

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
КАФЕДРА ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

Ю.С. Холодняк, Л.В.Кутовий

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи студентів
з дисципліни
„Опір матеріалів”.

Розділ:
**„Побудова епюр внутрішніх
силових факторів для балок”**
(для студентів усіх спеціальностей і форм навчання)

Затверджено
на засіданні кафедри
технічної механіки
Протокол № від

Краматорськ 2004

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни „Опір матеріалів”. Розділ „Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок” (для студентів усіх спеціальностей і форм навчання) / Укл. Л.В.Кутовий, Ю.С.Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 28 с.

Містять основні теоретичні відомості і приклади побудови епюр внутрішніх силових факторів для балок, також завдання для самостійного розв’язання і відповіді до них.

Укладачі:

Л.В.Кутовий, доц.

Ю.С.Холодняк, доц.

Рецензент

В.А.Овчаренко, доц.

Відп. за випуск

С.В.Подлесний, доц.

ЗМІСТ

	Вступ	4
1	Основні теоретичні відомості	4
2	Приклади побудови епюр	12
3	Завдання для самостійного розв'язання	20
4	Відповіді до завдань	21
	Список рекомендованої літератури	23

ВСТУП

Розв'язання переважної більшості задач опору матеріалів потребує визначення небезпечних, найбільш навантажених перерізів стрижнів, що входять до складу різноманітних конструкцій. Для визначення таких перерізів будують епюри внутрішніх силових факторів, тобто графічне зображення характеру їх змін за довжиною стрижня.

Найбільш складна побудова епюр в разі дії на стрижень поперечних навантажень у випадку розрахунку балок або рам.

Оскільки рама містить в собі декілька стрижнів, що жорстко скріплені один з одним, засвоєння прийомів побудови епюр слід починати саме з балок, тобто окремих стрижнів, на які діють поперечні навантаження. Набутий при цьому досвід значно полегшує сприйняття прийомів побудови епюр для рам.

Метою цих методичних вказівок є створення допоміжного матеріалу, який би комплексно та в подробицях освітлював процедуру побудови епюр для балок і нагадував студентам, особливо заочної форми навчання, про можливість самостійного засвоєння даного розділу. Саме такій меті і підпорядкований зміст цих вказівок. Вони містять необхідний теоретичний матеріал, ряд детально розібраних прикладів, завдання для самостійного розв'язування, відповіді до цих завдань, за допомогою яких студент зможе проконтролювати себе і виявити зроблені ним помилки.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Зовнішні навантаження, що діють на балку (рис.1, а), зводяться до зосереджених сил P , пар сил M і рівномірно чи нерівномірно розподілених за довжиною балки навантажень з інтенсивністю q .

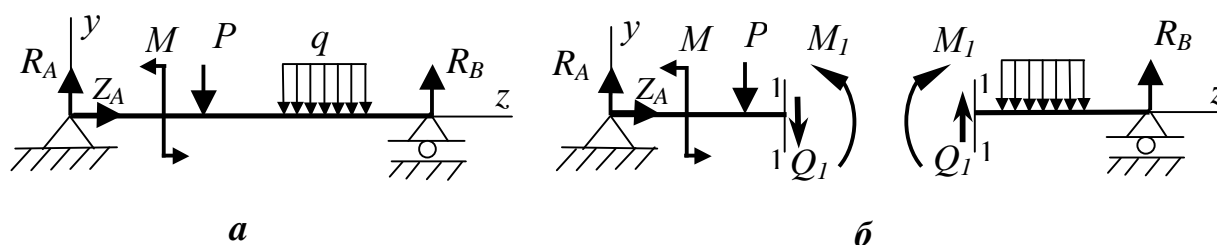


Рисунок 1

Розмірність сил P – ньютон (H) або кілоньютон (κH), розмірність моментів M – ньютон-метр ($H \cdot m$) або кілоньютон-метр ($\kappa H \cdot m$).

Рівномірно розподілені навантаження характеризуються інтенсивністю q , тобто величиною навантаження, що припадає на одиницю довжини балки, і виражаються у ньютонах на метр ($H/м$) або кілоньютонах на метр ($кН/м$). Інтенсивність нерівномірного розподілу навантаження змінюється за довжиною балки і позначається $q(z)$.

Способи обчислення опорних реакцій детально вивчають у курсі теоретичної механіки, тому зупинимося тут на деяких практичних питаннях.

1 Опори позначають буквами (наприклад, A і B). Три невідомі реакції (див. рис.1,а) можна знайти з наступних рівнянь рівноваги:

а) сума проєкцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю

$$\sum Z = 0 \text{ чи } \sum P_{KZ} = 0, \text{ звідки знаходять } H_A \text{ (чи } Z_A);$$

б) сума моментів усіх сил щодо шарніра A дорівнює нулю

$$\sum M_A = 0, \text{ звідки знаходять } R_B;$$

в) сума моментів усіх сил щодо шарніра B дорівнює нулю

$$\sum M_B = 0, \text{ звідки знаходять } R_A.$$

2 Якщо на балку діє розподілене навантаження, то для визначення реакцій її замінюють рівнодіючою, котра прикладена в центрі ваги цієї епюри і дорівнює площі епюри навантаження.

3 Знайдені реакції обов'язково варто перевірити, для чого зручно використовувати умову рівності нулю суми проєкцій всіх сил на вертикальну вісь $\sum Y = 0$, чи умову рівності нулю суми моментів усіх сил щодо якої-небудь точки C , відмінної від A і B , тобто $\sum M_C = 0$.

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки, наприклад, у перерізі I-I (див. рис. 1,б), можуть виникнути два зусилля: поперечна сила Q_1 і згинальний момент M_1 .

Поперечна сила Q дорівнює сумі проєкцій на перпендикуляр усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від розглядаємого перерізу щодо центра ваги цього перетину.

Візьмемо наступні правила знаків для Q й M у балках при згинанні.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком годинникової стрілки (рис. 2).

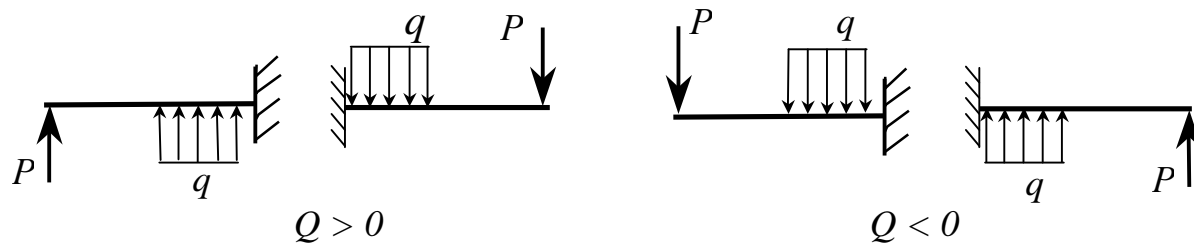


Рисунок 2

Згинальний момент M у перерізі вважається додатнім, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 3).

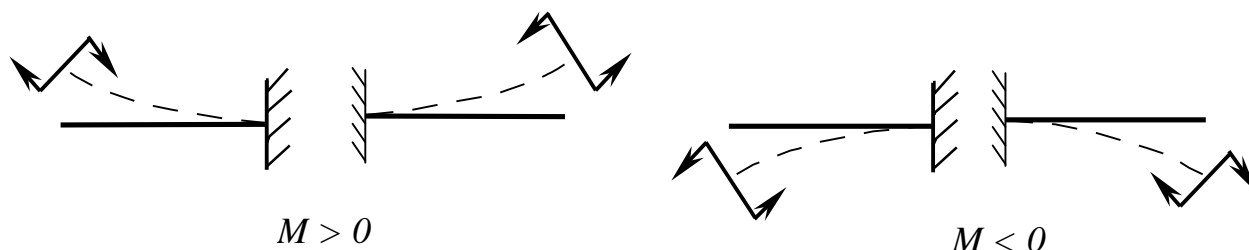


Рисунок 3

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах.

