

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

Ю.С.Холодняк, В.А.Овчаренко, Л.В.Кутовий,
О.Ю.Деньщиков, Є.Ю.Роменський

ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ
ФАКТОРІВ ДЛЯ БАЛОК І ПЛОСКИХ РАМ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних
закладів

Краматорськ 2010

УДК 539.3/6
ББК 30.121
П-41

Рецензенти:

В. С. Гапонов, д-р техн.наук, професор Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

Л. І. Сердюк, д-р техн.наук, професор Полтавського національного технічного університету, м. Полтава

Ф. Л. Шевченко, д-р техн.наук, професор Донецького національного технічного університету, м. Донецьк.

Рекомендовано

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 1/11-6243 від 29.07.09.

П-41 Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок і плоских рам : навч. посібник / Ю. С. Холодняк [та ін.]. – Краматорськ: ДДМА, 2010. – 128 с.

ISBN 978-966-379-404-4.

Навчальний посібник містить основні теоретичні передумови і різноманітні приклади побудови епюр внутрішніх силових факторів для балок і плоских рам, а також завдання для самостійного їх розв'язання студентами.

Посібник розрахований на студентів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 539.3/6

ББК 30.121

ISBN 978-966-379-404-4

© Ю. С. Холодняк
В. А. Овчаренко
Л. В. Кутовий
О. Ю. Деньщиков
Є. Ю. Роменський, 2010
© ДДМА, 2010

Зміст

Вступ.....	4
1 Статично визначувані балки	5
1.1 Основні теоретичні відомості.....	5
1.2 Приклади побудови епюр.....	12
1.3 Завдання для самостійного розв'язання.....	18
1.4 Відповіді до завдань	24
2 Статично визначувані рами	34
2.1 Основні теоретичні відомості.....	34
2.2 Приклади побудови епюр.....	37
2.3 Завдання для самостійного розв'язання.....	49
2.4 Відповіді до завдань	55
3 Статично не визначувані балки.....	75
3.1 Основні теоретичні відомості.....	75
3.2 Приклади побудови епюр.....	79
3.3 Завдання для самостійного розв'язання.....	93
3.4 Відповіді до завдань	96
4 Статично не визначувані рами.....	101
4.1 Основні теоретичні відомості.....	101
4.2 Приклади побудови епюр.....	101
4.3 Завдання для самостійного розв'язання.....	111
4.4 Відповіді до завдань	115
Література.....	127

ВСТУП

Розв'язання переважної більшості задач опору матеріалів потребує визначення небезпечних, найбільш навантажених перерізів стрижнів, що входять до складу різноманітних конструкцій. Для визначення таких перерізів будують епюри внутрішніх силових факторів, тобто графічне зображення характеру їх змін за довжиною стрижня.

Найбільш складна побудова епюр в разі дії на стрижень поперечних навантажень у випадку розрахунку балок або рам.

Оскільки рама містить у собі декілька стрижнів, що жорстко скріплені один з одним, засвоєння прийомів побудови епюр слід починати саме з балок, тобто окремих стрижнів, на які діють поперечні навантаження. Набутий при цьому досвід значно полегшує сприйняття прийомів побудови епюр для рам.

Метою цього навчального посібника є створення допоміжного матеріалу, який би комплексно, в подробицях освітлював процедуру побудови епюр для балок та рам і надавав студентам, особливо заочної форми навчання, можливість самостійно засвоїти даний розділ. Саме такій меті і підпорядкований зміст цього посібника. Він містить необхідний теоретичний матеріал, ряд детально розібраних прикладів, завдання для самостійного розв'язування, відповіді до цих завдань, за допомогою яких студент зможе проконтролювати себе і виявити зроблені ним помилки.

1 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ БАЛКИ

1.1 Основні теоретичні відомості

Зовнішні навантаження, що діють на балку, зводяться до зосереджених сил P (кН, МН), пар сил M (кН·м, МН·м) і рівномірно чи нерівномірно розподіленим за довжиною балки навантаженням з інтенсивністю q (кН/м, МН/м) (рис.1, а).

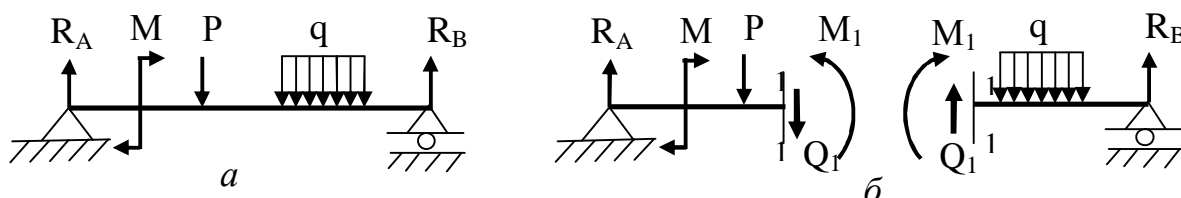


Рисунок 1

Рівномірно розподілені навантаження характеризуються їхньою інтенсивністю q , тобто величиною навантаження, що припадає на одиницю довжини балки. Інтенсивність нерівномірного розподілу навантаження змінюється за довжиною балки і позначається $q(z)$.

Способи обчислення опорних реакцій детально вивчають у курсі теоретичної механіки, тому зупинимось тут на деяких практичних питаннях.

1 Опори позначають буквами (наприклад, А і В). Три невідомі реакції можна знайти з наступних рівнянь рівноваги:

а) сума проекцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю:

$$\sum P_{kx} = 0 \text{ чи } \sum R_{kx} = 0, \text{ відкіля знаходять } R_A;$$

б) сума моментів усіх сил щодо шарніра А дорівнює нулю:

$$\sum M_A = 0, \text{ відкіля знаходять } R_B;$$

в) сума моментів усіх сил щодо шарніра В дорівнює нулю:

$$\sum M_B = 0, \text{ відкіля знаходять } R_A.$$

2 Якщо на балку діє розподілене навантаження, то для визначення реакцій її заміняють рівнодіючою, котра дорівнює площі епюри навантаження і прикладена в центрі ваги цієї епюри.

3 Знайдені реакції *обов'язково варто перевірити*, для чого зручно використовувати умову рівності нулю суми проекції всіх сил на вертикальну вісь $\sum P_{ky} = 0$, чи умову рівності нулю суми моментів усіх сил щодо якої-небудь точки С, відмінної від А и В, тобто $\sum M_C = 0$.

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки, наприклад у перерізі I-I (див. рис. 1, б), можуть виникнути два зусилля: поперечна сила Q_1 і згинальний момент M_1 .

Поперечна сила Q дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, прикладених з однієї сторони від розглянутого перерізу, на вісь, перпендикулярну осі балки.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з однієї сторони від розглянутого перерізу щодо центра ваги цього перетину.

Приймемо наступні правила знаків для Q й M у балках при згинанні.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила прагне повернути відсічену частину балки за ходом годинникової стрілки (рис. 2).

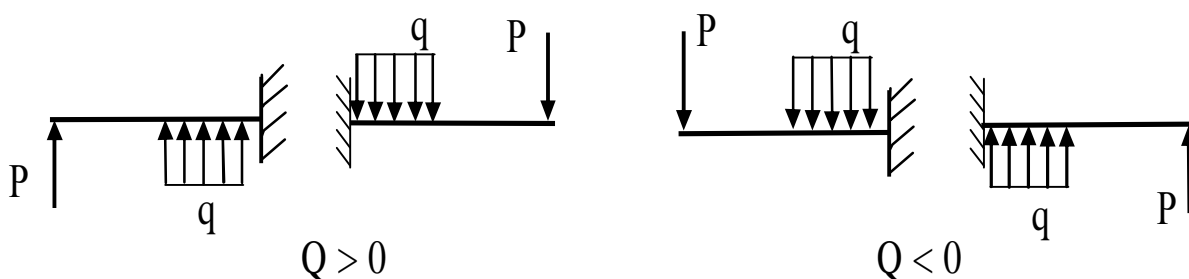


Рисунок 2

Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 3).

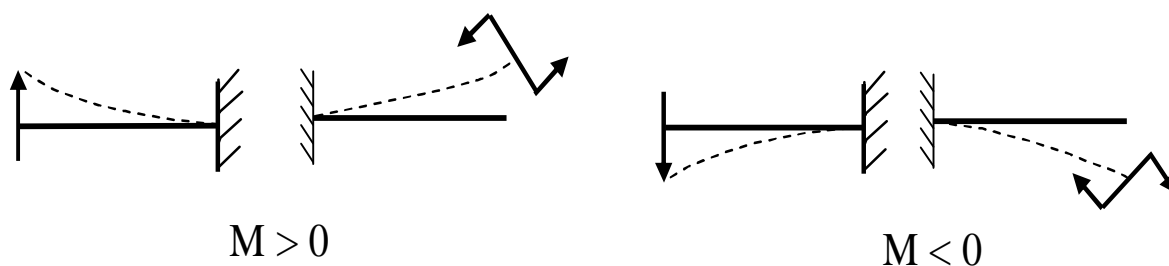


Рисунок 3

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів* будують **на стиснутих волокнах**.

Розглянемо брус, який закріплений довільним чином (рис.4) і навантажений у загальному випадку розподіленим навантаженням інтенсивності $q=f(z)$.

Прийнятий напрямок для q , що збігається з віссю y , будемо вважати додатним.

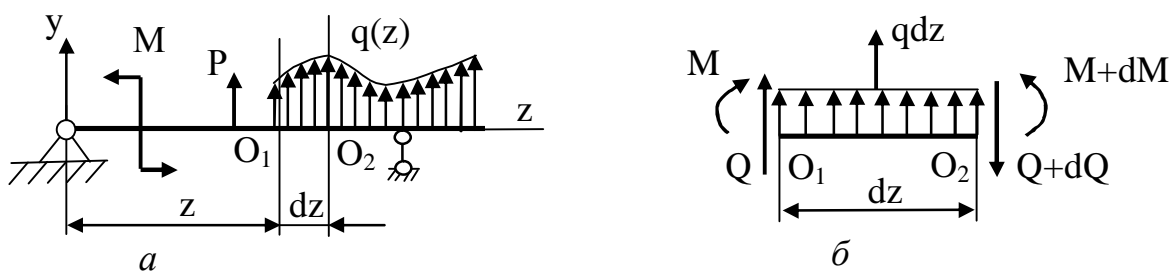


Рисунок 4

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий відрізок O_1O_2 довжиною dz (див. рис. 4,б). Він знаходиться в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, а також поперечних сил і згинальних моментів, прикладених у перетинах O_1 і O_2 .

Оскільки в загальному випадку внутрішні зусилля змінюються уздовж осі балки, то в перерізі O_1 візьмемо їх рівними Q і M , а в перерізі O_2 трохи більшими: $Q + dQ$, $M + dM$. Внутрішні зусилля, як звичайно, зобразимо в додатному напрямку. У межах малого відрізка dz будемо вважати навантаження q , розподілене рівномірно.

Складемо рівняння рівноваги елемента dz :

$$\sum P_{ky} = 0; \quad Q + qdz - (Q + dQ) = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; \quad Qdz + M + qdz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0. \quad (2)$$

З рівняння (1), скоротивши на Q , одержимо

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (3)$$

З рівняння (2), скоротивши на M і нехтуючи членом $qdz \frac{dz}{2}$ як величиною другого порядку малості, знайдемо

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (4)$$

Підставивши (4) у (3) одержимо залежність

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (5)$$

Співвідношення (3)...(5) називають *диференціальними залежностями при згинанні*.

Зі співвідношень (3)...(5) можна зробити деякі загальні висновки про характер епюр згинальних моментів M і поперечних сил Q і скласти наступні *правила побудови епюр*:

1 Розглянемо випадок, коли $q = 0$, тобто на розглянутій ділянці балки розподілене навантаження відсутнє.

Тоді відповідно до формули (3):

$$\frac{dQ}{dz} = q = 0.$$

Після інтегрування формул (3)...(5) одержимо:

$$Q = \text{const} = C_1, \quad M = C_1z + C_2.$$

З цих співвідношень випливає правило: на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q = 0$), епюри Q обмежені прямими, паралельними базової лінії, а епюри M являють собою похилі прямі, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють Q (рис. 5).

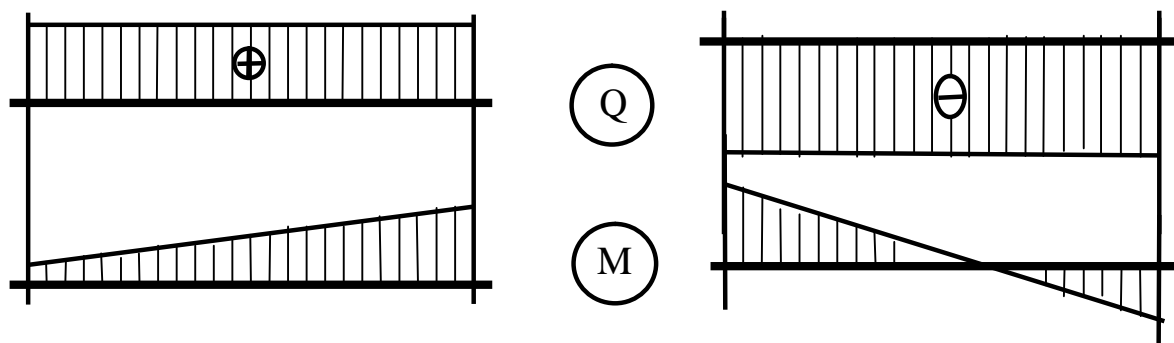


Рисунок 5

2 Якщо на деякій ділянці епюри:

а) $Q > 0$ (див. рис. 5, а), тобто $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то епюра моментів M зростає (при побудові епюри зліва направо, тобто уздовж додатного напрямку осі z);

б) якщо $Q < 0$, то епюра моментів M убиває (див. рис. 5, б).

3 На ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження $q = \operatorname{const} = C$ (рис. 6), епюра поперечної сили Q відповідно до формули (3) окреслена похилою прямою:

$$Q = Cz + C_1,$$

а епюра згинального моменту – квадратичною параболою

$$M = C \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2.$$

Оскільки епюру M будемо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи спрямована назустріч дії розподіленого навантаження q (див. рис. 6).

4 У перерізах, де $Q = 0$ (наприклад, переріз C на рис. 6) дотична до епюри M паралельна базовій лінії, а значення згинального моменту M – екстремальне. Якщо Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{\max}$ (див. рис. 6, а), а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{\min}$ (див. рис. 6, б).

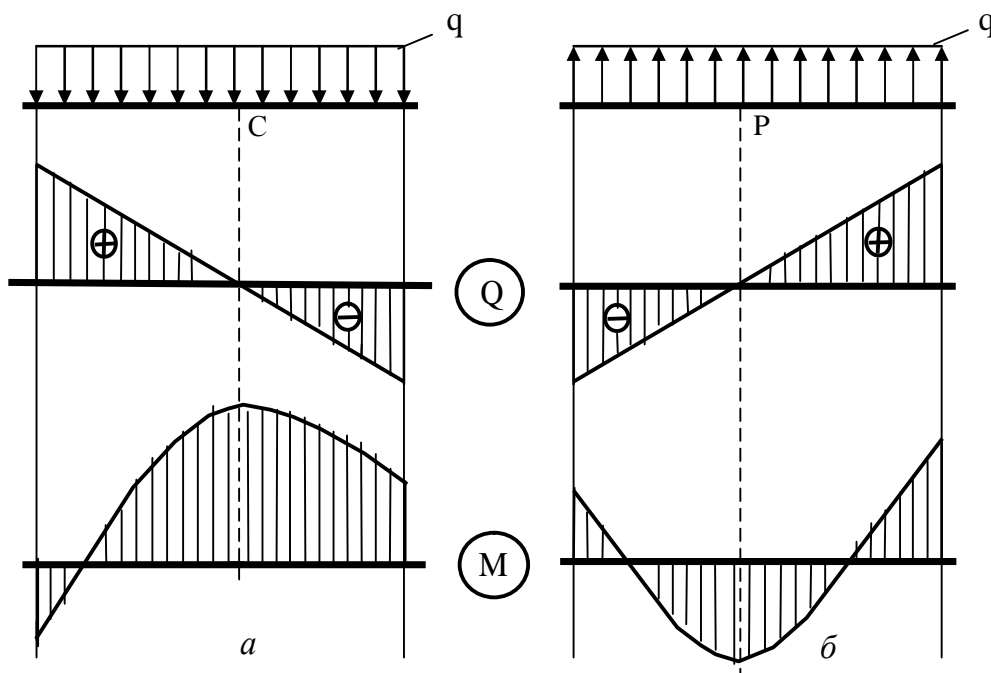


Рисунок 6

5 У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили (рис. 7) на епюрі Q будуть “стрибки” на величину цих сил і з урахуванням їх знаків, а на епюрі M будуть злами, вістря яких спрямовані проти напрямку зосереджених сил. При цьому слід зазначити, що при побудові епюр зліва направо напрямок стрибка збігається з напрямком сили.

