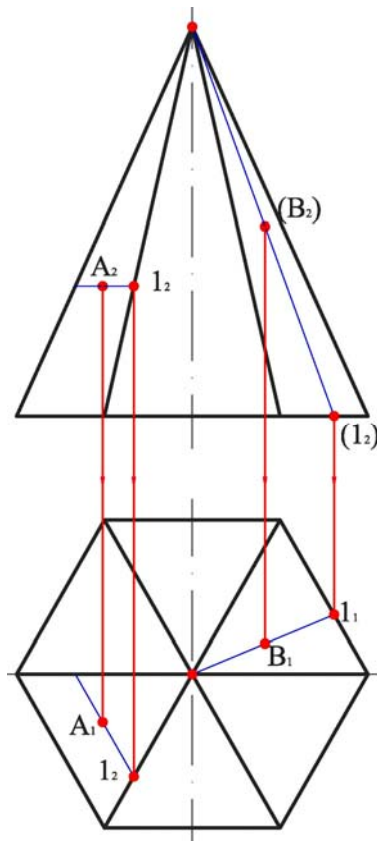


Рисунок 94

Третю проекцію, або вигляд зліва, будують за правилами ортогонального проєціювання на три площини проєкції. При цьому окремі проєкції точок знаходяться при проведенні горизонтальних ліній зв'язку з вигляду спереду, вимірюванні координати  $Y$  окремої точки та її відкладання на лінії зв'язку від точки перетину з віссю  $Z$ . При цьому, якщо тіло є симетричним відносно фронтальної площини рівня, положення проєкцій точок можливо вимірювати та відкладати відносно проєкції цієї площини (рис. 95). Можна також використовувати графічний спосіб перенесення координати  $Y$  на вигляд зліва. Спочатку треба виконати вигляд тіла без врахування перетину січними площинами, після чого приступати до побудови проєкцій точок та ліній перетину січних площин із поверхнею тіла. Важливим моментом побудов є визначення видимості відповідних ділянок ліній. Видимість встановлюється за видимістю на вигляді відповідної грані або площини, якій належить побудований відрізок. Необхідним є також визначення на виглядах ділянок тіла, що видаляються при перетині площинами. При цьому ділянки ребер та ліній основи, що видаляються, необхідно стерти.

Побудова аксонометричної проєкції повинна починатись із вибору виду аксонометрії, який можливо використовувати для даного геометричного тіла, а також з визначення розташування елементів системи координат, пов'язаної з тілом (рис. 96).

Зазвичай початок координат – точку  $O$  – розміщують на елементах симетрії основи тіла (в центрі симетрії або на осі симетрії). У наведеному прикладі точка  $O$  розташована по середині відрізка, який є віссю симетрії трикутника основи.

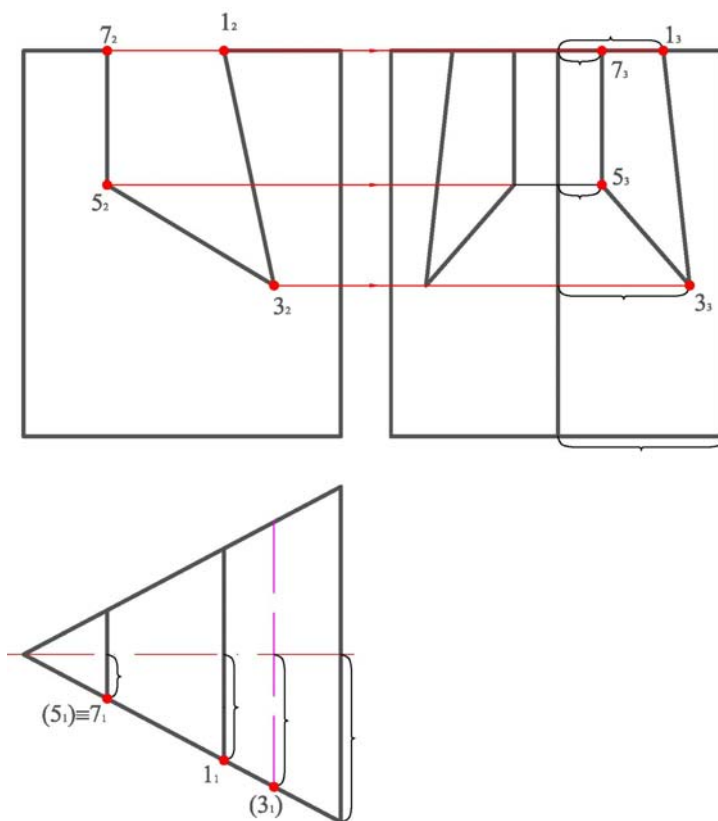


Рисунок 95

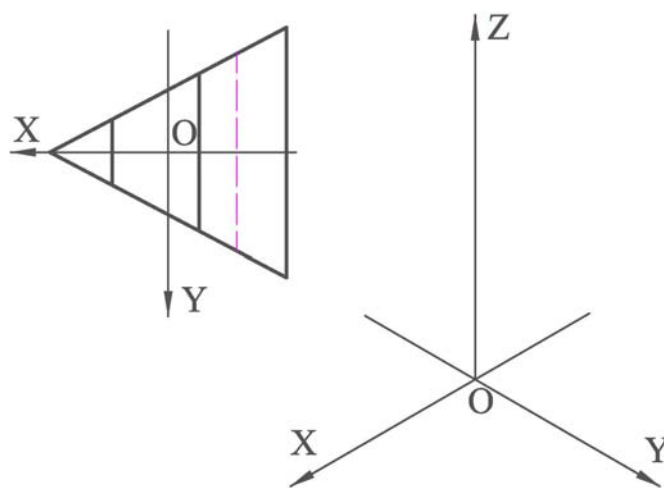


Рисунок 96

Наступним етапом виконується побудова основи геометричного тіла. Спочатку визначимо точки, що лежать на координатних осях (у наведеному прикладі це точка 1, рис. 97, а), далі знайдемо інші вершини, що мають обидві ненульові координати  $X$  та  $Y$  (точки 2 та 3, рис. 97, б).

Після побудови нижньої основи треба побудувати верхню основу (для призми) або вершину (для піраміди). Для цього здійснюють відкладення координати  $Z$  уздовж осі  $Z$  від точок нижньої основи (рис. 98) (або від точки  $O$  – для піраміди). Далі необхідно

побудувати крайні точки лінії перетину площин, що утворюють виріз у тілі. Ці точки лежать у площинах граней тіла і можуть мати всі три ненульові координати. Їх знаходження здійснюється при побудові координатних ламаних за значеннями, що беруться з виглядів креслення (див. точку А на рис. 99).