Розглянемо брус, який закріплений довільним чином (рис.4) і навантажений у загальному випадку розподіленим навантаженням інтенсивності $q = f(z)$.

Взятий напрямок для q , що збігається з віссю y , будемо вважати позитивним.

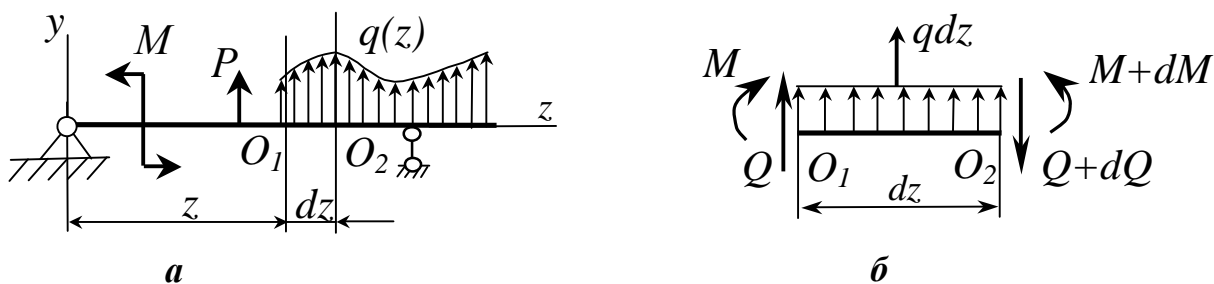


Рисунок 4

Позначимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий відрізок O_1O_2 довжиною dz (див. рис. 4,б). Він знаходиться в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, а також поперечних сил і згинальних моментів, прикладених у перетинах O_1 і O_2 .

Оскільки в загальному випадку внутрішні зусилля змінюються уздовж осі балки, то в перетині O_1 візьмемо їх рівними Q і M , а в перетині O_2 трохи

більшими: $Q + dQ$, $M + dM$. Внутрішні зусилля, як звичайно, зобразимо в позитивному напрямку. У межах малого відрізка dz будемо вважати навантаження q розподіленим рівномірно.

Складемо рівняння рівноваги елемента dz :

$$\sum P_{kz} = 0; \quad Q + qdz - (Q + dQ) = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; \quad Qdz + M + qdz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0 \quad (2)$$

З рівняння (1), скоротивши на Q , одержимо:

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (3)$$

З рівняння (2), скоротивши на M і нехтуючи членом $qdz \frac{dz}{2}$ як величиною другого порядку малості, знайдемо:

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (4)$$

Підставивши формулу (4) у формулу (3) одержимо залежність

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (5)$$

Співвідношення (3) ... (5) називають *диференціальними залежностями при згинанні*.

Зі співвідношень (3) ... (5) можна зробити деякі загальні висновки про характер епюр згинальних моментів M і поперечних сил Q і скласти наступні **правила** побудови епюр:

1 Розглянемо випадок, коли $q = 0$, тобто на розглянутій ділянці балки розподілене навантаження відсутнє.

Тоді відповідно до формули (3): $\frac{dQ}{dz} = q = 0$.

Після інтегрування формул (3) ... (5) одержимо:

$$Q = const = C_1, \quad M = C_1z + C_2.$$

З цих співвідношень випливає правило: на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q=0$), епюри Q обмежені прямими, паралельними базової лінії, а епюри M являють собою похилені прямі, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють Q (рис. 5).

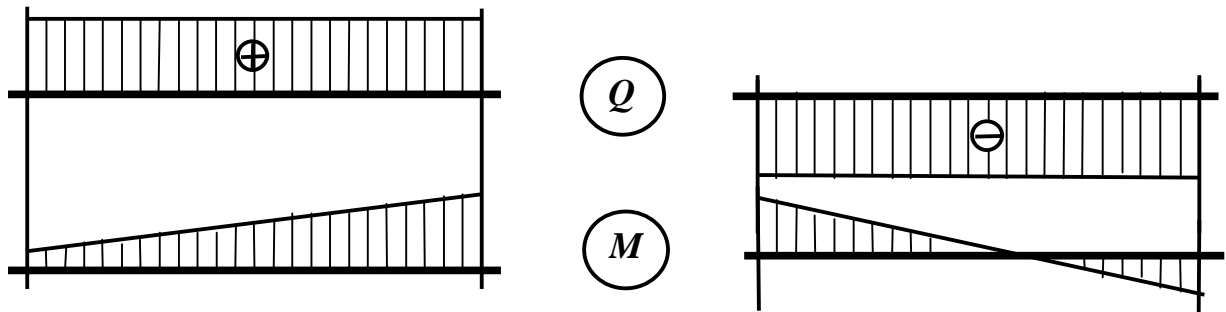


Рисунок 5

2 Якщо на деякій ділянці епюри:

а) $Q > 0$ (див. рис. 5, а), тобто $\text{tg } \alpha > 0$, то епюра моментів M зростає (при побудові епюри зліва направо, тобто уздовж позитивного напрямку осі z);

б) якщо $Q < 0$, то епюра моментів M убуває (див. рис. 5, б).

3 На ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження $q = \text{const} = C$ (рис. 6), епюра поперечної сили Q відповідно до формули (3) окреслена похилою прямою:

$$Q = Cz + C_1,$$

а епюра згинального моменту - квадратичною параболою:

$$M = C \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2.$$

Оскільки епюру M будуюмо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи спрямована назустріч дії розподіленого навантаження q (див. рис. 6).