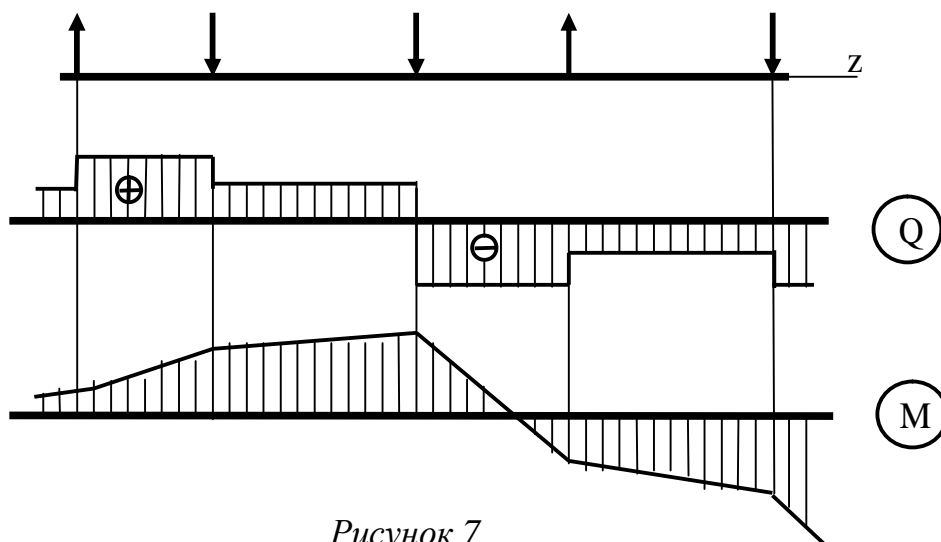


Рисунок 7

6 У перетинах, де до балки прикладені зосереджені моменти (рис. 8), на епюрі M будуть “стрибки” на величину зовнішніх моментів з урахуванням їх знаків, причому лінії епюри \dot{I} до стрибка і після нього паралельні, а на епюрі Q змін не буде.

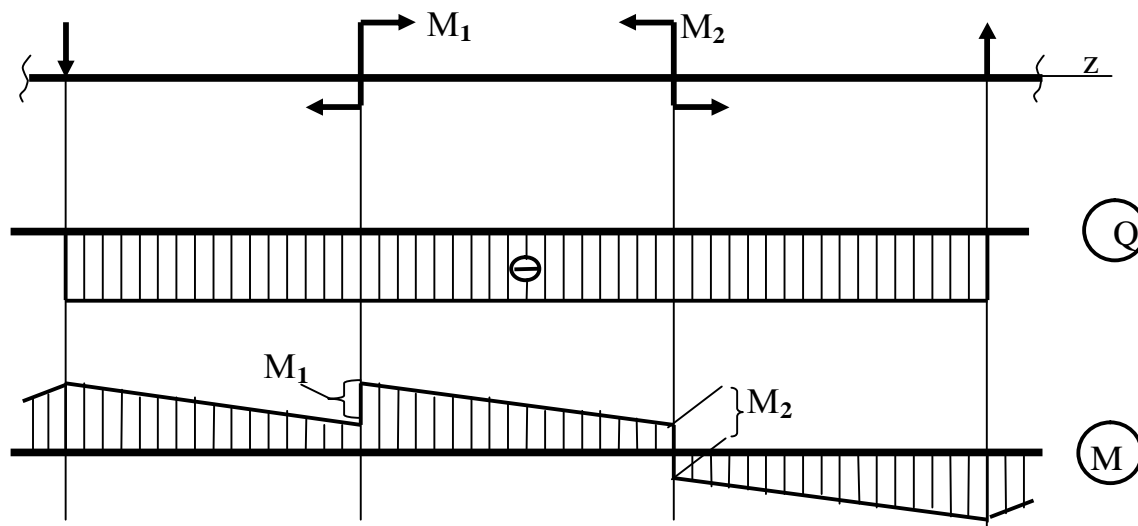


Рисунок 8

Слід, однак, відзначити, що, якщо в одному перерізі прикладені і сила, і момент, то сила викликає перелом і порушує паралельність.

Якщо на кінці консолі (рис. 9) чи в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перетині (переріз C на рис.9) згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту.

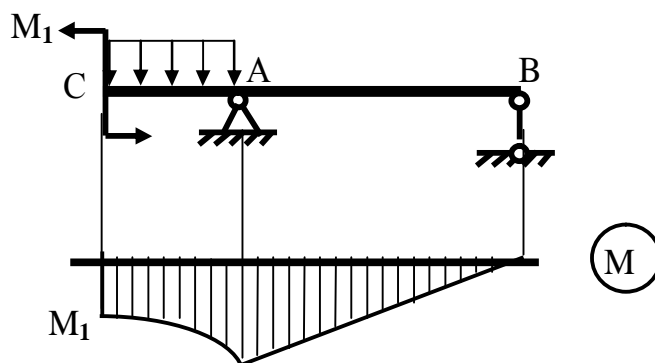


Рисунок 9

Якщо ж у шарнірній опорі зосереджений момент відсутній (див. рис. 9, перетин B), то на епюрі згинальних моментів $M = 0$, що має місце в більшості випадків.

Найбільш зручно будувати епюри Q і M за характерними перерізами. *Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.*

Можна рекомендувати наступний порядок побудови епюр:

- 1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки, але при цьому буде неможливо здійснити перевірку правильності побудови епюр).
- 2 Визначити характерні перерізи.
- 3 Обчислити значення Q в характерних перерізах, потім, “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.
- 4 Обчислити значення M в характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями.

Перевірка правильності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки стрибків і нахилів прямих на епюрі M .

1.2 Приклади побудови епюр

Приклад 1

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис.10, а). Дано: $P = 6$ кН; $q = 4$ кН/м; $M = 8$ кН·м; $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 3$ м.

Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 10,а) за правилами, які записані вище.

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах згідно з відповідними правилами знаків. Будемо рухатися від вільного кінця балки .

Оскільки відносно перерізу 1 сила P намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, то поперечна сила буде додатна

$$Q_1 = P = 6 \text{ кН};$$

Відносно перерізу 2 сила P має позначку «+», а розподілене навантаження q намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки, тому

$$Q_2 = P - qa = 6 - 4 \cdot 2 = -2 \text{ кН};$$
$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_2 = -2 \text{ кН}.$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах згідно з відповідними правилами знаків. Ліворуч перерізу 1 діє сила P , але її плече відносно перерізу 1 нескінченно мале, тому

$$M_1 = P \cdot 0 = 0;$$

Відносно перерізу 2 сила P загинає балку уверх, що приводить до стискання верхніх волокон балки, тому момент буде додатним, а момент від дії розподіленого навантаження буде мати від'ємний знак, оскільки воно приводить до стискання нижніх волокон, тому

$$M_2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Перерізи 2 і 3 знаходяться на нескінченно малій відстані відносно один від одного, тому

$$M_3 = M_2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Відносно перерізу 4 правила знаків Р і q такі самі, як і для перерізу 2:

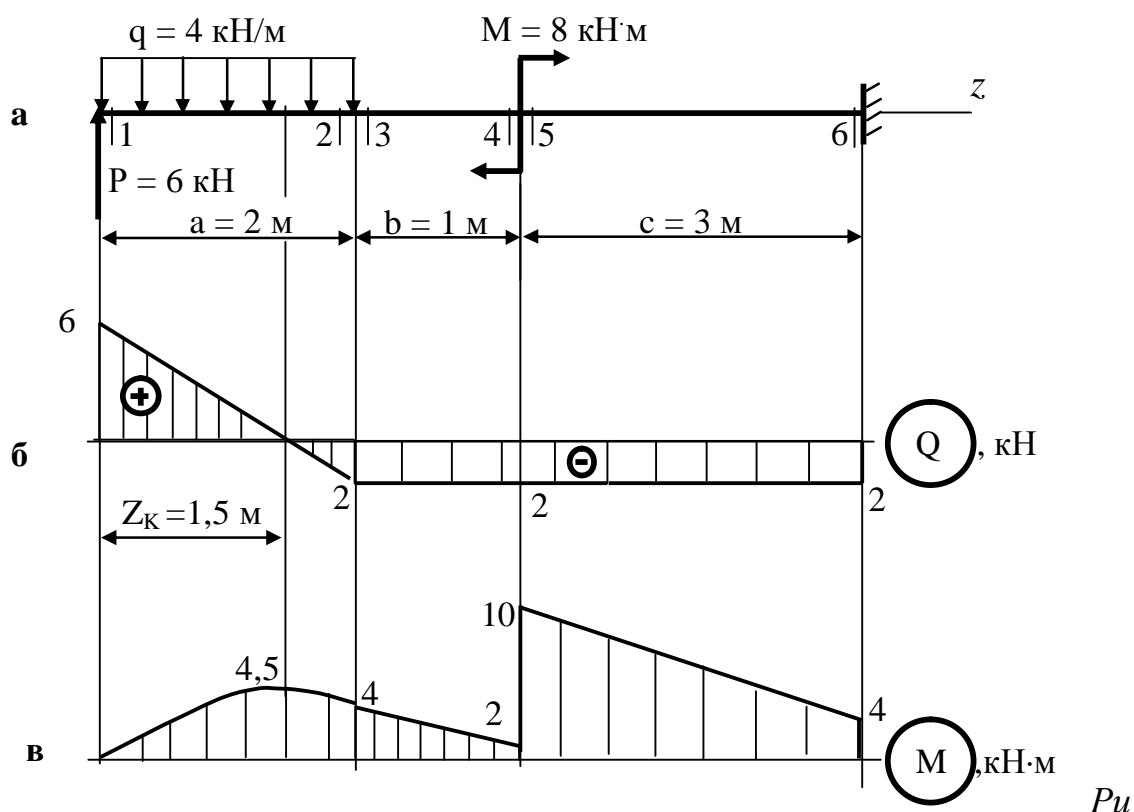
$$M_4 = P(a+b) - q \cdot a \left(\frac{a}{2} + b \right) = 6(2+1) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 \right) = 2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Оскільки в перерізах 5 з'являється ще зосереджений момент М, який приводить до стискання верхніх волокон балки, тобто має додатний знак, то

$$M_5 = M_4 + M = 2 + 8 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = P(a+b+c) - q \cdot a \left(\frac{a}{2} + b + c \right) + M = 6(2+1+3) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + 3 \right) + 8 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перенесемо результати розрахунків на відповідні епюри у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів). Точки з'єднуємо суцільними лініями (див. рис. 10, б та 10, в) у відповідності до раніше розглянутих правил.



сунок 10 – Консольна балка

Аналіз побудови епюр. Як видно з епюри Q (див. рис. 10, б) у перерізі 1 має місце “стрибок” на величину сили P = 6 кН. При чому (зверніть увагу) оскільки ми будували епюру зліва направо, то “стрибок” співпадає з напрямком сили. Далі (до перерізу 2) має місце поступово зниження поперечної сили Q до величини 2 кН. Між перерізами 3...6 поперечна сила Q не

змінюється не залежно від того, що в перерізі 4...5 до балки прикладений зосереджений момент $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Але цей момент дає “стрибок” у цьому ж перерізі на величину $8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ на епюрі згинальних моментів M . При чому оскільки відносно перерізу 5 момент M загинає балку догори, тому “стрибок” відкладаємо в додатному напрямку.

Приклад 2

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 11,а).

Дано: $P = 8 \text{ кН}$; $q_1 = 4 \text{ кН/м}$; $q_2 = 2 \text{ кН/м}$; $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$.

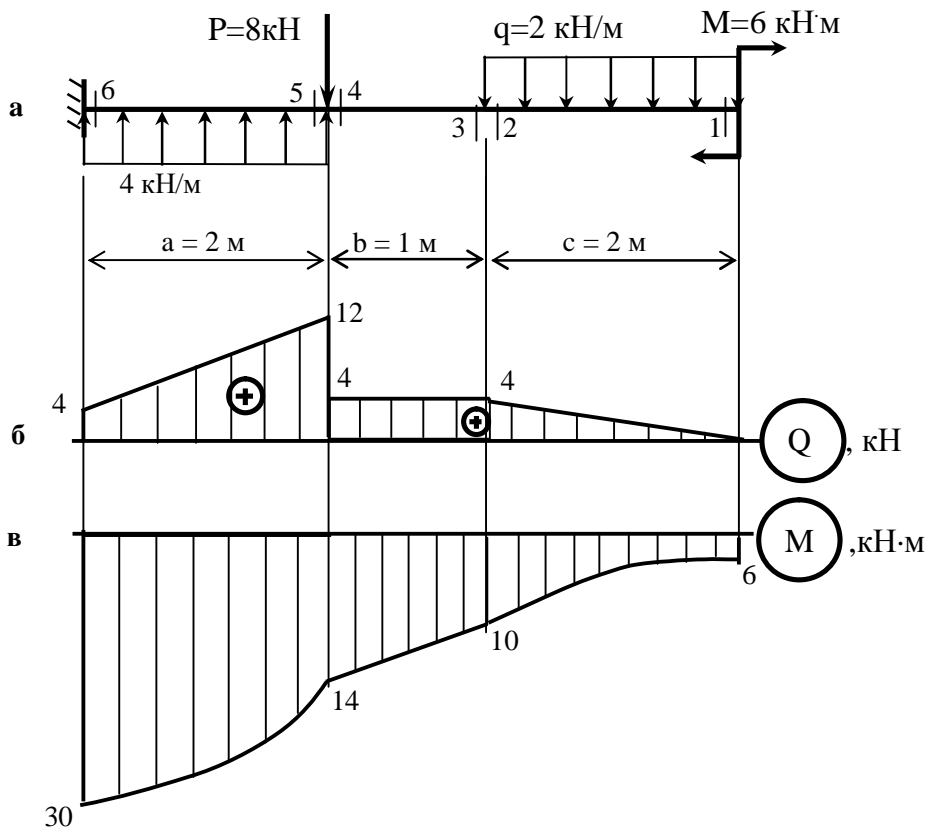


Рисунок 11– Консольна балка

У цьому прикладі, як і в попередньому, балка закріплена тільки одним кінцем, тому будувати епюру краще з “вільного” кінця. При цьому реакції опори (защемлення) можна не знаходити. Означимо на балці характерні перерізи за правилами, які записані вище.

Визначимо поперечні сили в характерних перерізах: $Q_1 = 0$;

Відносно перерізу 2 розподілене навантаження q_2 прагне повернути відсічену частину балки за ходом годинникової стрілки, тому поперечна сила буде додатною. $Q_2 = q_2 c = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}$; $Q_3 = Q_4 = Q_2 = 4 \text{ кН}$;

$$Q_5 = Q_4 + P = 4 + 8 = 12 \text{ кН}; \quad Q_6 = q_2 c + P - q_1 a = 2 \cdot 2 + 8 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах. У перерізі 1 зосереджений момент M загинає балку до долу, тому $M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

$$M_2 = -M - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} = -6 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -M - q_2 c \left(\frac{c}{2} + b \right) = -6 - 2 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 \right) = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -M - q_2 \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + b + a \right) - P \cdot a + q_1 \frac{a^2}{2} = -6 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 1 + 2 \right) - 8 \cdot 2 + 4 \frac{2^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За поліченими даними побудуємо епюри поперечних сил (див. рис. 11, б) та згинальних моментів (див. рис. 11, в). При цьому треба мати на увазі що на ділянках 1-2 та 5-6 епюра згинальних моментів окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження.