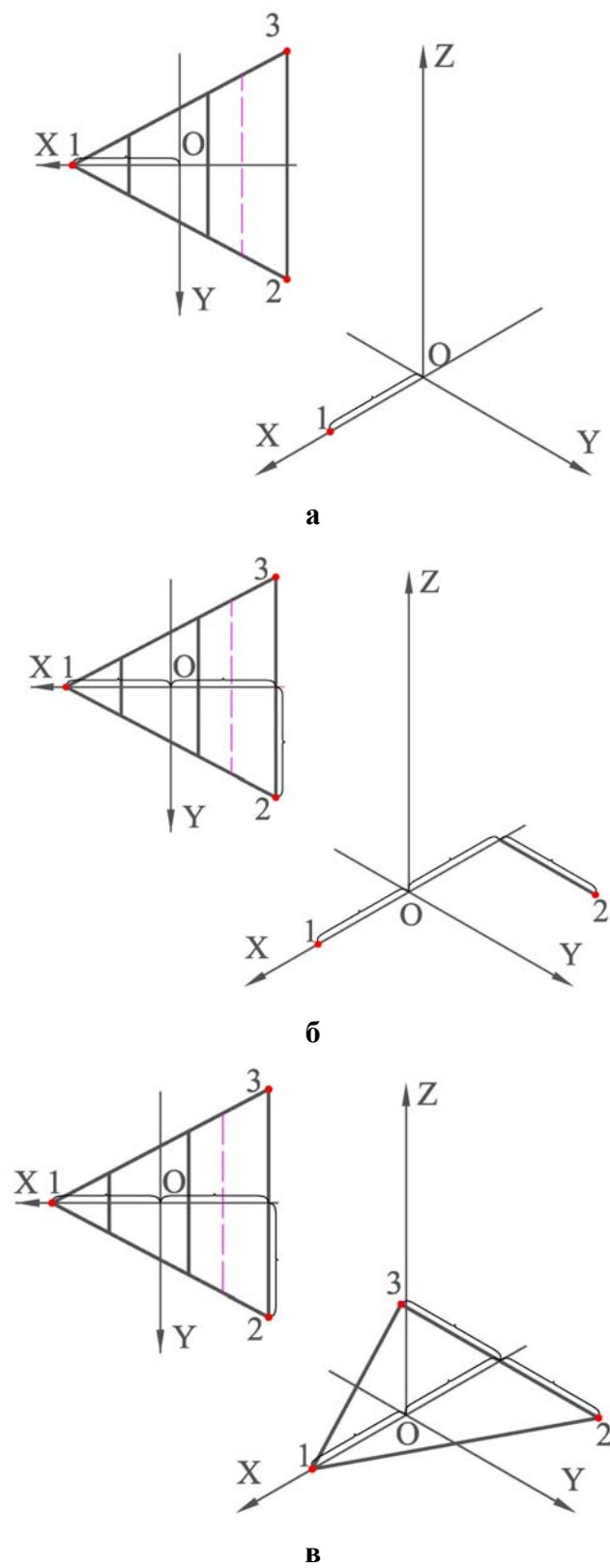


Рисунок 97

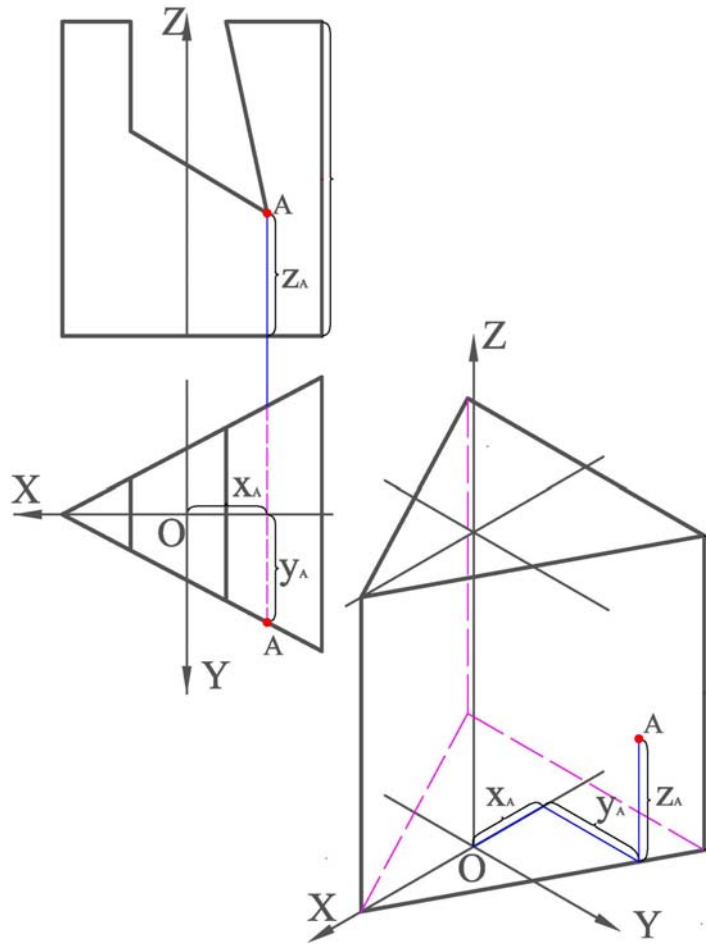


Рисунок 98

Останнім етапом є видалення невидимих ліній та побудова четвертного вирізу тіла. Для цього знаходять точки на основах та на лініях перетину січних площин із гранями й між собою, які належать площинам вирізу (у заданих варіантах це площини  $XZ$  та  $YZ$ ). Після послідовного з'єднання цих точок та видалення елементів, що попадають у виріз, буде отримано кінцевий вигляд аксонометричної проекції (рис. 99). Приклад повністю виконаної роботи наведено на рис. 100.

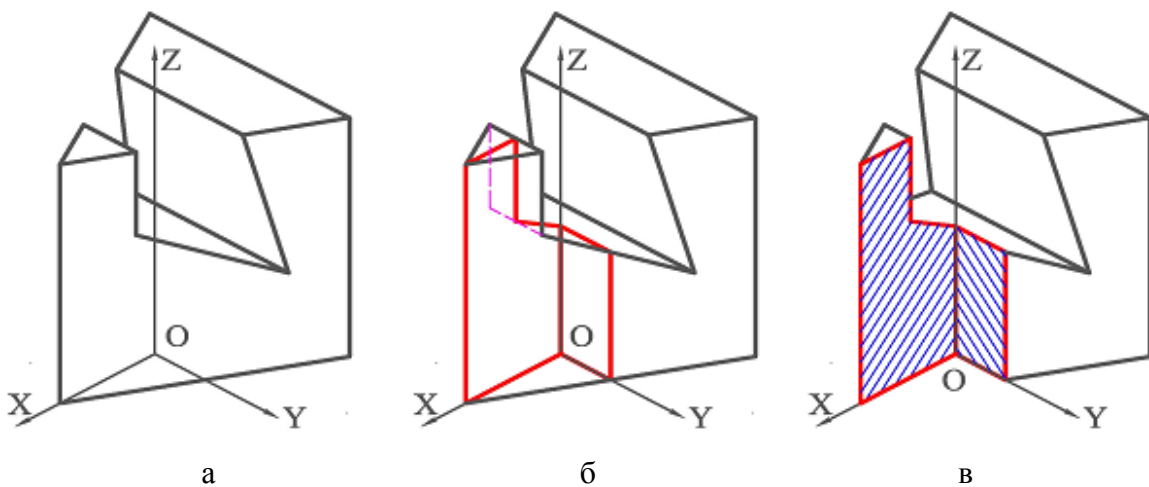


Рисунок 99



## Оформлення завдання

Після побудови зображень належить виконати обведення креслення та заповнити основний надпис.

Лінії невидимого контуру, а також усі лінії побудови необхідно стерти.

На кресленні повинні бути зображені:

- лінії видимого контуру, товщиною  $S = 0,5-1,4$  мм;
- осьові штрихпунктирні лінії ( $S/2 \dots S/3$ );
- розімкнуті лінії – сліди січних площин ( $S \dots 1,5S$ );
- написи – позначення січних площин і їх зображення;
- лінії штрихування ( $S/2 \dots S/3$ ).