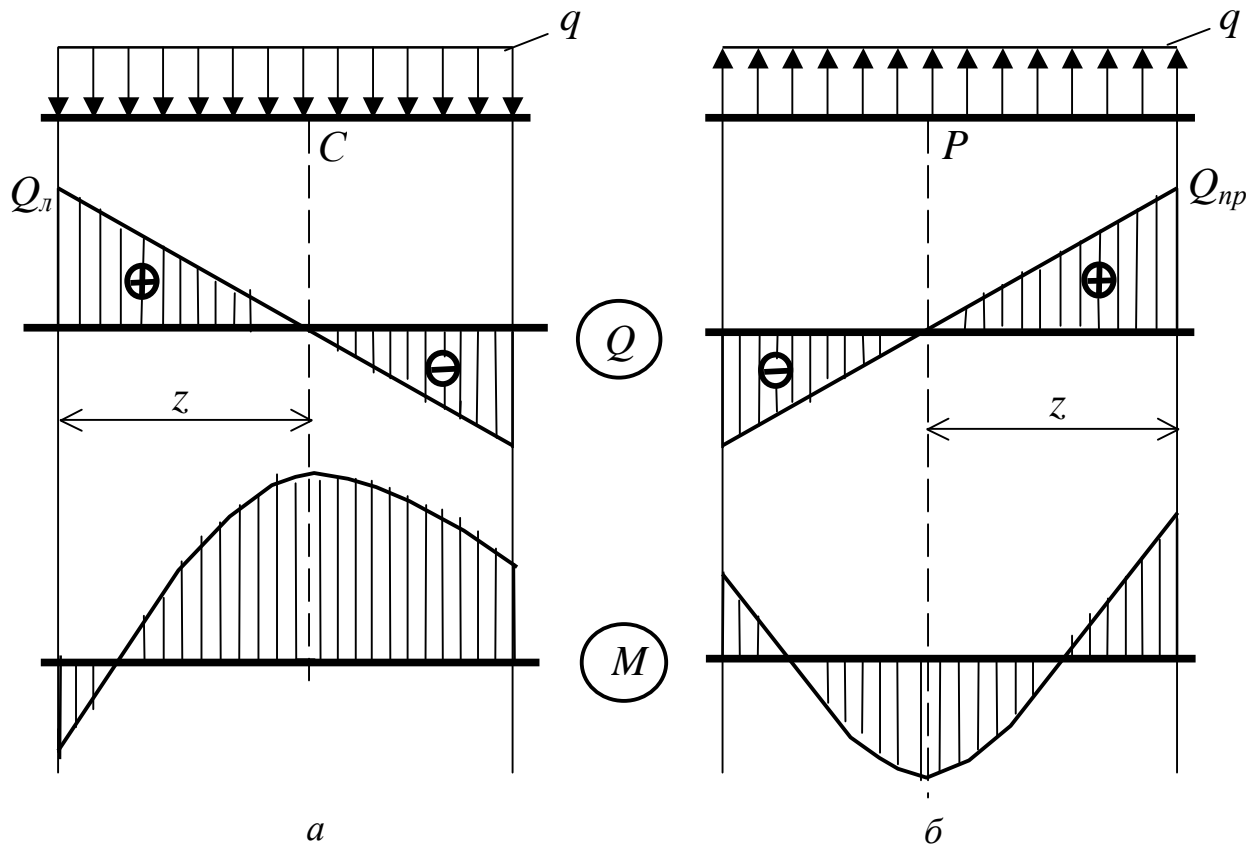


Рисунок 6

4 У перерізах, де $Q = 0$ (наприклад, переріз C на рис. 6) дотична до епюрі M паралельна базовій лінії, а значення згинаючого моменту M – екстремальне. Якщо Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{max}$ (див. рис. 6, а), а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{min}$ (див. рис. 6, б). Координату z перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулою

$$z = \frac{Q_l}{q} \quad \text{або} \quad z = \frac{Q_{np}}{q},$$

де Q_l та Q_{np} – значення поперечної сили відповідно до лівого або правого краю ділянки.

5 У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили (рис. 7) на епюрі Q будуть “стрибки” на величину цих сил з урахуванням їх знаків, а на епюрі M будуть злами, вістря яких спрямовані проти напрямку зосереджених сил. При цьому слід зазначити, що при побудові епюр зліва направо напрямок “стрибка” збігається з напрямком сили.

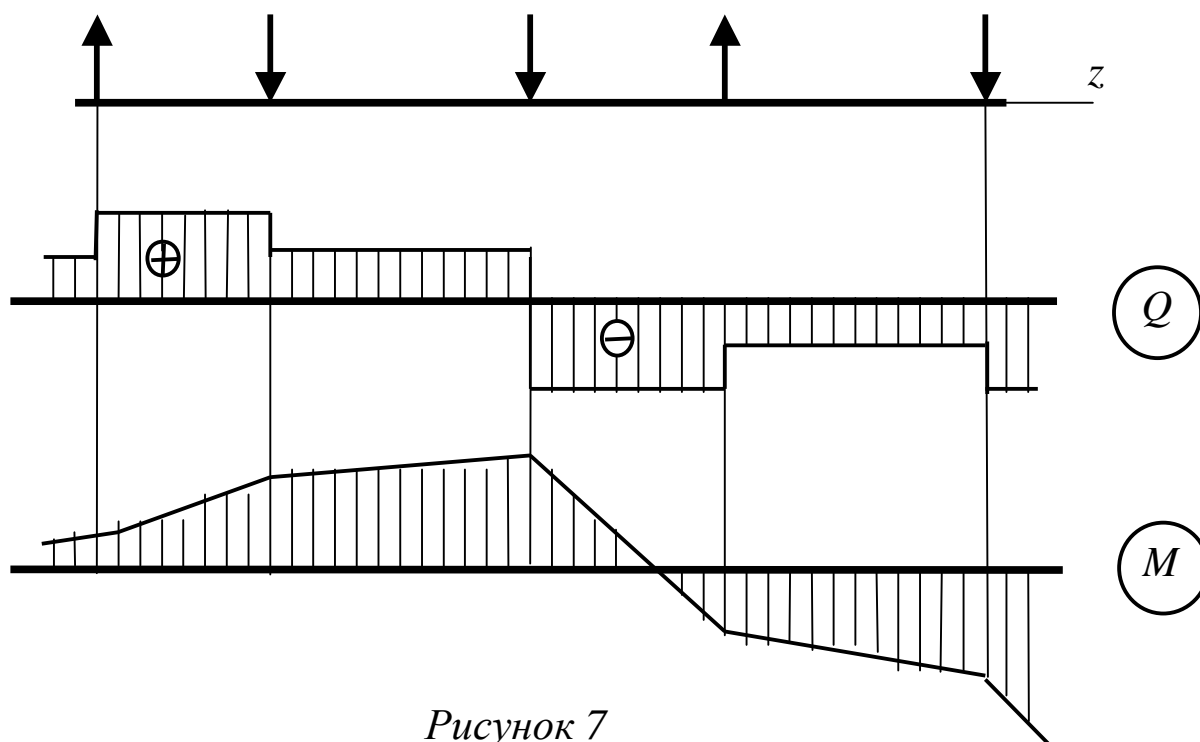


Рисунок 7

6 У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти (рис. 8), на епюрі M будуть “стрибки” на величину зовнішніх моментів з урахуванням їх знаків, причому лінії епюри M до стрибка і після нього паралельні, а на епюрі Q змін не буде.

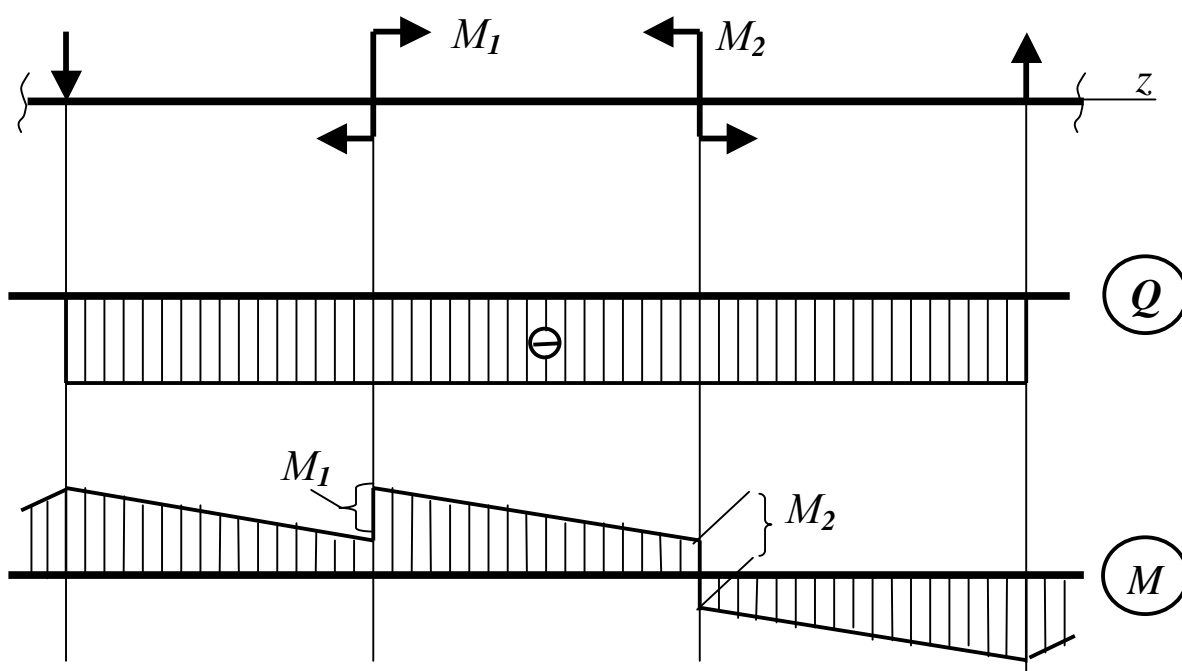


Рисунок 8

Слід, однак, відзначити, що, якщо в одному перерізі прикладені і сила, і момент, то сила викликає перелом і порушує паралельність.