Приклад 3

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки (рис. 12, а).

Дано: $P = 9 \text{ кН}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$.

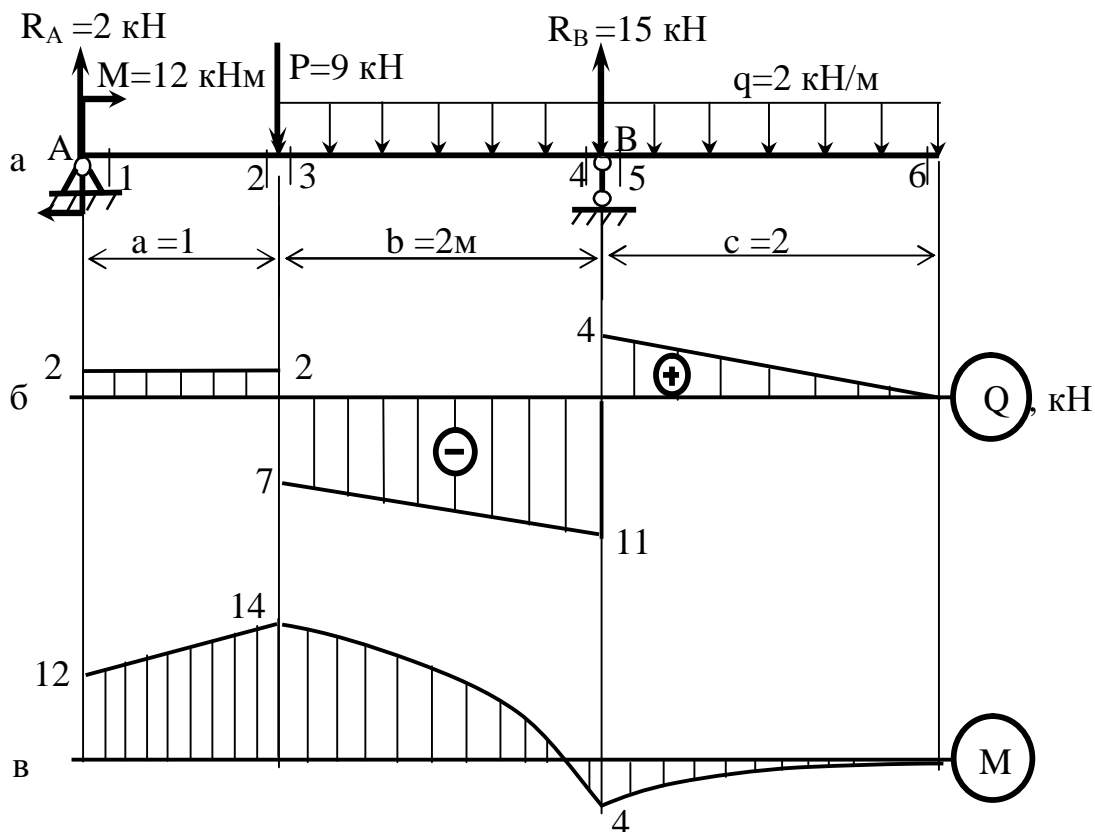


Рисунок 12 – Двоопорна балка

Складемо для балки рівняння рівноваги і знайдемо для неї опорні реакції (рис. 7, а):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A(\bar{P}_k) = 0: -M - P \cdot a - q \cdot (b+c) \cdot (a+b) + R_B \cdot (a+b) = 0; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B(\bar{P}_k) = 0: -M - R_A^y \cdot (a+b) + P \cdot b = 0; \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum P_{kz} = 0: \quad R_A^z = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

$$R_A^y = \frac{-M + P \cdot b}{a+b} = \frac{-12 + 9 \cdot 2}{1+2} = 2 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{-M + P \cdot a + q \cdot (b+c) \cdot (a+b)}{a+b} = \frac{12 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot (2+2) \cdot (1+2)}{1+2} = 15 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A^y - P - q \cdot (b+c) + R_B = 2 - 9 - 2 \cdot (2+2) + 15 = 17 - 17 = 0.$$

Підрахуємо значення Q і M в характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A^y = 2 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_1 = 2 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = 2 - 9 = -7 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 - q \cdot b = -7 - 2 \cdot 2 = -11 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + R_B = -11 + 15 = 4 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot c = 4 - 2 \cdot 2 = 0;$$

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = M + R_A^y \cdot a = 12 + 2 \cdot 1 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = M + R_A^y \cdot (a+b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} =$$

$$= 12 + 2 \cdot (1+2) - 9 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M + R_A^y \cdot (a+b+c) - P \cdot (b+c) + R_B \cdot c - q \cdot (b+c) \cdot c =$$

$$= 12 + 2 \cdot (1+2+2) - 9 \cdot (2+2) + 15 \cdot 2 - 2 \cdot (2+2) \cdot 2 = 0.$$

За поліченими даними побудуємо епюри поперечних сил (див. рис. 12, б) та згинальних моментів (див. рис. 12, в).

Приклад 4

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двох-опорної балки (рис. 13, а).

Дано: $q = 2$ кН/м; $P = 4$ кН; $m = 8$ кН·м; $a = 1$ м; $b = 1$ м; $c = 2$ м.

Розв'язання цього прикладу аналогічно попередньому.

Визначимо опорні реакції балки (рис. 13, а):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A(\bar{P}_k) = 0: \quad -P \cdot a + M - q \cdot (a + b + c) \cdot (a + b) + R_B \cdot (a + b + c) = 0; \quad (11) \\ \sum M_B(\bar{P}_k) = 0: \quad -R_A^y \cdot (a + b + c) + P \cdot (b + c) + M + q \cdot (a + b + c) \cdot c = 0; \quad (12) \\ \sum P_{kz} = 0: \quad R_A^z = 0. \quad (13) \end{array} \right.$$

$$R_B = \frac{P \cdot a - M + q \cdot (a + b + c) \cdot (a + b)}{a + b + c} = \frac{4 \cdot 1 - 8 + 2 \cdot (1 + 1 + 2) \cdot (1 + 1)}{1 + 1 + 2} = 3 \text{ кН};$$

$$R_A^y = \frac{P \cdot (b + c) + M + q \cdot (a + b + c) \cdot c}{a + b + c} = \frac{4 \cdot (1 + 2) + 8 + 2 \cdot (1 + 1 + 2) \cdot 2}{1 + 1 + 2} = 9 \text{ кН}.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A^y - P - q \cdot (a + b + c) + R_B = 9 - 4 - 2 \cdot (1 + 1 + 2) + 3 = 12 - 12 = 0.$$

Підрахуємо значення Q і M в характерних перерізах балки (див. рис.13, а):

$$Q_1 = R_A^y = 9 \text{ кН}; \quad Q_2 = R_A^y - q \cdot a = 9 - 2 \cdot 1 = 7 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = 7 - 4 = 3 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 - q \cdot b = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_4 = 1 \text{ кН}; \quad Q_6 = Q_5 - q \cdot c = 1 - 2 \cdot 2 = -3 \text{ кН};$$

$$M_1 = R_A^y \cdot 0 - q \cdot 0 \cdot \frac{0}{2} = 0; \quad M_2 = R_A^y \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = R_A^y \cdot (a + b) - P \cdot b - q \cdot (a + b) \cdot \frac{a + b}{2} =$$

$$= 9 \cdot (1 + 1) - 4 \cdot 1 - 2 \cdot (1 + 1) \cdot \frac{1 + 1}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = M_4 - M = 10 - 8 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = R_A^y \cdot (a + b + c) - P \cdot (b + c) - M - q \cdot (a + b + c) \cdot \frac{a + b + c}{2} =$$

$$= 9 \cdot (1 + 1 + 2) - 4 \cdot (1 + 2) - 8 - 2 \cdot (1 + 1 + 2) \cdot \frac{1 + 1 + 2}{2} = 0.$$

За поліченими даними побудуємо епюри поперечних сил (рис. 13, б) та згинальних моментів (рис. 13, в).

Побудувавши епюру Q за результатами підрахунків бачимо, що в перерізі D перетинає базу. На епюрі M в цьому перерізі має бути максимум. Підрахуємо значення z_D і M_D :

$$Q_D = R_A^y - P - q \cdot z_D = 0; \quad z_D = \frac{R_A^y - P}{q} = \frac{9 - 4}{2} = 2,5 \text{ м};$$

$$M_D = R_A^y \cdot z_D - P \cdot (z_D - a) - M - q \cdot z_D \cdot \frac{z_D}{2} = 9 \cdot 2,5 - 4 \cdot (2,5 - 1) - 8 - 2 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

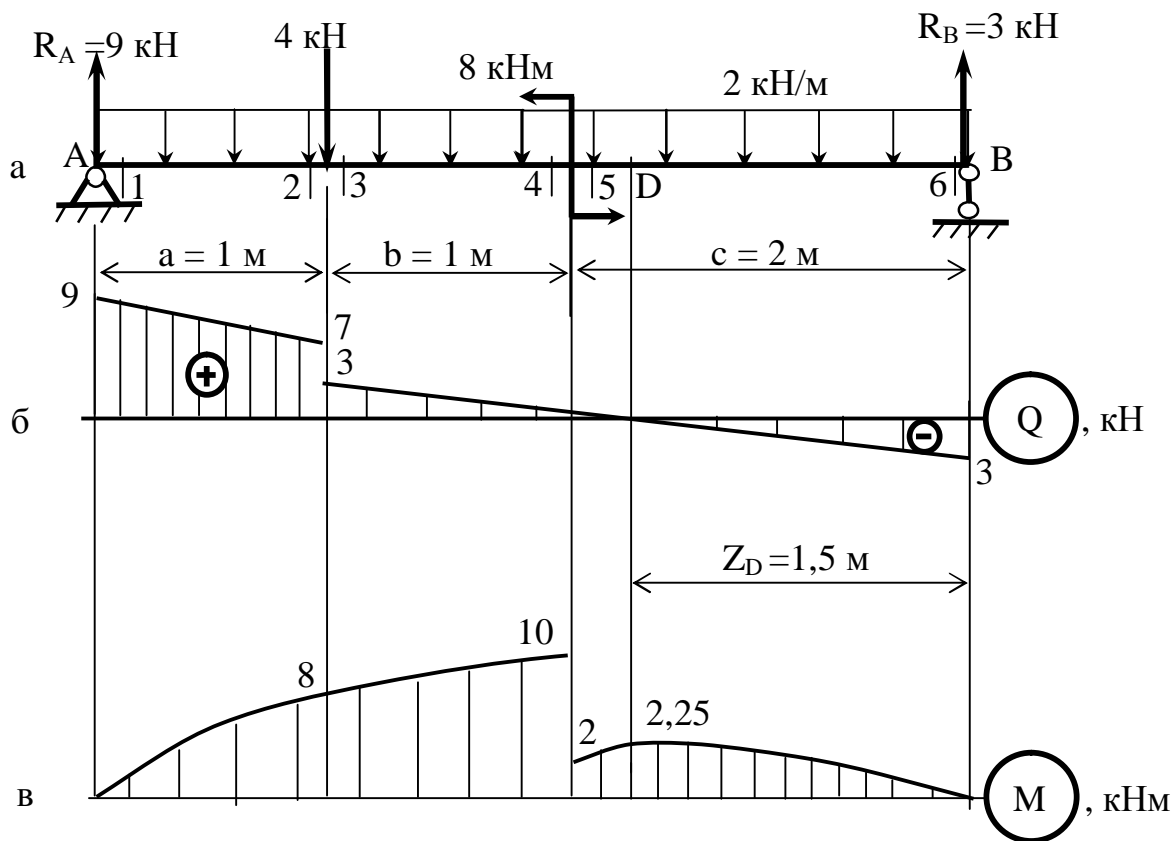


Рисунок 13 – Двоопорна балка

1.3 Завдання для самостійного розв'язання

На рис. 14 зображені 40 завдань для їх самостійного розв'язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях прийняті однакові числові значення величин: $a = b = c = d = 2$ м; $P = 12$ кН; $q = 8$ кН/м; $M = 16$ кН·м. Завдання складено таким чином, щоб надати студентам

можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого варіанту завдання до останнього.

