

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ  
ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ  
АКАДЕМИЯ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ “СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ”**  
(для студентов заочной формы обучения специальности “Информационные  
технологии проектирования”)

У т в е р ж д е н о  
на заседании кафедры  
технической механики.  
Протокол № 15 от 23.03 2000г

Краматорск 2000

## УДК 539. 3/6

Методические указания к контрольным работам по дисциплине “Соппротивление материалов ” (для студентов заочной формы обучения специальности “Информационные технологии проектирования”) /Сост. Овчаренко .- Краматорск, ДГМА, 2000

Содержатся программа, рекомендуемая литература, задания по контрольным работам, которые выполняют студенты, общие методические указания по выполнению контрольных работ, примеры их решения, экзаменационные вопросы и типы экзаменационных задач по курсу.

Составитель:                    доц. В.А. Овчаренко

Рецензент:                      доц. Т.П. Зинченко

Ответственный за выпуск:    доц. С.В. Подлесный

# 1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА.

## *1.1 Введение.*

Задачи курса “ Соппротивление материалов ”. Связь курса с общенаучными, инженерными и специальными дисциплинами. Реальный объект и расчетная схема. Основные гипотезы о деформируемом теле. Определение стержня, оболочки, массивного тела. Внешние силы и их классификация. Внутренние силы и метод их определения (метод сечения). Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях тела. Классификация типов нагружения тела по внутренним силовым факторам. Напряжение полное, нормальное и касательное.

## *1.2 Растяжение и сжатие.*

Растяжение и сжатие прямого стержня. Напряжение в поперечных сечениях. Деформации продольные и поперечные. Закон Гука для абсолютной и относительной деформации при растяжении (сжатии). Модуль упругости  $E$  и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Определение продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях прямого стержня и осевых перемещений этих сечений в различных случаях нагружения стержня осевыми силами. Построение соответствующих эпюр. Механические свойства материалов при растяжении и сжатии. Расчёты на прочность и жёсткость при растяжении и сжатии. Коэффициент запаса. Типы задач при расчёте на прочность, проверка на прочность, подбор сечений и определение допускаемой нагрузки.

## *1.3 Теория напряженного и деформируемого состояния.*

Напряженное состояние в точке. Линейное (одноосное), плоское и объемное напряженные состояния. Главные площадки и главные напряжения. Определение нормальных и касательных напряжений на любых наклонных площадках при линейном и плоском напряженных состояниях. Прямая и обратная задачи плоского напряженного состояния. Аналитическое и графическое решения (с помощью круга Мора) прямой и обратной задач. Объемная деформация. Обобщенный закон Гука.

## *1.4 Критерии прочности.*

Задачи теорий (критериев) прочности. Гипотезы возникновения пластических деформаций и разрушения. Эквивалентные напряжения. Классические критерии прочности: критерий наибольших нормальных напряжений; критерий наибольших касательных напряжений; критерий удельной потенциальной энергии формоизменения; критерий Мора. Пределы применимости классических теорий прочности. Последовательность расчета конструкций с использованием теорий прочности.

### **1.5 Сдвиг (срез) и кручение.**

Условия нагружения стержня, приводящие к деформации сдвига или среза. Напряжения при сдвиге (срезе). Деформация чистого сдвига. Закон Гука при чистом сдвиге. Модуль упругости 2-го рода. Условия нагружения стержня, вызывающие деформацию кручения. Эпюры крутящих моментов. Напряжения в поперечных сечениях круглых стержней. Деформации при кручении. Расчеты на прочность и жесткость при кручении.

### **1.6 Геометрические характеристики поперечных сечений.**

Статические моменты плоских фигур. Определение положения центра тяжести плоской фигуры. Осевые, центробежный и полярный моменты инерции. Моменты инерции простейших фигур. Зависимость между моментами инерции для параллельных осей. Главные оси и главные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей плоской фигуры, вычисление величин главных моментов инерции.

### **1.7 Изгиб прямых брусев.**

Опоры и опорные реакции. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балок при изгибе. Дифференциальные зависимости между интенсивностью нагрузки  $q$ , поперечной силой и изгибающим моментом. Чистый и поперечный изгиб в одной из главных плоскостей бруса. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси изогнутого бруса при чистом изгибе. Определение нормальных напряжений. Распространение выводов чистого изгиба на поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность при изгибе. Полная проверка прочности при изгибе. Рациональные сечения балок.

### **1.8 Потенциальная энергия деформации и общие методы определения перемещений.**

Потенциальная энергия деформации бруса при различных случаях нагружения. Выражение потенциальной энергии деформации бруса через внутренние силовые факторы. Теорема о взаимности работ и взаимности перемещений. Теорема Кастилиано. Интеграл Мора для определения перемещений произвольно нагруженных брусев. Численные методы определения перемещений.

### **1.9 Статически неопределимые системы**

Понятие о степенях свободы и связях. Степень статической неопределимости системы. Метод сил. Канонические уравнения. Выбор основной системы, требования предъявляемые к ней. Расчет статически неопределимых балок. Особенности их расчета. Определение перемещений статически неопределимых систем.

### ***1.10 Устойчивость равновесия деформируемых систем***

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Виды равновесия. Критическая нагрузка. Устойчивость сжатых стержней. Формула Эйлера при различных случаях опорных закреплений и пределы ее применимости. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. Формула Ф.С.Ясинского. Расчет по коэффициенту уменьшения допускаемых напряжений.

### ***1.11 Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени***

Современные представления о прочности материалов при напряжениях, циклически изменяющихся во времени. Механизм усталостного разрушения. Кривая усталости и предел выносливости. Характеристики циклов переменных напряжений. Влияние на выносливость качества поверхности, наклепа и окружающей среды. Концентрация напряжений и абсолютные размеры как факторы, влияющие на выносливость. Эффективные коэффициенты концентрации при напряжениях, изменяющихся во времени. Диаграммы предельных напряжений при асимметричных циклах. Коэффициент запаса прочности при переменных напряжениях. Понятие о повышении выносливости конструктивными и технологическими мероприятиями.

### ***1.12 Список рекомендуемой литературы.***

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. -М.: Наука, 1986.- 612 с.
2. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - К.- Вища школа, 1988. - 775 с.
3. Дарков А.В. Сопротивление материалов. -М. - Высш. Школа, 1989. - 624 с.
4. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов -М.: Наука, 1976. - 670 с.
5. Качурин В.К. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов.- М.: Наука, 1970. - 432 с.
6. Писаренко Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов - Киев. : Наукова думка. 1988.- 704 с.
7. Ободовский Б.А. Пособие по сопротивлению материалов в примерах и задачах. - Харьков: ХГУ, 1987. - 383 с.
8. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. - М.: Высшая школа. 1974. - 392 с.
9. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторные работы по сопротивлению материалов. - М.: -Наука.1975. - 284 с.

Перед выполнением контрольных работ необходимо изучить программный материал курса по одному из выше рекомендуемых учебников:

## 2 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

### 2.1 Порядок выполнения контрольных работ.

1. Студент заочной формы обучения выполняет две контрольные работы. Контрольная работа № 1 содержит пять задач, а. № 2 – четыре задачи.

2. Номер варианта задачи соответствует трем последним цифрам учебного шифра студента - номера зачетной книжки. Первая цифра указывает номер столбца первой таблицы, вторая - номер столбца второй таблицы, третья - номер схемы.

3. Контрольные работы должны выполняться студентом самостоятельно после изучения соответствующей темы.

4. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради или на скрепленных листах 11 формата. На первой странице указывается номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента, учебный шифр, соответствующий номеру зачетной книжки, дата сдачи работы в деканат.

5. Для каждой задачи должно быть написано её условие с данными, соответствующими варианту, выполнен в некотором масштабе рисунок схемы, на котором должны быть проставлены все заданные величины. Решение должно сопровождаться краткими последовательными объяснениями.

6. Исправление, отмеченных рецензентом ошибок, следует выполнять в той же тетради на страницах, следующих за решением последней задачи.

### 2.2. Контрольная работа №1 *Растяжение и изгиб стержней.*

#### 2.2.1 Задача 1.

Для стального ступенчатого стержня необходимо построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить абсолютное удлинение (укорочение) стержня.

Данные для решения задачи взять из табл.1 и 2, номер схемы - из рис.1.

Таблица 1

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а, м	0.8	0.5	1.0	1.2	0.5	0.4	0.2	0.5	0.8	0.6
б, м	0.2	0.2	0.4	0.6	0.6	0.8	0.4	0.6	0.6	0.4
с, м	0.6	0.4	0.8	0.8	0.3	0.6	0.8	0.8	0.4	0.8

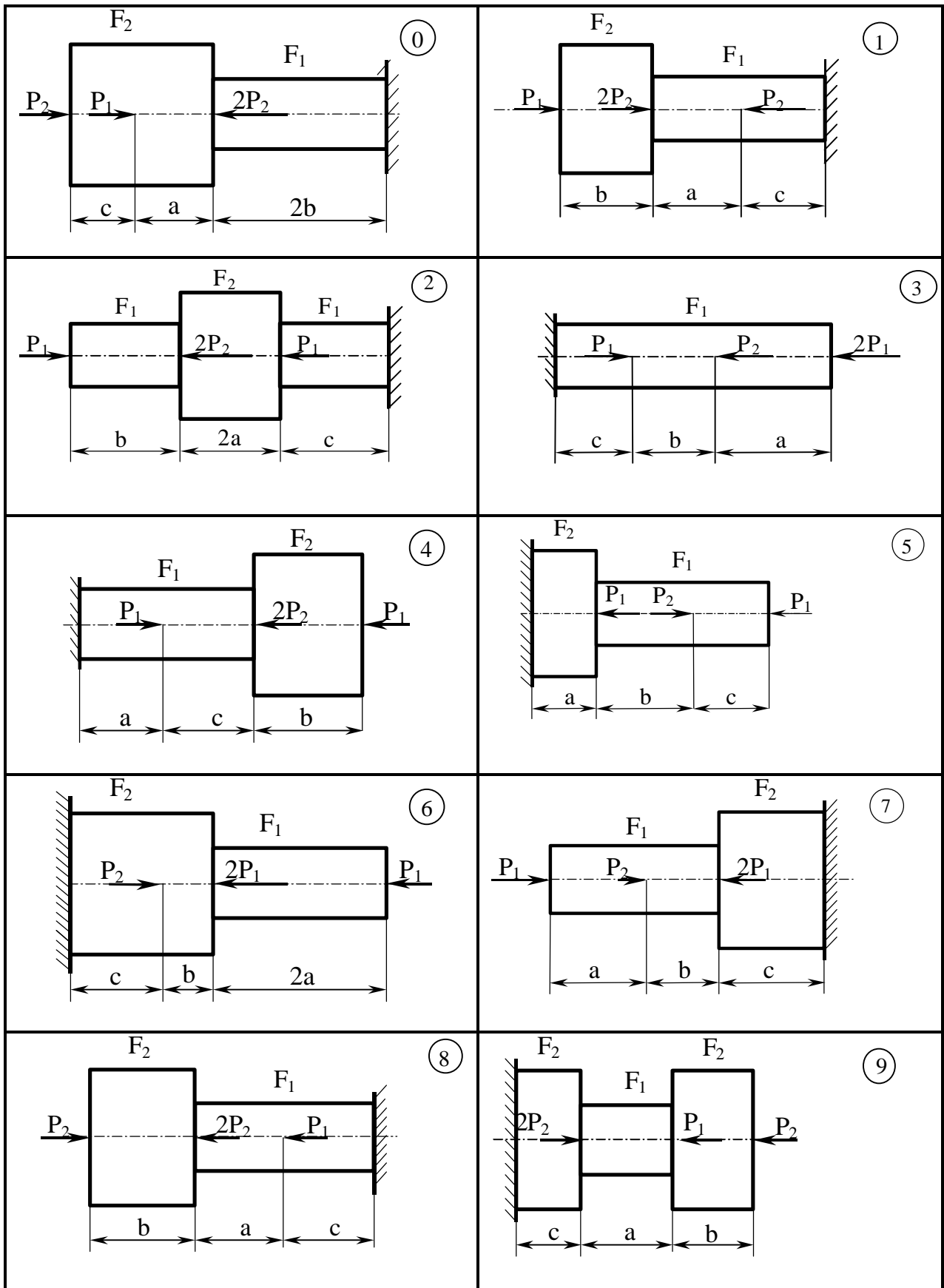


Рисунок 1  
Схемы к задаче 1

Таблица 2

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1$ , кН	200	260	240	220	280	300	250	280	260	300
$P_2$ , кН	300	150	150	300	200	150	120	200	140	120
$F_1$ , см <sup>2</sup>	10	15	20	8	16	10	15	12	14	12
$F_2$ , см <sup>2</sup>	20	20	25	20	24	25	25	24	20	20

### 2.2.1.1 Указания к выполнению задачи 1

Сечениями, где приложены внешние силы, стержень разбивается на участки, в пределах которых продольные силы постоянны. Рассекая каждый участок и рассматривая равновесие отсеченной части стержня, не содержащей заделку, определяют величины продольных сил. Построив график изменения продольной силы по длине стержня, получим эпюру продольных сил на каждом участке.

По формуле  $\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}$  ( $N_i$  – продольная сила на  $i$ -том участке,  $F_i$  –

площадь поперечного сечения на  $i$ -том участке) определить нормальные напряжения и построить эпюру (напряжения следует определять в МПа)

По формуле  $\Delta l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i}$  определяется удлинение стержня (здесь  $N_i$  –

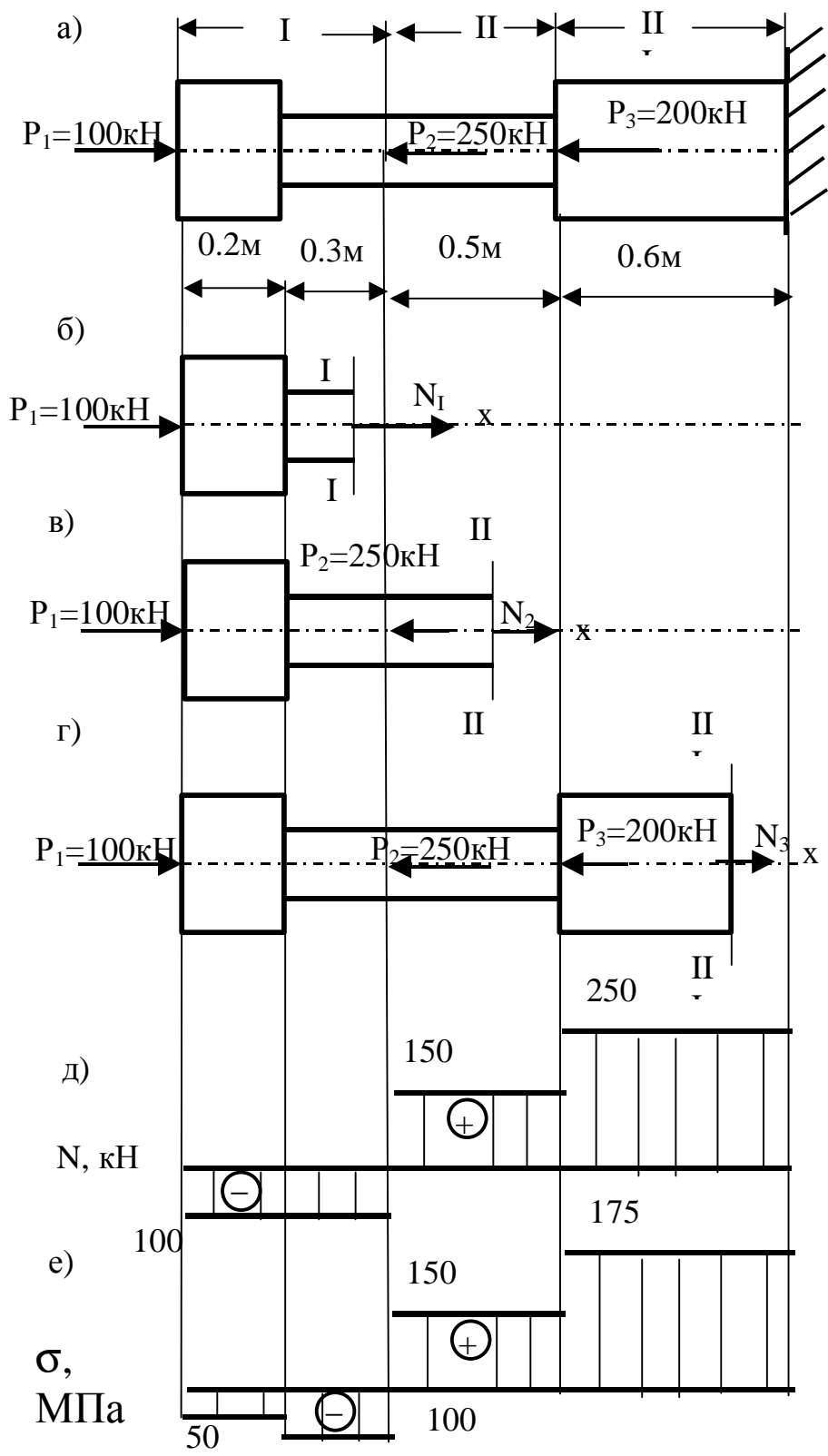
величина продольной силы на  $i$ -том участке стержня площадью  $F_i$ ,  $E$  – модуль упругости, для стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $n$  – число участков;  $l_i$  – длина  $i$ -того участка стержня).

### 2.2.1.2 Пример решения задачи 1

Схема нагружения стержня представлена на рис.2а. Сечениями, где приложены силы, стержень разбивается на три участка (на рис. 2а обозначены римскими цифрами), в пределах которых продольная сила постоянная, поэтому для определения ее значений нужно рассечь каждый участок и из условия равновесия отсеченной части, не содержащей заделку, определить величину продольной силы.

Проведем на первом участке произвольное сечение I-I, отбросим часть стержня, содержащую заделку, и рассмотрим условие равновесия оставшейся левой части (рис. 2б) На рассматриваемую часть стержня действует сила  $P_1 = 100$ кН и продольная сила  $N_1$  в сечении I-I. При определении продольных сил в сечениях предполагаем, что они растягивают рассматриваемую часть стержня, т.е. направлены от сечения.





а – схема нагружения стержня; б,в,г – схемы, иллюстрирующие определение продольной силы в сечениях; д – эпюра продольных сил; е – эпюра нормальных напряжений.

Рисунок 2

Проектируя силы на ось X, получим  $N_1 + P_1 = 0$ . Откуда  $N_1 = -P_1 = -100$  кН.

Т.к. продольная сила  $N_1$  получилась с отрицательным знаком, то первый участок стержня не растягивается, а сжимается.

Проведем произвольное сечение 2-2 на втором участке и рассмотрим равновесие отсеченной части стержня, не содержащей заделку (рис.2в).

Проецируя силы, приложенные к рассматриваемой отсеченной части стержня на ось X, получим значение продольной силы в сечении 2-2 -  $N_2$ .

$$N_2 + P_1 - P_2 = 0$$

$$N_2 = -P_1 + P_2 = -100 + 250 = 150 \text{ кН}$$

Положительный знак продольной силы  $N_2$  свидетельствует о том, что второй участок испытывает растяжение.

Рассматривая левую от сечения 3-3 часть стержня (рис. 2г) и проектируя все силы на ось X, получим значение продольной силы  $N_3$  в сечении 3-3.

$$N_3 + P_1 - P_2 - 2P_1 = 0$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 + 2P_1 = -100 + 250 + 200 = 350 \text{ кН}$$

Третий участок стержня также испытывает растяжение. По найденным значениям продольных сил строим график (эпюру) изменения продольных сил по длине стержня. Проводим базу эпюры параллельно оси стержня и в выбранном масштабе откладываем вверх положительные значения продольных сил и вниз отрицательные (рис .2д).

При правильно построенной эпюре продольных сил в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре будут иметь место скачки на величину приложенной силы.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня определим по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

В стержне длиной 0.2 м:  $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-100 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ МПа.}$

В стержне длиной 0.3 м:  $\sigma_2 = \frac{N_1}{F_2} = \frac{-100 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа.}$

В стержне длиной 0.5 м  $\sigma_3 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{350 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{ МПа.}$

В стержне длиной 0.6 м:  $\sigma_4 = \frac{N_3}{F_1} = \frac{350 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 175 \text{ МПа}$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис .2е.

Абсолютное удлинение (укорочение) стержня определим по формуле:

$$\Delta l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{F_i E}$$

где  $N_i$ ,  $F_i$  - значение продольной силы и площади поперечного сечения на участке стержня длиной  $l_i$ ,  $n$ - число участков.

$$\Delta l_{\Sigma} = -\frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 0.3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{150 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{350 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Т.к. результат получился положительный, то стержень растягивается .