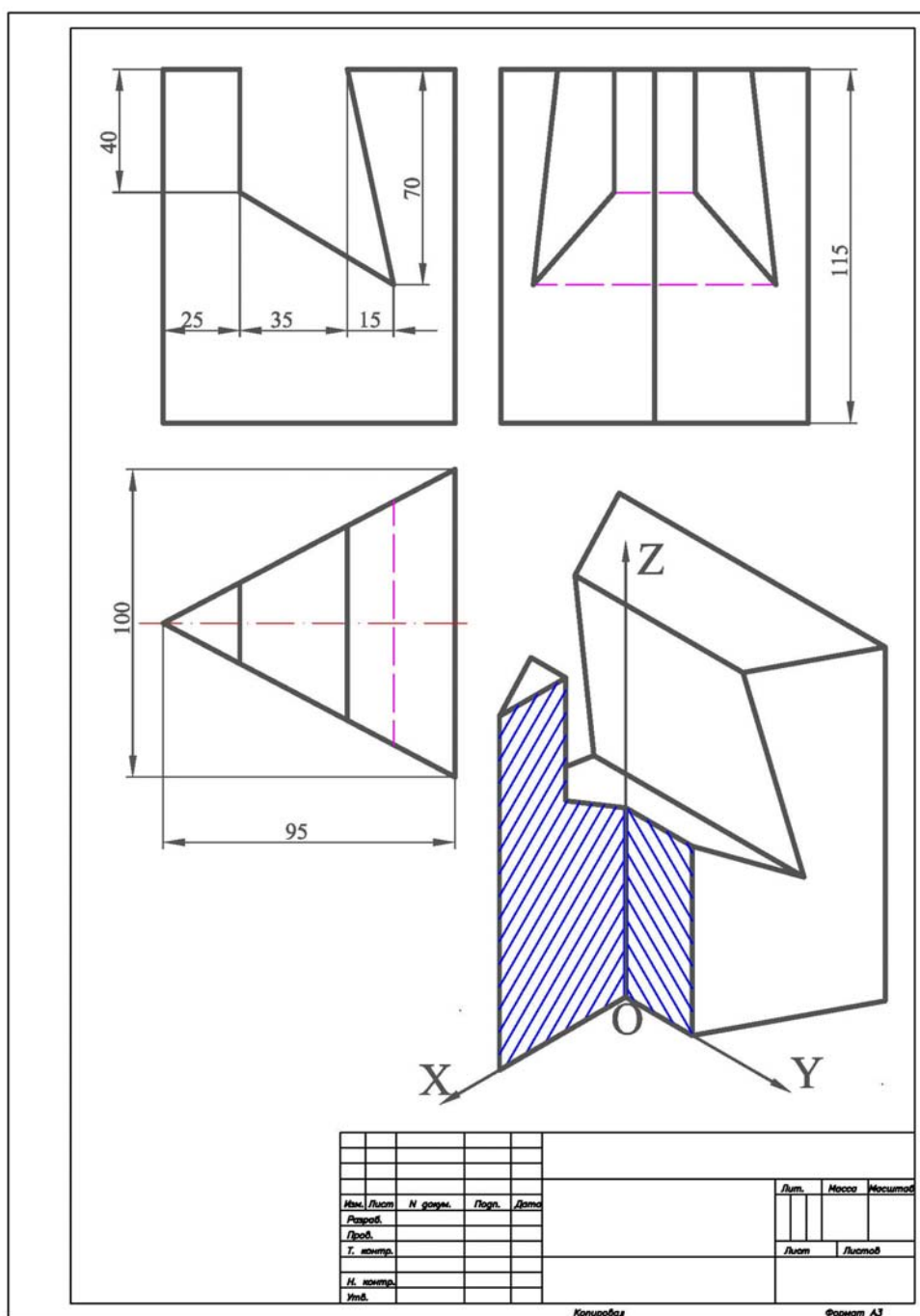


Рисунок 100

## 8.4 Розрахунково-графічна робота 4

### *Завдання*

Побудувати три вигляди тіла обертання.

Добудувати вигляд зверху.

Побудувати вигляд зліва.

Мета завдання «Вигляди. Тіло обертання» – ознайомити студентів на прикладах зображення різних геометричних форм із правилами й умовностями, що встановлені ГОСТ 2.305-68 і використовуються при побудові комплексних креслень.

Дане завдання повинне сприяти розвиткові просторового уявлення, будучи одночасно перехідним ступенем від зображення геометричних форм до складання креслень деталей машин.

Передбачається, що студенти вже вивчили відповідні розділи курсу нарисної геометрії, що є теоретичною базою для вивчення проекційного креслення. Враховується також, що студентам відомі основні положення державних стандартів, які застосовувалися при виконанні завдання за темою «Геометричне креслення».

Побудову вигляду зверху необхідно починати з визначення положення січних площин та ліній їх перетину. Здебільшого вони є проекціювальними відносно фронтальної площини проєкцій або площинами рівня до  $\Pi_1$  та  $\Pi_3$ . Виходячи зі збиральної властивості таких площин, їх проєкцією на  $\Pi_2$  є прямі лінії (сліди). Потім необхідно будувати лінії перетину площин на горизонтальній площині. Оскільки площини, що містять ці лінії, є перпендикулярними до  $\Pi_2$ , лінії перетину також перпендикулярні до фронтальної площини. На цій площині їх проєкції – у точках перетину слідів площин. На  $\Pi_1$  проєкції таких ліній розташовуються перпендикулярно до осі  $X$ .

Далі здійснюється побудова ліній перетину січних площин із поверхнею тіла. Спочатку треба визначити, яких типів лінії утворюються в тому чи іншому випадку перетину, повторивши теоретичні дані з лекційного курсу. Будувати визначені лінії слід починати зі знаходження опорних точок (точок екстремуму, вершин осей еліпсів та ін.), а також їх крайніх точок (рис. 101, точки 1 та 4). Після цього будують проміжні точки та здійснюють побудову лінії шляхом з'єднання точок (рис. 102). Третя проєкція, або вигляд зліва, будується за правилами ортогонального проєкціювання на три площини проєкцій. При цьому окремі проєкції точок знаходяться при проведенні горизонтальних ліній зв'язку з вигляду спереду, вимірювання координати  $Y$  окремої точки та її відкладання на лінії зв'язку від точки перетину з віссю  $Z$ . При цьому, якщо тіло є симетричним відносно фронтальної площини рівня, положення проєкцій точок можливо вимірювати та відкладати відносно проєкції цієї площини (рис. 103, 104). Можна також використовувати графічний спосіб перенесення координати  $Y$  на вигляд зліва. Спочатку треба виконати вигляд тіла без урахування перетину січними площинами, після чого приступати до побудови проєкцій точок та ліній перетину січних площин із поверхнею тіла.

Важливим моментом побудов є визначення видимості відповідних ділянок лінії. Видимість встановлюється за видимістю на вигляді відповідної частини тіла відносно межі видимості. Необхідним є також визначення на виглядах ділянок тіла, що видаляються при перетині площинами. При цьому ділянки контурних ліній, що видаляються, необхідно стерти. Приклад повністю виконаної роботи наведено на рис. 105.