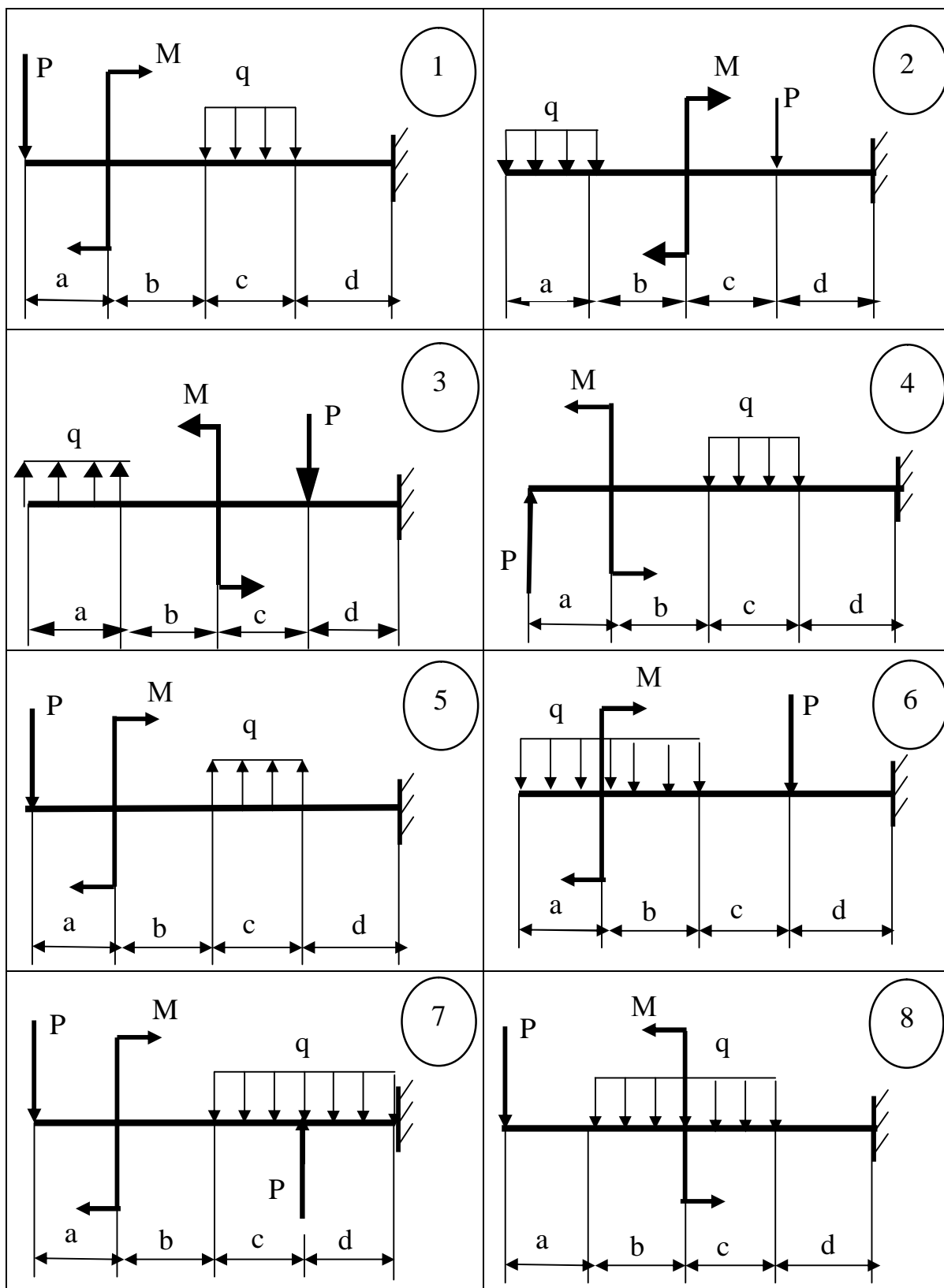


Рисунок 14

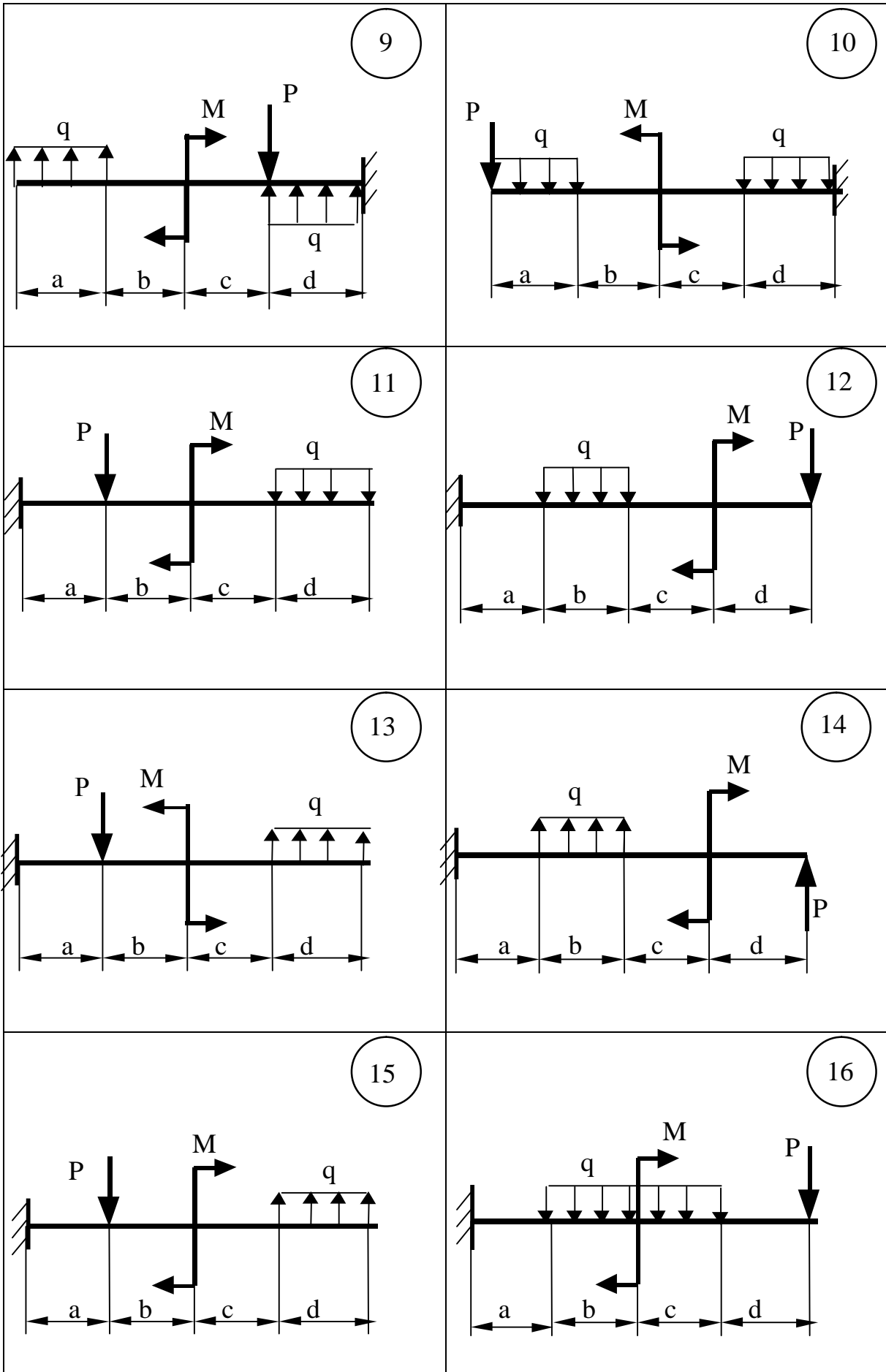


Рисунок 14, аркуш 2

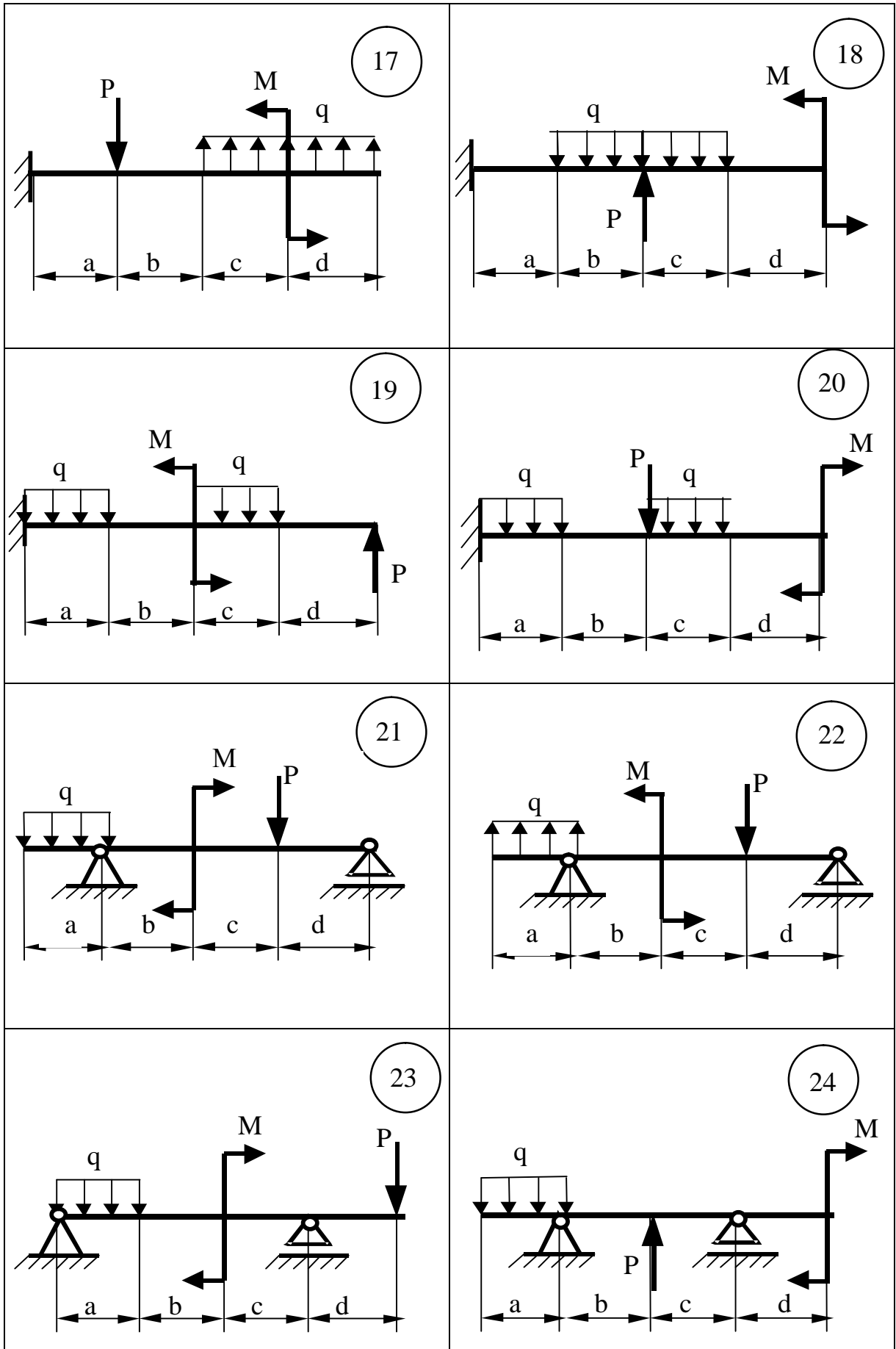


Рисунок 14, аркуш 3

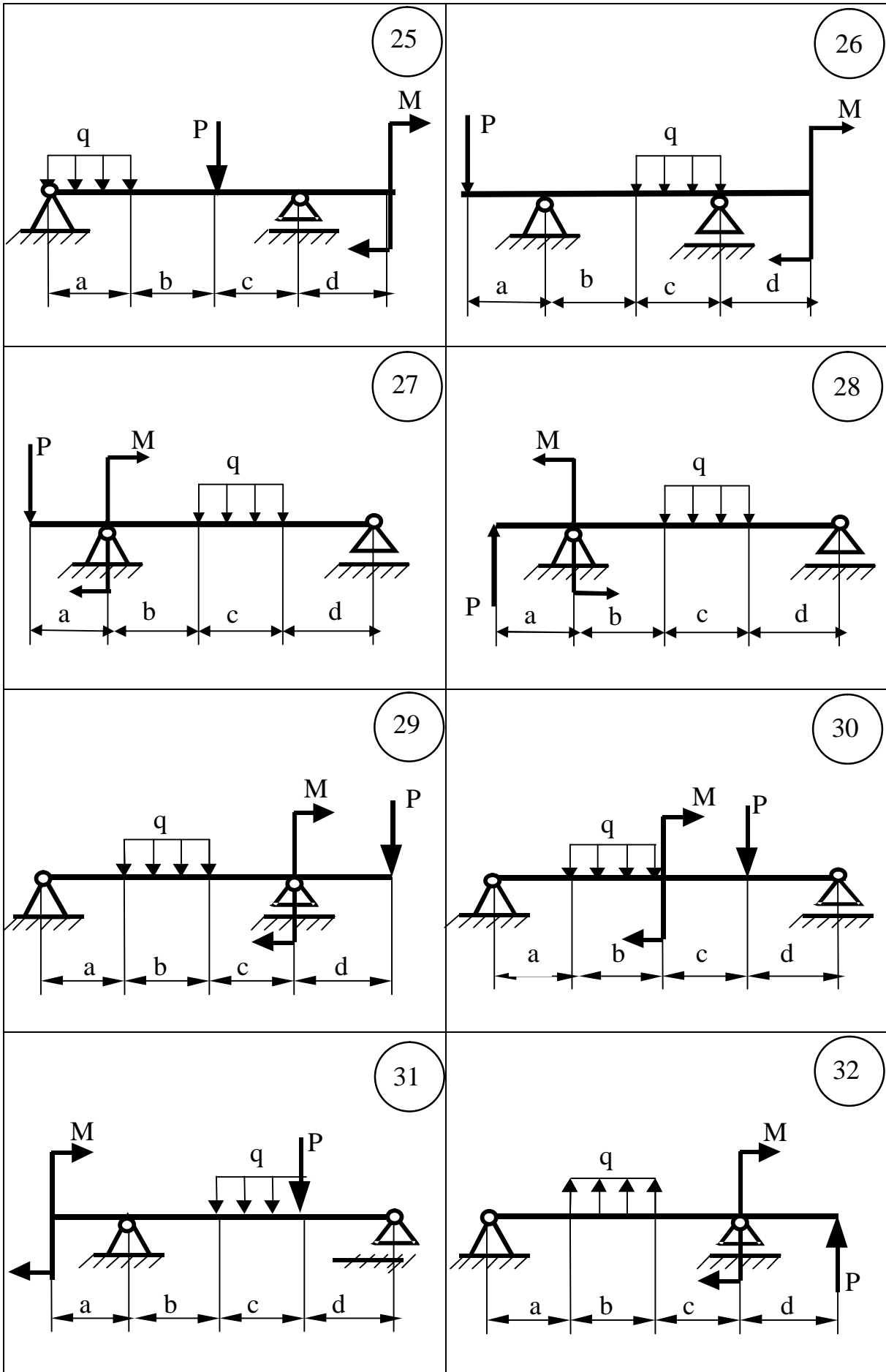


Рисунок 14, аркуш 4

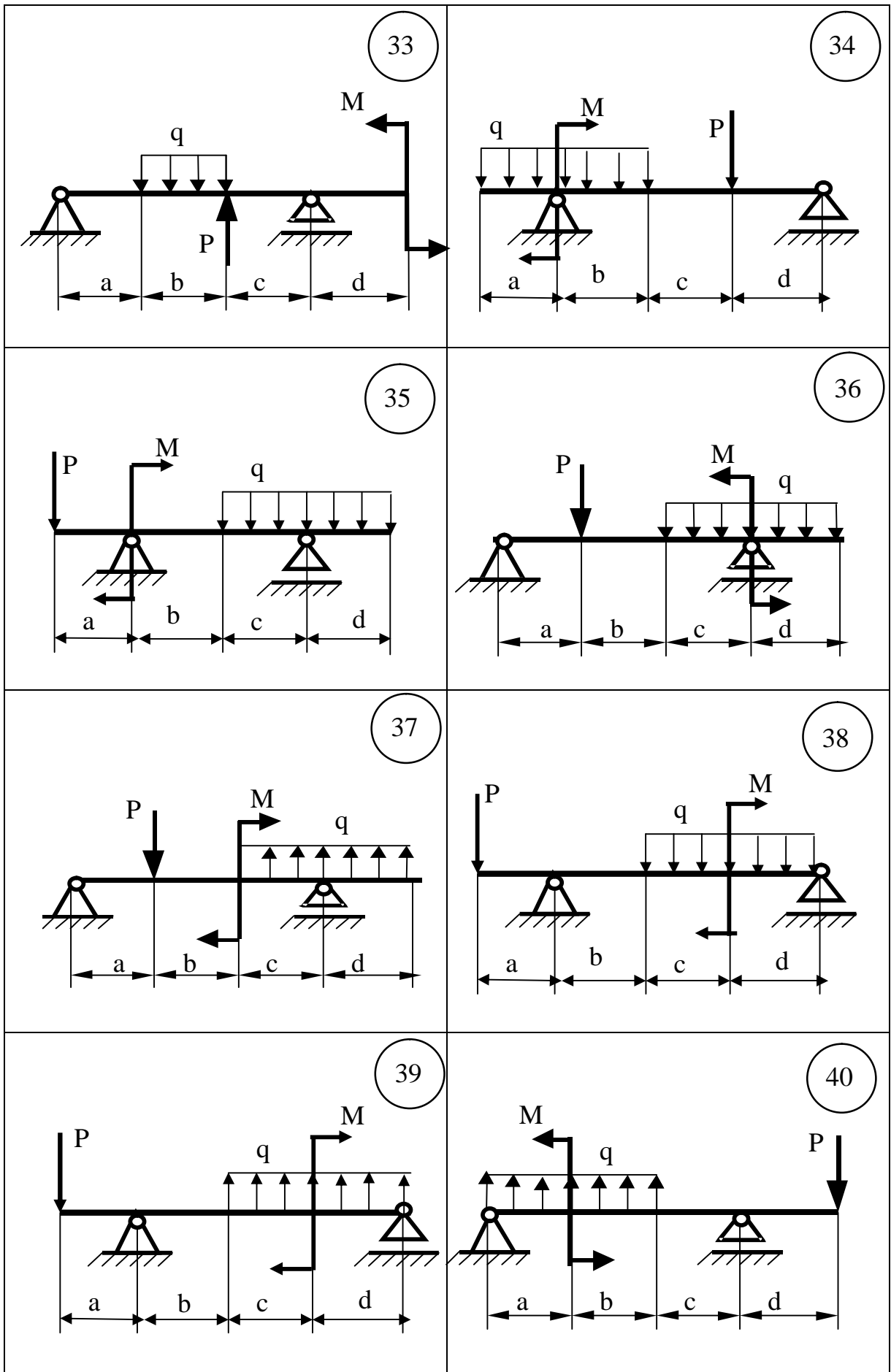


Рисунок 14, аркуш 5

1.4 Відповіді до завдань

Розв'язуючи те чи інше завдання, студент має можливість проконтролювати себе за допомогою відповідей до завдань, що наведені на рис. 15.