Якщо на кінці консолі (рис. 9) чи в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі (переріз C на рис.9) згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту.

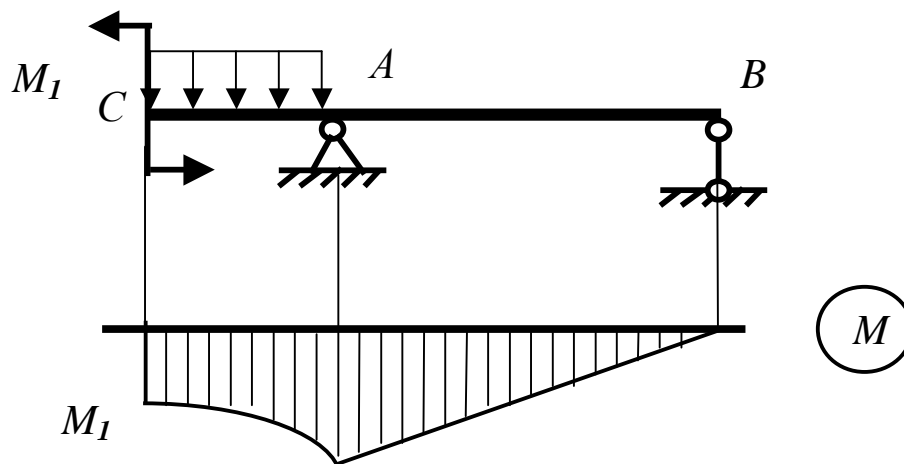


Рисунок 9

Якщо ж у шарнірній опорі зосереджений момент відсутній (див. рис. 9, переріз B), то на епюрі згинальних моментів $M = 0$, що має місце в більшості випадків.

Найбільш зручно будувати епюри Q і M за характерними перерізами. Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Можна рекомендувати наступний порядок побудови епюр:

1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки, але при цьому буде неможливо здійснити перевірку правильності побудови епюр).

2 Визначити характерні перерізи.

3 Обчислити значення Q в характерних перерізах, потім “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо) побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

4 Обчислити значення M в характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями.

Перевірка правильності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки “стрибків” і нахилів прямих на епюрі M .

2 ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ЕПЮР

Приклад 1. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис.10, а).

Позначимо на балці характерні перерізи (див. рис. 10, а) за правилами, які записані вище.

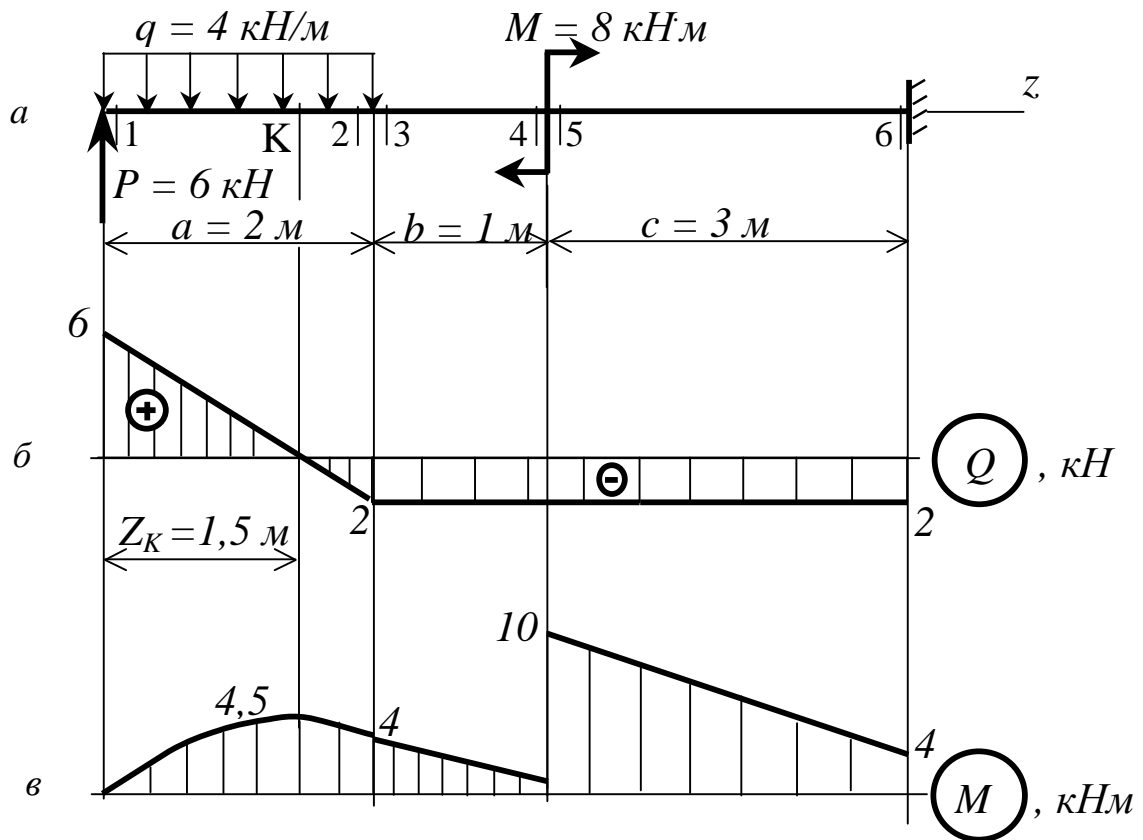


Рисунок 10

Визначимо поперечні сили в характерних перерізах:

$$Q_1 = P = 6\text{ кН}; \quad Q_2 = P - qa = 6 - 4 \cdot 2 = -2\text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_2 = -2\text{ кН}.$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_1 = P \cdot 0 = 0; \quad M_2 = P \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = P(a+b) - q \cdot a \left(\frac{a}{2} + b \right) = 6(2+1) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 \right) = 2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = 2 + 8 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = P(a+b+c) - q \cdot a \left(\frac{a}{2} + b + c \right) + M = 6(2+1+3) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + 3 \right) + 8 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перенесемо результати розрахунків на відповідні епюри у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів). Точки з'єднуємо суцільними лініями (див. рис. 10, б та 10, в) у відповідності до раніше розглянутих правил.

Аналіз побудови епюр

Як видно з епюри Q (див. рис. 10, б) у перерізі 1 має місце “стрибок” на величину сили $P = 6 \text{ кН}$. При чому (зверніть увагу) оскільки ми будували епюру зліва направо, то “стрибок” співпадає з напрямком сили. Далі (до перерізу 2) має місце поступово зниження поперечної сили Q до величини -2 кН . Між перерізами 3 ... 6 поперечна сила Q не змінюється не залежно від того, що при переході від перерізу 4 до перерізу 5 до балки прикладений зосереджений момент M .

Епюра згинальних моментів на ділянці 1...2 окреслена квадратичною параболою, а у перерізі K , де $Q = 0$, значення згинаючого моменту M має максимальну величину, тому що Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$. Для того, щоб знайти M_{max} , необхідно знати координату z перерізу, де $Q = 0$:

$$z = \frac{Q_1}{q} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ м}.$$

$$\text{Тоді} \quad M_{max} = P \cdot z_K - q \frac{z_K^2}{2} = 6 \cdot 1,5 - 4 \frac{1,5^2}{2} = 4,5 \text{ кНм}.$$

На ділянці 3...4 епюра M окреслена похилою прямою, оскільки епюра $Q < 0$. При переході від перерізу 4 до перерізу 5 епюра має “стрибок” на величину $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$. При чому оскільки відносно перерізу 5 момент M загинає балку догори, тому “стрибок” відкладаємо в позитивному напрямку.