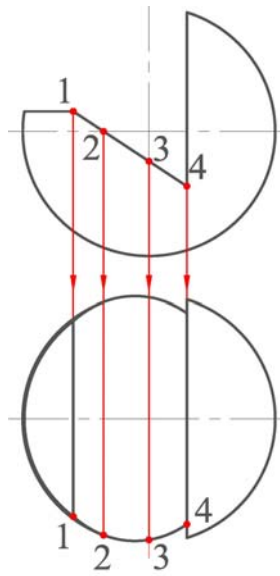


Рисунок 101

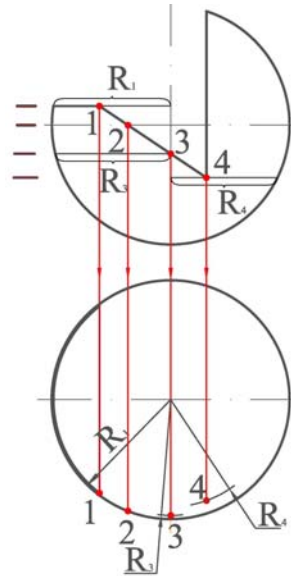


Рисунок 102

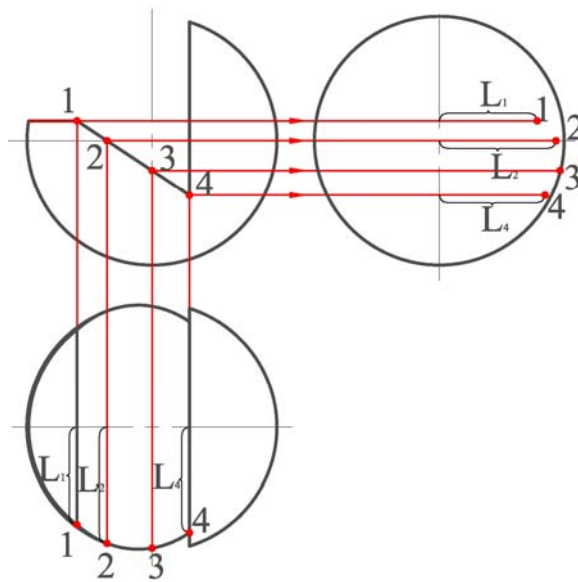


Рисунок 103

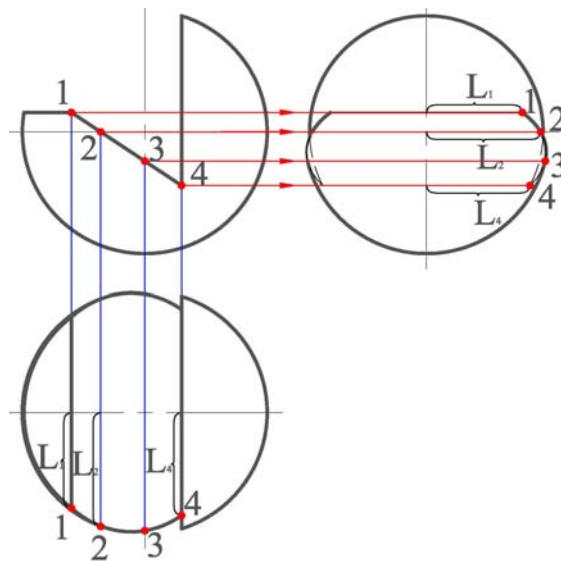


Рисунок 104

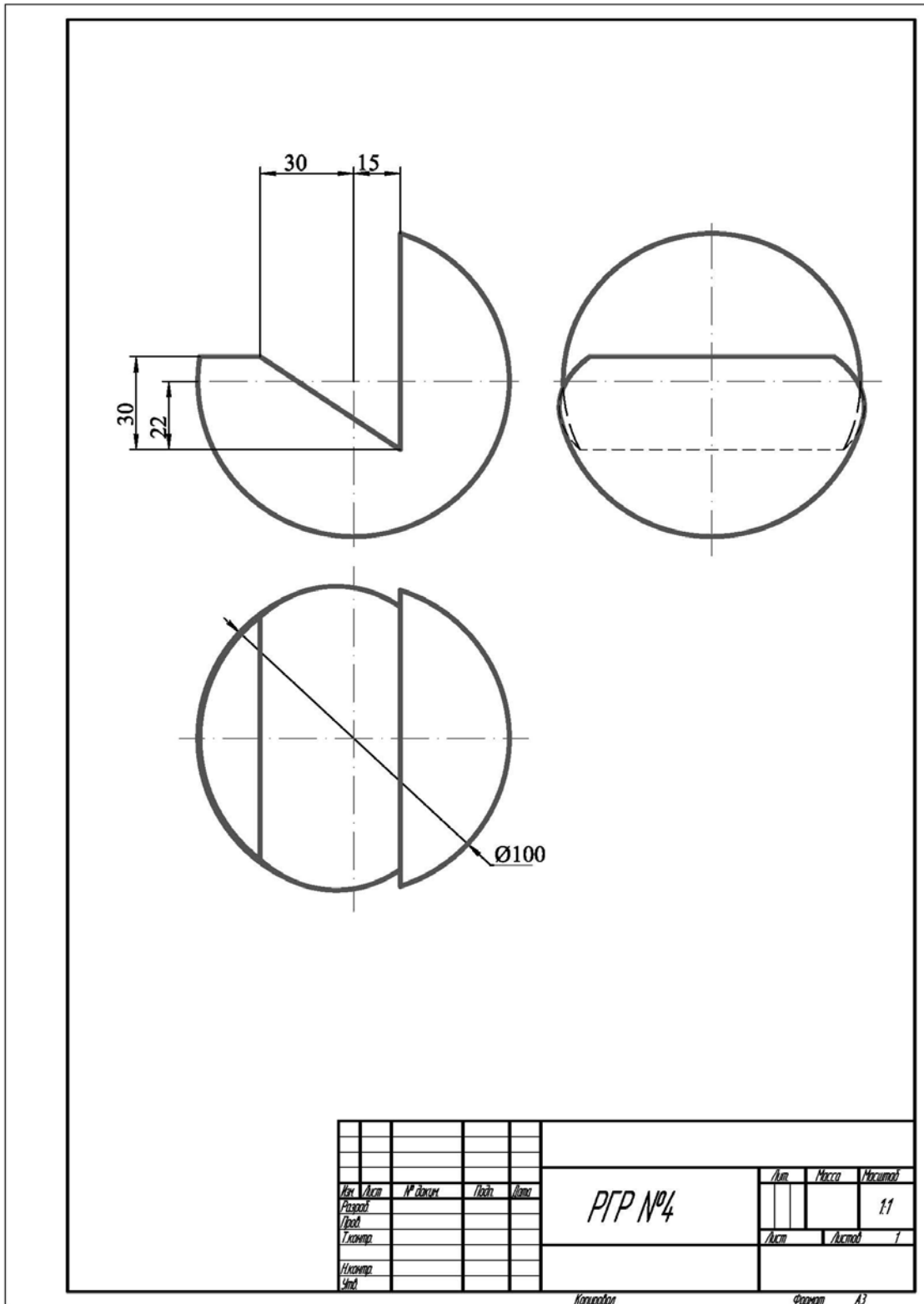


Рисунок 105

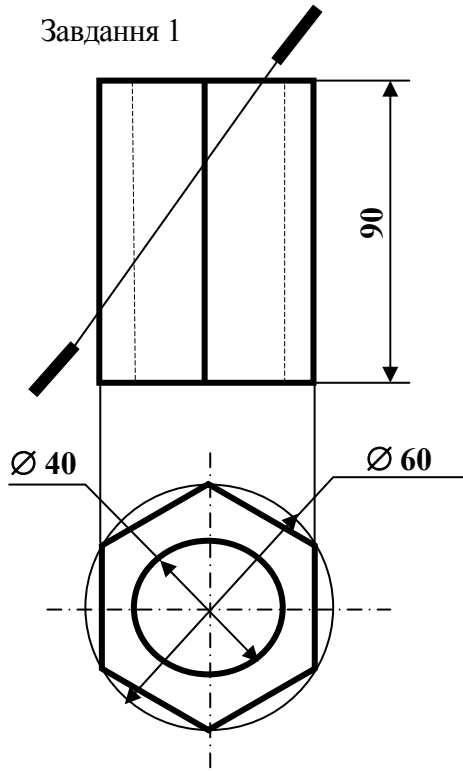
## 9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ

При самостійній роботі над курсом потрібен самостійний контроль знань. Для цього призначені завдання для самостійної перевірки знань. Наведено 22 варіанти завдань.

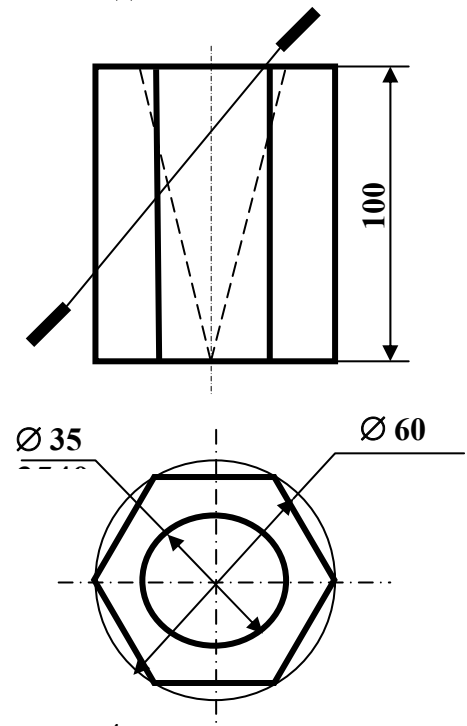
За наведеними розмірами:

- 1) накресліть два зображення моделі, виконати на одному з них необхідний розріз;
- 2) побудувати переріз січною площиною А-А;
- 3) побудувати аксонометричну проекцію з розрізом.