### 2.2.2 Задача 2.

Определить усилия в стержнях заданной системы, подобрать размеры их поперечных сечений. Принять стержни 1- круглым, 2- квадратным, 3- состоящим из двух равнобоких уголков, если  $[s] = 160 \text{ МПа}$  . (Заштрихованные элементы конструкции считать недеформированными). Определить абсолютное удлинение (укорочение) стержней.

Данные для решения задачи 2 взять из таблицы 3 и 4, номер схемы - с рис. 3.

Таблица 3

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а. м	0.8	0.6	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	1.2	1.6
б. м	1.2	1.0	0.8	0.8	1.2	0.8	1.2	0.6	1.0	0.8
с. м	1.4	1.2	1.6	1.0	0.8	1.0	0.8	1.2	0.6	1.0

Таблица 4

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, кН	100	124	140	160	180	200	220	240	260	280
q, кН/м	120	100	80	100	120	160	80	100	60	100
M, кН·м	80	80	100	60	60	80	100	80	100	60

#### 2.2.2.1 Указания к выполнению задачи 2

1. Рассматриваемые конструкции статически определимые и усилия в стержнях могут быть найдены из уравнений равновесия системы сил, приложенных к телу, равновесие которого рассматривается. Если рассматривается равновесие одного тела ( схемы 2.9 ), следует освободить его от наложенных связей и составить уравнение равновесия, содержащее неизвестные усилия в стержнях . Если рассматриваемая конструкция состоит из системы тел

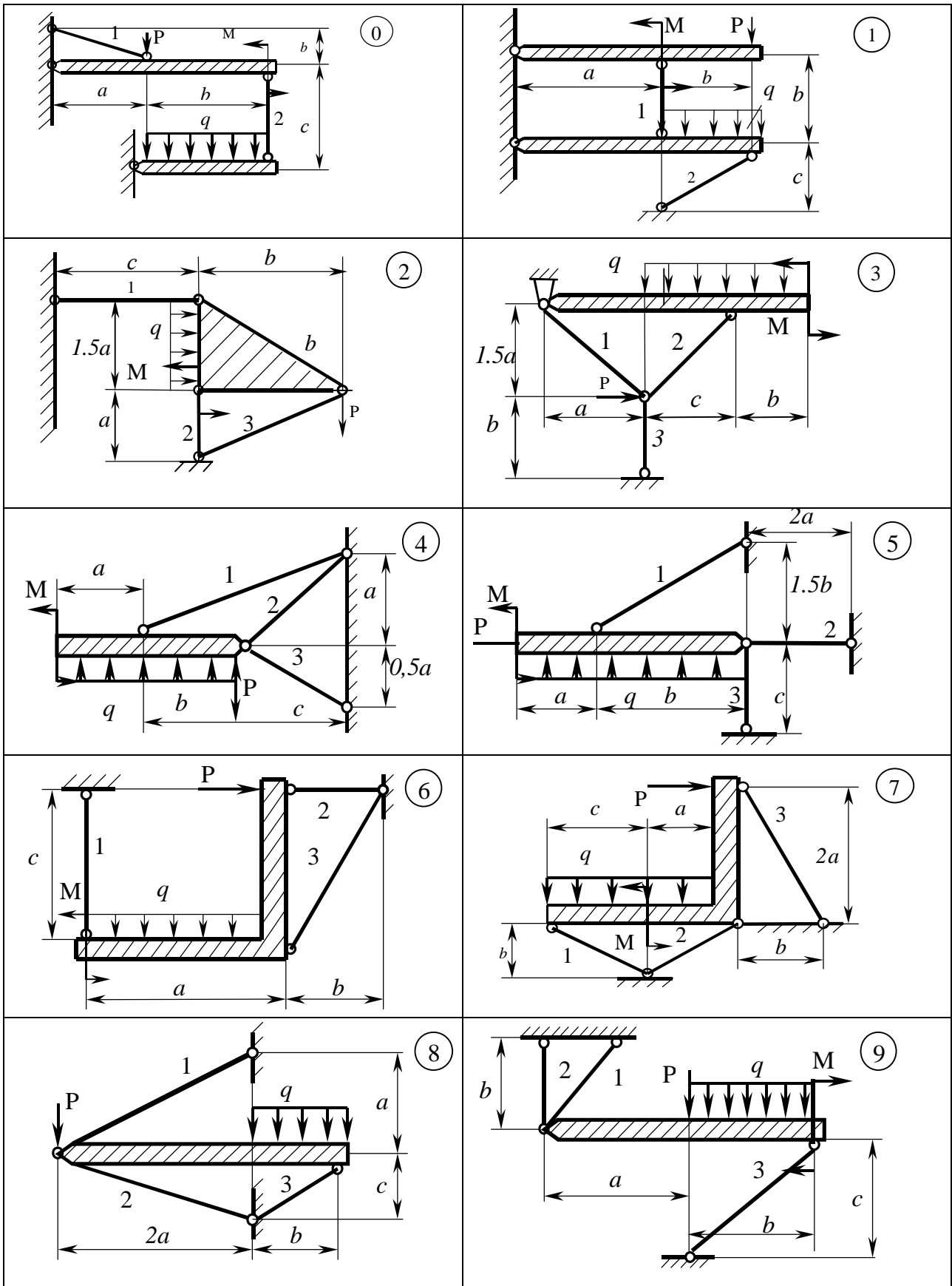


Рисунок 3  
Схемы к задаче 2

(схемы 0, 1) следует рассмотреть отдельно равновесие ее частей в последовательности, позволяющей определить неизвестные усилия.

Размеры поперечных сечений стержней определяются из условия прочности

на растяжение (сжатие): 
$$s_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [s],$$

здесь  $N_i$  - усилие в  $i$ -ом стержне;  $F_i$  - площадь его поперечного сечения,  $[s]$  - допускаемое напряжение.

Отсюда 
$$F_i \geq \frac{N_i}{[s]}.$$

Получив расчетное значение  $F_i$  с одной стороны, с другой стороны для площади круга

$$F_i = \frac{pd^2}{4}$$

( $d$ - диаметр круга), для площади квадрата  $F_i = a^2$  ( $a$  - сторона квадрата). Номер равнобокого уголка определяем из таблицы (см. [5], стр.84) по величине половины площади поперечного сечения для третьего стержня ( $F_L = F_i / 2$ ).

Абсолютные удлинения (укорочения) стержней определяются из формулы закона Гука:

$$\Delta l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{F_i E},$$

$N_i$  - усилие в  $i$ -ом стержне,  $l_i$  - его длина,  $E$  - модуль упругости первого рода,  $F_i$  - площадь поперечного сечения.

#### 2.2.2.2 Пример решения задачи 2 (рис. 4).

В рассматриваемом примере в равновесии находится одно тело - недеформируемая балка. Нагрузками, приложенными к ней, являются сосредоточенная сила  $P$ , равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , пара сил с моментом  $M$  и усилия в стержнях  $N_1, N_2, N_3$ . При решении задачи предполагается, что стержни 1, 2 и 3 растянуты, т. е. усилия направлены к точкам подвеса стержней (рис. 4).

Балка находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил. Такая система сил имеет три условия равновесия.

Из уравнения  $\sum M_A = 0$  определим  $N_j$ :

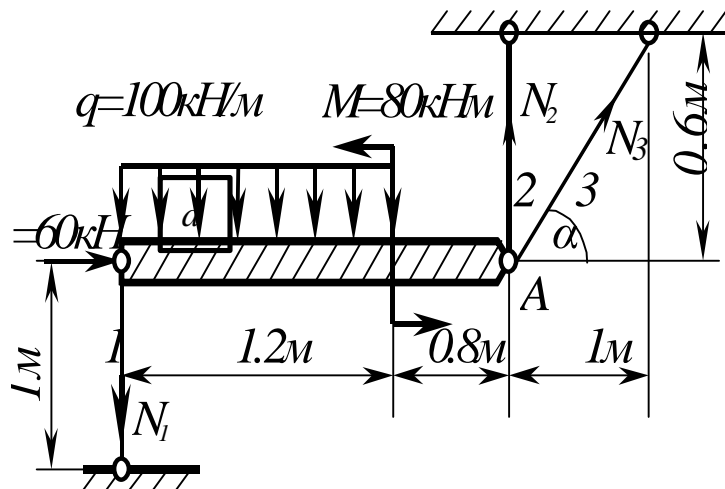


Рис. 4

$$N_1 \cdot 2 + q \cdot 1.2 \cdot (0.8 + 0.6) + M = 0$$

$$N_1 = \frac{-q \cdot 1.2 \cdot 1.4 - M}{2} = \frac{-100 \cdot 1.2 \cdot 1.4 - 80}{2} = -124 \text{ kH}$$

Отрицательный знак свидетельствует о том, что стержень 1 не растянут, а сжат. Усилие  $N_2$  определим из уравнения равновесия  $\sum P_x = 0$ :

$$N_3 \cdot \cos \alpha + P = 0. \quad N_3 = -\frac{P}{\cos \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.6^2}} = \frac{1}{1.16} = 0.855.$$

$$N_3 = -\frac{60}{0.855} = -70 \text{ kH}.$$

Третий стержень также сжат. Усилие  $N_3$  определим из уравнения  $\sum P_y = 0$

$$N_2 - N_3 \sin \alpha - 1.2q + N_1 = 0$$

При проектировании усилий  $N_1$  и  $N_3$  учтено, что они сжимающие.

$$N_2 = N_3 \sin \alpha + 1.2q - N_1 \quad \sin \alpha = 0.516$$

$$N_2 = 70 \cdot 0.516 + 100 \cdot 1.2 - 124$$

$$N_2 = 32 \text{ kH}$$

Площади поперечных сечений стержней определим, исходя из условия прочности на растяжение(сжатие)

$$s_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [s]$$

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{124 \cdot 10^{-3}}{160 \cdot 10^{-4}} = 7.75 \text{ см}^2 \quad F_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{32 \cdot 10^{-3}}{160 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ см}^2$$

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^{-3}}{160 \cdot 10^{-4}} = 4.38 \text{ см}^2$$

Определим размеры стержней.

Первый стержень изготавливается из круглого прутка .

$$\text{Его диаметр } d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7.75}{3.14}} = 3.15 \text{ см. Принимаем } d=35 \text{ мм .}$$

Второй стержень изготавливается из квадратного прутка . Сторона

$$a = \sqrt{F} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ см} . \text{ Принимаем } a = 15 \text{ мм} .$$

Третий стержень выполняется из двух равнобоких уголков .Для одного уголка

$F_L = \frac{F_3}{2} = 2.19 \text{ см}^2$  . По таблице сортамента для равнобоких уголков ( ГОСТ 8509-86 ) выбираем уголок № 4..с размерами 40\*40\*3 , его площадь поперечного сечения равна  $F=2.35 \text{ см}^2$  .

Определим абсолютные удлинения ( укорочения ) стержней

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{124 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 9.8 \cdot 10^{-4}} = 06,2 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,5^2}{4} = 9,8 \text{ см}^2 .$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4}} = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$F_2 = 15^2 = 225 \text{ мм}^2 = 2,25 \text{ см}^2 .$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = -\frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 1,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,7 \cdot 10^{-4}} = -8,7 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$F_3 = 2 \cdot 2,35 = 4,7 \text{ см}^2 .$$

### 2.2.2.2 Пример решения задачи 2 ( рис. 5)

В рассматриваемом примере в равновесии находится система тел – два недеформируемых бруса, связанные между собой стержнем СВ.

Рассмотрим равновесие отдельных частей конструкции – балки АВ и балки CD.

Балка АВ (рис. 5,б).

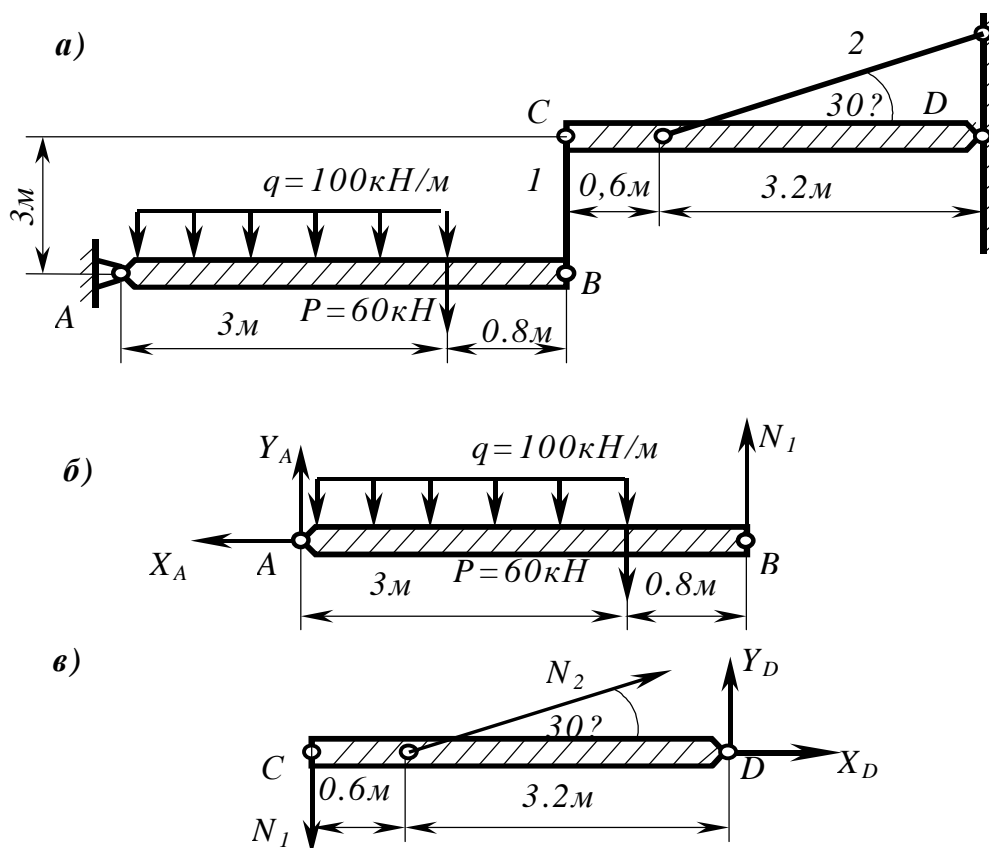


Рисунок. 5

а – заданная стержневая конструкция; б – расчетная схема балки АВ; в – расчетная схема балки CD.

$$60 \cdot 3 + 100 \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \cdot 3,8 = 0$$

$$\text{В } \sum M_A = 0; N_1 = \frac{180 + 450}{3,8} = 166 \text{ кН} \quad \text{Балка CD (рис. 5в)}$$

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0; N_1 \cdot 3,8 - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 3,2 &= 0; N_2 = \frac{N \cdot 3,8}{3,2 \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{166 \cdot 3,8}{1,6} = 395 \text{ кН} \end{aligned}$$

Далее задача решается так же, как изложено в предыдущем примере.

### 2.2.3. Задача 3.

Для консольной балки построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Данные для решения задачи взять из табл. 5 и 6, схему из рис. 6.



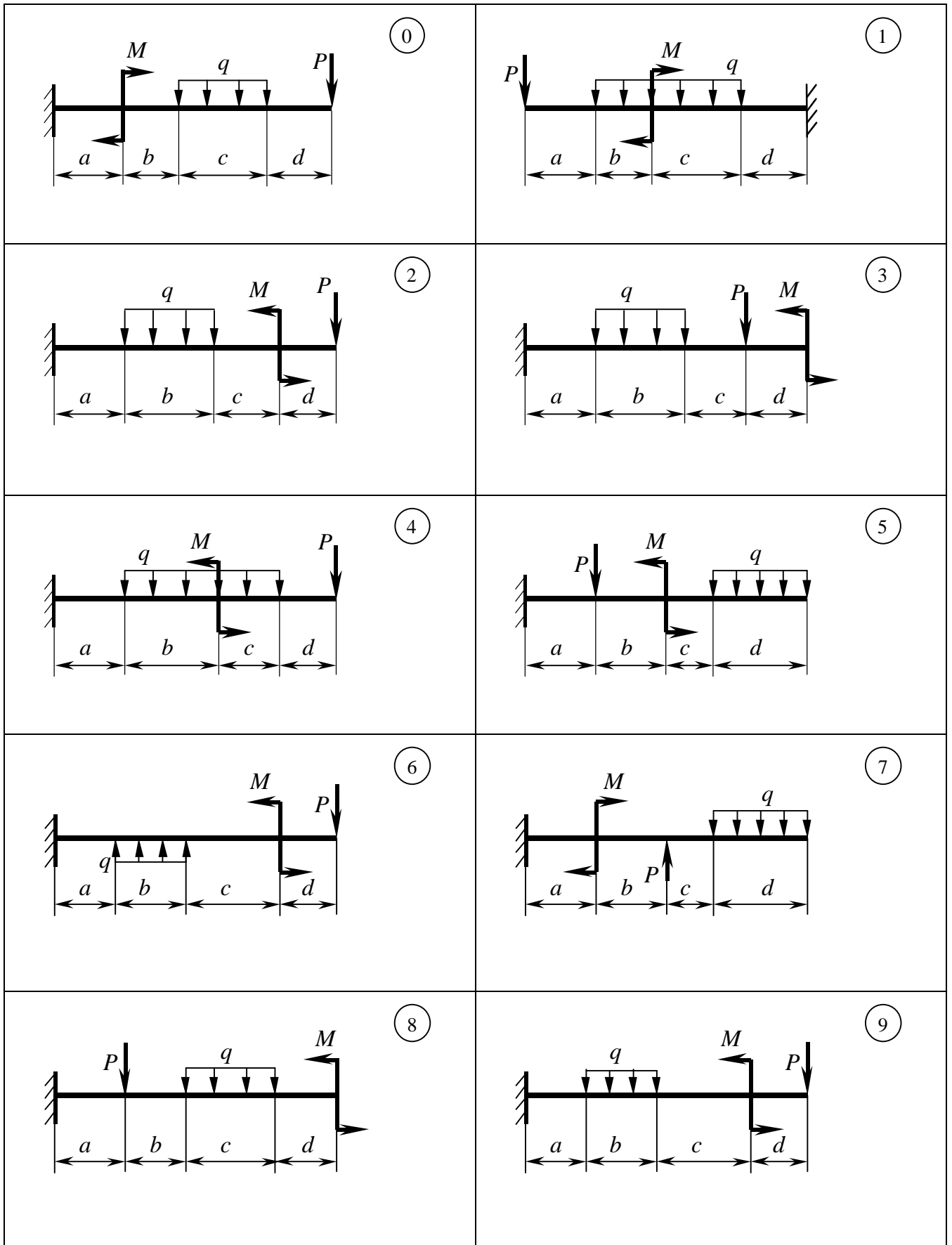


Рисунок 6  
Схемы к задаче 3

Таблица 5

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a, м	1.5	1.7	1.9	2.1	2.2	2.4	2.6	1.3	1.1	2.8
b, м	2.9	2.7	2.5	2.1	1.9	1.7	1.6	1.2	1.2	1.2
c, м	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.6	2.8	1.4
d	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2	2.0	1.8	2.0	1.4	2.2

Таблица 6

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, кН	6	8	4	6	8	4	6	8	4	6
q, кН/м	10	12	14	12	14	10	12	10	14	10
M, кНм	18	16	10	14	16	16	18	10	18	12

### 2.2.3.1 Указания к выполнению задач 3 и 4.

1. Прежде, чем приступать к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для балки на шарнирных опорах необходимо определить опорные реакции. Для их определения рекомендуется составить уравнения равновесия статики в форме равенства нулю моментов всех сил взятых относительно одной и второй опоры. Правильность определения опорных реакций следует проверить, спроектировав все силы, приложенные к балке, на ось параллельную силам. При правильном определении опорных реакций сумма проекций всех сил должна равняться нулю. При построении эпюр  $Q$  и  $M$  для балки с жесткой заделкой, опорные реакции можно не определять. В этом случае эпюры можно построить, рассматривая свободную отсеченную часть балки (часть, не содержащую жесткое защемление).

2. Одним из методов определения величин поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях балки является метод характерных сечений. Он состоит в том, что на границах участков балки берутся сечения (сечения, расположенные бесконечно близко слева и справа от точек приложения сосредоточенных сил и пар сил, в начале участка, где приложена равномерно распределенная нагрузка, и в конце его, сечение, где  $Q=0$  и в окрестностях этой точки меняет знак).

3. Вычислить значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях. При их определении для балки с жестким защемлением следует рассматривать часть балки, не содержащую защемление, если в защемлении предварительно не определены опорные реакции. При определении величин  $Q$  и  $M$  в сечениях для балки с шарнирными опорами можно рассматривать любую отсеченную часть. Рекомендуется рассматривать ту часть, к которой приложено меньшее число нагрузок.