Приклад 2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 11, а).

У цьому прикладі, як і в попередньому, балка закріплена тільки одним кінцем, тому будувати епюру краще з “вільного” кінця. При цьому реакції опори (защемлення) можна не знаходити. Позначимо на балці характерні перерізи за правилами, які записані вище.

Визначимо поперечні сили в характерних перерізах: $Q_1 = 0$;

Відносно перерізу 2 розподілене навантаження q_2 прагне повернути відсічену частину балки за ходом годинникової стрілки, тому поперечна сила буде позитивною.

$$Q_2 = q_2 c = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_4 = Q_2 = 4 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_4 + P = 4 + 8 = 12 \text{ кН}; \quad Q_6 = q_2 c + P - q_1 a = 2 \cdot 2 + 8 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

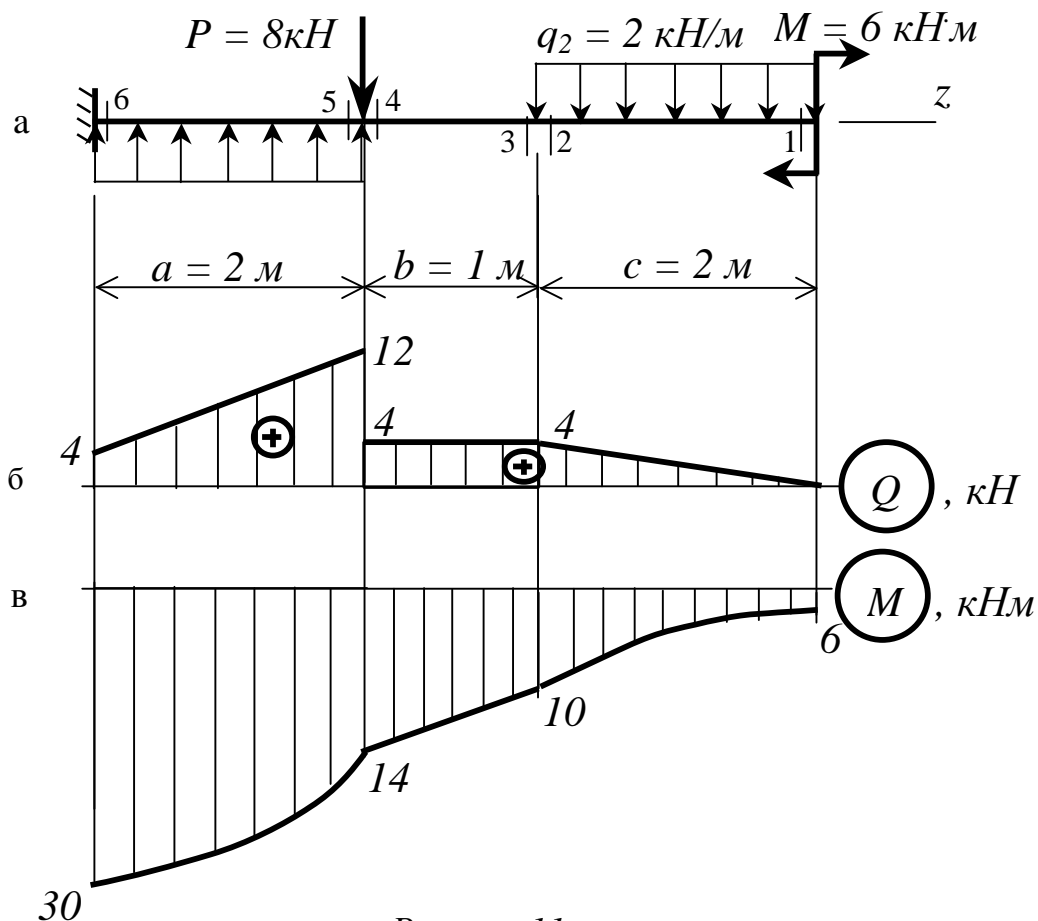


Рисунок 11

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах. У перерізі 1 зосереджений момент M загинає балку вниз, тому $M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

$$M_2 = -M - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} = -6 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -M - q_2 c \left(\frac{c}{2} + b \right) = -6 - 2 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 \right) = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -M - q_2 c \left(\frac{c}{2} + b + a \right) - P \cdot a + q_1 \frac{a^2}{2} = -6 - 2 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + 2 \right) - 8 \cdot 2 + 4 \frac{2^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо епюри поперечних сил (див. рис. 11, б) та згинальних моментів (див. рис. 11, в). При цьому треба мати на увазі що на ділянках 1...2 та 5...6 епюра згинальних моментів окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження.

Приклад 3. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки (рис. 12, а).

Перш за все, знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги:

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0: \quad -M - P \cdot a - q(b+c) \left(a + \frac{b+c}{2} \right) + R_B \cdot (a+b) = 0;$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0: \quad -M - R_A(a+b) + P \cdot b + q \frac{b^2}{2} - q \frac{c^2}{2} = 0;$$

$$\sum P_{kz} = 0: \quad Z_A = 0.$$

Тоді

$$R_A = \frac{1}{a+b} \left(-M + P \cdot b + q \frac{b^2}{2} - q \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{4} (-12 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1.5 - 2 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{1}{a+b} \left(M + P \cdot a + q(b+c) \left(a + \frac{b+c}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} (12 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 3.5) = 14 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot (b+c) + R_B = 5 - 9 - 2 \cdot (3+2) + 14 = 19 - 19 = 0.$$

Визначимо значення Q в характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 5 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = 5 - 9 = -4 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 - q \cdot b = -4 - 2 \cdot 3 = -10 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + R_B = -10 + 14 = 4 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot c = 4 - 2 \cdot 2 = 0;$$

Визначимо значення M в характерних перерізах балки:

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = M + R_A \cdot a = 12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = M + R_A \cdot (a + b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} =$$