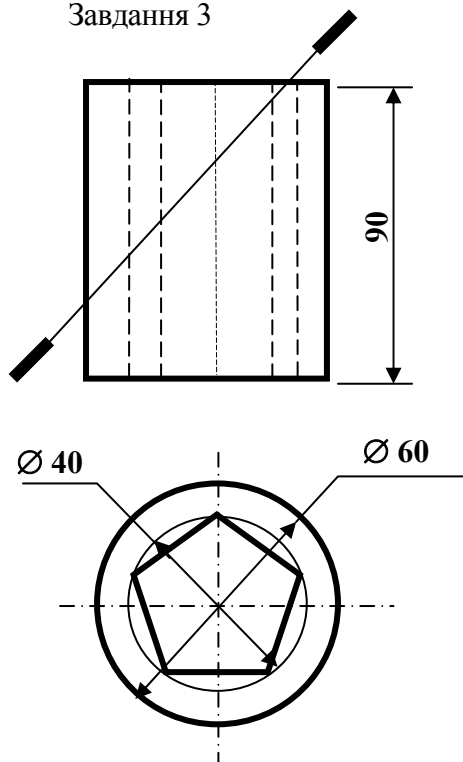
Завдання 1



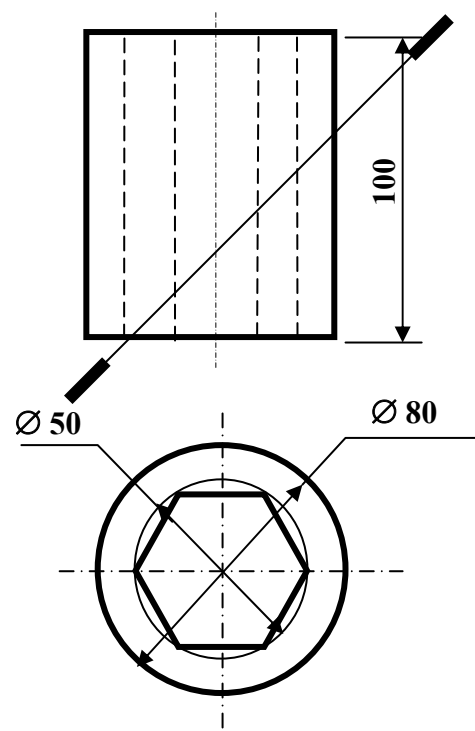
Завдання 2



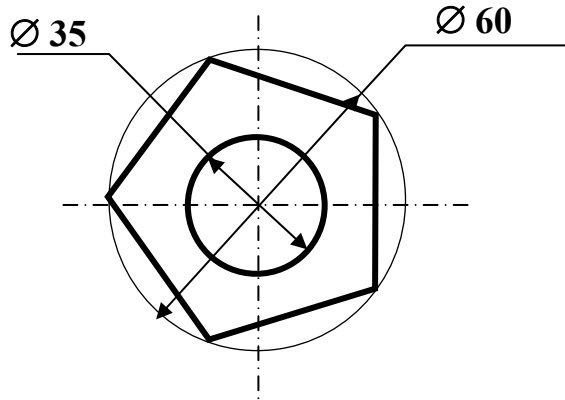
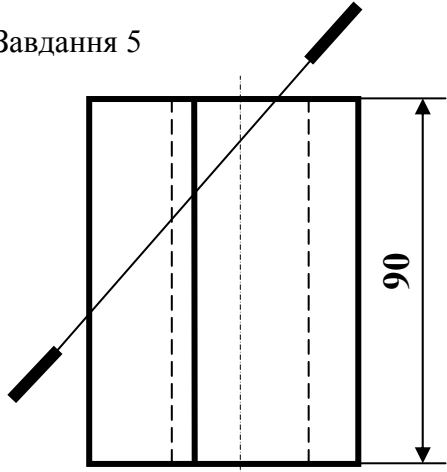
Завдання 3



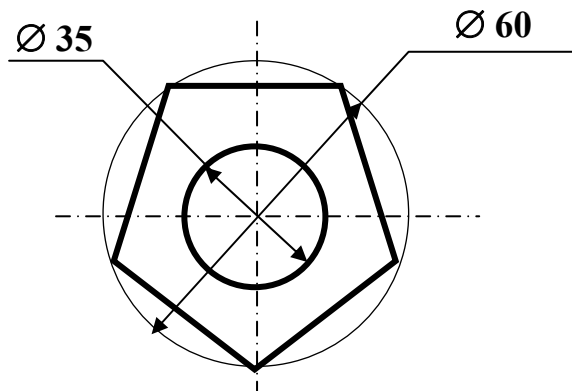
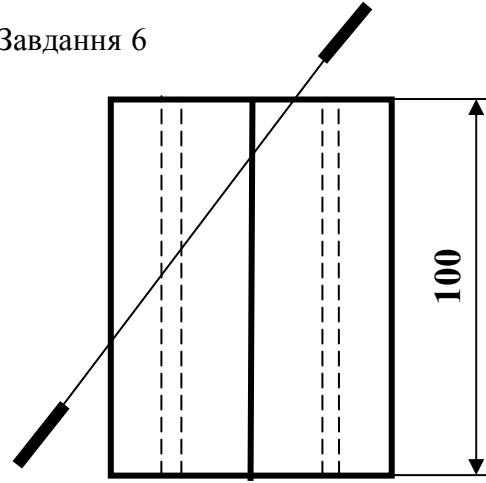
Завдання 4



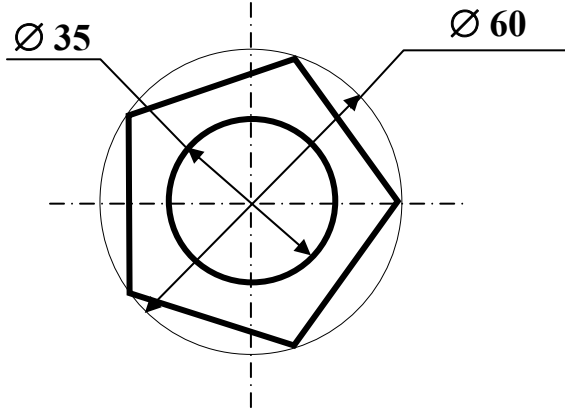
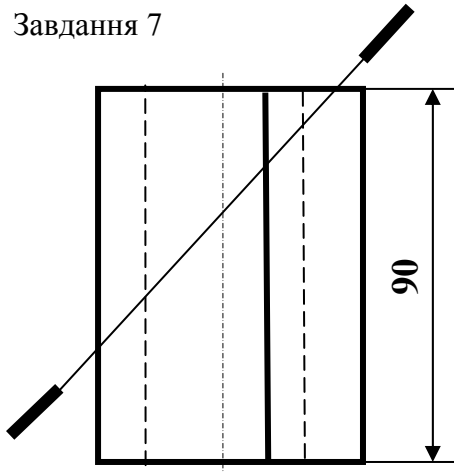
Завдання 5