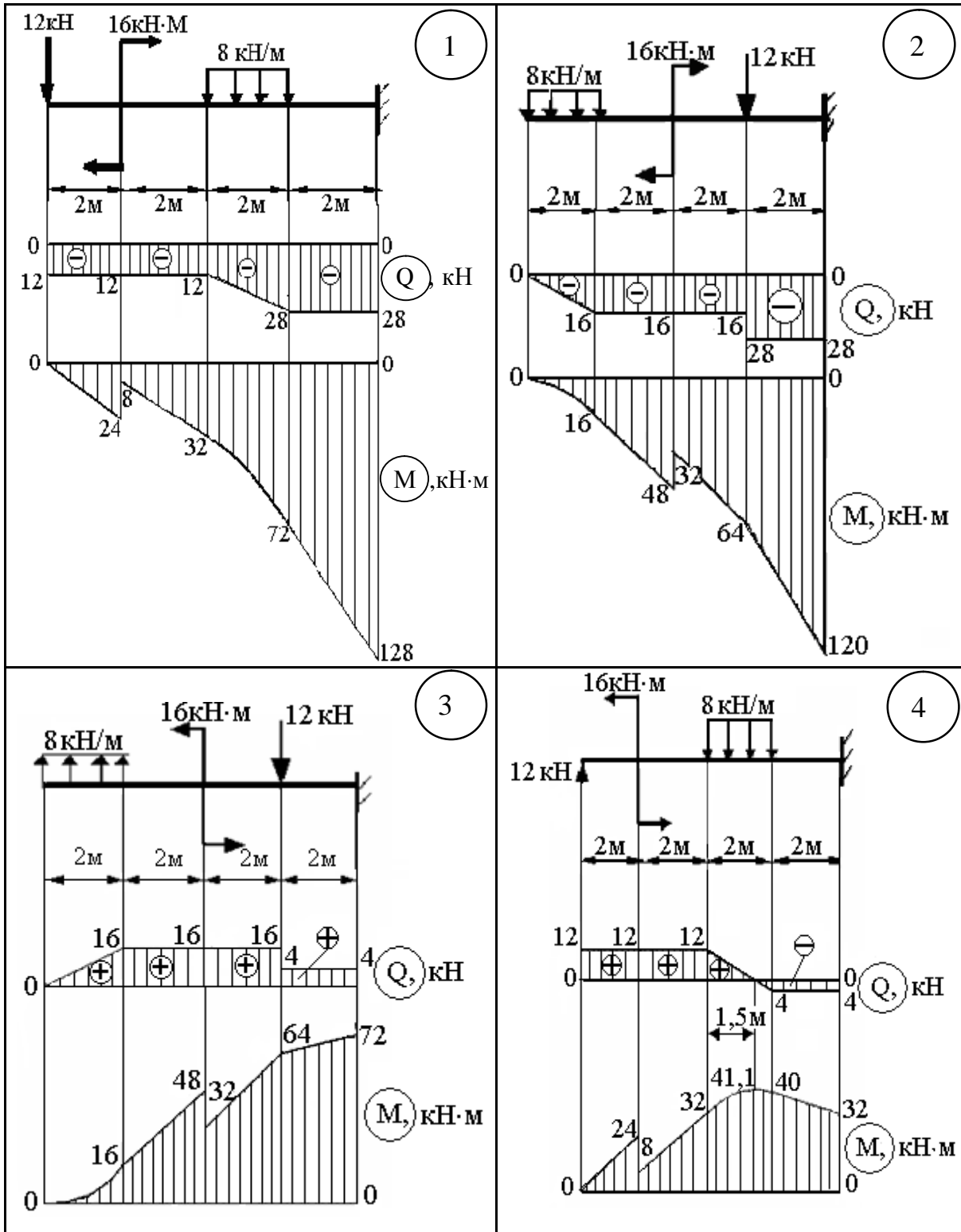


Рисунок 15

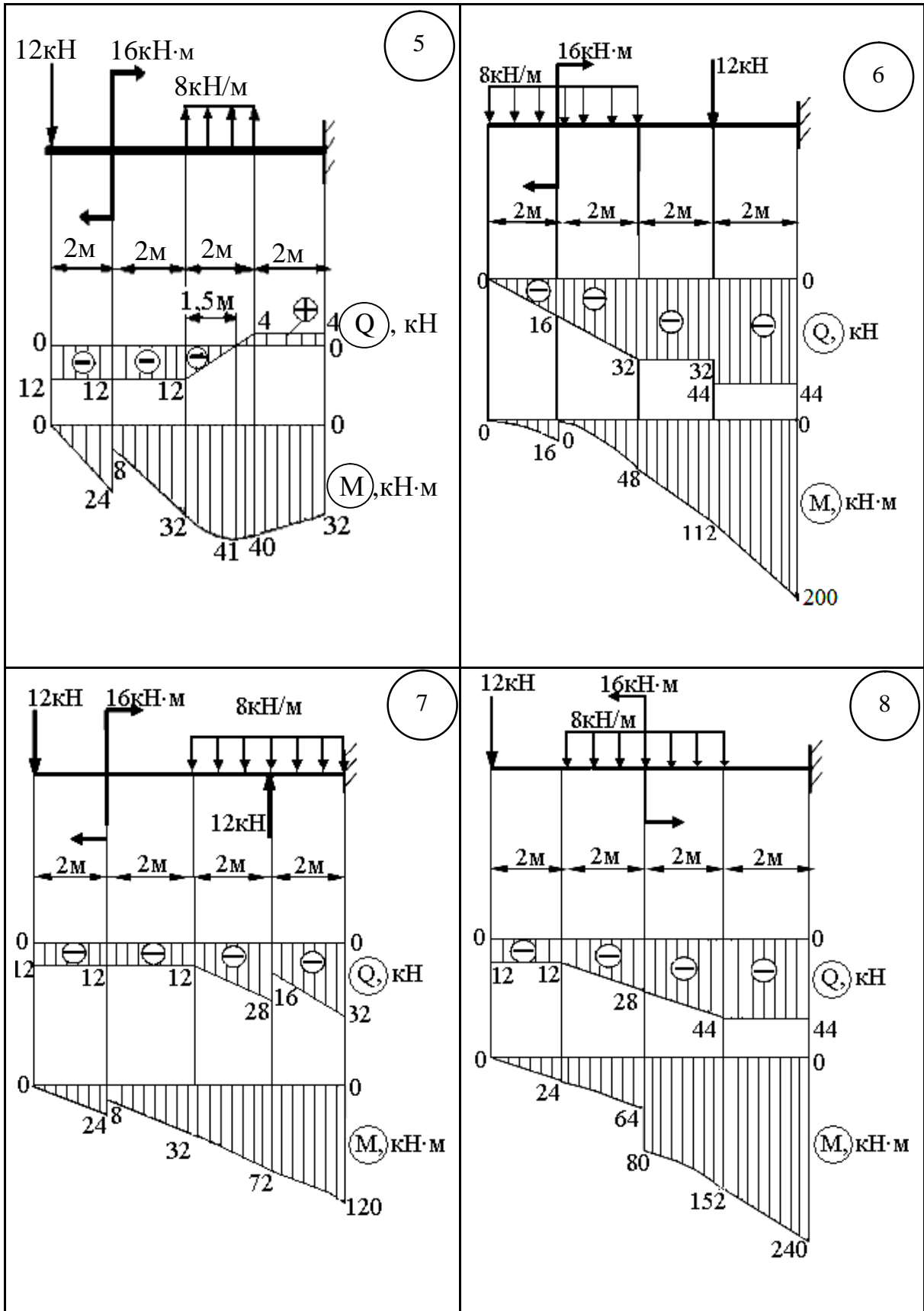


Рисунок 15, аркуш 2

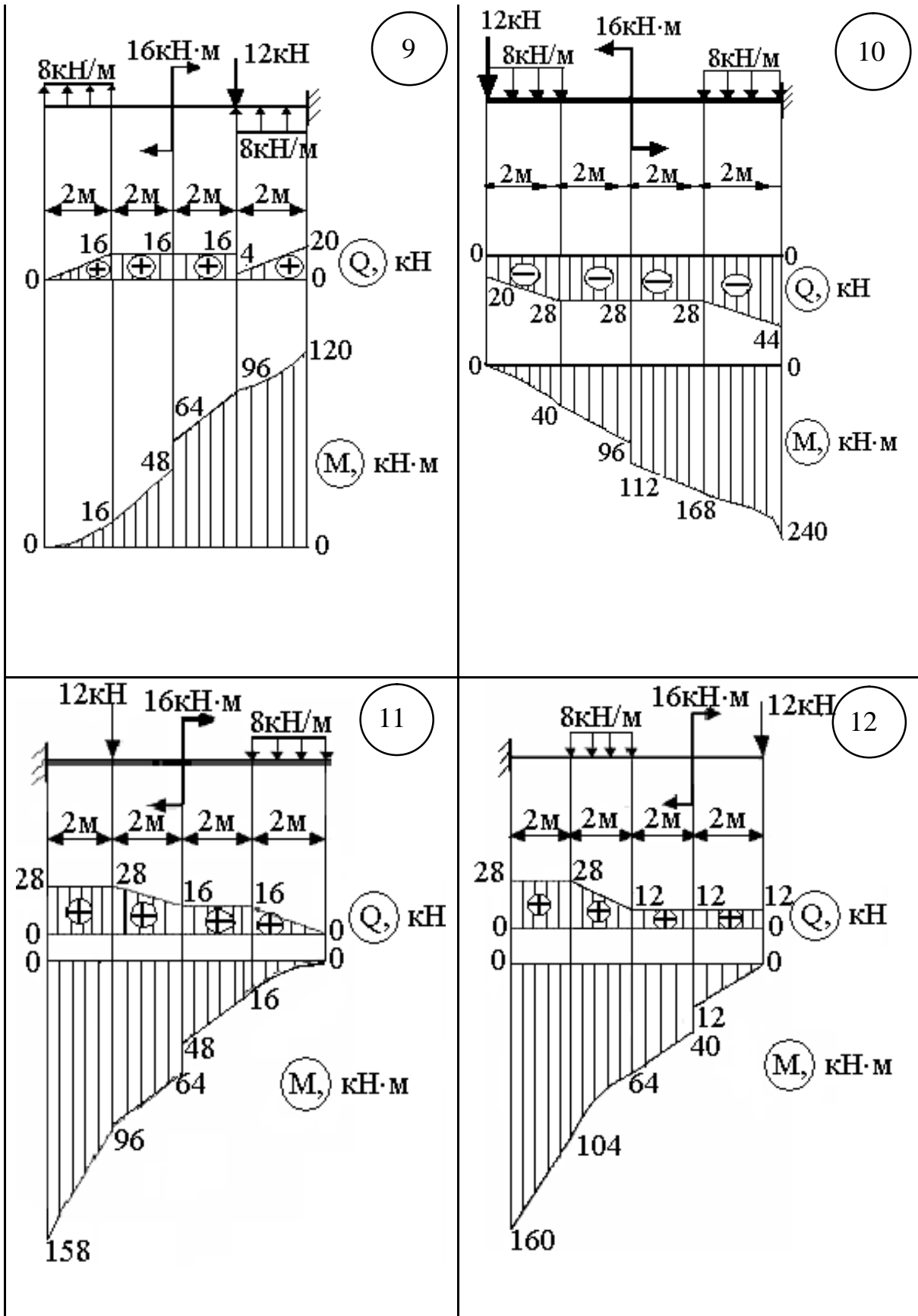


Рисунок 15, аркуш 3

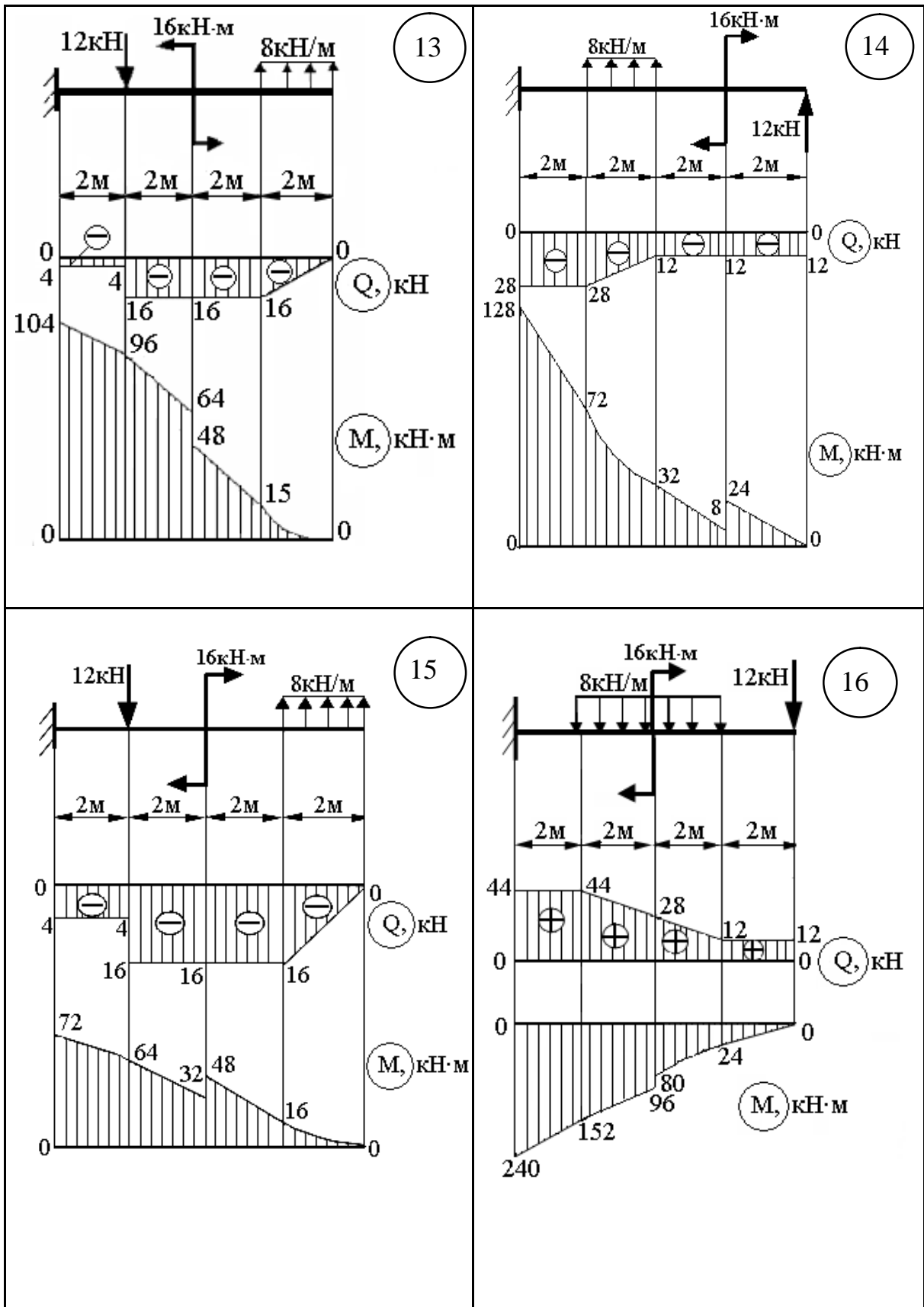


Рисунок 15, аркуш 4

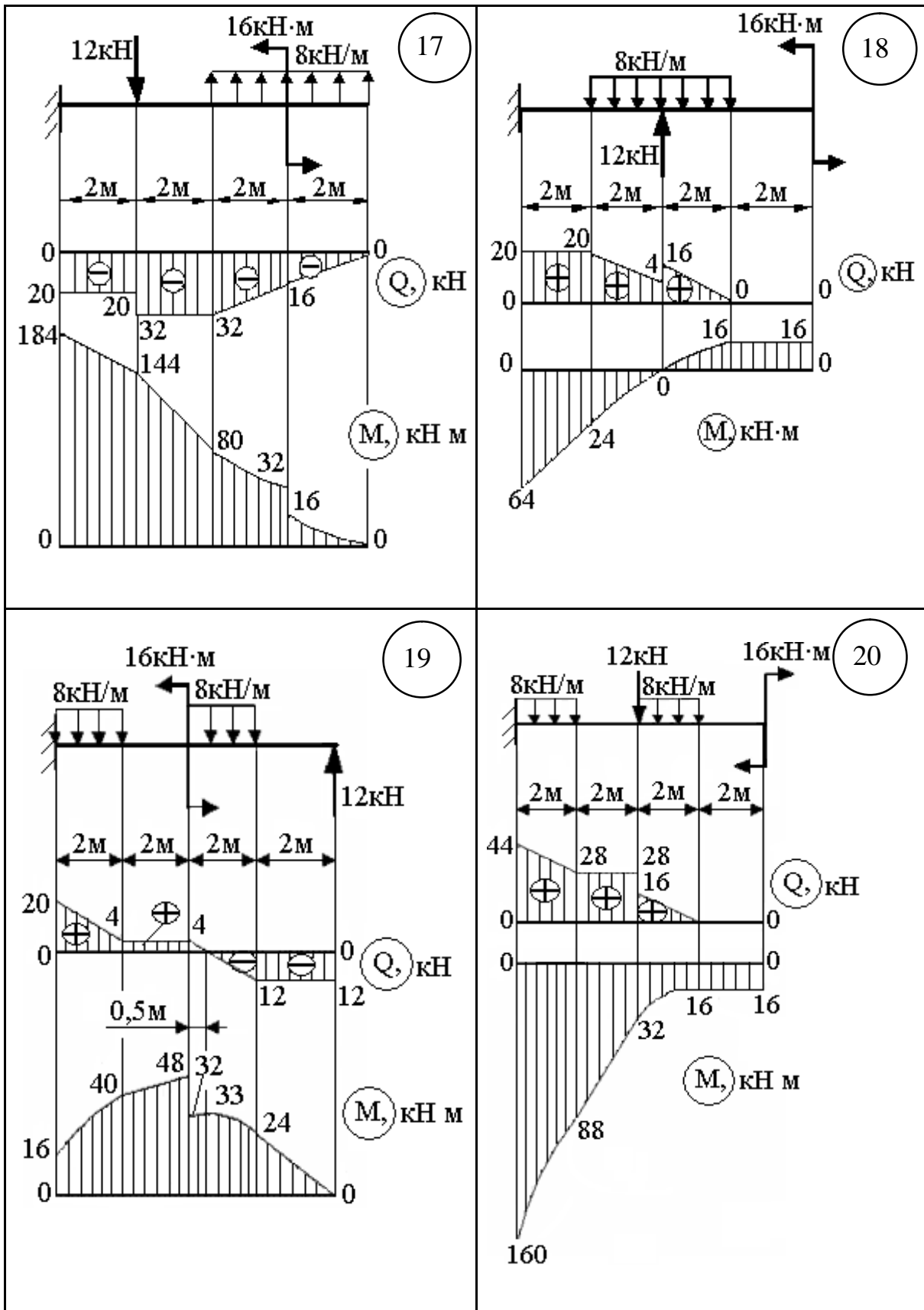