4. Правила для вычисления величин  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях следующие: Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проек-

ций внешних сил приложенных к рассматриваемой отсеченной части балки на направление перпендикулярное оси балки. В этой сумме внешняя сила берется с положительным знаком, если она вращает рассматриваемую отсеченную часть относительно сечения по ходу стрелки часов. Изгибающий момент  $M$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил приложенных к рассматриваемой отсеченной части балки относительно сечения. В этой сумме момент внешней силы, сжимающий верхние волокна балки, берется со знаком плюс. Чтобы определить какие волокна сжимает момент внешней силы следует сечение мысленно заштриховать.

5. Определив в каждом характерном сечении величины  $Q$  и  $M$ , следует произвести построение их эпюр.

При построении эпюр рекомендуется руководствоваться следующими правилами :- в конечном сечении балки поперечные силы, изгибающий момент численно равны приложенным в этом сечении внешней силе и моменту внешней пары (имеются в виду как активные, так и реактивные силы и пары сил).

На участке балки, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка, эпюры поперечных сил - прямые, параллельные базе эпюры, эпюры моментов - наклонные прямые.

На участке балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра  $Q$  - наклонная прямая, эпюра  $M$  - квадратная парабола, при этом выпуклостью парабола направлена навстречу действию нагрузки.

В сечении, где поперечная сила равна нулю, и в окрестности сечения меняет знак, изгибающий момент имеет экстремальное значение. Положение указанного сечения можно найти из подобия треугольников, образуемых эпюрой  $Q$  и базой эпюры. Определив положение сечения, где  $Q=0$ , в этом положении определяется величина изгибающего момента из условия рассмотрения любой отсеченной части балки.

В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре  $Q$  ординаты изменяются скачкообразно, изменение ординаты равно величине приложенной в сечении силы.

В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные пары сил, на эпюре изгибающих моментов ординаты изменяются скачкообразно на величину приложенных в сечениях пар сил.

6. Определение размеров заданной формы поперечных сечений балки произво-

дится, исходя из условия прочности при изгибе :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Из этого условия при заданном значении  $[\sigma]$  и  $M_{\max}$ , взятому из эпюры изги-

бающих моментов, определяется расчетное значение осевого момента сопротивления балки.

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

По найденному моменту сопротивления  $W_x$ , из таблицы сортамента подбираются стандартные профили или рассчитываются размеры нестандартных поперечных сечений.

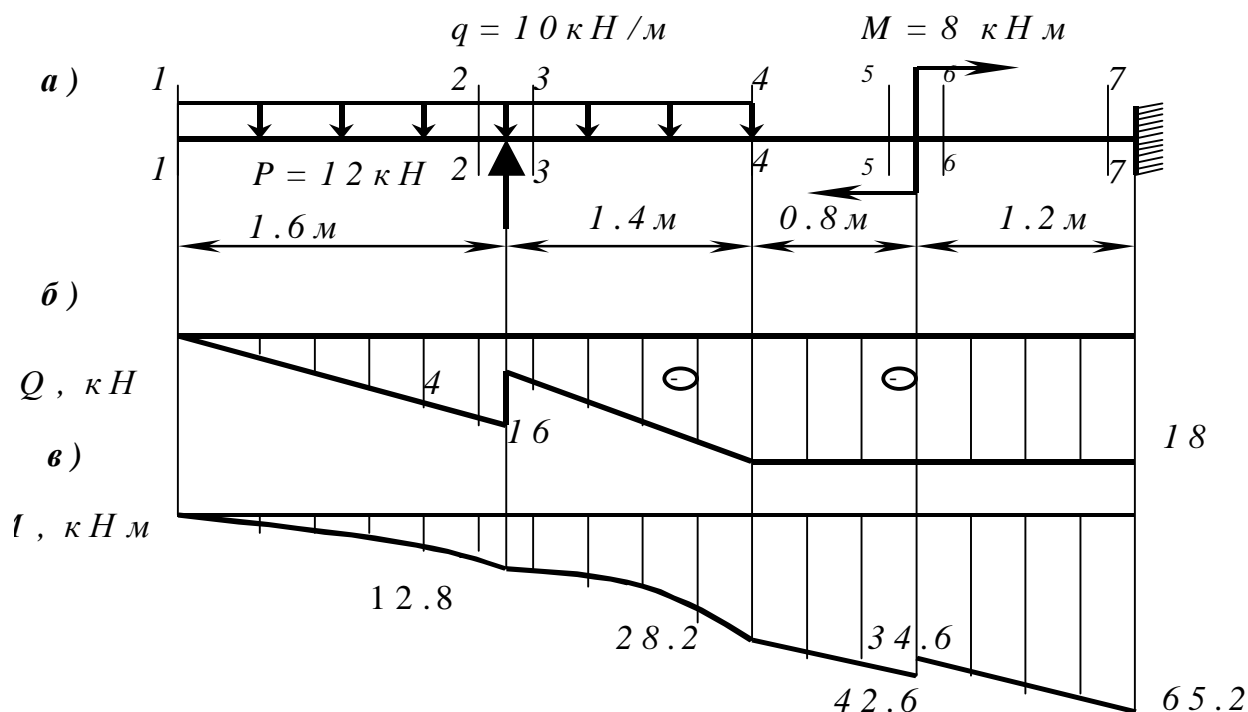
### 2.2.3.2 Пример решения задачи 3.

Введем характерные сечения на балке так, рекомендовано в указаниях к решению задачи (рис.11, а).

Вычислим значения поперечных сил в сечениях.

Сечение 1-1 взято в начале приложения равномерно распределенной нагрузки на участке длиной 3м.

Рассекая мысленно балку в этом сечении и отбрасывая правую часть (часть, содержащую заделку), видим, что, слева от сечения нет нагрузок. Значит



а – расчётная схема балки; б – эпюра поперечных сил  
в – эпюра изгибающих моментов.

Рисунок 7

$$Q_{1-1} = 0$$

Рассечем мысленно балку в сечении 2-2, отбрасываем отсеченную часть (содержащую заделку). К рассматриваемой левой части балки приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q=10 \text{ кН/м}$ . Величина ее

равнодействующей, в указанном сечении, равна  $10 \cdot 1,6 = 16$  кН. Ее нужно взять с отрицательным знаком, т.к. рассматриваемый участок относительно сечения равномерно распределенная нагрузка стремится вращать против хода стрелки часов.

Значит  $Q_{2-2} = -10 \cdot 1,6 = -16$  кН.

В сечении 3-3 :

$$Q_{3-3} = -10 \cdot 1,6 + 12 = -4 \text{ кН.}$$

Как видно, в сечении 3-3 к рассматриваемой левой части добавилась сосредоточенная сила  $P = 14$  кН со знаком плюс, т.к. стремится вращать часть балки относительно сечения 3-3 по ходу стрелки часов.

Продолжая вычисления поперечной силы в остальных сечениях, получим :

$$Q_{4-4} = -10 \cdot 3 + 12 = -30 + 12 = -18 \text{ кН}$$

$$Q_{4-4} = Q_{5-5} = Q_{6-6} = Q_{7-7}.$$

Эпюры поперечных сил показаны на рис. 7б.

Определим величины изгибающих моментов в характерных сечениях.

$M_{1-1} = 0$ , т.к. слева от сечения нет нагрузок.

Мысленно рассекаем балку в сечении 1-1, защемляем это сечение и определяем в нем величину изгибающего момента, который вызывается равномерно распределенной нагрузкой, приложенной к рассматриваемому участку балки длиной 1,6 м.

$$M_{2-2} = -10 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = -12,8 \text{ кНм.}$$

Знак минус здесь взят потому, что в сечении 2-2 равномерно распределенная нагрузка сжимает нижние волокна.

$M_{3-3} = M_{2-2}$ , т.к. сечения взяты в окрестности приложения силы  $P$ .

$$M_{4-4} = -10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 \cdot 1,4 = -28,2 \text{ кНм.}$$

В выражении  $M_{4-4}$  первое слагаемое взято со знаком “минус”, т.к. равнодействующая равномерно распределенной нагрузки по длине 3м дает момент, сжимающий нижние волокна в сечении 4-4, а сосредоточенная сила  $P = 12$  кН дает момент  $12 \cdot 1,4 \text{ м} = 16,8$  кНм, сжимающий верхние волокна.

$$M_{5-5} = -10 \cdot 3 \cdot 2,3 + 12 \cdot 2,2 = -6,9 + 26,4 = -42,6 \text{ кНм.}$$

В сечении 6-6 момент изменяется скачком на величину 8кН, и будет равен:

$$M_{6-6} = -10 \cdot 3 \cdot 2,3 + 12 \cdot 2,2 + 8 = -34,6 \text{ кНм}$$

Наконец величина момента в заделке:

$$M_{7-7} = -10 \cdot 3 \cdot 3,5 + 12 \cdot 3,4 + 8 = -105 + 40,8 + 8 = -56,2 \text{ кНм.}$$

Эпюра изгибающих моментов построена на рис. 7в.

#### 2.2.4. Задача 4.

Для двух опорной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать указанное сечение, если  $[\sigma] = 160$  МПа.

Данные для решения задачи взять из табл. 9 и 10, номер - схемы с рис.8.

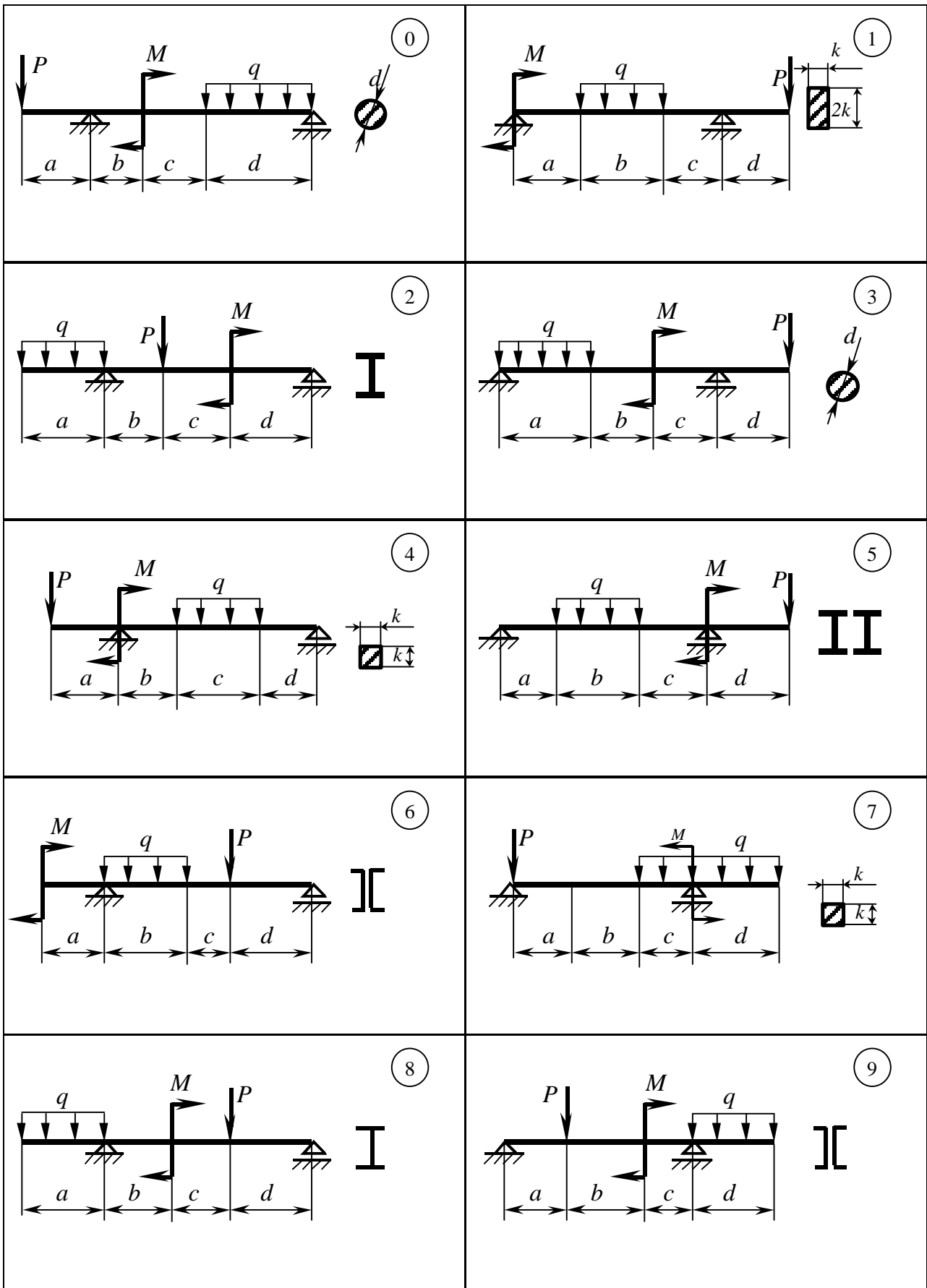


Рисунок 8

Схемы к задаче 4

2.2.4.1 Пример решения задачи 4

Схема нагружения балки представлена на рис. 9а.

.Определим опорные реакции, записывая уравнения моментов всех сил, приложенных к балке, относительно точек А и В.

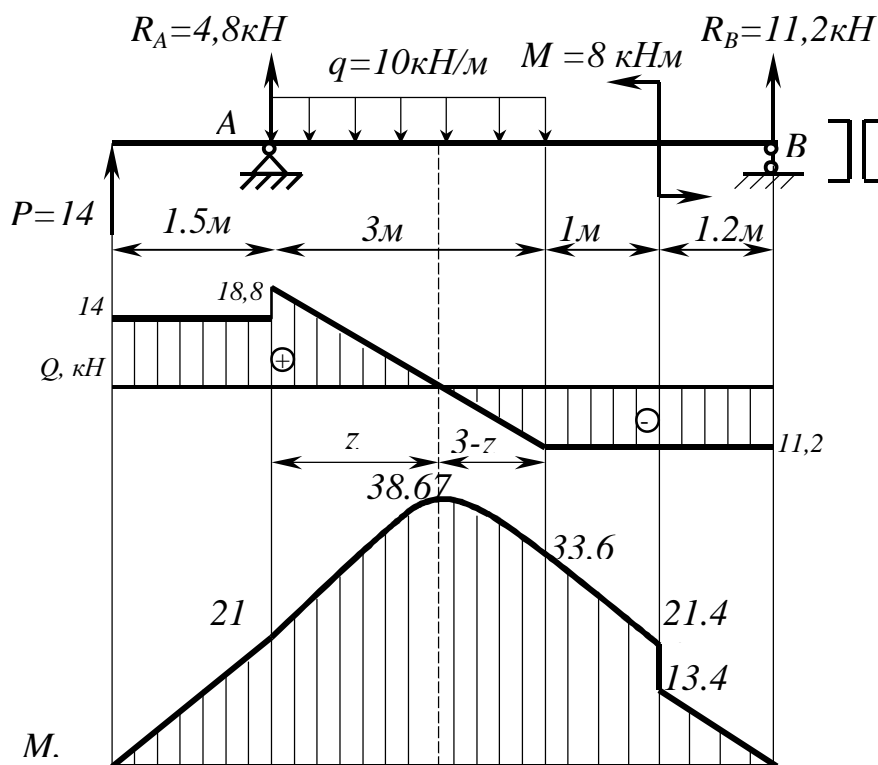
При записи уравнений предполагаем, что реакции в опорах А и В направлены вверх.

$$\sum M_A=0 \quad 14 \cdot 1.5 + 3 \cdot 10 \cdot 1.5 - 8 - R_B \cdot 5.2=0$$

$$R_B = \frac{21 + 45 - 8}{5.2} = 11 \text{ кН}$$

$$\sum M_B=0 \quad 14 \cdot 6.7 + R_A \cdot 5.2 - 10 \cdot 3 \cdot 3.7 - 8 = 0$$

$$R_A = \frac{-14 \cdot 6.7 + 10 \cdot 3 \cdot 3.7 + 8}{5.2} = 4.8 \text{ кН}$$



а – расчётная схема балки; б – эпюра поперечных сил;  
в – эпюра изгибающих моментов.

Рисунок 9

Положительные знаки опорных реакций свидетельствуют о том, что предполагаемое направление реакции соответствует истинному. Возьмем на балке характерные сечения и вычислим в них величины Q и M.

Определение значений поперечной силы в характерных сечениях.

$Q_{1-1}$  наиболее просто определить рассматривая левую часть балки от сечения 1-1 (правую часть при этом отбрасываем). Поперечная сила в сечении равна  $Q_{1-1}=P=14$  кН. Она положительна, т. к. сила  $P$  стремится левую отсеченную часть вращать по ходу стрелки часов.

$$Q_{2-2} = Q_{1-1}$$

Поперечную силу в сечении 3-3 удобно определить, рассматривая левую отсеченную часть балки.

$$Q_{3-3} = P + R_A = 14 + 4,8 = 18,8 \text{ кН.}$$

Поперечную силу в сечении 4-4 удобно определить, рассматривая правую отсеченную часть балки.

$$Q_{4-4} = -R_B = -11,2 \text{ кН.}$$

По найденным значениям поперечных сил построена эпюра  $Q$  (рис. 9 б)

Определение величин изгибающих моментов в характерных сечениях.

В сечении 1-1, рассматривая левую отсеченную часть балки, имеем  $M_{1-1} = 0$ .

В сечении 2-2 величину изгибающего момента удобно определить из рассмотрения левой отсеченной части балки.

$$M_{2-2} = M_{3-3} = 14 \cdot 1,5 = 21 \text{ кНм.}$$

В сечении 4-4 величину изгибающего момента удобнее определить, рассматривая правую отсеченную часть балки.

Отсюда  $M_{4-4} = M + R_B \cdot 2,2 = 8 + 11,2 \cdot 2,2 = 32,64 \text{ кНм.}$

В сечениях 5-5, 6-6 и 7-7 изгибающие моменты также целесообразнее определять из рассмотрения правой части балки.

$$M_{5-5} = M + R_B \cdot 1,2 = 8 + 11,2 \cdot 1,2 = 21,44 \text{ кНм.}$$

$$M_{6-6} = R_B \cdot 1,2 = 11,2 \cdot 1,2 = 13,44 \text{ кНм.}$$

$$M_{7-7} = 0 \text{ кНм.}$$

Для построения эпюры изгибающих моментов необходимо в сечении к-к балки, соответствующего положению точки на эпюре поперечных сил, где  $Q = 0$ , найти экстремальное значение изгибающего момента.

Положение сечения к-к найдем из подобия треугольников образованных эпюрой  $Q$ . (рис. 9б)

Из подобия треугольников следует

$$\frac{18,8}{11,2} = \frac{Z}{3-Z}; \Rightarrow Z = 1,88 \text{ м.}$$

Величину момента в сечении к-к можно определить из рассмотрения или левой или правой части балки.

Например, из рассмотрения левой части балки получим:

$$M_{k-k} = 14 \cdot 3,38 + 4,8 \cdot 1,88 - 10 \cdot 1,88 \cdot 11,94 = 38,67 \text{ кНм.}$$

Эпюры изгибающих моментов по найденным значениям построены на рис. 9в.



Номер двутаврового сечения определим из основного условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

При  $[\sigma] = 160$  МПа получим  $W_x = \frac{38,67 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^3 = 242 \text{ см}^3$

Для заданного сечения балки для одного швеллера осевой момент сопротивления будет равен половине расчетного, т.е.  $W_x = 121 \text{ см}^3$ .

Из таблицы сортамента для швеллера (ГОСТ 8240-72) выбираем двутавр №18, для которого  $W_x = 132 \text{ см}^3$ .

### 2.2.5 Задача 5.

Для ломаного стержня (рамы) построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов. Данные для решения задачи взять из таблиц 7 и 8. Номер схемы – с рис. 10.

Таблица 7

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>a</i> , м	1	1,2	0,8	2	2,2	1,2	1,6	1	1,8	1,4
<i>b</i> , м	2	1,6	1,4	2,4	1,4	1,8	2	1,4	1,2	2,2
<i>c</i> , м	2,5	2	1,8	0,8	0,8	2,2	2,4	2,2	2,4	0,8
<i>d</i> , м	2,2	0,8	1	1,2	1,8	0,8	1	0,8	0,8	1,8

Таблица 8

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>P</i> , кН	10	14	18	20	16	22	20	22	14	18
<i>M</i> , кНм	16	8	10	12	10	8	8	10	12	8
<i>q</i> , кН/м	8	10	6	8	6	10	10	6	10	10

#### 2.2.5.1 Указания к выполнению задачи 5

1. Рамой называют систему стержней, соединенных между собой в узлах жесткими связями.

Рама называется плоской, если оси всех составляющих ее стержней и действующая на раму нагрузка расположены в одной плоскости.