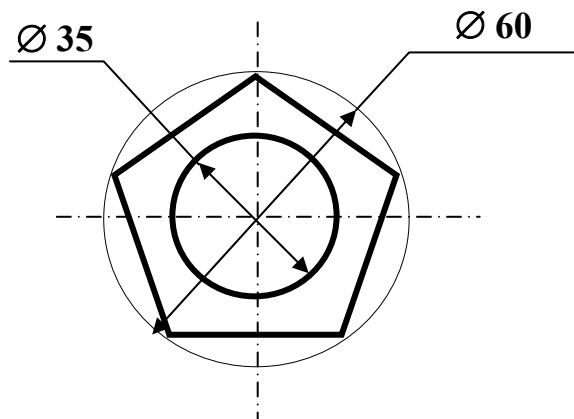
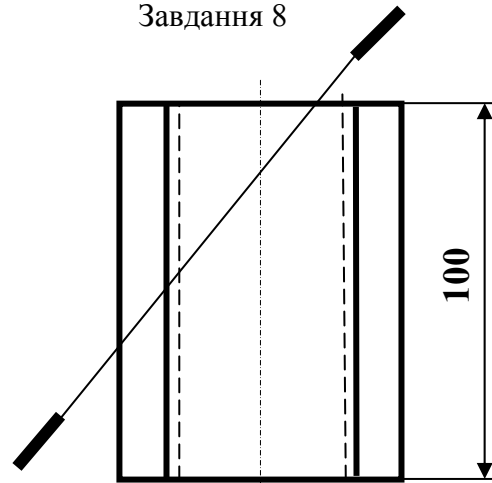
Завдання 6



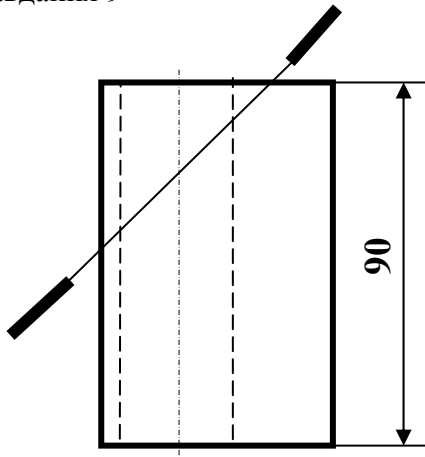
Завдання 7



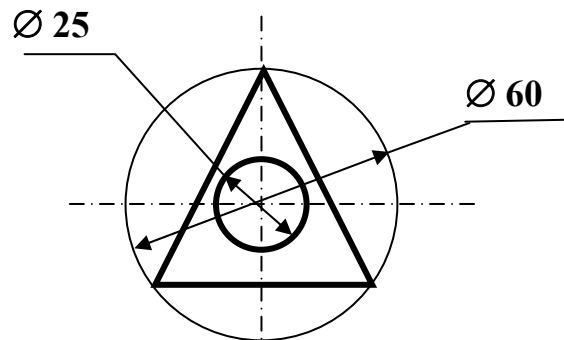
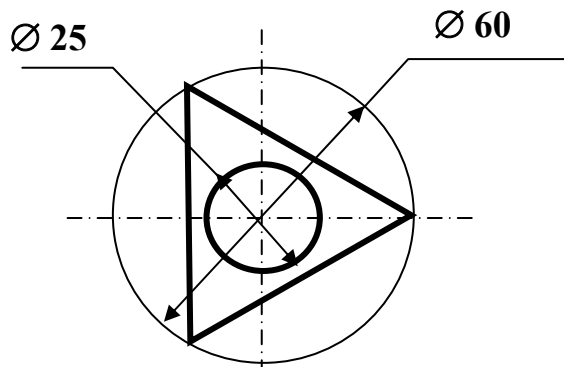
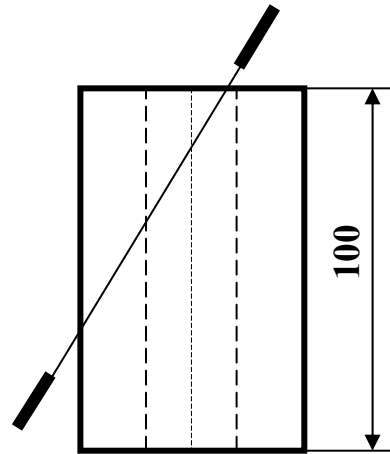
Завдання 8



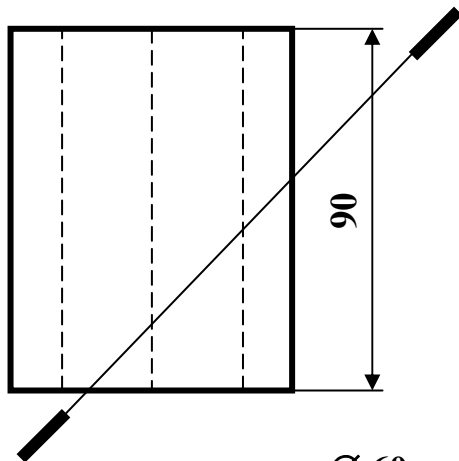
Завдання 9



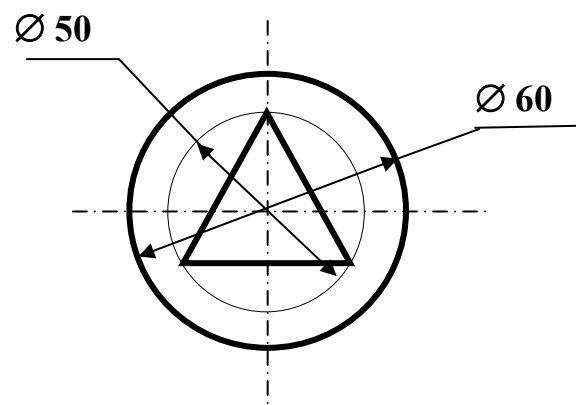
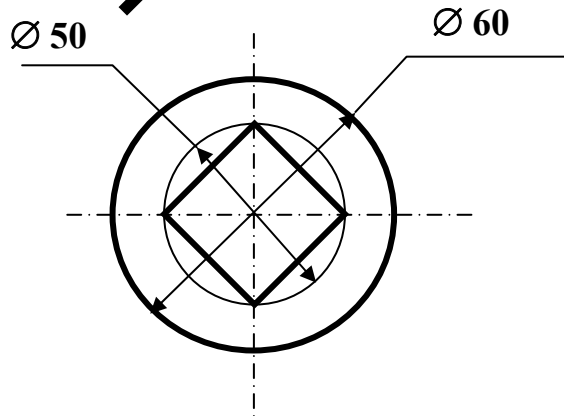
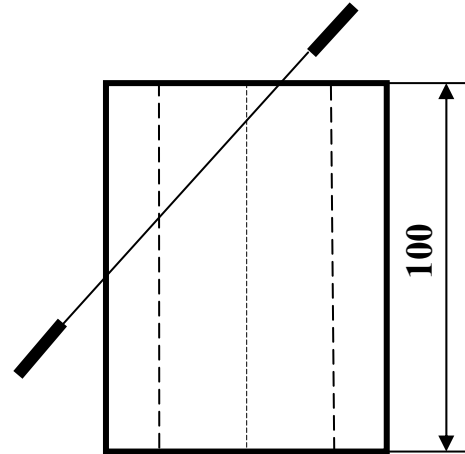
Завдання 10



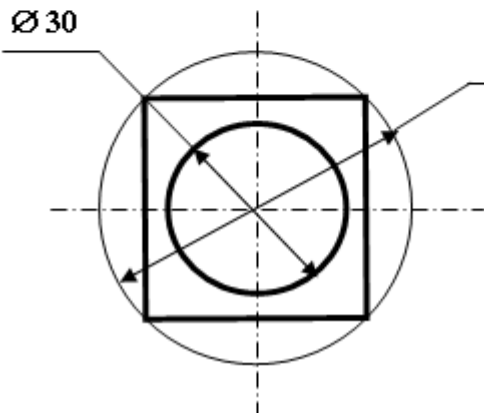
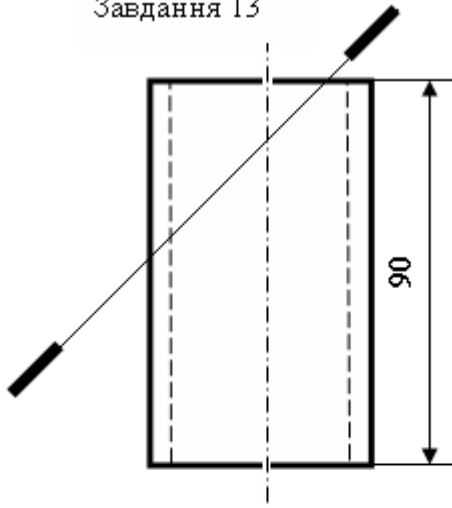
Завдання 11