$$= 12 + 5 \cdot (1 + 3) - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

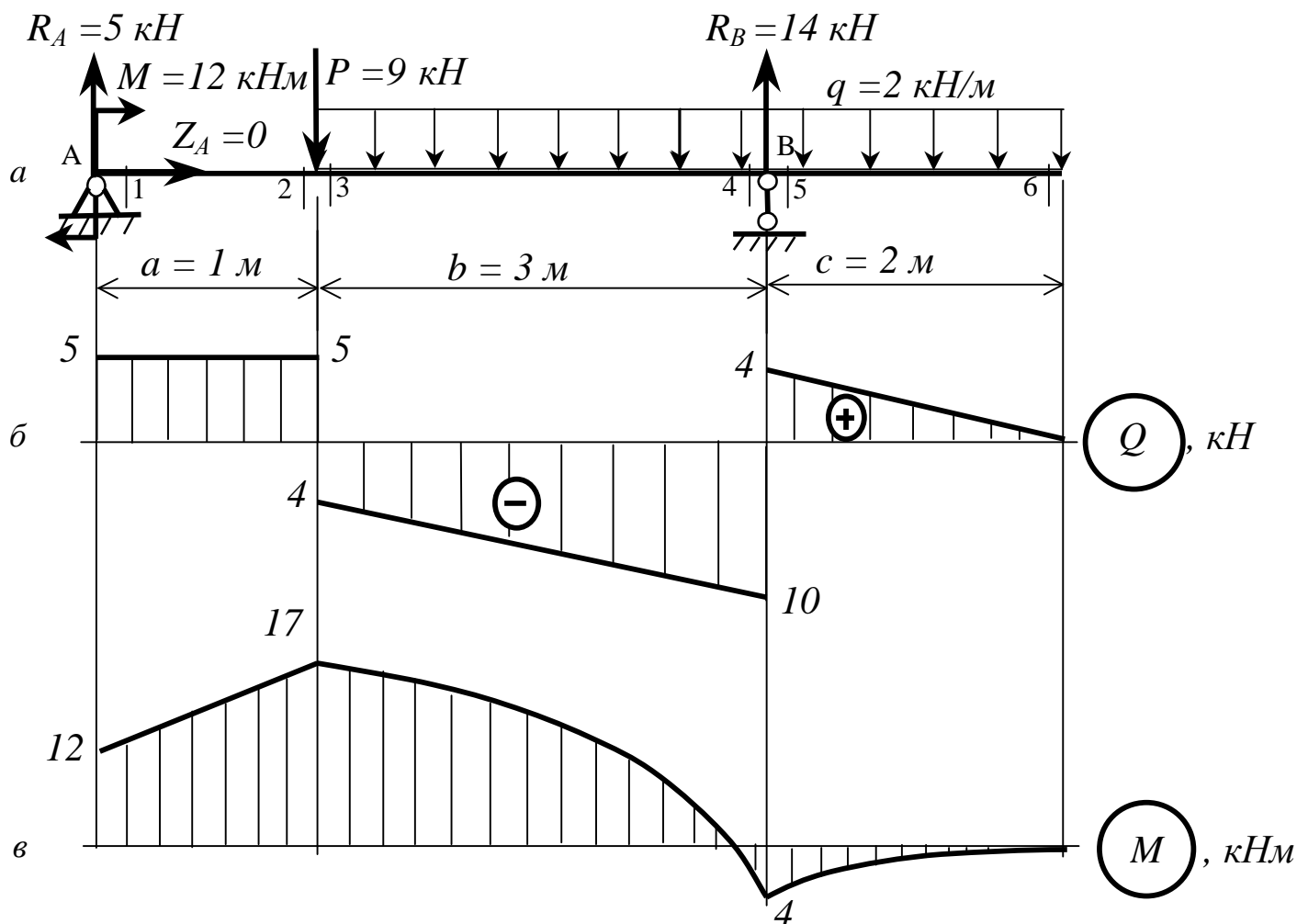


Рисунок 12

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = -q \frac{c^2}{2} = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кНм}.$$

Оскільки значення моментів в перерізі 5 співпадає при розрахунках з обох кінців, то будемо вважати, що епюра побудована вірно.

За визначеними даними побудуємо епюри поперечних сил (див. рис. 12, б) та згинальних моментів (див. рис. 12, в).

Аналіз побудови епюр

На епюрі Q (див. рис. 12, б) у перерізі 1 має місце “стрибок” уверх на величину сили $R_A = 5 \text{ кН}$, а між перерізами 2...3 має місце “стрибок” униз на величину сили $P = 9 \text{ кН}$ (оскільки ми будували епюру зліва направо, то “стрибки” співпадають з напрямками сил). Далі (до перерізу 4) має місце поступове зниження поперечної сили Q до величини -10 кН . Між перерізами 4...5 поперечна сила Q знов змінюється “стрибком” уверх на $R_B = 14 \text{ кН}$, а далі поступово знижується до 0 .

Для перевірки побудуємо епюру Q “рухаючись” від правого краю балки. У перерізі 6 $Q = 0$, а далі зростає до $Q = qc = 4 \text{ кН}$. Додатний знак сили Q_5 зв'язаний з тим, що зовнішня сила діє відносно перерізу 5 за напрямком годинникової стрілки. Реакція R_B повертає балку відносно перерізу 4 проти напрямку годинникової стрілки і тому “стрибок” на 14 кН буде здійснитись униз. Далі (до перерізу 3) поперечна сила буде знову зростати на величину $q \cdot b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$ і у перерізі 3 досягне величини -4 кН . Сила P повертає балку відносно перерізу 2 за напрямком годинникової стрілки, тому “стрибок” буде уверх на 9 кН . На ділянці 1...2 поперечна сила не буде змінюватись і буде дорівнювати 5 кН , а потім “стрибком” униз (реакція $R_A = 5 \text{ кН}$ повертає балку проти напрямку годинникової стрілки) досягне значення 0 .

Епюра згинальних моментів на ділянці 1...2 окреслена квадратичною параболою, а у перерізі K , де $Q = 0$, значення згинаючого моменту M має максимальну величину, тому що Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$. Для того, щоб знайти M_{max} , необхідно знати координату z перерізу, де $Q = 0$:

$$z = \frac{Q_1}{q} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ м.}$$

$$\text{Тоді } M_{max} = P \cdot z_K - q \frac{z_K^2}{2} = 6 \cdot 1,5 - 4 \frac{1,5^2}{2} = 4,5 \text{ кНм.}$$

На ділянці 3...4 епюра M окреслена нахиленою прямою, оскільки епюра $Q < 0$. При переході від перерізу 4 до перерізу 5 епюра M має “стрибок” на величину $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$. При чому оскільки відносно перерізу 5 момент M загинає балку догори, тому “стрибок” відкладаємо в позитивному напрямку.

Приклад 4. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки (рис. 13, а).

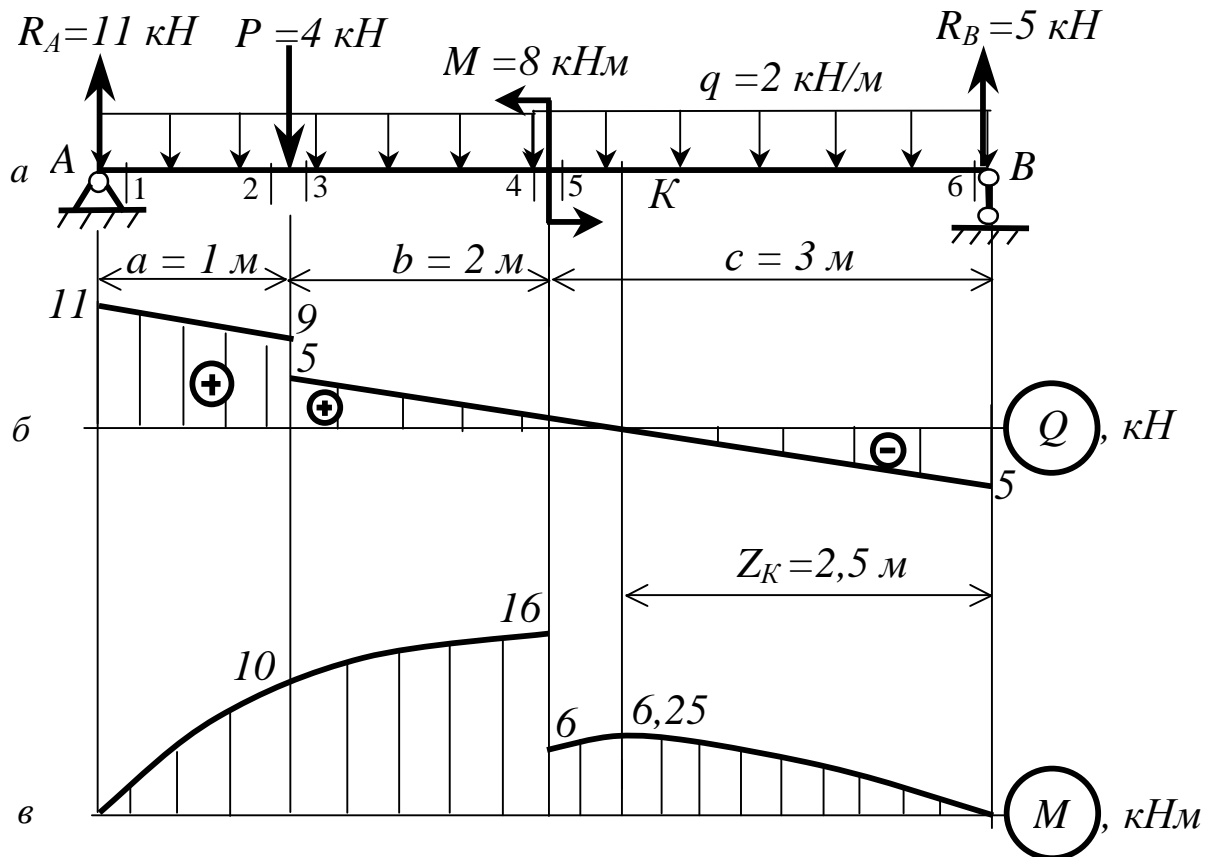


Рисунок 13

Розв'язання цього прикладу аналогічно попередньому.