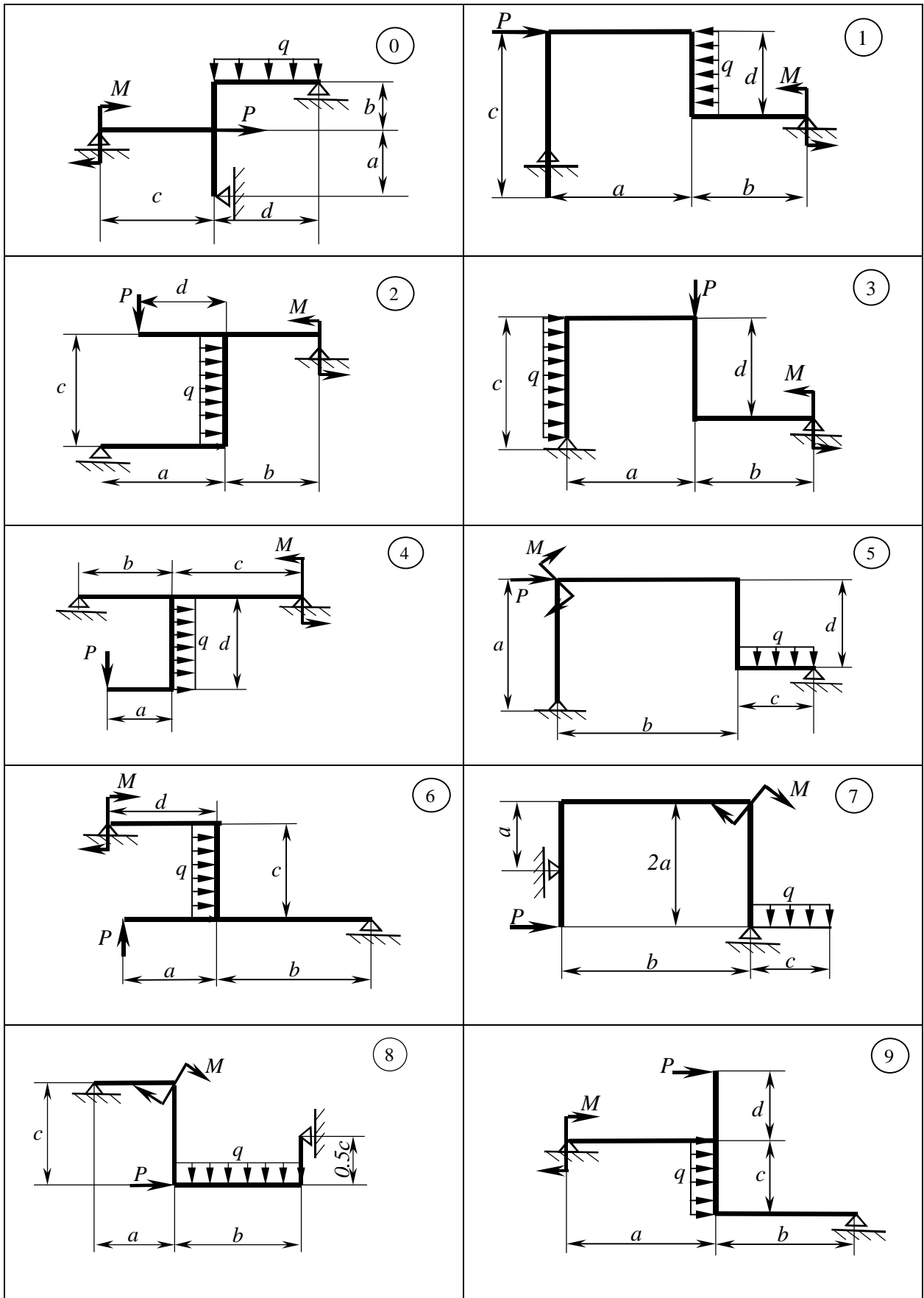


Рисунок 10  
Семы к задаче 5

Рама является статически определимой, если опорные реакции и внутренние силовые факторы, возникающие в стержнях, могут быть определены с помощью уравнений равновесия статики.

В общем случае в поперечных сечениях стержней плоских рам возникают три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ .

2. Построение эпюр внутренних силовых факторов для рам следует начинать с определения опорных реакций. Для рам, имеющих жесткую заделку, реакции в заделке можно не определять. Для таких рам внутренние силовые факторы можно определить, двигаясь со свободного конца рамы.

3. При построении эпюр раму следует разбивать на участки характерными сечениями. Характерными сечениями, как и для балок, являются сечения, взятые в окрестности приложения сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов в начале и конце приложения равномерно распределенной нагрузки, сечение, где  $Q = 0$  и в окрестности этой точки меняет знак. Характерными для рам являются также сечения, взятые в местах сопряжения стержней.

4. Правила для вычисления величин  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях:

Продольная сила  $N$  в сечении равна алгебраической сумме проекций на продольную ось стержня всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части рамы. Продольная сила, возникающая при растяжении стержня, считается положительной, при сжатии – отрицательной.

Поперечная сила  $Q$  в сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части рамы, на направление перпендикулярное оси стержня. В этой сумме внешняя сила берется со знаком плюс, если она стремится вращать относительно сечения рассматриваемую отсеченную часть по ходу стрелки часов.

Изгибающий момент  $M$  в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных к рассматриваемой части рамы. Эпюра моментов для рамы строится на сжатых волокнах.

### 2.2.5.2 Пример решения задачи 5.

Расчетная схема рамы представлена на рис. 11 а.

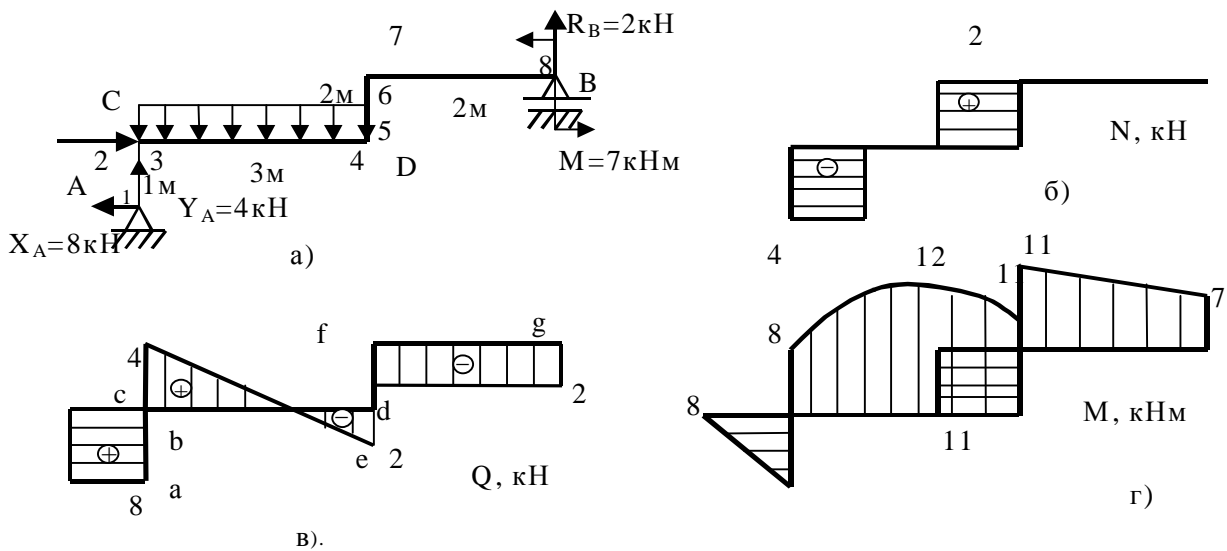
Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - M - R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{P \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - M}{5} = \frac{8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 7}{5} = 2 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0; \quad P - X_A = 0; \quad X_A = P = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 ; \quad X_A \cdot 2 - P \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 3,5 - M + Y_A \cdot 5 = 0 ;$$



*а – расчётная схема рамы; б – эпюра продольных сил; в – поперечных сил; г – эпюра изгибающих моментов.*  
Рисунок 11

$$Y_B = \frac{P \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 3,5 + M - X_A \cdot 2}{5} = \frac{8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 + 7 - 8 \cdot 2}{5} = 4 \text{ кН}$$

Проверка правильности определения опорных реакций

$$\sum F_Y = 0 \quad Y_A + R_B - q \cdot 3 = 4 + 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

Рама состоит из 4-х стержней – AC, CD, DE, BE.

Определяем продольные силы для построения эпюры  $N$ .

Мысленно рассекаем стержень AC. При определении продольной силы в сечении можно рассматривать или верхнюю или нижнюю части. Удобнее рассмотреть нижнюю часть, к которой в точке А приложены силы  $X_A = 8 \text{ кН}$  и  $Y_A = 4 \text{ кН}$ . На ось рассматриваемого стержня проектируется сила  $Y_A = 4 \text{ кН}$ . Она направлена к сечению, т.е. сжимает стержень. Следовательно,  $N = -4 \text{ кН}$ .

Рассекаем стержень CD. Из рассмотрения суммы проекций сил на ось этого стержня, приложенных к левой отсеченной части, или к правой отсеченной части, следует что  $N = 0$ .

Рассекаем стержень DE. Удобнее рассматривать верхнюю отсеченную часть (нижняя при этом отбрасывается). На ось стержня DE проектируется сила  $R_B = 2 \text{ кН}$ ., направленная от сечения. Она вызовет во взятом сечении

продольную силу равной ей по величине и противоположно направленную. Под действием этих сил стержень будет растягиваться.

Рассекаем стержень ВЕ. Из рассмотрения правой отсеченной части рамы видно, что продольная сила в сечении равна нулю. Этот же вывод получим из рассмотрения левой отсеченной части.

Эпюра продольных сил, по найденным значениям, построена на рис. 11 б.

Построение эпюры поперечных сил.

Рассекаем стержень АС в произвольном месте. Поперечную силу в сечении можно определить из рассмотрения или нижней отсеченной части или верхней. К нижней части приложено меньше нагрузок, она проще, и целесообразнее рассматривать ее.

В этом стержне поперечная сила равна реакции  $X_A$  и она положительна, т.к. относительно сечения сила  $X_A = 8$  кН стремится вращать отсеченную часть относительно сечения по ходу стрелки часов.

На стержень CD действует равномерно распределенная нагрузка. Для построения эпюры поперечных сил, возникающих в этом стержне, определим ее значение в окрестности точек С и D, т.е. в начале и в конце стержня.

Рассекая стержень в окрестности точки С и рассматривая левую отсеченную часть, видно, что в этом сечении  $Q = Y_A = 4$  кН. Рассекая стержень в окрестности точки D и рассматривая левую отсеченную часть получим  $Q = Y_A - q \cdot 3 = 4 - 2 \cdot 3 = -2$  кН.

Этот же результат можно получить из рассмотрения правой отсеченной части рамы ( $Q = -R_B = -2$  кН).

В стержне ВЕ поперечная сила равная  $Q = -2$  кН.

Это видно, если рассматривать правую от сечения часть рамы. По найденным величинам поперечных сил построена эпюра  $Q$  (рис. 11 в).

Для построения эпюры изгибающих моментов определим величины  $M$  в характерных сечениях 1-1, 2-2, ... 8-8.

$M_{1-1} = 0$ . Это следует из рассмотрения нижней отсеченной части рамы.

$M_{2-2} = X_A \cdot 1 = 8 \cdot 1 = 8$  кНм.  $M_{3-3} = X_A \cdot 1 = 8 \cdot 1 = 8$  кНм.

При определении изгибающих моментов в сечениях 2-2 и 3-3 также целесообразнее рассмотреть нижнюю отсеченную часть рамы.

При этом в сечении 2-2 силой  $X_A$  сжимаются левые волокна стержня АС, а в сечении 3-3 – верхние волокна. Изгибающий момент в этих сечениях откладываем в сторону сжатых волокон. Рассматриваем сечение 4-4. При определении величины изгибающего момента в этом сечении удобнее рассмотреть правую отсеченную часть рамы.

$M_{4-4} = R_B \cdot 2 + M = 2 \cdot 2 + 7 = 11$  кНм. Оба слагаемых в этом выражении взяты с одним знаком, т.к. и  $R_B$  и сосредоточенный момент  $M$ , приложенный к опоре В, сжимают верхние волокна балки CD в сечении 4-4

В сечениях 5-5, 6-6 и 7-7 величины изгибающих моментов будут равны значению, найденному для сечения 4-4. Это видно из рассмотрения той же правой отсеченной части рамы. В сечении 6-6 будут сжаты левые волокна, в сечении 7-7 – верхние волокна. В сечении 8-8  $M_{8-8} = 7$  кНм.

Вычисленные значения изгибающих моментов следует дополнить, определив экстремальное значение моментов в точке, где поперечная сила  $Q$  равна нулю и меняет знак. Положение точки на раме, где  $Q = 0$  определим из рассмотрения подобных треугольников abc и cde (рис. 11 в).

Обозначим катет cd=x. Тогда катет ac=3-x.

Из соотношения подобных сторон треугольников имеем :

$$\frac{cd}{ac} = \frac{de}{ab}; \quad \frac{x}{3-x} = \frac{2}{4}; \text{ откуда } X = 1 \text{ м.}$$

Величину момента в сечении, где  $Q = 0$  определим из рассмотрения правой отсеченной части рамы.

$$M_{\text{экстр}} = R_B \cdot 3 + M - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 2 \cdot 3 + 7 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 12 \text{ кНм.}$$

По найденным значениям построена эпюра изгибающих моментов (рис. 11 г.).

## 2.3 Контрольная работа №2

### *Прочность стержней, испытывающих сложное сопротивление .*

#### 2.3.1 Задача 6

Для составного сечения определить положение центра тяжести, величину главных центральных моментов инерции. Данные для решения задачи взять из таблиц 9 и 10, номер схемы из рис. 12.

Таблица 9

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Двутавр	10	12	14	16	18	20	18	14	22	24
Швеллер	16	18	20	18	20	22	18	22	18	20

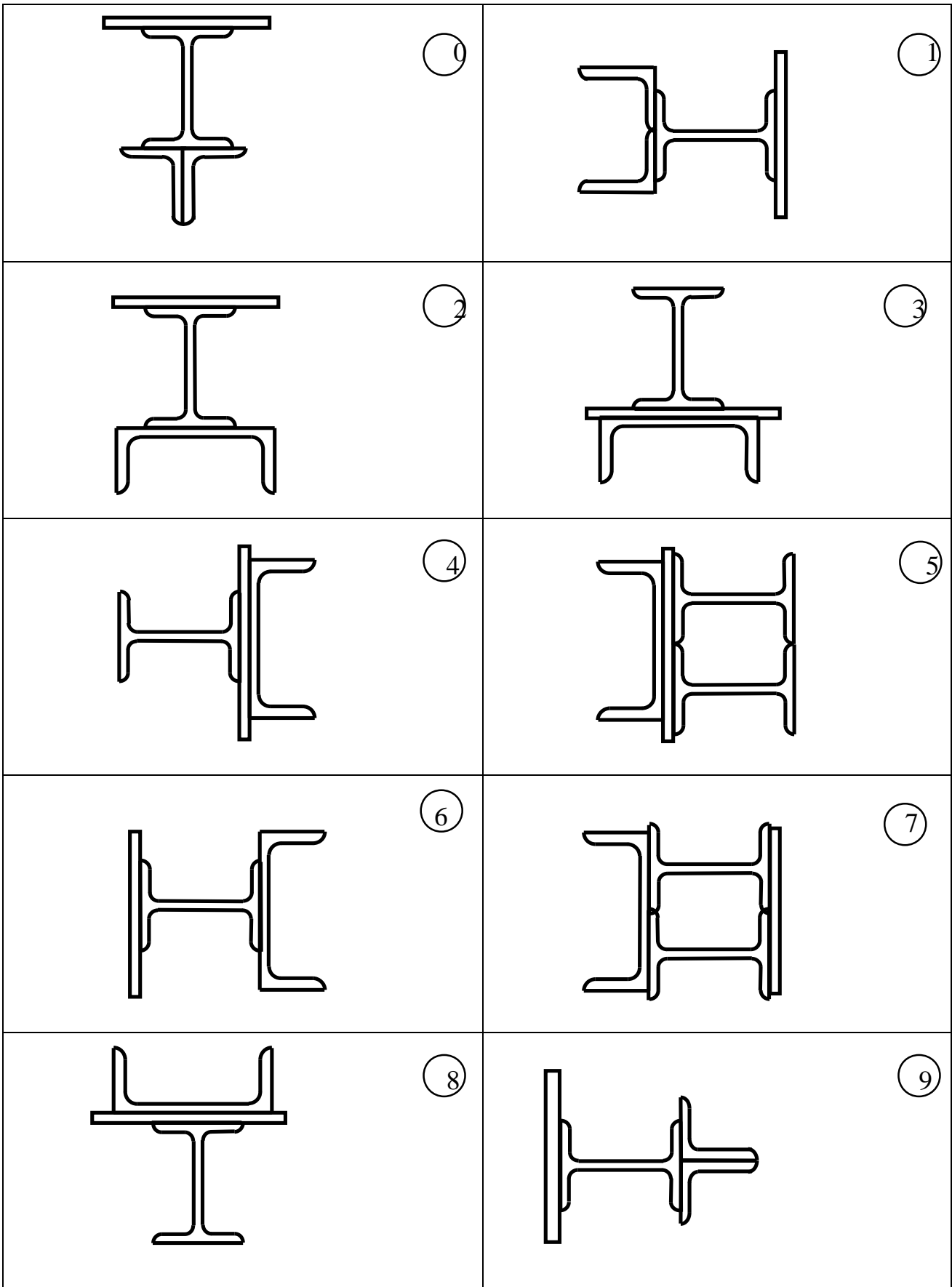


Рисунок 12  
Схемы к задаче 6

Таблица 10

№ столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Полоса мм X мм	150X12	170X14	180X16	200X18	220X20	240X24	260X20	230X20	240X40	180X24
Уголок неравнобокий	40X25X4	50X32X4	63X40X6	75X50X8	100X63X8	125X80X10	160X100X12	180X110X10	200X125X14	250X160X18

### 2.3.1.1 Указания к выполнению задачи б

В заданном сечении выбрать систему осей, в которых определить координаты центров тяжести составляющих фигур.

По формулам

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ;$$

( где,  $X_c, Y_c$  - координаты центра тяжести составного сечения;

$X_{Ci}, Y_{Ci}$  - координаты центров тяжести составляющей фигуры в исходной системе осей ;  $F_i$  - площадь поперечного сечения  $i$ - ой составляющей фигуры ,  $n$  - число составляющих фигур ) определить положение центра тяжести составного сечения .

3. По найденным координатам  $X_c, Y_c$  нанести положение центра тяжести составной фигуры.

4. Через центр тяжести составной фигуры провести центральные оси всего сечения, направляя их параллельно центральным осям составляющих фигур т. к. фигура имеет ось симметрии , то центральные оси будут являться и главными

5. По формулам

$$I_{Xc} = \sum_{i=1}^N (I_{X_{Ci}} + a_i^2 F_i), \quad I_{Yc} = \sum_{i=1}^N (I_{Y_{Ci}} + b_i^2 F_i)$$

определяются осевые моменты инерции всей фигуры относительно главных центральных осей фигуры :



Здесь  $I_{X_{C1}}$ ,  $I_{Y_{C1}}$  - осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей;  $a_i$  - расстояние между центральной осью  $X_C$  составного сечения и собственной центральной осью  $X_{C1}$   $i$ -ой составляющей фигуры;  $b_i$  - расстояние между центральной осью  $Y_C$  составного сечения и собственной центральной осью  $Y_{C1}$   $i$ -ой составляющей фигуры.

Для стандартных профилей типа швеллера, двутавра, уголка осевые моменты инерции следует брать из таблиц сортамента для полосы определять по формулам:

$$I_X = \frac{b h^3}{12}; \quad I_Y = \frac{h b^3}{12}$$

$b$  - сторона прямоугольника параллельная оси  $X$ ;

$h$  - высота.

### 2.3.1.2 Пример решения задачи 6

Для сечения, показанного на рис. 12, необходимо определить положение главных центральных осей, моменты инерции относительно них.

Прежде всего выписываем геометрические характеристики прокатных профилей, которые приводятся в учебниках и сборниках по сопротивлению материалов (Например: Писаренко Г. С. и др. Справочник по сопротивлению материалов "Наукова думка", К, 1988 см. стр. 84 101)

Двутавр №24:

$H=24$  см;  $B=11.5$  см;  $d=0.56$  см;  $t=0.95$  см;  $F=34.8$  см<sup>2</sup>;

$I_X=3460$  см<sup>4</sup>;  $I_Y=198$  см<sup>4</sup>.