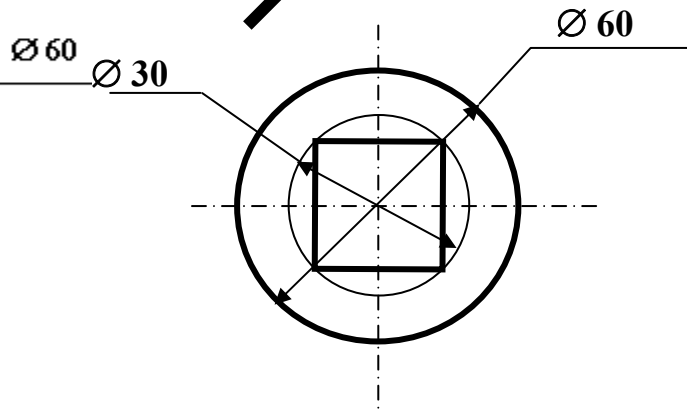
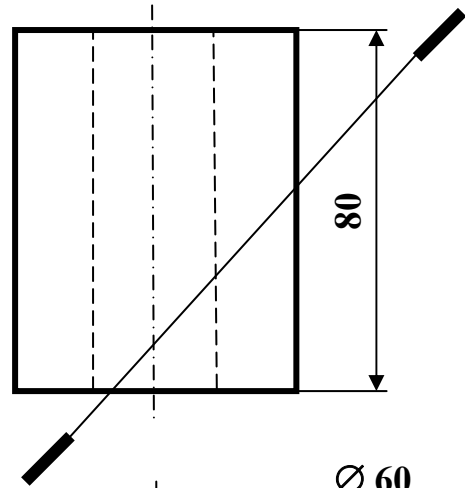
Завдання 12



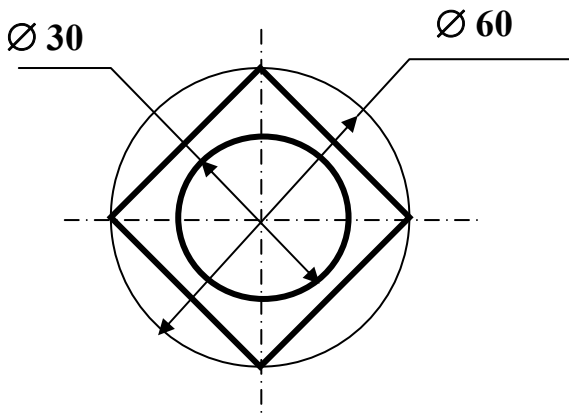
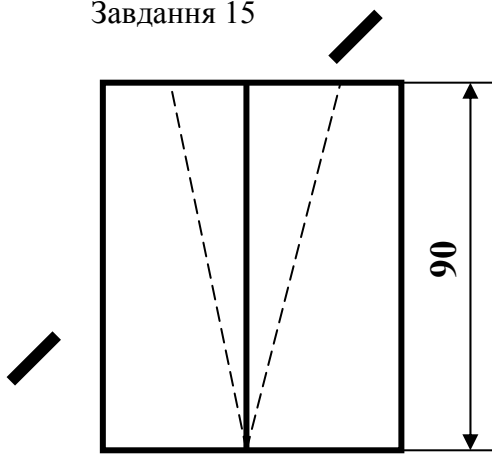
Завдання 13



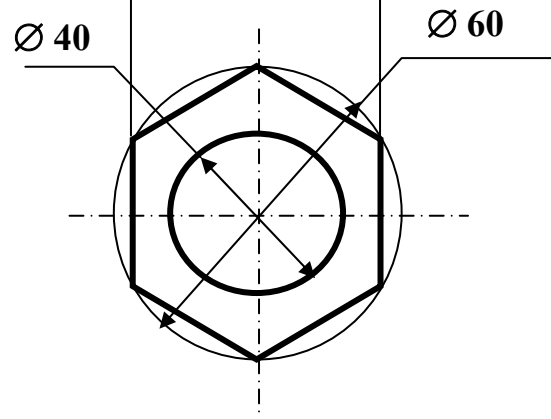
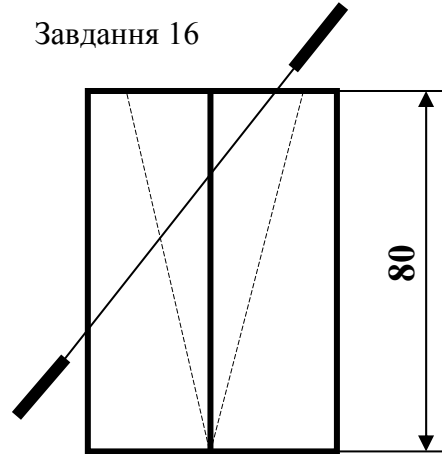
Завдання 14