Рисунок 15, аркуш 5

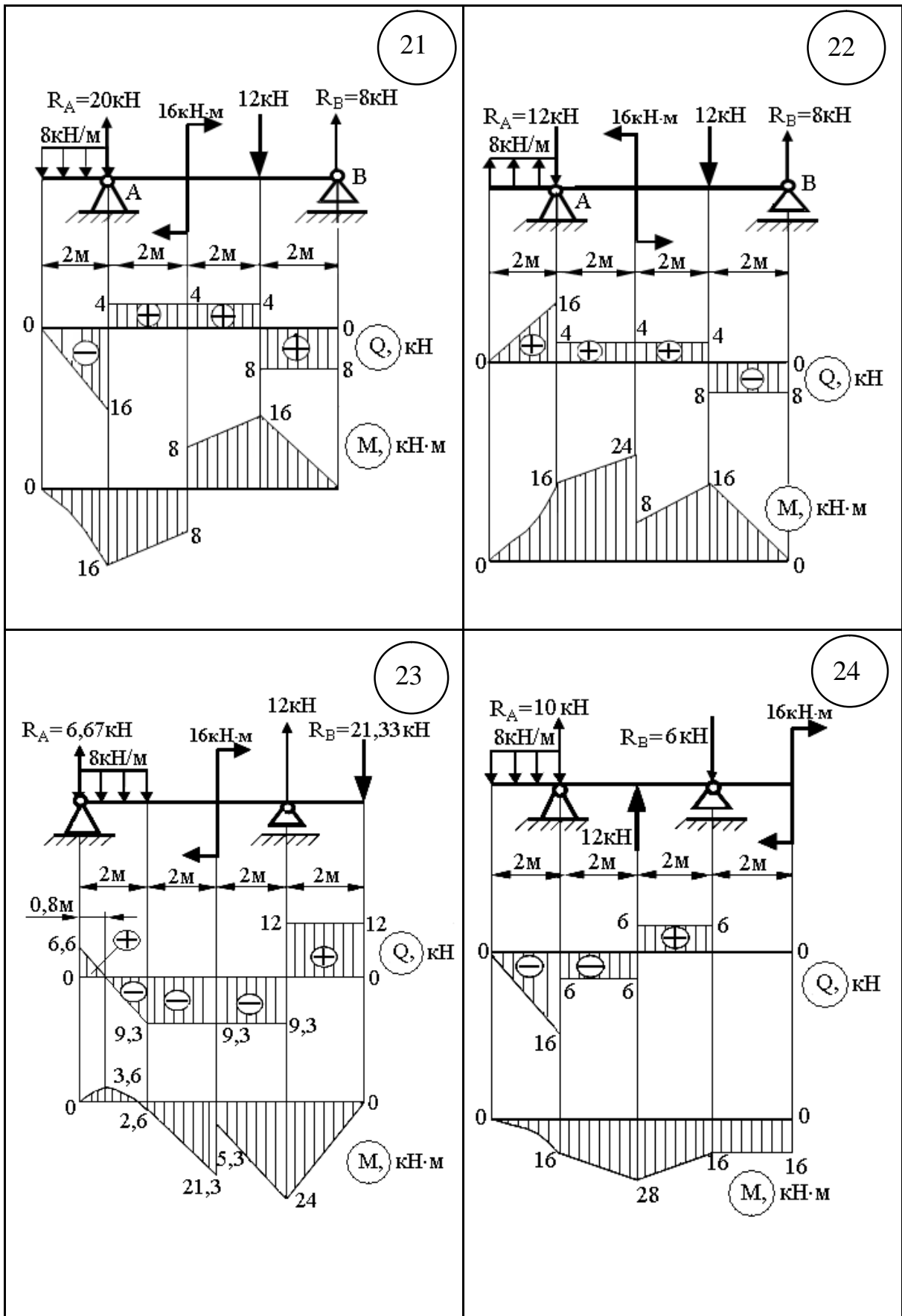


Рисунок 15, аркуш 6

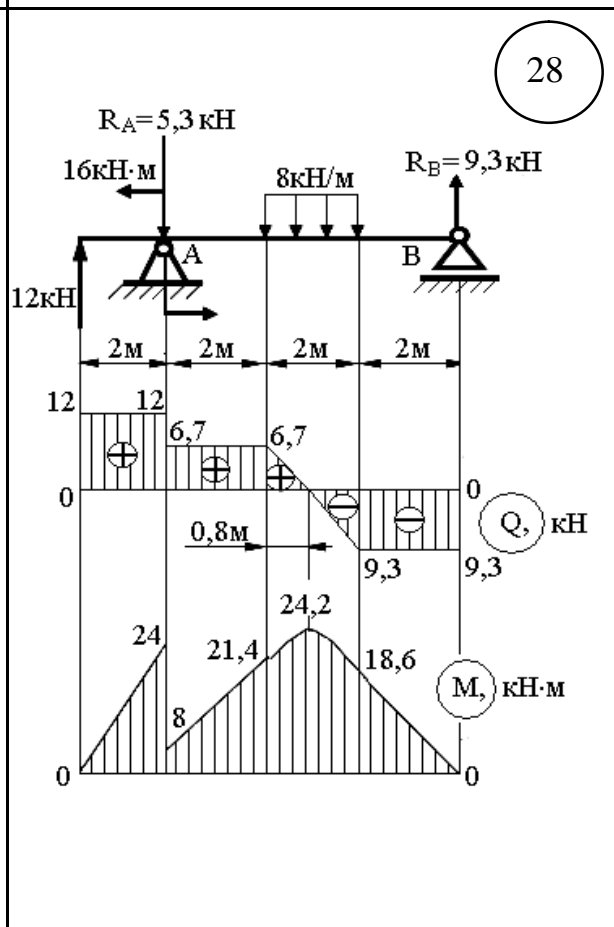
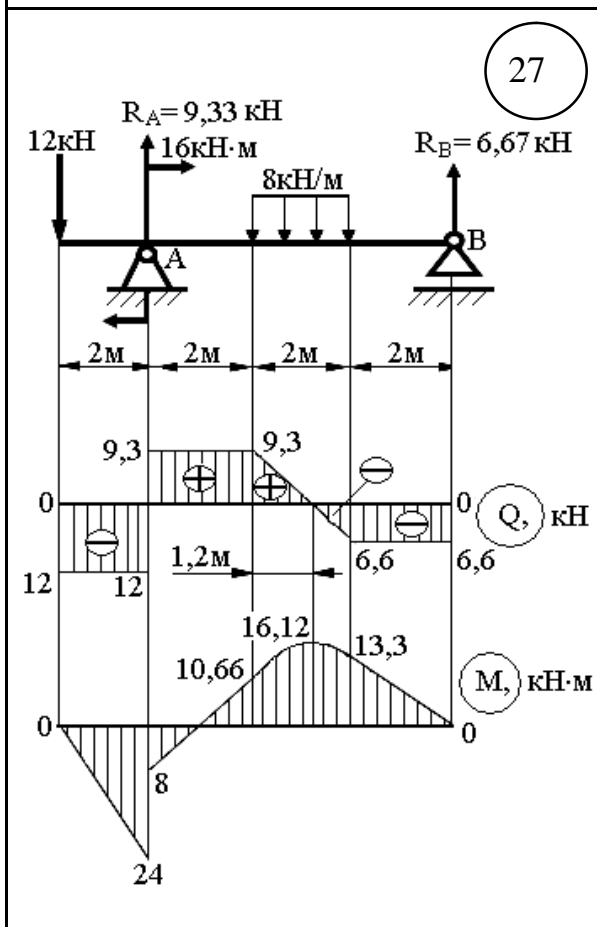
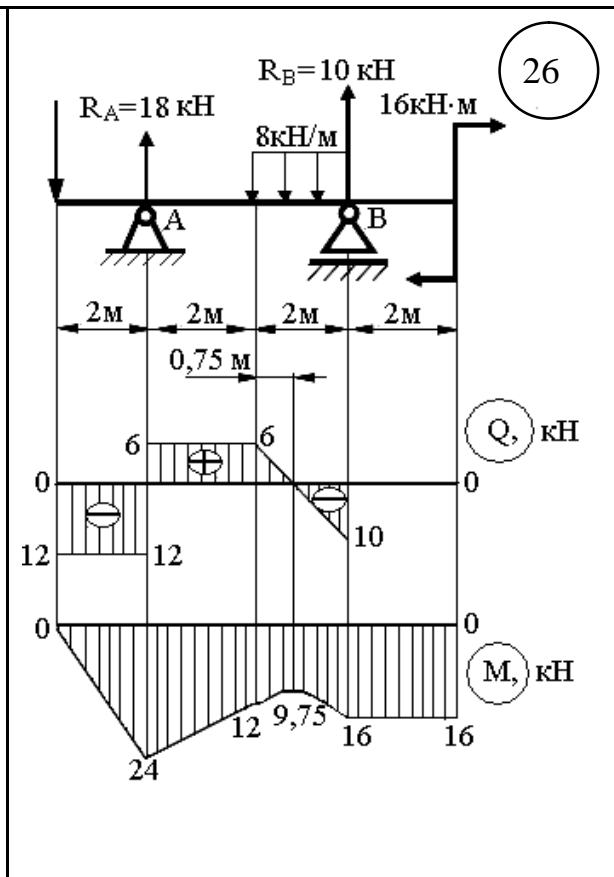
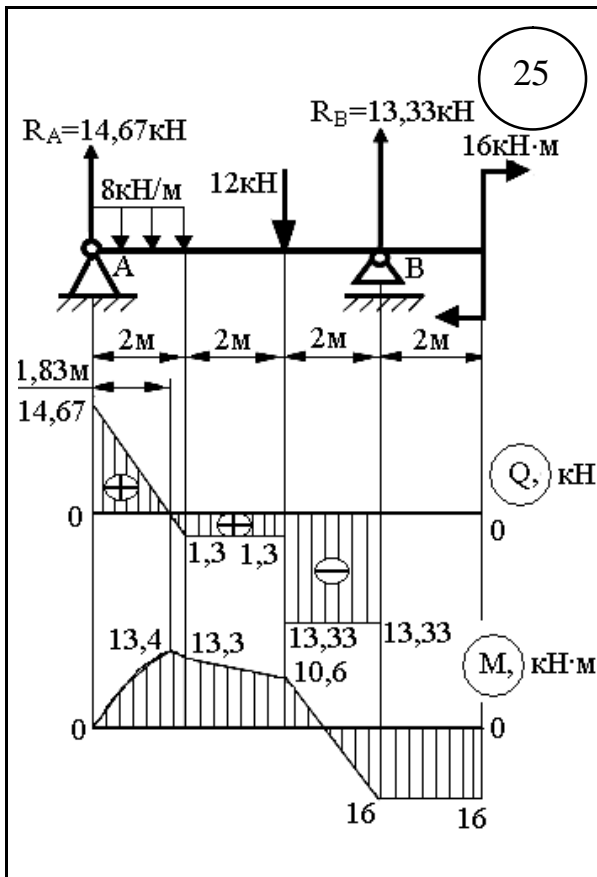