Швеллер № 22:

$H=22$  см;  $B=8.2$  см;  $d=0.54$ -см;  $t=0.95$  см

$z_0=2.21$  см;  $F=26.7$  см<sup>2</sup>;  $I_X=151$  см<sup>4</sup>;  $I_Y=2110$  см<sup>4</sup>.

(Здесь моменты  $I_X$   $I_Y$  поменяли местами, т.к. швеллер расположен горизонтально, а не вертикально, как в справочнике).

Для полосы геометрические характеристики вычисляем как для прямоугольника

$$F=b \cdot \delta = 27 \cdot 1.2 = 32.4 \text{ см}^2,$$

$$I_X = \frac{27 \cdot 1.2^3}{12} = 4 \text{ см}^4, \quad I_Y = \frac{1.2 \cdot 27^3}{12} = 1970 \text{ см}^4$$

Сечение вычерчиваем в масштабе.

Выбираем систему координат. Лучше всего начало координат помещать в центре тяжести средней фигуры, т.е. в центре тяжести двутавра.

Так как сечение симметрично относительно оси  $y$ , то центр тяжести ищем только по высоте, т.е. координату  $y_c$  которую определяем по формуле:

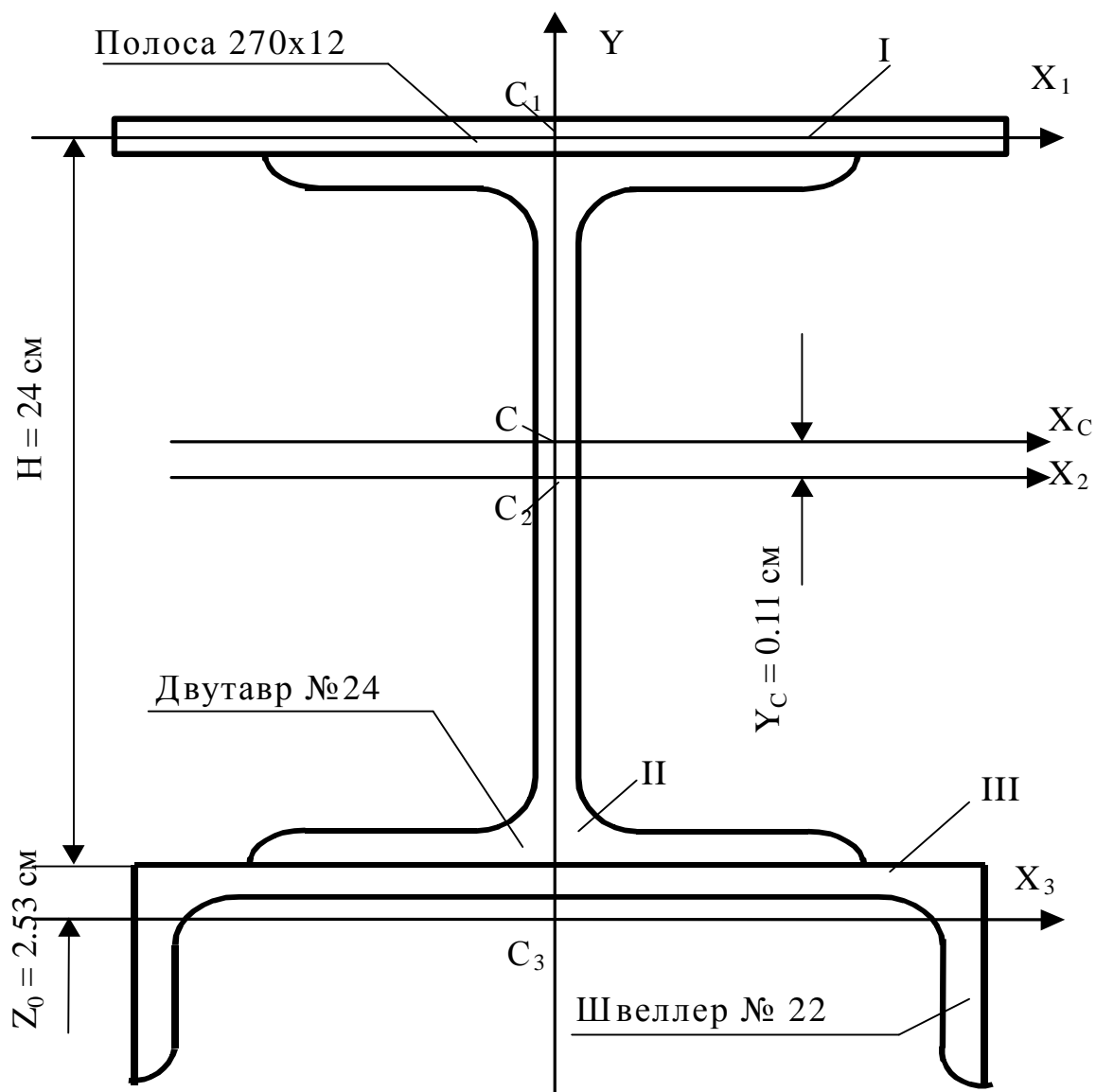


Рисунок 13  
 Поперечное сечение стержня

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_{c_1} F_1 + y_{c_2} F_2 + y_{c_3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{12.6 \cdot 32.4 - 14.21 \cdot 26.7}{32.4 + 34.8 + 26.7} = 0.11 \text{ см}$$

Здесь:

$$y_{c_1} = \frac{H}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1.2}{2} = 12.6 \text{ см}$$

$$y_{c_2} = 0; y_{c_3} = \left( -\frac{H}{2} - z_0 \right) = \left( -\frac{24}{2} - 2.21 \right) = -14.21 \text{ см}$$

На расстоянии  $y_c = 0.11$  см от оси  $x$  проводим главную центральную ось  $x_c$ .  
Теперь определяем моменты инерции  $I_{Xc}$ ,  $I_{Yc}$

$$I_{Xc} = \sum_{i=1}^n [I_{X_{ci}} + a_i^2 F_i] = \sum_{i=1}^n [I_{X_{ci}} + (y_{ci} - y_c)^2 F_i] = 4 + (12.6 - 0.11)^2 \cdot 324 +$$

$$+ 2110 + 0.11^2 \cdot 34.8 + 151 + (14.21 + 0.11)^2 \cdot 26.7 = 7585.5 \text{ см}^4$$

$$I_{Yc} = \sum_{i=1}^n [I_{Y_{ci}} + b_i^2 F_i] = \sum_{i=1}^n [I_{Y_{ci}} + (x_{ci} - x_c)^2 F_i].$$

Т.к. центры тяжести всех трех фигур находятся на оси  $y$ , то  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ,  
поэтому

$$I_{Yc} = I_{Yc1} + I_{Yc2} + I_{Yc3} = 1970 + 198 + 2110 = 4278 \text{ см}^4.$$

### 2.3.2 Задача 7.

Для стальной балки (рис.14) подобрать размеры двутаврового, круглого и прямоугольного (соотношение сторон  $h : b = 2$ ) сечений, выбрать оптимальный вариант и произвести полную проверку на прочность по четвертой теории прочности. Данные взять с табл. 11 и 12. Принять  $[t] = 0,6[S]$ .

Таблица 11

Первая цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а, м	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
б, м	3,2	4,0	3,8	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4
с, м	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	1,8	1,6	1,4	1,7	2,7

Таблица 12

Вторая цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
М, кНм	15	10	20	12	14	15	16	14	18	20
Р, кН	5	6	4	6	5	8	10	8	7	5
q, кН/м	6	8	4	3	5	6	8	10	4	5
$[\sigma]$ , МПа	150	180	170	150	160	190	200	210	160	180

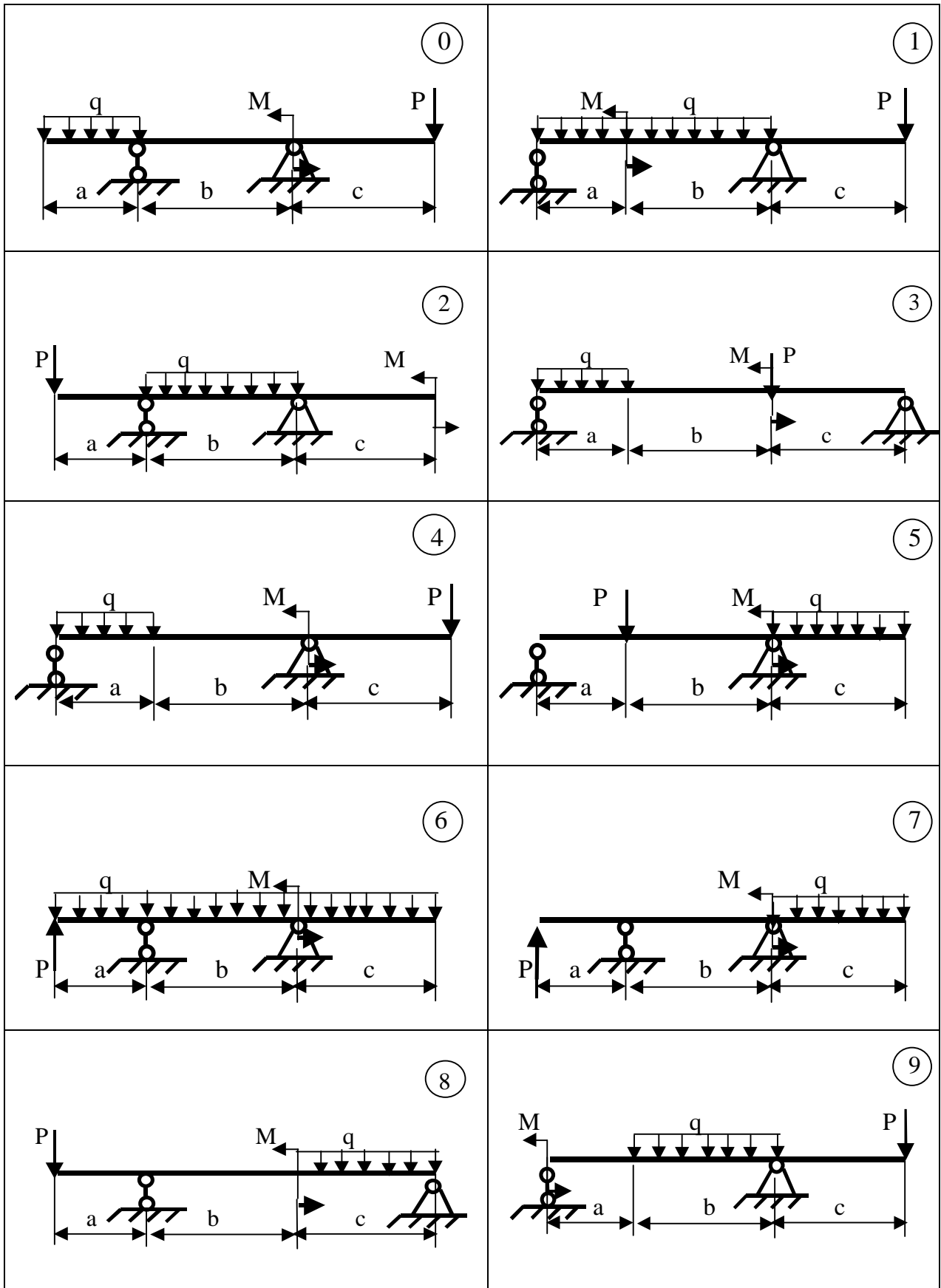


Рисунок 14  
Схемы к задаче 7

### 2.3.2.1 Указания к выполнению задачи 7

- 1 Из условий равновесия определить реакции опор.
- 2 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
- 3 По наибольшей величине изгибающего момента и поперечной силы выбрать опасное сечение.
- 4 Из условия прочности на изгиб

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

определить момент сопротивления  $W_x$  и подобрать размеры круглого, прямоугольного и двутаврового сечений.

- 5 Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте выбранного сечения и произвести полную проверку прочности по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Если опасных сечений несколько, то по одному из них подобрать сечение, а по другому – сделать проверку.

### 2.3.2.2 Пример решения задачи 7

Для стальной балки (рис.15) подобрать размеры двутаврового, круглого и прямоугольного (соотношение сторон  $h : b = 2$ ) сечений, выбрать оптимальный вариант и произвести полную проверку на прочность по четвертой теории прочности, приняв  $[\sigma] = 150$  МПа,  $[\tau] = 90$  МПа.

1. Из условий равновесия определяем реакции опор

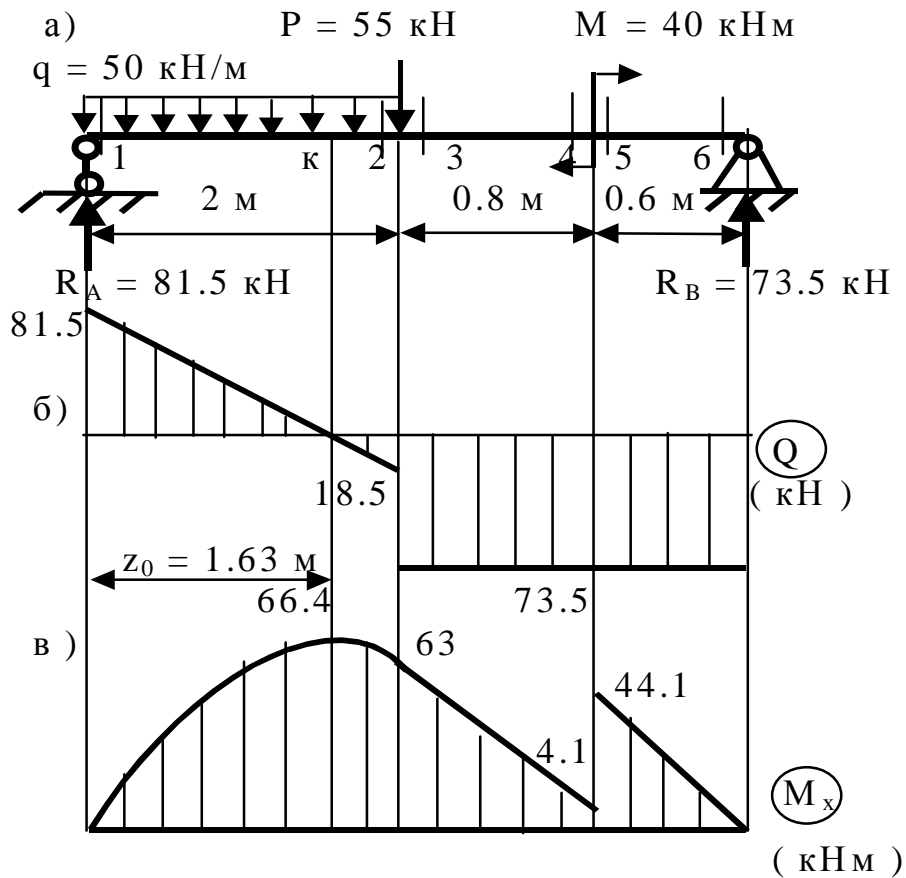
$$\sum M_A = 0;$$

$$-q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3,4} = 73,5 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M - R_A \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 40}{3,4} = 81,5 \text{ кН}$$



а – схема балки; б – эпюра поперечных сил;  
в – эпюра изгибающих моментов.

Рисунок 15

Схема балки с эпюрами внутренних усилий.

Проверка:

$$\sum P_y = 0; \quad R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0;$$

$$81,5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73,5 = 0; \quad 155 - 155 = 0.$$

Следовательно, реакции определены, верно.

1 Определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях.

$$Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 81,5 - 50 \cdot 2 = -18,5 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = R_A = 81,5 \text{ кН;}$$

На участке 1-2 эпюра  $Q$  меняет знак, следовательно, на этом участке изгибающий момент экстремальный. Расстояние до этого сечения равно

$$Z_0 = \frac{Q_1}{q} = \frac{81,5}{50} = 1,63 \text{ м} .$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 81,5 - 50 \cdot 2 - 55 = -73,5 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 = -73,5 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4; \quad Q_6 = Q_5 = -73,5 \text{ кН}.$$

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 81,5 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 63 \text{ кНм};$$

$$M_K = R_A \cdot 1,63 - 50 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 66,4 \text{ кНм};$$

$$M_3 = M_2 = 63 \text{ кНм};$$

$$M_4 = R_B \cdot 0,6 - M = 735 \cdot 0,6 - 40 = 4,1 \text{ кНм};$$

$$M_5 = R_B \cdot 0,6 = 735 \cdot 0,6 = 441 \text{ кНм};$$

$$M_6 = 0.$$

3 Из эпюры изгибающих моментов находим максимальный по модулю изгибающий момент –  $M_{\max} = 66,4$  кНм.

Из условия прочности определяем необходимый осевой момент сопротивления сечения (считаем, что  $[S] = 150$  МПа)

$$W_X = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{66,4 \cdot 10^{-3}}{150} \cdot 10^6 = 443 \text{ см}^3$$

4 Переходим к подбору сечений:

а) Двутавровое сечение.

По таблице сортамента (см. Г.С. Писаренко и др., Справочник по сопротивлению материалов, 1988г. стр. 98-100) подбираем необходимый номер двутавра (немного больший или равный полученному  $W_X = 443 \text{ см}^3$ ).

Принимаем двутавр № 30,  $W_X = 472 \text{ см}^3$ ,  $H = 30$  см;  $B = 13,5$  см;  $d = 0,65$  см,  $t = 1,02$  см,  $F = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $J_X = 7080 \text{ см}^4$ ,  $S_X = 268 \text{ см}^3$ .

б) Круглое сечение  $W_X = \frac{\rho d^3}{32} = 0,1d^3 = 443 \text{ см}^3$

$$\text{откуда } d = \sqrt[3]{\frac{443}{0,1}} = \sqrt[3]{4430} = 17,7 \text{ см}$$

Принимаем  $d = 180 \text{ мм}$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot 18^2 = 252,7 \text{ см}^2$$

в) Прямоугольное сечение

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 443 \text{ см}^3.$$

(здесь принято  $h = 2b$ ).

$$b = \sqrt[3]{\frac{443 \cdot 3}{2}} = \sqrt[3]{669} = 8,7 \text{ см.}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 8,7 = 17,4 \text{ см}$$

$$F = bh = 8,7 \cdot 17,4 = 151,4 \text{ см}^2$$

Сопоставляя три типа сечений – двутавровое, круглое и прямоугольное, видим, что наиболее рациональным есть двутавровое, т.к. его площадь наименьшая.

5 Теперь переходим к полной проверке прочности балки.

Из эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (рис.15) определяем сечения, где  $Q_{\max} = 81,5 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 66,4 \text{ кНм}$  и где  $Q$  и  $M$  хотя и не максимальны, но значительные. В нашем случае таким является сечение 3, где  $Q = 73,5 \text{ кН}$ ,  $M = 63 \text{ кНм}$ .

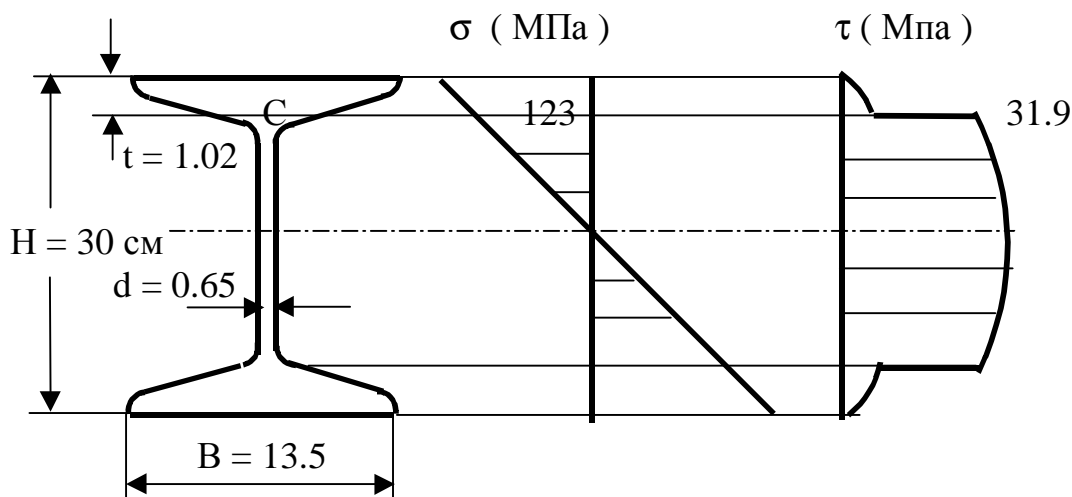


Рисунок 16

Поперечное сечение и эпюры нормальных и касательных напряжений

Определяем максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{66,4 \cdot 10^{-3}}{472 \cdot 10^{-6}} = 141 \langle [\sigma] = 150 \text{ МПа}$$



Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_X^*}{b \cdot I_X} = \frac{81,5 \cdot 10^{-3} \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 41,5 \langle [\tau] = 90 \text{ МПа}$$

Определяем эквивалентные напряжения в опасном сечении в точке С по формуле

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2};$$

$$\sigma_c = \frac{M_x \cdot y_c}{I_X} = \frac{63 \cdot 10^{-3} \cdot 13,98 \cdot 10^{-2}}{7080 \cdot 10^{-8}} = 123 \text{ МПа}$$

$$y_c = \frac{H}{2} - t = \frac{30}{2} - 1,02 = 13,98 \text{ см},$$

$$\tau_c = \frac{Q \cdot S_X^{\text{отс}}}{b \cdot I_X} = \frac{73,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 31,9 \text{ МПа}$$

$$S_X^{\text{отс}} = B \cdot t \cdot \left( \frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) = 13,5 \cdot 1,02 \left( \frac{15}{2} - \frac{1,02}{2} \right) = 200 \text{ см}^3$$

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{123^2 + 3 \cdot 31,9^2} = 135 \langle [\sigma] = 150 \text{ МПа}$$

Таким образом, все условия прочности удовлетворены.