Завдання 15

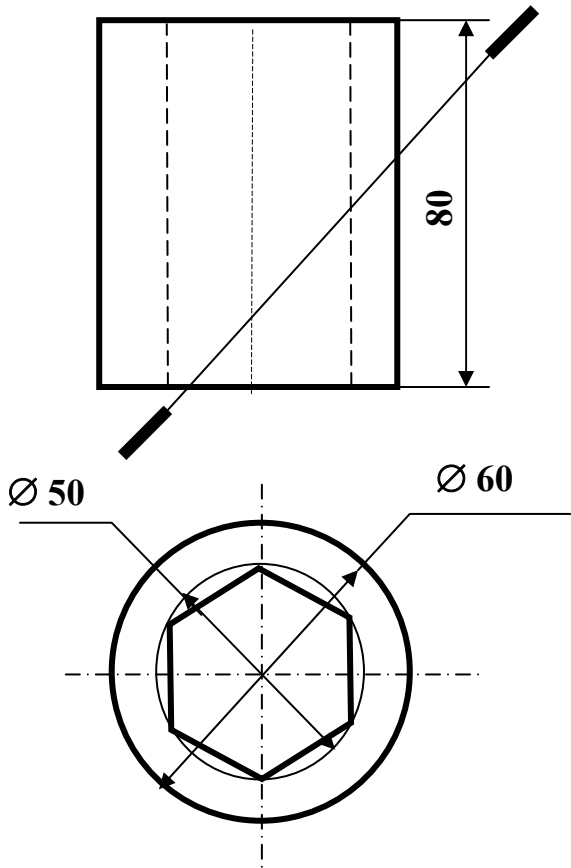


Завдання 16

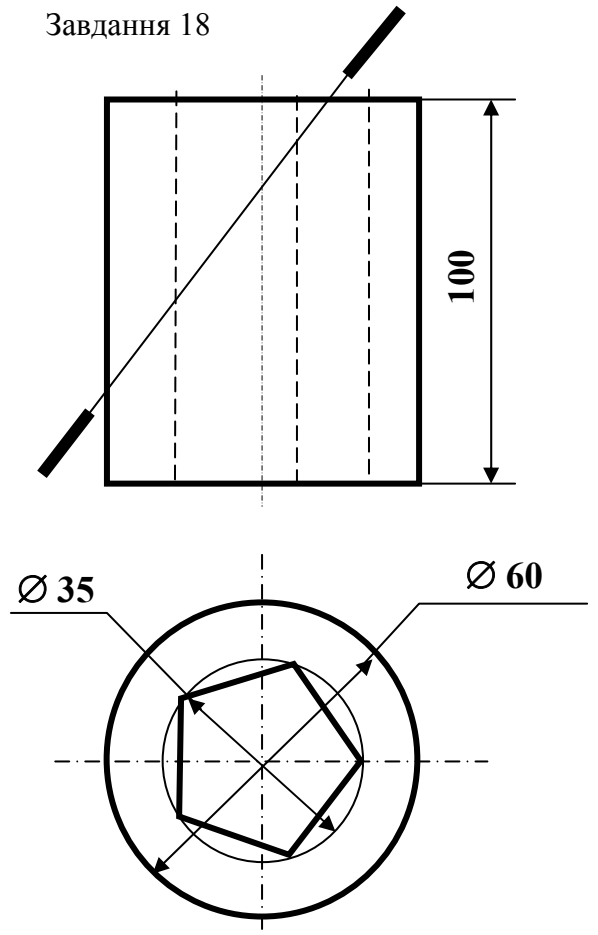




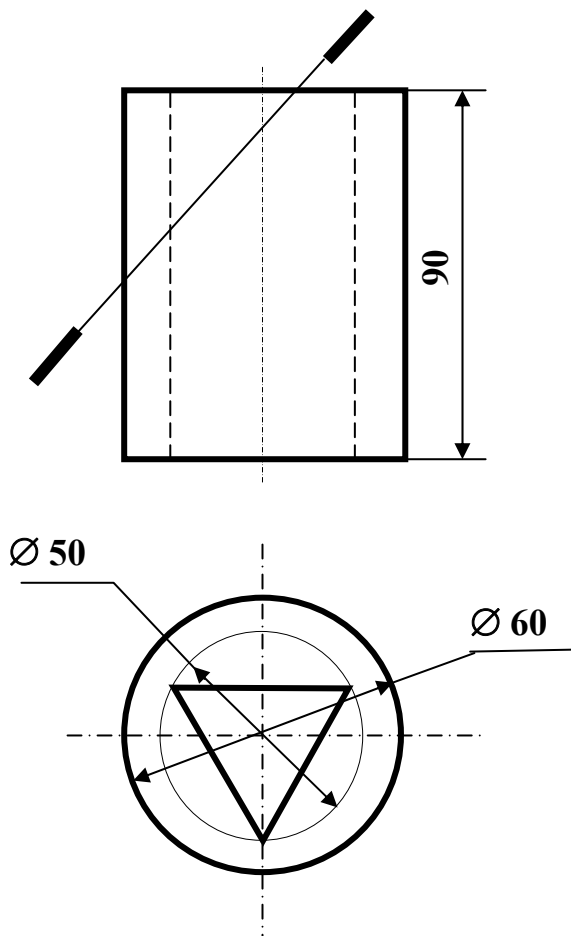
Завдання 17



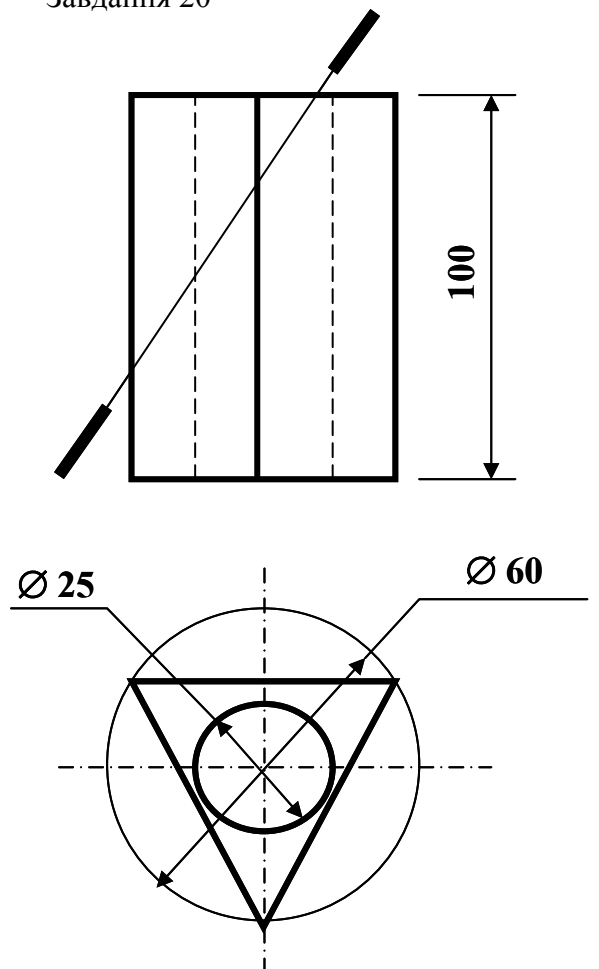
Завдання 18



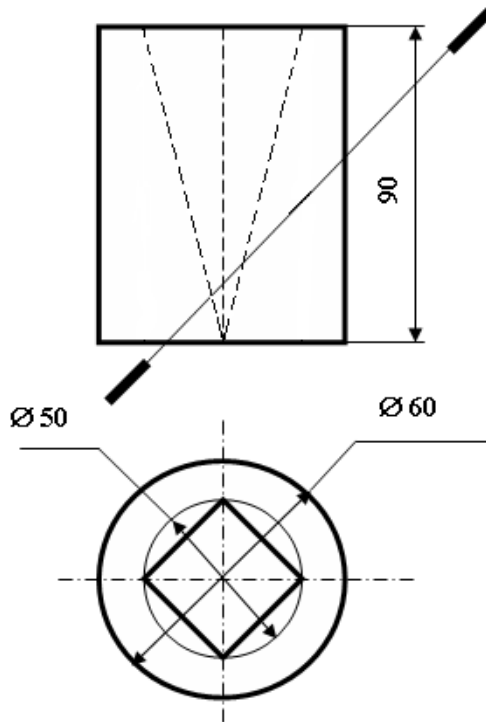
Завдання 19



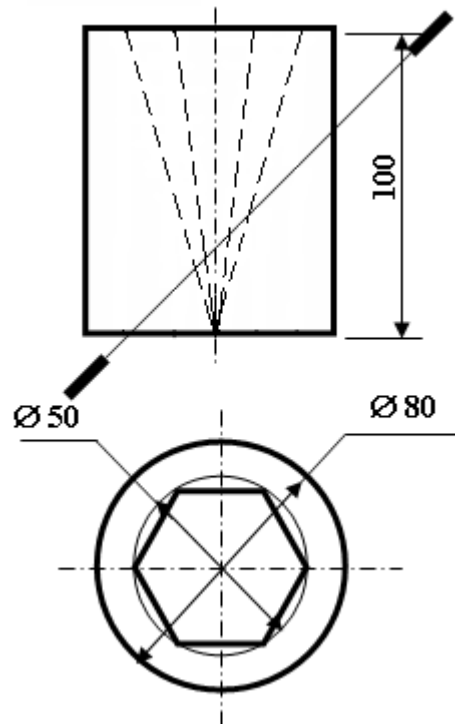
Завдання 20



Завдання 21



Завдання 22



## ЛІТЕРАТУРА

1 Гордон В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Очиевский. – М. : Высшая школа, 2002. – 271 с.

2 Інженерна та комп'ютерна графіка / В. Є. Михайленко [та ін.]. – К. : Вища школа, 2000. – 337 с.

3 Нарисна геометрія, практикум : навч. посібник / Антонович Є. А. [та ін.] ; за ред. проф. Є. А. Антоновича. – Львів : Світ, 2004. – 528 с.

*Навчальне видання*

**КРАСОВСЬКИЙ Сергій Савелович,  
ЖАРТОВСЬКИЙ Олександр Володимирович,  
КАБАЦЬКИЙ Олексій Володимирович.**

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

**(для студентів технічних спеціальностей)**

Редактор О. М. Болкова

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

108/2008. Підп. до друку 02.07.08. Формат 60 x 84/16.  
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 4,88. Обл.-вид. арк. 6,16.  
Тираж 100 прим. Зам. № 157.

Видавець і виготовлювач  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру  
серія ДК № 1633 від 24.12.03