Рисунок 15, аркуш 7

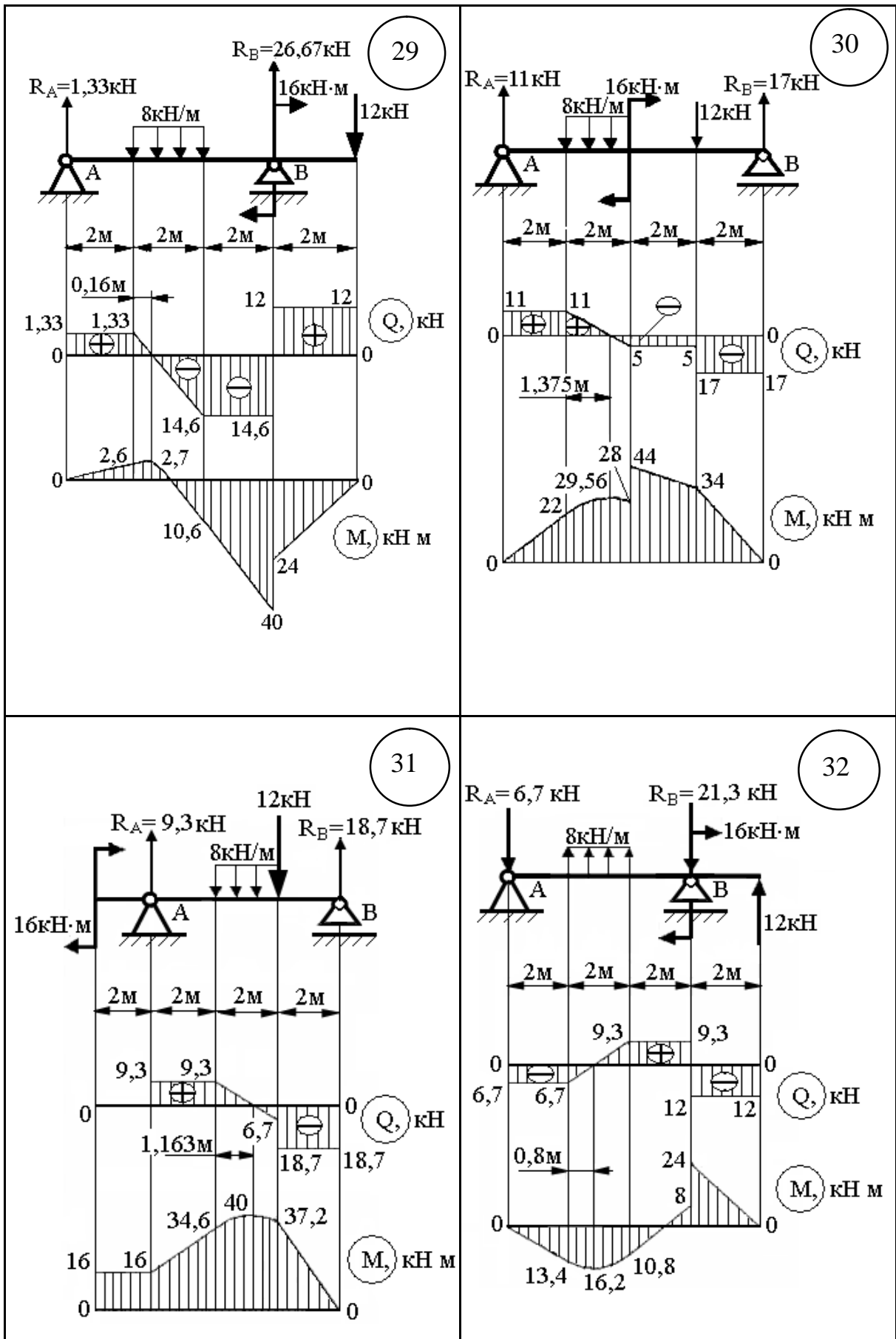


Рисунок 15, аркуш 8

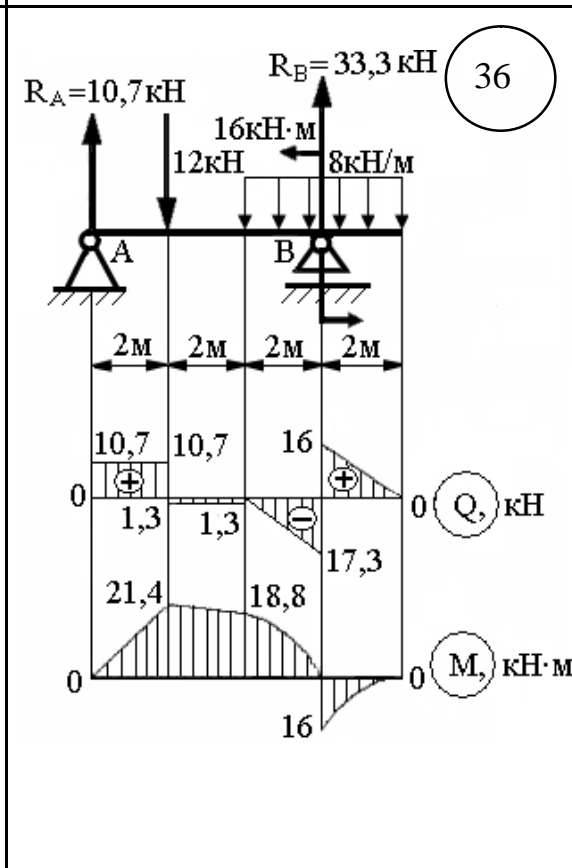
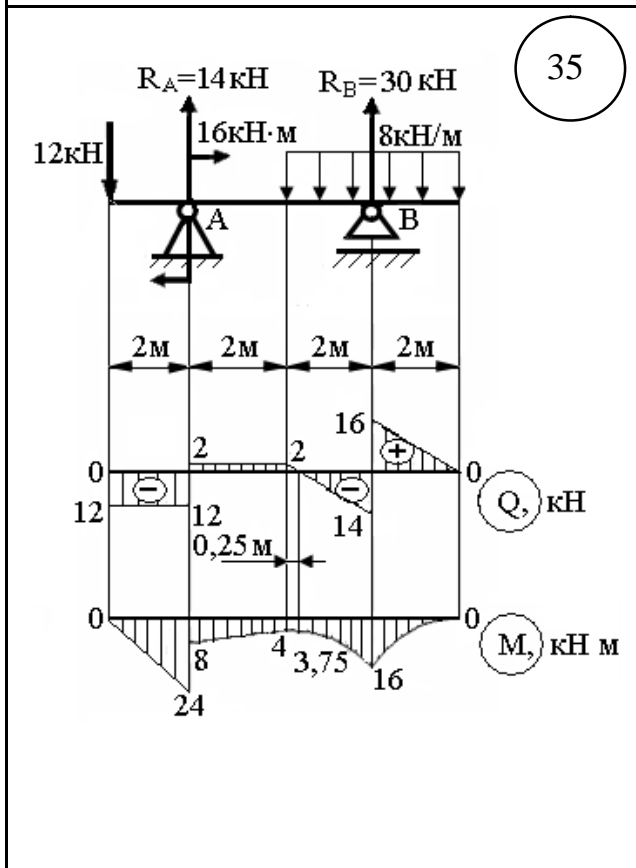
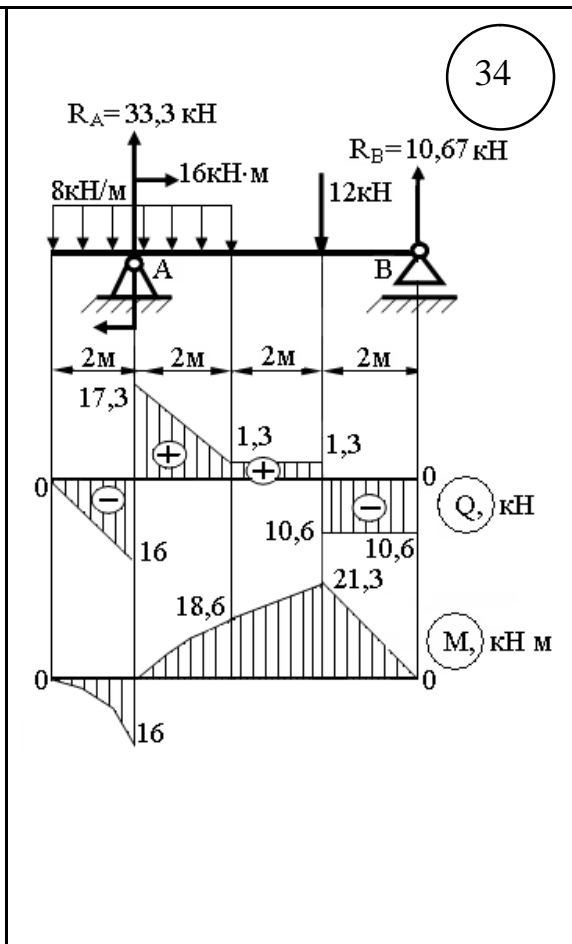
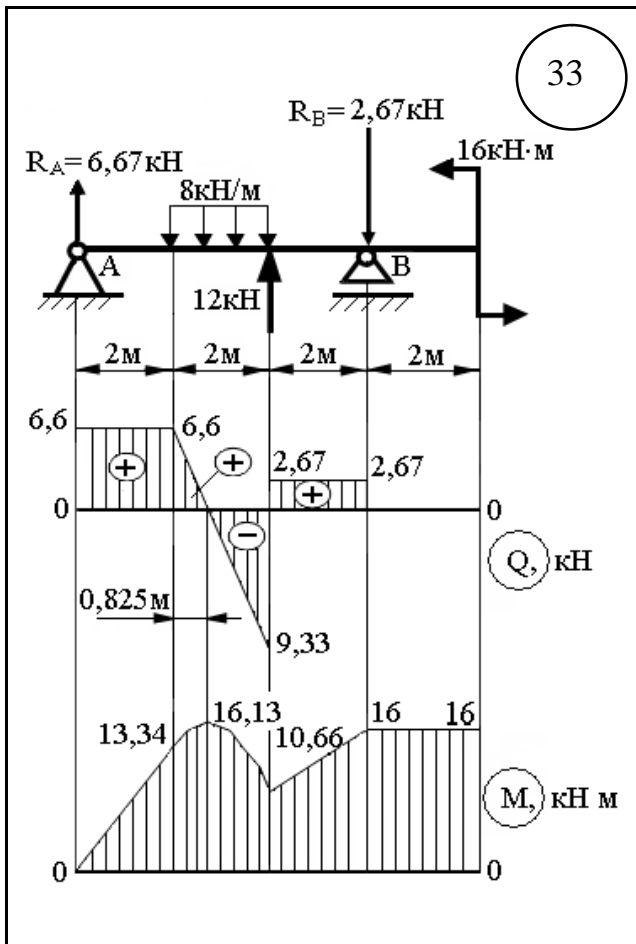


Рисунок 15, аркуш 9

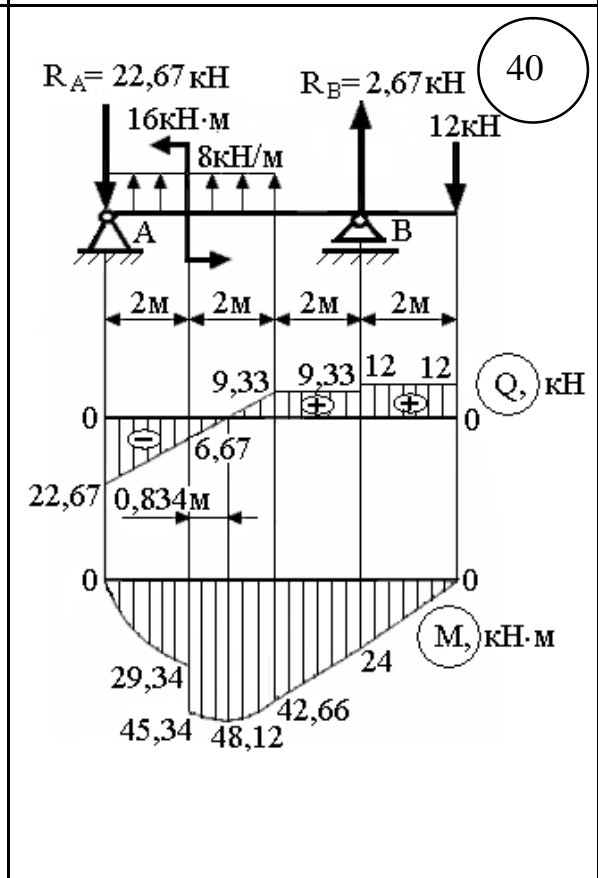
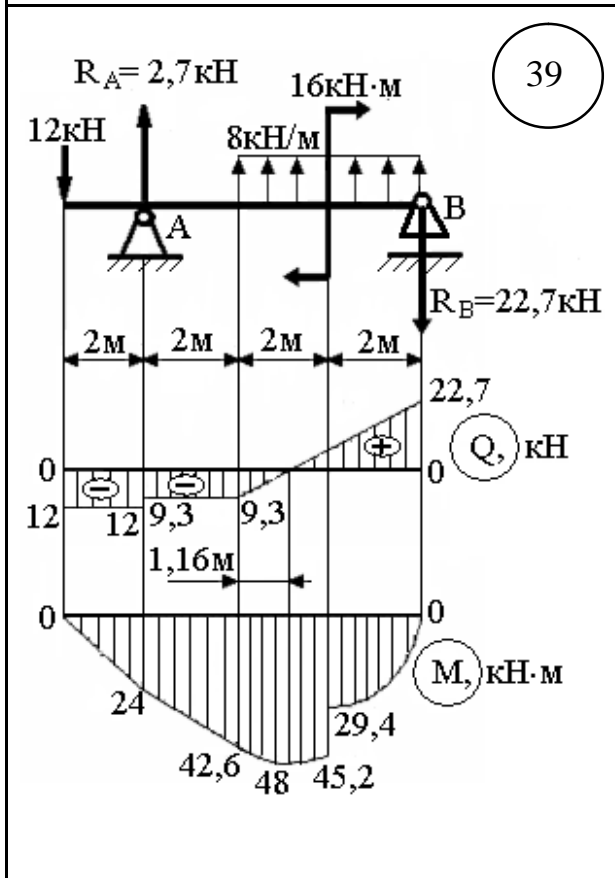
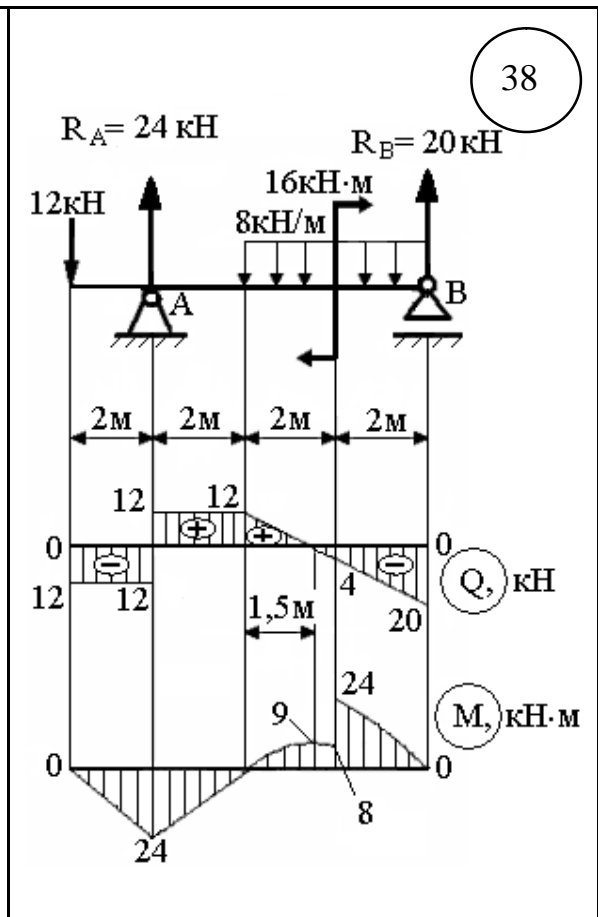
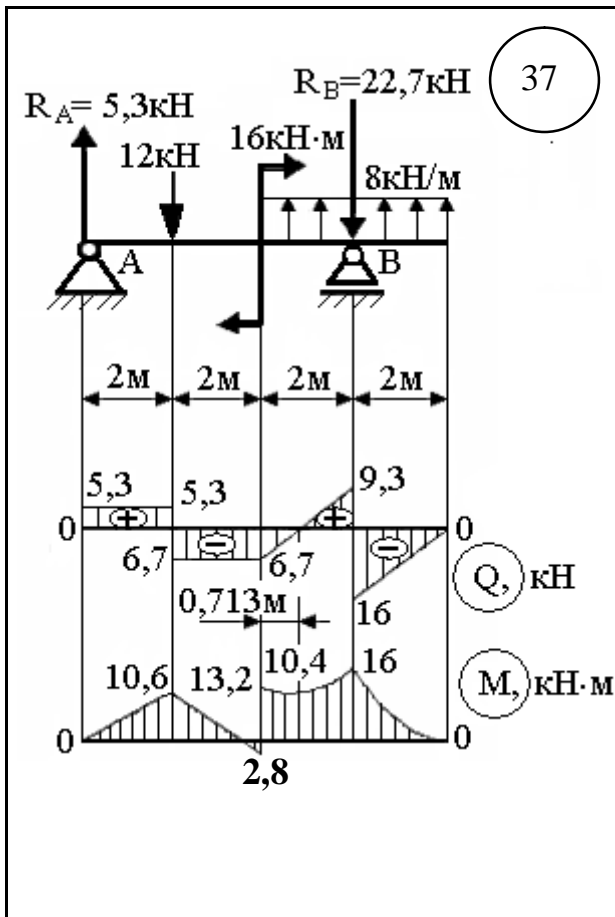


Рисунок 15, аркуш 10

2 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ РАМИ

2.1 Основні теоретичні відомості

Правила побудови епюр внутрішніх зусиль для балок та рам в основному однакові і були детально викладені в першому розділі.

Нагадаємо основні правила побудови епюр.

Через дію зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки чи рами в загальному випадку можуть виникнути поздовжня сила N , поперечна сила Q і згинальний момент M , значення яких можна знайти за наступними правилами.