### 2.3.3 Задача 8

Для заданной балки, испытывающей сложный изгиб, (табл.13 и 14, рис.16)

определить наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_{\max}$  и построить эпюру напряжений в опасном сечении.

Таблица 13

Первая цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a, м	1.2	1.4	1.5	1.7	1.4	1.8	2.0	1.7	2.2	2.4
b, м	2.5	2.4	2.2	2.6	2.5	2.0	1.8	1.8	1.6	1.5
c, м	1.4	1.2	1.6	1.8	2.0	2.2	1.5	2.3	1.9	2.1
P, кН	5.0	4.0	3.0	2.5	2.8	3.3	2.8	2.6	3.0	3.2
M, кНм	6.0	5.5	4.0	6.5	4.8	6.0	5.8	7.0	8.0	4.0

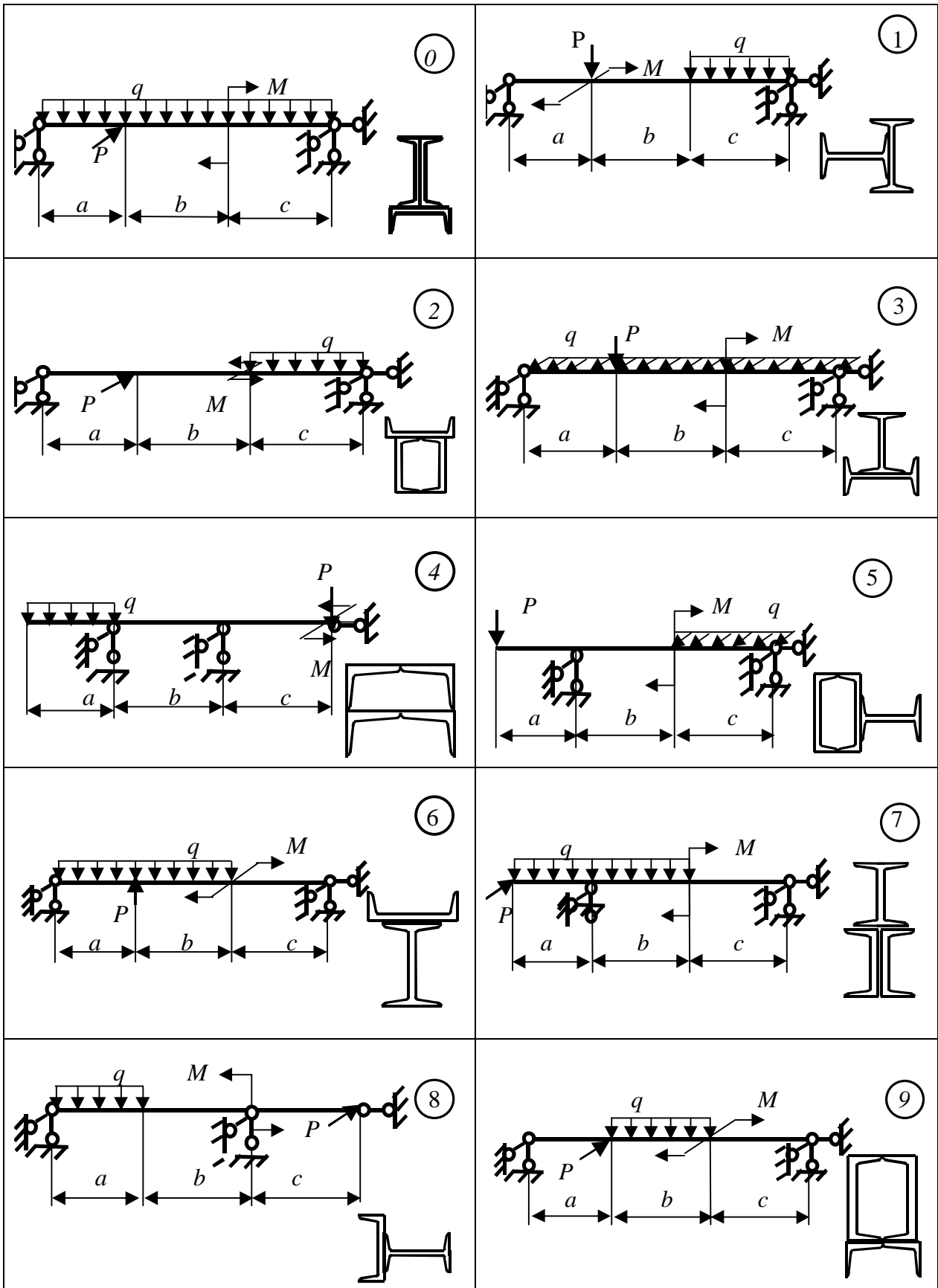


Рисунок 16  
Схемы к задаче 8

Таблица 14

Вторая цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q, кН/м	5	4	3	6	2	3.5	2.5	4.6	5.4	4.5
Двутавр	16	18	20	22	24	27	30	33	36	30
Швеллер	24	27	20	22	22	18	27	30	33	36
Полоса В*h см <sup>2</sup>	150X12	170X14	180X16	200X18	220X20	240X24	260X20	230X20	240X40	180X24
Уголок	40X25X4	50X32X4	63X40X6	75X50X8	100X63X8	125X80X10	160X100X12	180X110X10	200X125X14	250X160X18

### 2.3.3.1 Указания к решению задачи 8

1 Силы разложить по плоскостям.

2 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в двух плоскостях.

3 По наибольшим величинам изгибающих моментов найти опасное сечение (их может быть несколько).

4 Записать условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_A \leq [\sigma],$$

где  $M_x$  и  $M_y$  - изгибающие моменты в опасном сечении в вертикальной и горизонтальной плоскостях;  $J_x$  и  $J_y$  - моменты инерции сечений относительно главных центральных осей;  $X_c$  и  $Y_c$  - координаты наиболее нагруженной точки опасного сечения.

5 Для построения эпюры напряжений необходимо найти положение нейтральной оси сечения. Оно определяется углом между горизонтальной и нейтральной осями:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{M_y}{M_x} \right| \cdot \frac{I_x}{I_y}.$$

6 Построить эпюру распределения напряжений по сечению, используя условие прочности.

### 2.3.3.2 Пример решения задачи 8

1 Прикладываем силы, действующие в вертикальной плоскости (рис 17.в).

От них определяем реакции опор.

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B^B \cdot 3 - q \cdot 1.6 \cdot 2.2 = 0, \quad R_B^B = \frac{30 \cdot 1.6 \cdot 2.2}{3} = 35.2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$-R_A^B \cdot 3 + q \cdot 1.6 \cdot 0.8 = 0, \quad R_A^B = \frac{30 \cdot 1.6 \cdot 0.8}{3} = 12.8 \text{ кН}.$$

Значения моментов в характерных сечениях равны:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A^B \cdot 1.4 = 12.8 \cdot 1.4 = 17.9 \text{ кНм}$$

$$M_3 = M_2 = 17.9 \text{ кНм}; \quad M_4 = 0;$$

$$M_{\max} = R_B^B \cdot 1.17 - q \cdot 1.17 \cdot \frac{1.17}{2} = 35.5 \cdot 1.17 - 30 \cdot 1.17 \cdot \frac{1.17}{2} = 20.6 \text{ кНм}$$

По этим значениям строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$  (рис.17д).

Прикладываем силы, действующие в горизонтальной плоскости (рис. 17е). Снова определяем реакции опор и строим эпюры  $Q_x$  и  $M_y$  (рис. 17ж, 17з).

$$\sum M_A = 0; \quad P \cdot 1.4 + M - R_B^{\Gamma} \cdot 3 = 0 \quad R_B^{\Gamma} = \frac{25 \cdot 1.4 + 20}{3} = 18.3 \text{ кН}$$

$$R_A^{\Gamma} = \frac{25 \cdot 1.6 - 20}{3} = 6.7 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A^{\Gamma} \cdot 3 - P \cdot 1.6 + M = 0;$$

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = -R_A^{\Gamma} \cdot 1.4 = 6.7 \cdot 1.4 = -9.4 \text{ кНм};$$

$$M_4 = M = 20 \text{ кНм}.$$

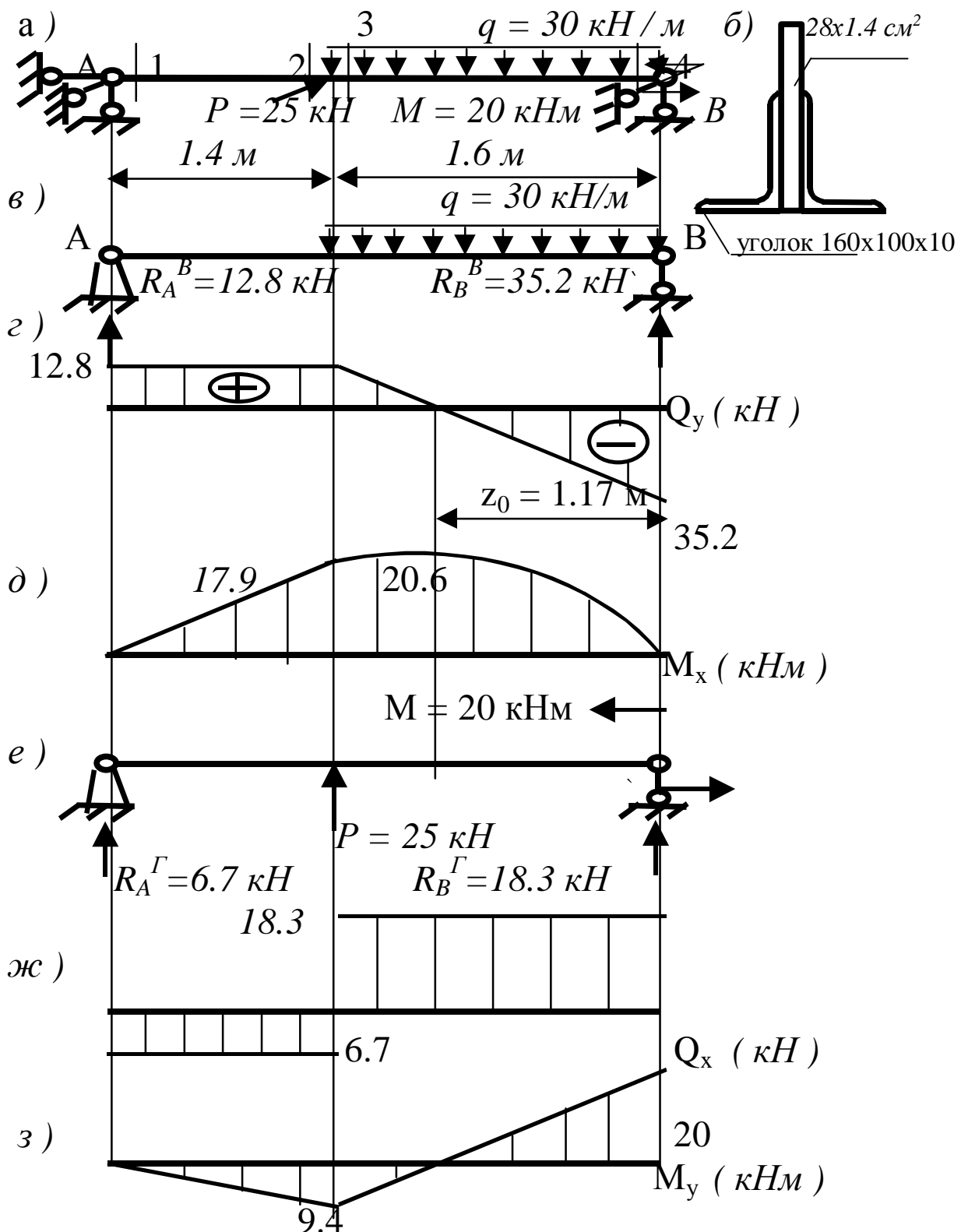
3.Анализируем эпюры  $M_x$  и  $M_y$  (рис.5д и 5з), выбираем опасное сечение.

Таких сечений три: а)  $M_x = 17.9 \text{ кНм}$ ,  $M_y = 9.4 \text{ кНм}$ ; б)  $M_x = 20.6 \text{ кНм}$ ,  $M_y = 1.4 \text{ кНм}$ ; в)  $M_x = 0$ ,  $M_y = 20 \text{ кНм}$ .

Анализируя усилия, видим, что опасным является вариант «а».

Чтобы выяснить, какое сечение опасное, определяем геометрические характеристики сечения: положение центра тяжести сечения и моменты инерции относительно главных центральных осей. Для этого вычерчиваем сечение в масштабе (рис.18). Из сортамента выписываем необходимые : геометрические характеристики для уголка 160x100x10 :  $F=25.28 \text{ см}^2$ ,  $x_0=2.28 \text{ см}$ ,  $y_0=5.23 \text{ см}$ ,  $I_x=666.6 \text{ см}^4$ ,  $I_y = 204.09 \text{ см}^4$ .

Положение центра тяжести сечения



а- схема балки; б –поперечное сечение балки; в - схема сил, действующих на балку в вертикальной плоскости; г –эпюры поперечных сил  $Q_y$ ; д–эпюра  $M_x$ ; е –схема сил, действующих на балку в горизонтальной плоскости; ж -эпюра  $Q_x$ ; з– эпюра  $M_y$ .

Рисунок 17

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} \cdot F_i}{F} = \frac{y_{c1}F_1 + y_{c2}F_2 + y_{c3}F_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \text{ где } y_{ci} - \text{координата}$$

центра тяжести  $i$ -той фигуры,  $F_i$  – ее площадь ( $F_1=F_2=25,28\text{см}^2$  – площади уголков,  $F_3=28 \cdot 1,4=39,2\text{см}^2$  – площадь полосы).

Начало отсчета принимаем в центрах тяжести уголков, т.е. ось  $X$  проводим через  $C_1$  и  $C_2$ , тогда:

$$y_{c3} = \frac{28}{2} - y_0 = \frac{28}{2} - 5,23 = 8,77 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{8,77 \cdot 28 \cdot 1,4}{25,28 + 25,28 + 39,2} = \frac{8,77 \cdot 39,2}{89,76} = 3,83 \text{ см}.$$

Находим моменты инерции сечения по формуле

$$J_{X_c} = \sum_{i=1}^n [J_{X_{ci}} + a_i^2 F_i].$$

Здесь  $J_{X_{ci}}$  – моменты инерции каждой из фигур относительно собственных осей  $X_{ci}$ ;

$a_i$  – расстояние между осью  $X_c$  и  $X_{ci}$

$$J_{xc} = 2[666,6 + 3,83^2 \times 25,28] + \frac{1,4 \times 28^3}{12} + (8,77 - 3,83)^2 + 39,2 = 5093 \text{ см}^4$$

$$J_{xc} = 2[666,6 + 3,83^2 \times 25,28] + \frac{1,4 \times 28^3}{12} + (8,77 - 3,83)^2 + 39,2 = 5093 \text{ см}^4$$

$$J_{yc} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = 2[204 + (2,28 + 0,7)^2 \times 25,28] + \frac{28 \times 1,4^3}{12} = 860 \text{ см}^4$$

Определяем положение нейтральной оси

$$\text{tg} \beta = \left| \frac{M_y}{M_x} \right| = \left| \frac{I_x}{I_y} \right| = \left| \frac{9,4}{17,9} \right| \cdot \frac{5093}{860} = 3,11$$

Откуда:  $\beta = 72^\circ$

Для того, чтобы выяснить через какой квадрант проходит нейтральная ось (рис.18), выясним знаки составляющих напряжений от  $M_x$  и  $M_y$ . Так как

момент  $M_x$  (см.рис.17д), сжимает верхние волокна, то от него напряжения выше оси  $X_c$  отрицательные, а ниже – положительные.

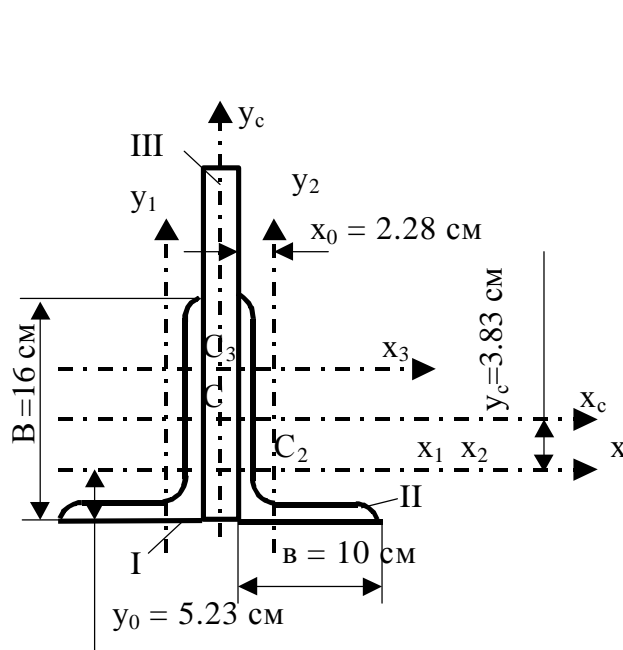


Рисунок 18

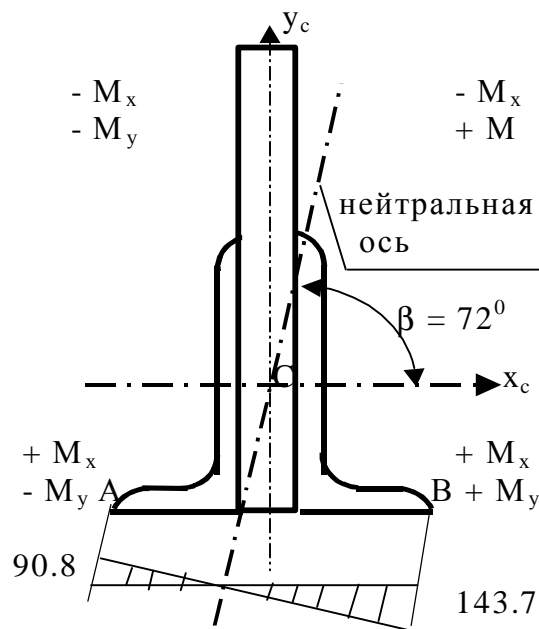


Рисунок 19  
Эпюра напряжений в опасном сечении ( в МПа ).

Момент  $M_y = 9,4\text{кНм}$  (см.рис.17з), сжимает волокна слева от оси  $Y_c$ , поэтому слева напряжения от него отрицательные, а справа – положительные.

Теперь из рис.19 видно, что нейтральная ось пройдет через первый и третий квадранты, где напряжения от моментов  $M_x$  и  $M_y$  с разными знаками.

Находим напряжения в наиболее удаленных точках А и В.

$$y_A = y_0 + y_c = 5,23 + 3,83 = 8,06 \text{ см}$$

$$X_A = b + \frac{\delta}{2} = 10 + \frac{1,4}{2} = 10,7 \text{ см}$$

$$\sigma_A = \frac{M_x \cdot y_A}{J_x} + \frac{M_y \cdot X_A}{J_y} = \frac{17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 8,06 \cdot 10^{-2}}{5093 \cdot 10^{-8}} +$$

$$\frac{9,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10,7 \cdot 10^{-2}}{860 \cdot 10^{-8}} = 26,7 + 117 = 143,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_b = \frac{M_x \cdot y_b}{J_x} - \frac{M_y \cdot X_B}{J_y} = \frac{17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 8,06 \cdot 10^{-2}}{5093 \cdot 10^{-8}} -$$

$$-\frac{9,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10,7 \cdot 10^{-2}}{860 \cdot 10^{-8}} = -90,3 \text{ МПа}$$

$$y_b = y_A = y_0 + y_c = 5,23 + 3,83 = 8,06 \text{ см}; \quad |X_b| = |X_A| = 10,7 \text{ см}$$

### 2.3.3 Задача 9

Подобрать диаметр вала промежуточной ступени редуктора (табл.15, 16 и рис.20). Мощность, передаваемая валом  $K$  – угловая скорость -  $n$  (об/мин) .  
Соотношения между усилиями в зацеплении  $T = 0,324P$ ;  $S = 0,4P$ .