Визначимо опорні реакції балки (рис. 13, а). Оскільки на балку діють тільки вертикальні сили, то горизонтальна реакція відсутня.

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; -P \cdot a + M - q \frac{(a+b+c)^2}{2} + R_B(a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{a+b+c} \left(P \cdot a - M + q \frac{(a+b+c)^2}{2} \right) = \frac{1}{6} (4 \cdot 1 - 10 + 2 \cdot 6 \cdot 3) = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0; -R_A(a+b+c) + P \cdot (b+c) + M + q \frac{(a+b+c)^2}{2} = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{a+b+c} \left(P(b+c) + M + q \frac{(a+b+c)^2}{2} \right) = \frac{1}{6} (4 \cdot 5 + 10 + 2 \cdot 6 \cdot 3) = 11 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A^y - P - q \cdot (a+b+c) + R_B = 16 - 16 = 0.$$

Визначимо значення Q в характерних перерізах балки (див. рис.13, а):

$$Q_1 = R_A = 11 \text{ кН}; \quad Q_2 = R_A - q \cdot a = 11 - 2 \cdot 1 = 9 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = 9 - 4 = 5 \text{ кН};$$

Оскільки на ділянці 3...6 немає інших сил крім розподіленого навантаження, то еюра Q має вигляд похиленої прямої (наявність згинального моменту M на епюрі Q не позначається):

$$Q_6 = Q_5 - q(b + c) = 5 - 2 \cdot 5 = -5 \text{ кН};$$

Визначимо значення M в характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 11 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = R_A \cdot (a + b) - P \cdot b - q \frac{(a + b)^2}{2} =$$

$$= 11 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 - M = 16 - 10 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Останню частину епюрі M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = R_B \cdot c - q \frac{c^2}{2} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН}.$$

Тобто еюра побудована вірно.

Аналізуючи епюру Q бачимо, що в перерізі K , де $Q = 0$, значення згинаючого моменту M має максимальну величину, тому що Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$.

Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{max}$:

$$z_K = \frac{Q_6}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м};$$

$$M_K = M_{max} = R_B \cdot z_D - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо епюри поперечних сил (див. рис. 13,б) та згинальних моментів (див. рис. 13, в).

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

На рисунку 14 зображені завдання для їх самостійного розв'язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях взяті однакові числові значення величин: $a = b = c = 2 \text{ м}$; $P = 12 \text{ кН}$; $q = 8 \text{ кН/м}$; $M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Завдання розташовані таким чином, щоб надати студентам можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого завдання до останнього.

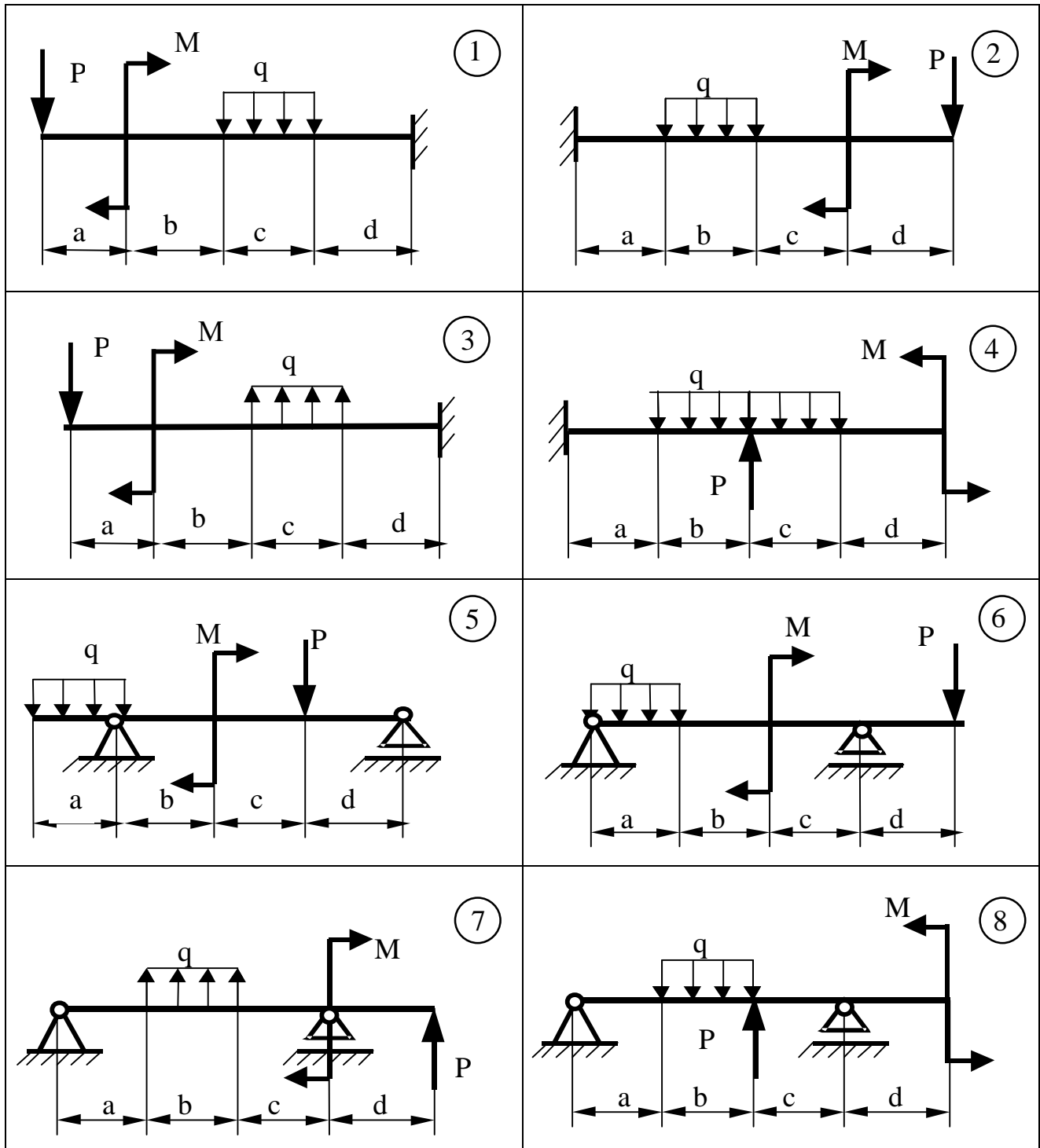


Рисунок 14

4 ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ

Відповіді до завдань, що наведені на рисунку 15.