Допускаемое напряжение  $[S] = 80 \text{ МПа}$ .

Таблица 15

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$K$ кВт	10	35	20	45	15	25	50	30	55	40
$d_1$ м	0,5	0,9	0,6	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8
$d_2$ м	0,4	0,6	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,4	0,6

Таблица 16

Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$n$ об/мин	100	350	200	450	300	150	500	250	400	350
$a$ м	0,7	0,5	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,5
$b$ м	0,5	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,7	0,6
$c$ м	0,3	0,5	0,7	0,5	0,6	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7

#### 2.3.3.1 Указания к решению задачи 9.

1 Определяем моменты и силы, действующие на вал .

$$M_k = \frac{30K}{\rho n}, \text{ где } K - \text{ мощность, передаваемая валом, } n - \text{ его число оборотов в}$$

минуту.

$$P_i = \frac{2M_k}{d_i}, \quad T_i = 0,324 P_i, \quad S_i = 0,4 P_i$$

2 Все силы приводим к оси вала.

3 Прикладываем к оси вала силы, действующие в вертикальной плоскости, от них определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов.

4 Прикладываем к оси вала силы, действующие в горизонтальной плоскости, от них определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов.



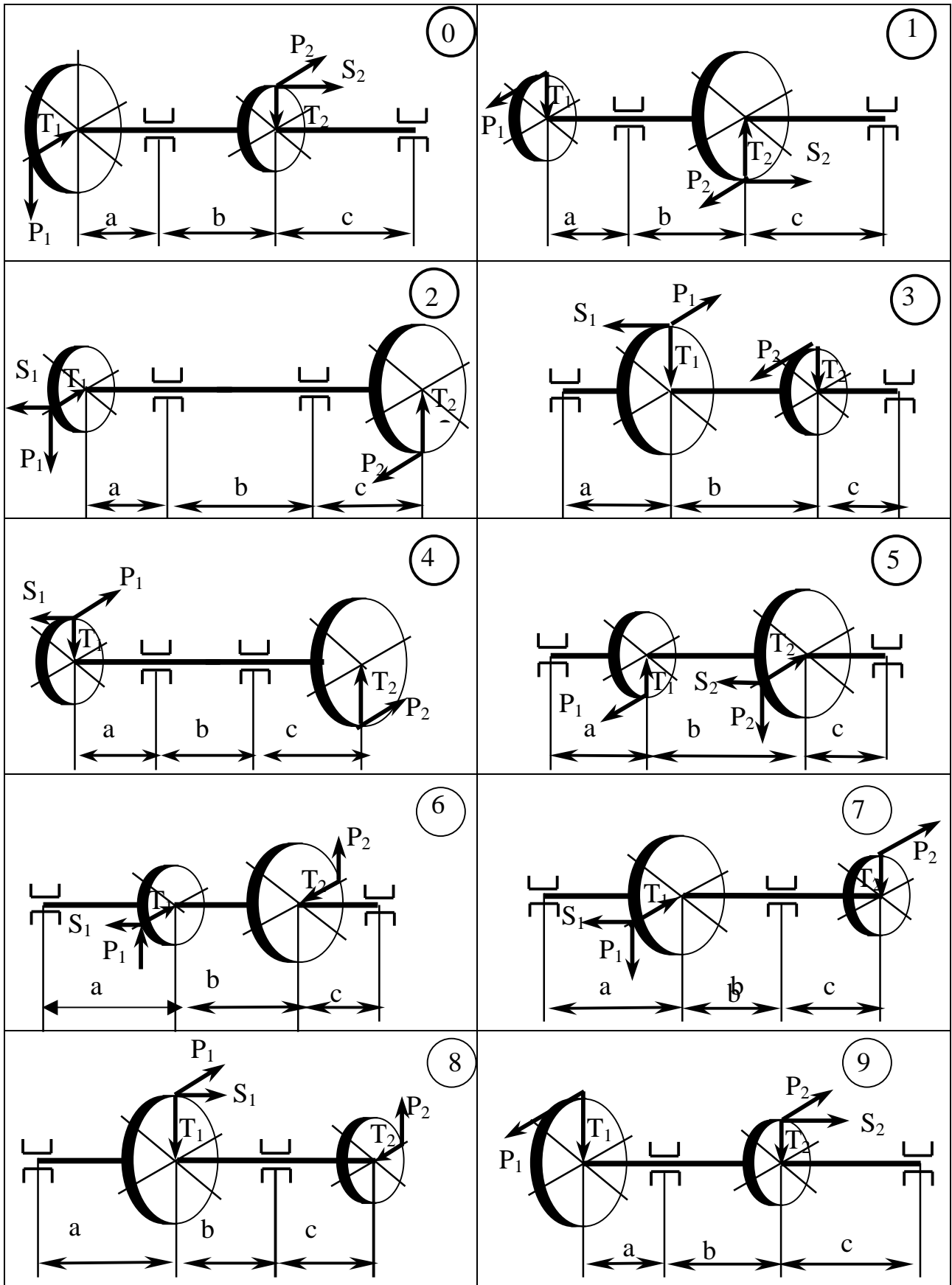


Рисунок 20  
Схемы к задаче 9

5 Прикладываем к оси вала моменты, скручивающие вал, от них строим эпюру крутящих моментов.

6 По формуле  $M_{изг} = \sqrt{M_{верт}^2 + M_{гор}^2}$  находим в характерных сечениях суммарный изгибающий момент и строим эпюру.

7 Анализируя эпюры крутящих моментов и суммарных изгибающих моментов, находим опасное сечение.

8 Из условия прочности  $s_{экв}^{III} = \frac{M_{np}^{III}}{W_0} \leq [s]$  определяем необходимый

момент сопротивления

$$W_0 \geq \frac{M_{np}^{III}}{[s]}, \text{ где } M_{пр}^{III} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}$$

Здесь  $M_{изг}$ ,  $M_{кр}$  – суммарный изгибающий момент и крутящий момент в опасном сечении.

9 Находим необходимый диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{пр}^{III} \cdot 32}{\rho \cdot [s]}}, \text{ и округляем до рекомендуемого}$$

### 2.3.3.2 Пример решения задачи 9

Определить диаметр вала промежуточной ступени редуктора, схема которого показана на рис.21а. Мощность, передаваемая валом,  $K = 75$  кВт, угловая скорость вала  $n = 450$  об/мин. Радиальное усилие  $T = 0,324 P$ , осевое усилие  $S = 0,4P$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.

1. Определим усилия в зацеплении колеса и шестерен. Крутящий момент, передаваемый валом,  $M_{кр} = \frac{30K}{pn} = \frac{30 \cdot 75}{\rho \cdot 450} = 1,59$  кНм.

$$M_{кр} = P_1 \frac{d_1}{2} = P_2 \frac{d_2}{2}; \quad P_1 = \frac{2M_{кр}}{d_1} = \frac{2 \cdot 1,59}{0,9} = 3,54 \text{ кН}; \quad P_2 = \frac{2M_{кр}}{d_2} = \frac{2 \cdot 1,59}{0,3} = 10,6 \text{ кН}.$$

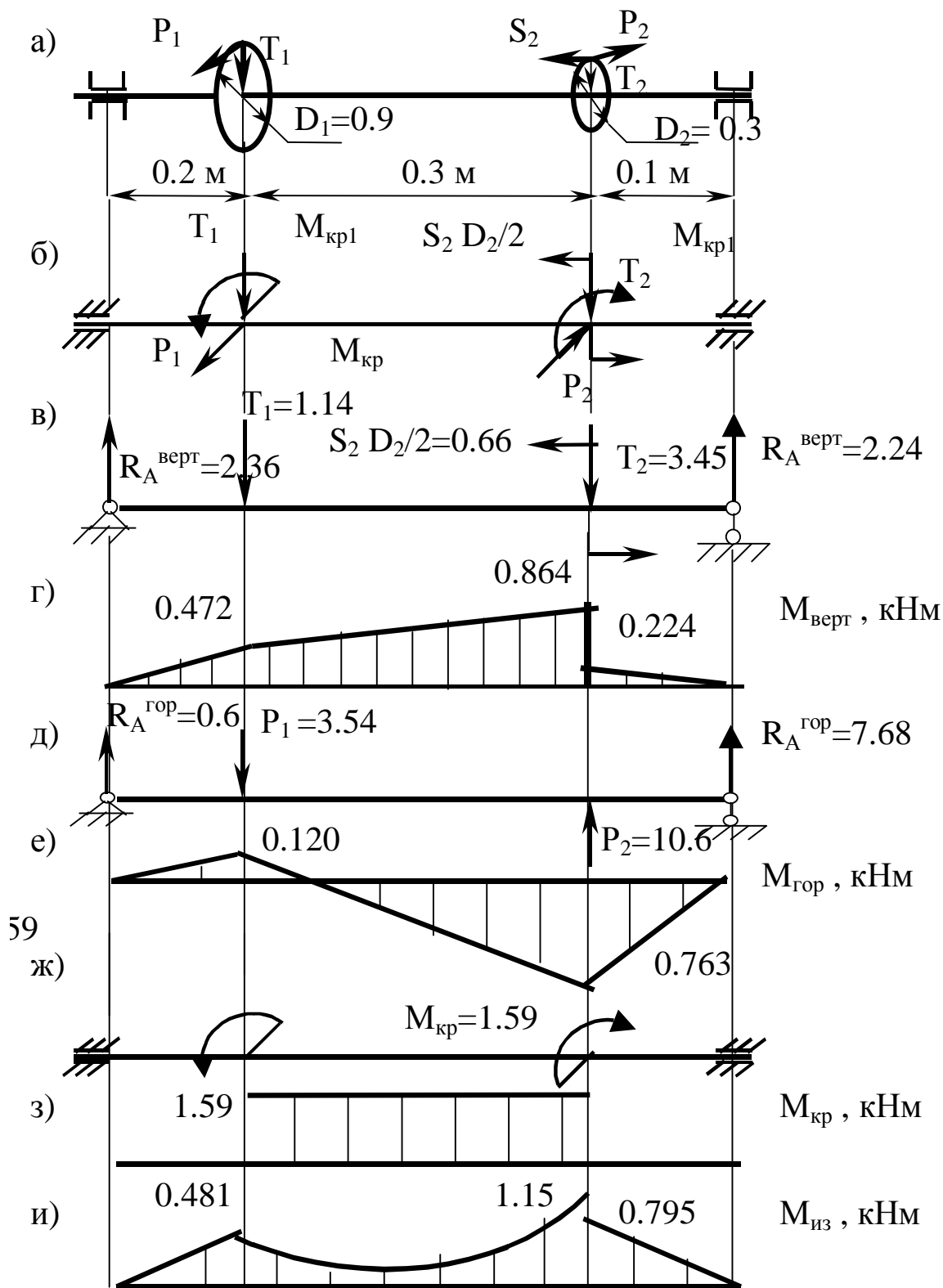
$$T_1 = 0,324 P_1 = 0,324 \cdot 3,54 = 1,14 \text{ кН}; \quad T_2 = 0,324 P_2 = 0,324 \cdot 10,6 = 3,45 \text{ кН};$$

$$S_2 = 0,4 P_2 = 0,4 \cdot 10,6 = 4,24 \text{ кН}.$$

Далее изображаем вал с действующими на него нагрузками в вертикальной плоскости (рис. 21в) и в горизонтальной плоскости (рис. 21д), определяем вертикальные и горизонтальные реакции и строим эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях (рис.21г и рис.21е).

Реакции в вертикальной плоскости:

$$\sum M_A^B = 0; \quad R_B^{верт} \cdot 0,6 - T_2 \cdot 0,5 - S_2 \cdot 0,15 - T_1 \cdot 0,2 = 0;$$



а – схема вала; б -приведение всех сил к оси вала; в – си лы, действу ющие на вал, в вертикальной плоскости; г – эпюра изгибающих мо ментов  $M_{верт}$ , д - си лы, действу ющие на вал, в горизонтальной плос кости; е - эпюра изгибающих моментов  $M_{гор}$ , ж -моменты, скручи ва ющие вал; з -эпюра крутящих моментов  $M_{кр}$ ; и – суммарная эпюра изгибающих моментов.

Рисунок 21

$$R_B^{верт} = \frac{3,45 \cdot 0,5 + 4,24 \cdot 0,15 + 1,14 \cdot 0,2}{0,6} = 2,24 \text{ кН};$$

$$\sum M_B^B = 0; -R_A^{верт} \cdot 0,6 + T_1 \cdot 0,4 - S_2 \cdot 0,15 + T_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_A^{верт} = \frac{1,14 \cdot 0,4 + 3,45 \cdot 0,1 - 4,24 \cdot 0,15}{0,6} = 2,36 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum P_{iY} = 0; -T_1 - T_2 + R_A^{верт} + R_B^{верт} = 0;$$

$$-1,14 - 3,45 + 2,24 + 2,36 = -4,59 + 4,60 \approx 0.$$

Реакции в горизонтальной плоскости:

$$\sum M_A^Г = 0; -R_B^{зоп} \cdot 0,6 + P_2 \cdot 0,5 - P_1 \cdot 0,2 = 0;$$

$$R_B^{зоп} = \frac{10,5 \cdot 0,5 - 3,54 \cdot 0,2}{0,6} = 7,63 \text{ кН};$$

$$\sum M_B^Г = 0; -R_A^{зоп} \cdot 0,6 + P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_A^{зоп} = \frac{3,54 \cdot 0,4 - 10,5 \cdot 0,1}{0,6} = 0,6 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum P_{iX} = 0; P_2 - P_1 + R_A^{зоп} + R_B^{зоп} = 0;$$

$$0,6 + 10,6 - 3,54 - 7,63 = 11,2 - 11,17 \approx 0.$$

Опасным является сечение, где приведенный момент наибольший, - слева от малого колеса

$$M_{np}^{III} = \sqrt{M_{верт}^2 + M_{зоп}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,864^2 + 0,763^2 + 1,59^2} = 1,96 \text{ кНм}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{1,96 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{p \cdot 80}} = 0,063 \text{ м}; \text{ принимаем } d = 65 \text{ мм}.$$

## 3 ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНАМ

### 3.1 Экзаменационные вопросы

1. Введение. Задачи курса сопротивления материалов. Связь курса с общенаучными, инженерными и специальными дисциплинами.
2. Методика решения задач по сопротивлению материалов. Предпосылки, принимаемые при расчетах. Реальный объект и расчетная схема. Определение бруса, пластины, оболочки.
3. Основные гипотезы о деформируемом теле. Упругость и пластичность. Понятие об изотропии. Принцип начальных размеров.
4. Перемещения угловые и линейные. Перемещения малые и большие. Деформации линейные и угловые. Понятия о больших деформациях.
5. Силы внешние и внутренние. Метод сечений. Принцип Сен-Венана. Нагрузки статические и динамические.
6. Напряжение полное, нормальное, касательное. Понятие о напряженном и деформируемом состояниях. Классификация типов нагружения бруса по внутренним силовым факторам.
7. Растяжение и сжатие прямого бруса. Напряжения в поперечных и наклонных сечениях прямого бруса. Одноосное (линейное) напряженное состояние, максимальные напряжения при одноосном напряженном состоянии.
8. Деформированное состояние при растяжении или сжатии. Деформации продольные и поперечные. Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).
9. Закон Гука при одноосном напряженном состоянии. Модуль упругости. Определение осевых перемещений поперечных сечений. Жесткость при растяжении и сжатии.
10. Нормальные силы, нормальные напряжения в поперечных сечениях прямого бруса. Осевые перемещения при действии сосредоточенных и распределенных сил. Построение эпюр продольных сил и перемещений.
11. Опытное изучение свойств материалов при растяжении. Диаграмма растяжения. Основные механические свойства материала. Истинная диаграмма растяжения.
12. Механические свойства при сжатии. Диаграмма сжатия. Пластическое и хрупкое состояние материалов, типы разрушений.
13. Предельное состояние. Критерии предельного состояния. Расчет по допускаемым напряжениям и нагрузкам.
14. Типы задач при расчете на прочность при растяжении и сжатии:
15. Проверка на прочность, подбор сечений и определение допускаемой нагрузки.
16. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии.
17. Напряженное состояние в точке. Компоненты напряжения, их обозначения. Определение напряжений на наклонной площадке. Главные напряжения и

- главные площадки. Определение величины и направления главных напряжений.
18. Графическое изображение напряженного состояния с помощью кругов Мора. Экстремальные значения касательных напряжений.
  19. Деформированное состояние в точке. Компонента деформаций, их обозначения.
  20. Гипотезы возникновения пластических деформаций, их назначение. Критерии возникновения пластических деформаций. Эквивалентное напряжение и формулы эквивалентности по различным гипотезам.
  21. Гипотеза формоизменения, трактовка ее.
  22. Гипотеза Мора для материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии, возможности ее уточнения.
  23. Сопоставление критериев и обзор формул эквивалентности. Пределы применимости гипотез и их экспериментальная оценка. Обзор новых гипотез.
  24. Зависимость характера разрушения от вида напряженного состояния материала. Гипотезы наибольших нормальных напряжений или деформаций в случае хрупкого состояния материала. Гипотеза разрушения Мора для материалов с различными пределами прочности при растяжении и сжатии.
  25. Чистый сдвиг. Закон парности касательных напряжений. Главные напряжения при чистом сдвиге.
  26. Закон Гука для сдвига. Модуль сдвига. Механические свойства материалов при чистом сдвиге.
  27. Статические моменты площади. Определение координат центра тяжести фигуры.
  28. Осевые, полярные и центробежные моменты инерции. Определение моментов инерции для прямоугольника и круга.
  29. Зависимость между моментами инерции для параллельных осей.
  30. Изменение осевых моментов инерции в зависимости от угла поворота координатных осей.
  31. Главные моменты инерции. Определение положения осей и вычисление главных моментов инерции различных сечений.
  32. Напряжения при кручении в поперечном сечении прямого бруса круглого сечения.
  33. Жесткость при кручении. Полярный момент инерции. Угол закручивания, вывод формулы.
  34. Расчет сплошного и концентрического пустотелого бруса на прочность и жесткость при кручении. Эпюры крутящих моментов, напряжений и углов закручивания.
  35. Изгиб. Опоры и опорные реакции. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балок (изгибающий момент и поперечная сила). Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

36. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой, интенсивностью нагрузки. Анализ этих зависимостей и выводы по контролю правильности построения эпюр.
37. Чистый изгиб. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси изогнутого бруса. Нормальные напряжения при чистом изгибе.
38. Поперечный изгиб. Распространение выводов чистого изгиба на поперечный изгиб. Касательные напряжения при поперечном изгибе брусьев (формула Д.И. Журавского).
39. Главные напряжения при изгибе. Расчеты на статическую прочность при изгибе. Рациональные сечения балок.
40. Косой изгиб. Определение напряжений, нахождение положений нейтральной оси и опасных точек в сечении.
41. Расчет на прочность брусьев большой жесткости при совместном изгибе и растяжении или сжатии. Определение положения нейтральной линии и напряжений.
42. Внецентренное растяжение или сжатие массивных брусьев.
43. Потенциальная энергия деформации бруса при различных случаях нагружения. Выражение потенциальной энергии деформации бруса через внутренние силовые факторы.
44. Теорема Кастилиано. Применение теоремы Кастилиано для определения перемещений сечений стержней упругой системы.
45. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений.
46. Интеграл Мора для вычисления перемещений произвольно нагруженных брусьев.
47. Способ Верещагина. Формулы для определения перемещений.
48. Стержневые системы. Понятие о степенях свободы и связях. Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости.
49. Метод сил при расчете статически неопределимых систем. Канонические уравнения. Выбор основной системы. Эквивалентная система.
50. Расчет статически неопределимых рам.
51. Статически неопределимые балки. Особенности расчета.
52. Устойчивость сжатых стержней. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Критическая нагрузка. Задача Эйлера.
53. Формула Эйлера при различных случаях опорных закреплений стержней и пределы ее применимости.
54. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. Формула Ф.С. Ясинского.
55. Расчет на устойчивость по коэффициенту уменьшения допускаемого напряжения.
56. Прочность материала при напряжениях, циклически меняющихся во времени. Современная трактовка вопроса. Механизм усталостного разрушения.

57. Кривые усталости и предел выносливости, вероятность разрушения в зависимости от перехода к предельным состояниям по уровню или числу циклов.
58. Влияние на предел выносливости качества поверхности, наклепа и окружающей среды.
59. Концентрация напряжений и абсолютные размеры деталей, как факторы, влияющие на выносливость. Эффективные коэффициенты концентрации при напряжениях, изменяющихся во времени.
60. Циклы переменных напряжений, их характеристика. Диаграммы предельных напряжений при асимметричных циклах.
61. Расчеты на прочность при одноосном напряженном состоянии и при кручении для несимметричных циклов. Коэффициент запаса прочности при переменных напряжениях.
62. Пластические деформации при циклическом деформировании и условии малоциклового разрушения. О повышении в результате проведения конструктивных и технологических мероприятий.



### 3.2 Типы экзаменационных задач

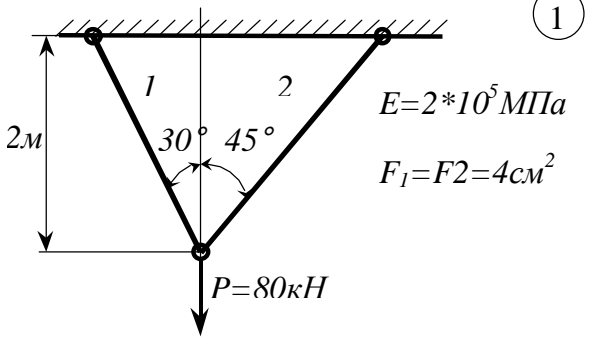
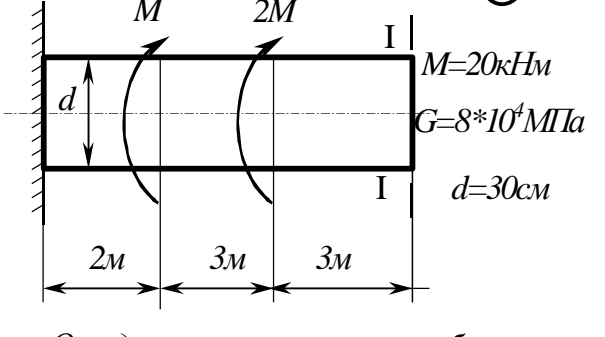
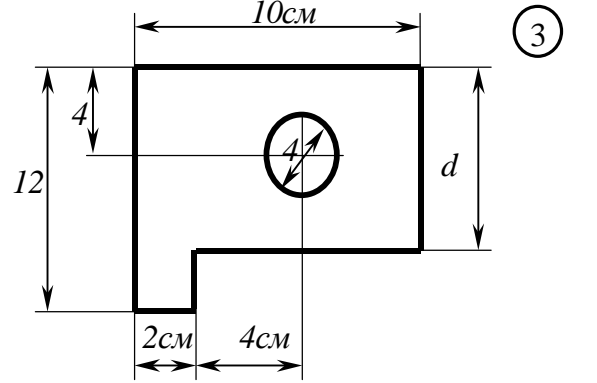
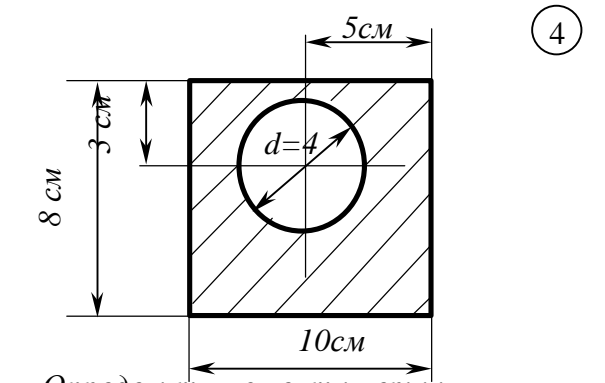
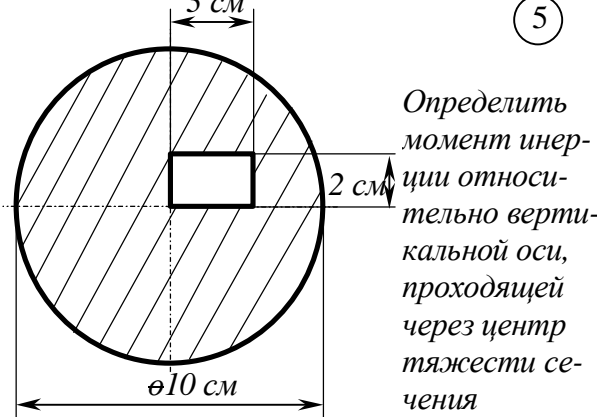
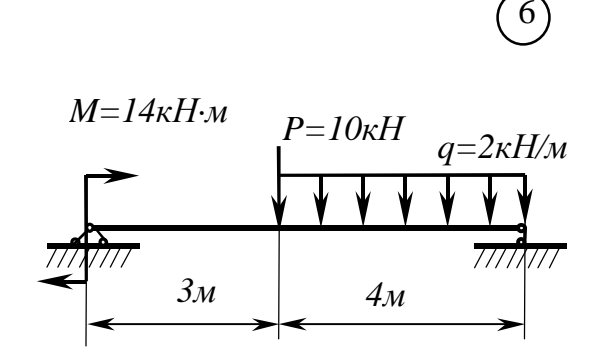
<p>①</p>  <p><math>E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math> <math>F_1=F_2=4 \text{ см}^2</math></p> <p><math>P=80 \text{ кН}</math></p> <p>Определить напряжения в стержнях и удлинение второго стержня</p>	<p>②</p>  <p><math>M=20 \text{ кНм}</math> <math>G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}</math> <math>d=30 \text{ см}</math></p> <p>Определить max напряжения в брусе и угол закручивания сечения I-I</p>
<p>③</p>  <p>Определить положение центра тяжести сечения</p>	<p>④</p>  <p>Определить момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести</p>
<p>⑤</p>  <p>Определить момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести сечения</p>	<p>⑥</p>  <p><math>M=14 \text{ кН}\cdot\text{м}</math> <math>P=10 \text{ кН}</math> <math>q=2 \text{ кН/м}</math></p> <p>Построить эпюры <math>Q</math> и <math>M</math></p>

Рисунок 22

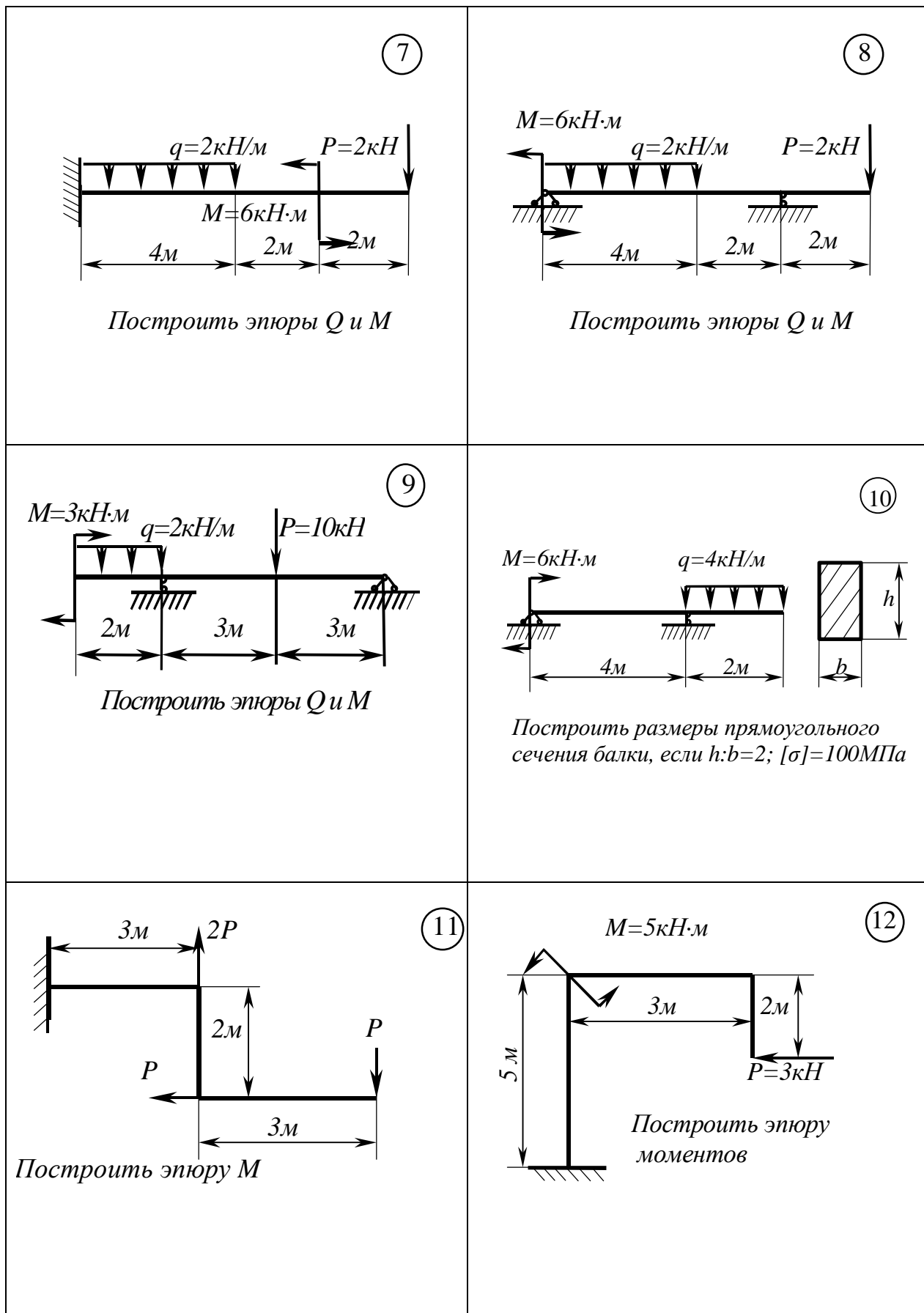


Рисунок 22, лист 2

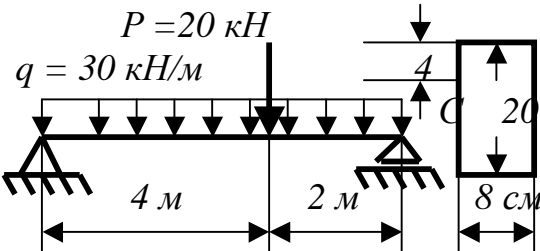
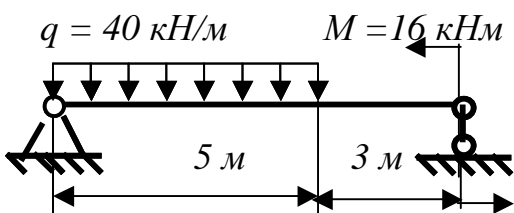
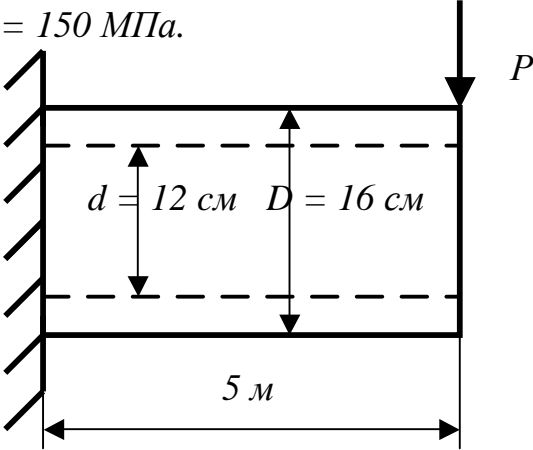
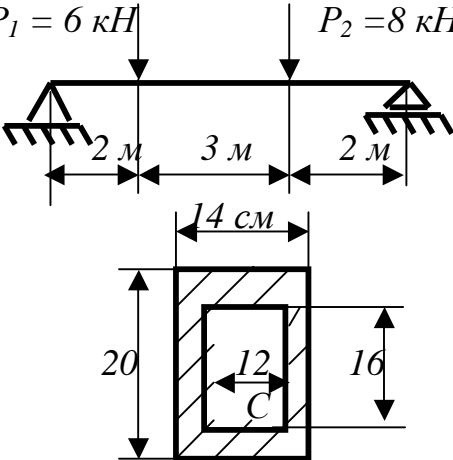
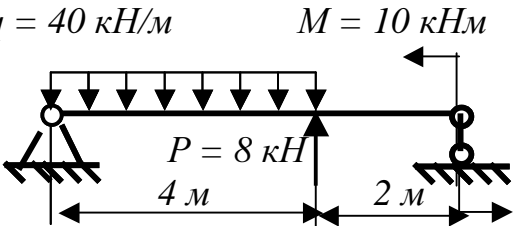
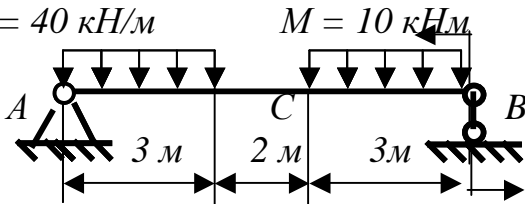
<p>13</p> <p>Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и определить максимальные нормальные напряжения в точке С</p> 	<p>14</p> <p>Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать номер двутавра, если <math>[s] = 180 \text{ МПа}</math></p> 
<p>15</p> <p>Определить допустимую силу P, если <math>[s] = 150 \text{ МПа}</math>.</p> 	<p>16</p> <p>Определить эквивалентные напряжения по четвертой теории прочности в точке С</p> 
<p>17</p> <p>Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать балку круглого поперечного сечения, если <math>[s] = 160 \text{ МПа}</math>.</p> 	<p>18</p> <p>Определить прогиб в точке С и угол поворота в сечении А, если балка прямоугольная с размерами: <math>h = 15 \text{ см}</math>, <math>b = 8 \text{ см}</math>.</p> 

Рисунок 22, лист 3

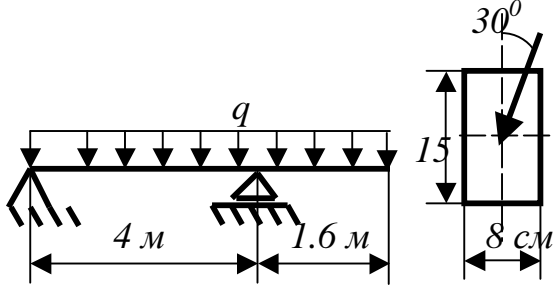
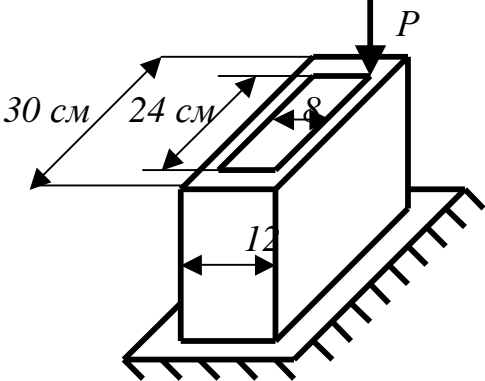
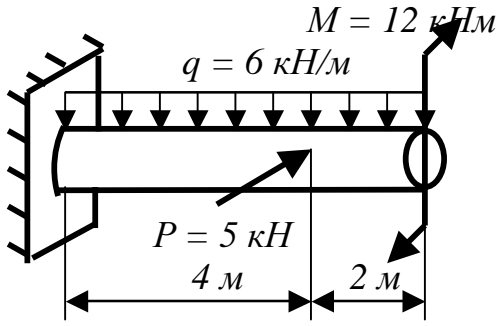
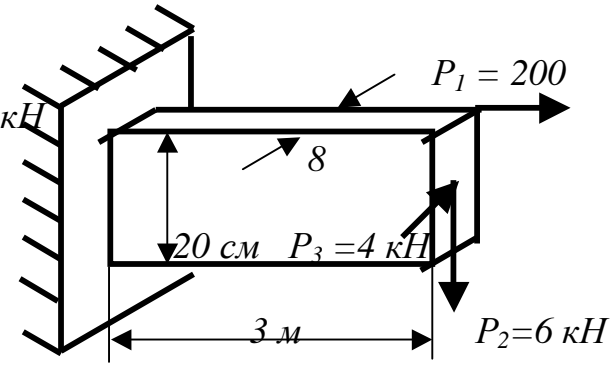
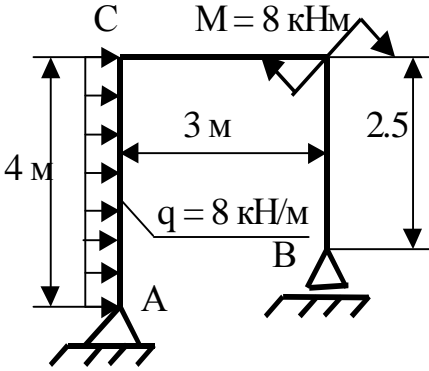
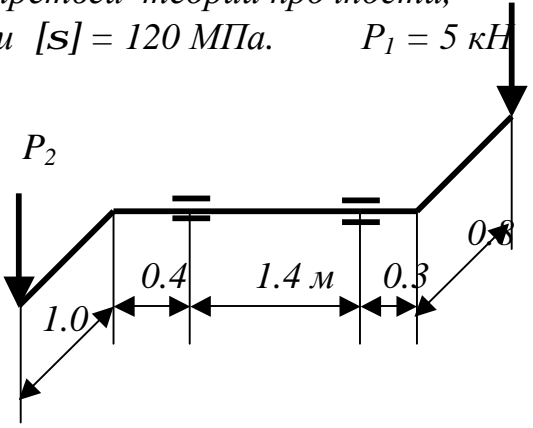
<p>19) Определить величину допустимого интенсивного нагружения <math>q</math>, если <math>[s] = 160 \text{ МПа}</math></p> 	<p>20) Определить величину допустимой силы <math>P</math>, если <math>[s] = 160 \text{ МПа}</math></p> 
<p>21) Определить напряжения по третьей теории прочности, если диаметр стержня равен 25 см.</p> 	<p>22) Определить нормальные напряжения в опасной точке.</p> 
<p>23) Определить угол поворота в узле С, если <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>, <math>J_x = 2000 \text{ см}^4</math></p> 	<p>24) Определить диаметр стержня по третьей теории прочности, если <math>[s] = 120 \text{ МПа}</math>. <math>P_1 = 5 \text{ кН}</math></p> 

Рисунок 22, лист 4

## Содержание

1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА	3
1.1 Введение.	3
1.2 Растяжение и сжатие.	3
1.3 Теории напряженного и деформируемого состояния.	3
1.4 Критерии прочности.	3
1.5 Сдвиг (срез) и кручение.	4
1.6 Геометрические характеристики поперечных сечений.	4
1.7 Изгиб прямых брусьев.	4
1.8 Потенциальная энергия деформации и общие методы определения перемещений.	4
1.9 Статически неопределимые системы	4
1.10 Устойчивость равновесия деформируемых систем	5
1.11 Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени	5
1.12 Список рекомендуемой литературы.	5
2 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ	6
2.1 Порядок выполнения контрольных работ.	6
2.2 Контрольная работа № 1 Растяжение и изгиб стержней	6
2.2.1 Задача 1.	6
2.2.1.1 Указания к выполнению задачи 1	8
2.2.1.2 Пример решения задачи 1	8
2.2.2 Задача 2	11
2.2.2.1 Указания к решению задачи 2	11
2.2.2.2 Пример решения задачи 2	13
2.2.3 Задача 3	16
2.2.3.1 Указания к решению задачи 3.	18
2.2.3.2 Пример решения задачи 3	20
2.2.4 Задача 4	21
2.2.4.1 Пример решения задачи 4	23
2.2.5 Задача 5	25
2.2.5.1 Указания к решению задачи 5 .	25
2.2.5.2 Пример решения задач 5	27
2.3 Контрольная работа № 2 Прочность стержней, испытывающих сложное сопротивление .	30
2.3.1 Задача 6	30
2.3.1.1 Указания к решению задачи 6	32
2.3.1.2 Пример решения задачи 6	33
2.3.2 Задача 7	35
2.3.2.1 Указания к решению задачи 7	37
2.3.2.2 Пример решения задачи 7	37
2.3.3 Задача 8	41

2.3.3.1 Указания к решению задачи 8	43
2.3.3.2 Пример решения задачи 8	43
2.3.4 Задача 9	48
2.3.4.1 Указания к решению задачи 9	48
2.3.4.2 Пример решения задачи 9	50
3 ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНАМ	52
3.1 Экзаменационные вопросы	52
3.2 Типы экзаменационных задач	55

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ”  
( для студентов заочной формы обучения специальности  
"Информационные технологии проектирования" )

Составитель: Владимир Андреевич Овчаренко

Подп. печ. . . 2000 Формат 60x54/16

Офсетная печать. Усл. печ. 3.2 Уч.-изд. 2.2

Тираж 50 экз. Заказ №

---

ДГМА. 84313. Г.Краматорск. ул. Шкадинова 74