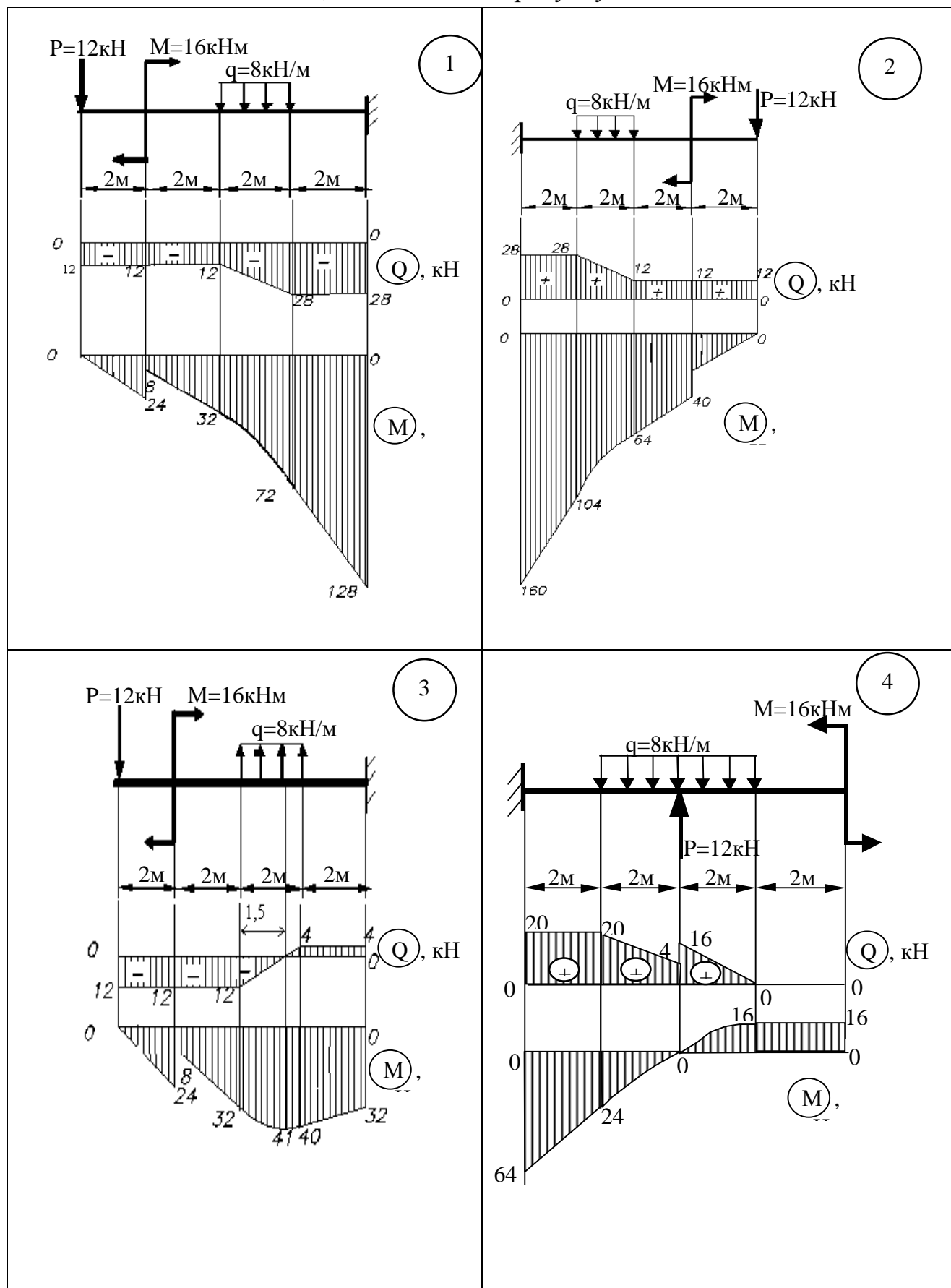


Рисунок 15

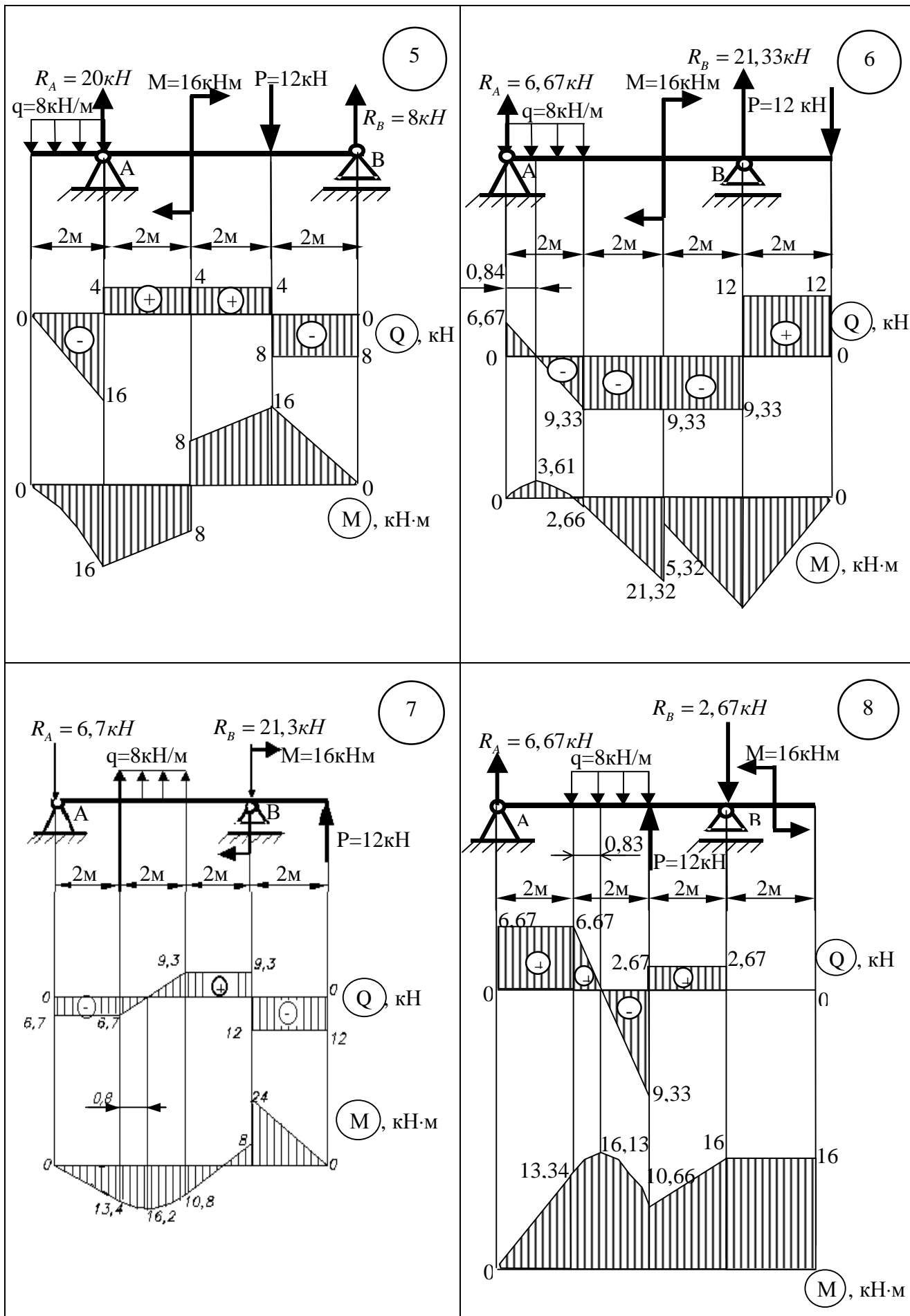


Рисунок 15, аркуш 2

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.

2 Дарков А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.

3 Ковтун В.В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: Навчальний посібник / В.В. Ковтун, В.С. Павлов, О.А. Дорофєєв. – Львів: Афіша, 2002. – 280 с.

4 Ицкович Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие для вузов / Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров; Под ред. Л.С. Минина. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.