Поздовжня сила N дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу, який розглядаємо.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу, який розглядаємо.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, відносно центра ваги цього перерізу.

Будемо використовувати наступні правила знаків для N , Q й M , які є однакові для балок та рам.

Поздовжня сила N вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стрижня.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається повернути переріз, який розглядаємо, за напрямком годинникової стрілки.

При побудові епюр на балках прийняте таке правило знаків що до згинального моменту: “Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки”. За цим правилом епюра згинальних моментів будується на верхніх волокнах, якщо згинальний момент додатний (рис. 16, а), або на нижніх – якщо згинальний момент від’ємний (рис. 16, б).

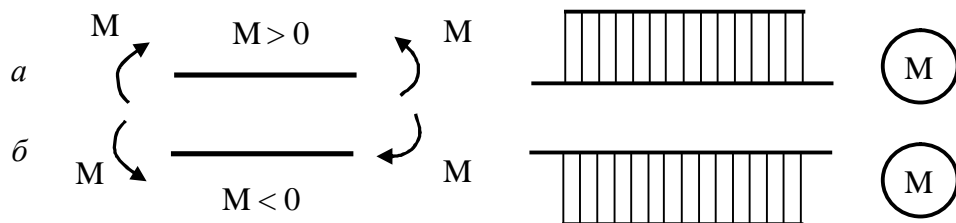


Рисунок 16

Таким чином загальне правило побудови епюри згинальних моментів M для балок та рам буде виглядати так: *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*. Це правило може бути записано інакше: *епюра згинальних моментів будуються у тому напрямку, куди зовнішні сила чи момент загинають ділянку стрижня, яку розглядаємо*.

Основні **правила** побудови епюр:

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q = 0$), епюри Q обмежені прямими, паралельними базової лінії, а епюри M являють собою похилені прямі, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють Q .

2 Якщо на деякій ділянці епюри:

а) $Q > 0$, то епюра моментів M зростає (при побудові епюри зліва направо, тобто уздовж додатного напрямку осі z);

б) якщо $Q < 0$, то епюра моментів M убуває.

3 На ділянках, де до стрижня прикладене рівномірно розподілене навантаження ($q = \text{const}$), епюра поперечної сили Q окреслена похилою прямою, а епюра згинального моменту – квадратичною параболою.

Оскільки епюру M будуємо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи спрямована назустріч дії розподіленого навантаження q .

4 У перерізах, де $Q = 0$ дотична до епюрі M паралельна базової лінії, а значення згинального моменту M – екстремальне. Якщо Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{\max}$, а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{\min}$. Координату z_0 перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулою

$$z_0 = \frac{Q_{\text{л}}}{q} \quad \text{або} \quad z_0 = \frac{Q_{\text{пр}}}{q},$$

де $Q_{\text{л}}$ та $Q_{\text{пр}}$ – значення поперечної сили відповідно на лівому або на правому краю ділянки.

5 У перерізах, де до стрижня прикладені зосереджені сили на епюрі Q будуть “стрибки” на величину цих сил з урахуванням їх знаків, а на епюрі M будуть злами, вістря яких спрямовані проти напрямку зосереджених сил. При цьому слід зазначити, що при побудові епюр зліва направо напрямок “стрибка” збігається з напрямком сили.

6 У перерізах, де до стрижня прикладені зосереджені моменти, на епюрі Q змін не буде, а на епюрі M будуть “стрибки” на величину зовнішніх моментів з урахуванням їх знаків, причому лінії епюрі M до стрибка і після нього паралельні. Слід, однак, відзначити, що, якщо в одному перерізі прикладені і сила, і момент, то сила викликає злам і порушує паралельність.

Найбільш зручно будувати епюри N , Q і M за характерними перерізами. *Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.*

Можна рекомендувати наступний порядок побудови епюр:

1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця рами, але при цьому буде неможливо здійснити перевірку вірності побудови епюр).

2 Визначити характерні перерізи.

3 Обчислити значення N в характерних перерізах.

4 Обчислити значення Q в характерних перерізах, потім “рухаючись” уздовж стрижнів (бажано зліва направо) побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

5 Обчислити значення M в характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями, згідно з правилами побудови епюр.

Перевірка правильності побудови епюр N , Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямок “стрибків” і нахилів прямих на епюрі M .

Ординати епюр, як і завжди, будемо відкладати *перпендикулярно* до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами.

2.2 Приклади побудови епюр

Приклад 1

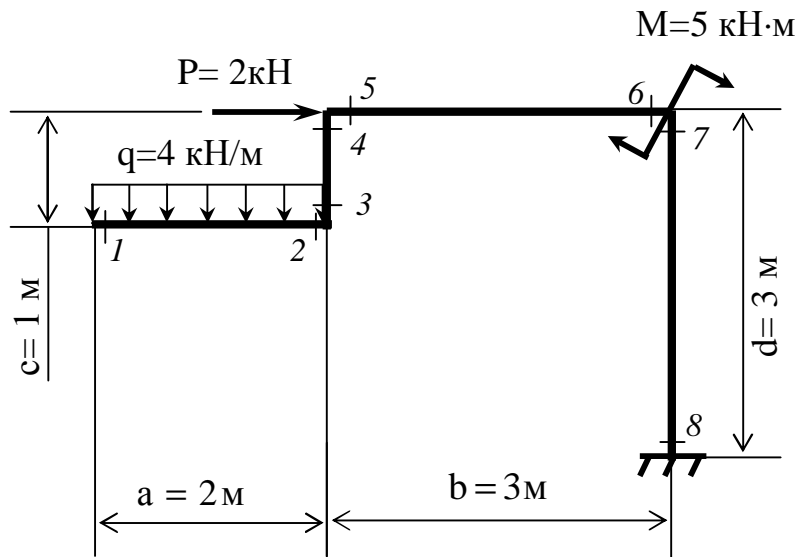


Рисунок 17 – Консольна рама (задана схема)

Для заданої рами (рис. 17) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв’язання. Будемо будувати епюри, “рухаючись” з вільного кінця рами. Означимо на рамі характерні перерізи (див. рис. 17) за правилами, які записані вище.

Визначимо поздовжні сили N в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили N_1 і N_2 повинні діяти також горизонтально. Таких сил в перерізах 1 та 2 немає, отже $N_1 = N_2 = 0$. Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому сила розподіленого навантаження q працює як поздовжня сила, яка розтягує ділянку:

$$N_3 = N_4 = q \cdot a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН.}$$

На перерізи 5 та 6 діє горизонтально розміщена сила $P=2$ кН, яка стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -2 \text{ кН.}$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї стискуючи діє сила розподіленого навантаження

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 18). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище.

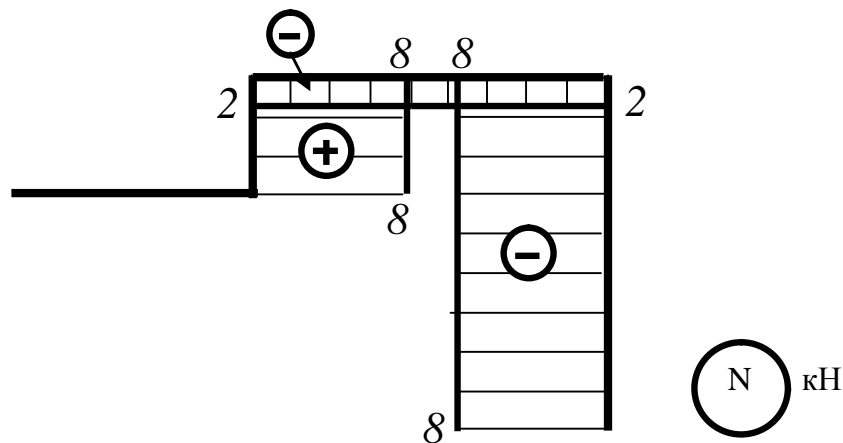


Рисунок 18 – Епюра поздовжніх сил

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізах.

У перерізі 1 поперечною силою є розподілене навантаження, яке діє на нескінченно малому відрізку, тому

$$Q_1 = q \cdot 0 = 0.$$

У перерізі 2 розподілене навантаження намагається повернути ділянку 1...2 проти ходу годинникової стрілки і поперечна сила досягає величини

$$Q_2 = -qa = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

На ділянці 3...4, яка розташована вертикально, немає жодної горизонтально розміщеної, тобто поперечної сили, тому

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

У перерізах 5 та 6 поперечною силою є сила розподіленого навантаження, яка намагається повернути ділянку 5...6 проти хода годинникової стрілки:

$$Q_5 = Q_6 = Q_2 = -qa = -8 \text{ кН.}$$

У перерізах 7 та 8 поперечною силою є сила $P=2 \text{ кН}$, яка намагається повернути ділянку 7...8 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_7 = Q_8 = P = 2 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 19). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2). На ділянках 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюються прямими, паралельними базі.

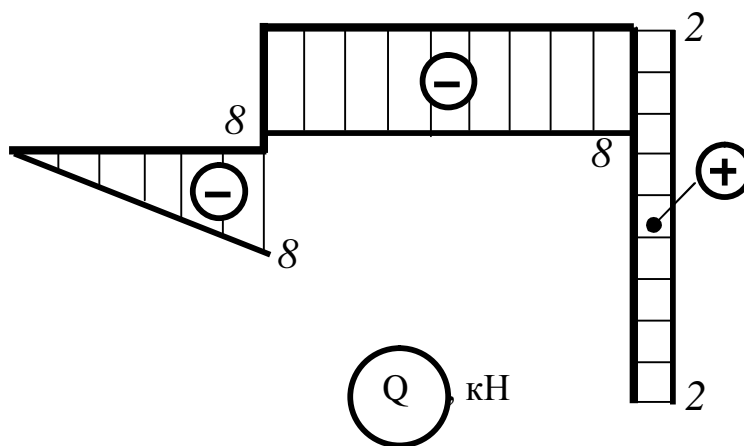


Рисунок 19 – Епюра поперечних сил

Визначимо згинальні моменти M в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки розподілене навантаження діє на нескінченно малому відрізку:

$$M_1 = q \cdot 0 = 0.$$

На 2-й переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку униз, тому означимо цей момент, як і в балках, позначкою “мінус”:

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 діє той же момент, що і у перерізі 2, але він загинає ділянку 3...4 вправо. Будемо означати його тією ж позначкою:

$$M_3 = M_2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 3...4 немає ніяких зовнішніх зусиль, тому

$$M_4 = M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 5 діє той же момент, що і у перерізах 2, 3 та 4, який також загинає балку униз, тому

$$M_5 = M_4 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 6 згинальний момент дорівнює

$$M_6 = -q \cdot 2 \cdot 4 = -4 \cdot 2 \cdot 4 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 крім згинального моменту M_6 , який загинає вертикальну ділянку вліво, з'являються також зовнішній зосереджений момент M , але він діє в протилежному напрямку, тому

$$M_7 = M_6 + M = -32 + 5 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 8-й переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо:

$$M_8 = -q \cdot 2 \cdot 4 + M + P \cdot 3 = -4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 3 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 20). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто вверх. А на всіх інших ділянках добуті точки треба з'єднувати прямими лініями.

Епюри згинальних моментів на всіх ділянках будемо будувати на стиснутих волокнах, тобто у тому напрямку, куди сили та момент загинають стрижні. Так на ділянках 1...2 та 5...6 стрижні загинаються униз, на ділянці 3...4 розподілене навантаження загинає вертикальний стрижень праворуч, а на ділянці 7...8 сумісна дія зовнішніх факторів (q , P , M) загинає вертикальний стрижень ліворуч (див. рис. 20).

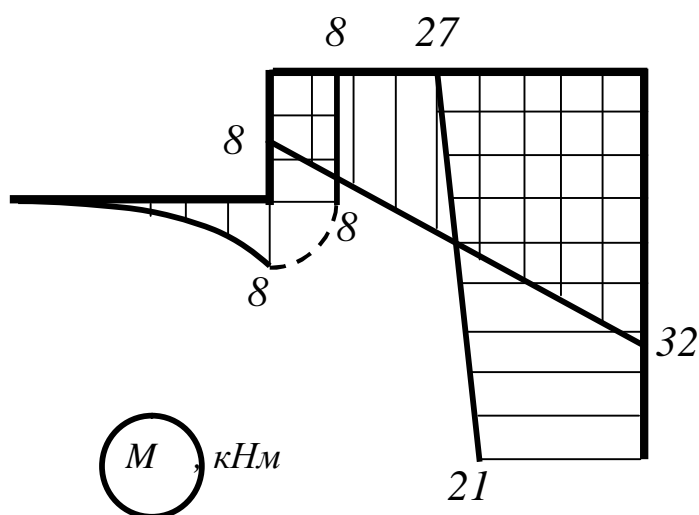


Рисунок 20 – Епюра згинальних моментів

Приклад 2

Для заданої рами (рис. 21) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з котрих має по одній реакції.

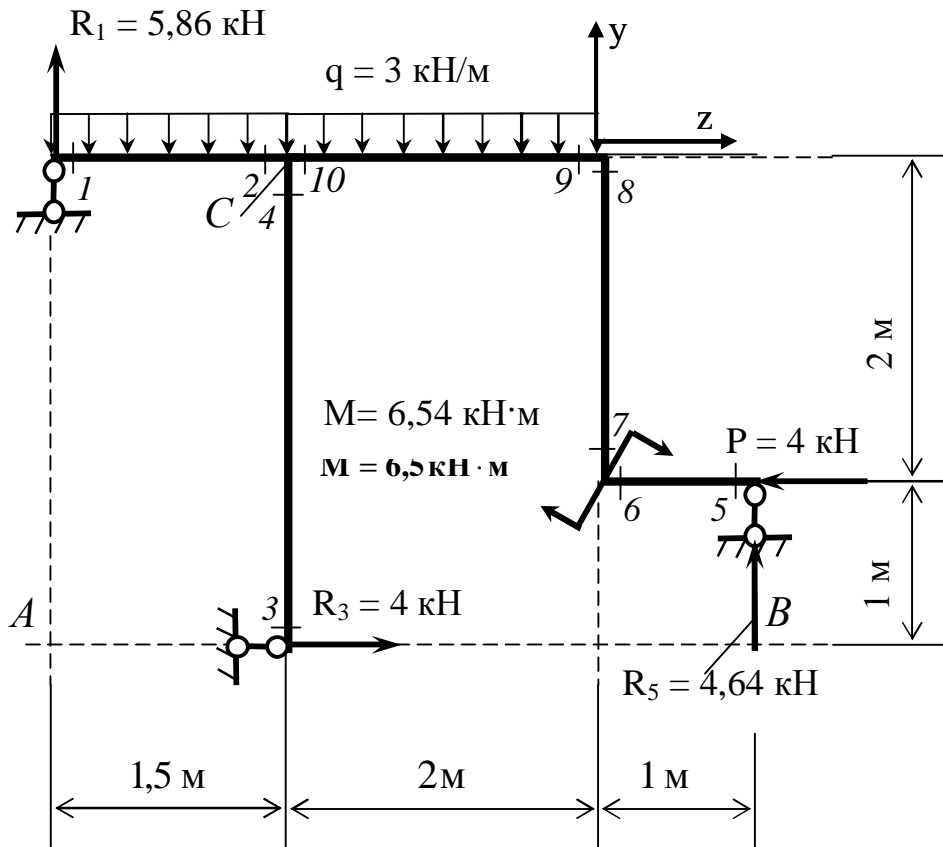


Рисунок 21 – Трьохопорна рама (задана схема)

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для сил, що діють на раму, рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції. Для цього використаємо точки перетинань ліній дій реакцій.

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 3,5 \cdot 1,75 - M + P \cdot 1 + R_5 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_5 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 1,75 + 6,5 - 4 \cdot 1}{4,5} = 4,64 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot 2,75 - M + P \cdot 1 - R_1 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_1 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 2,75 - 6,5 + 4 \cdot 1}{4,5} = 5,86 \text{ кН};$$

$$\sum P_z = 0; \quad R_3 - P = 0; \quad R_3 = P = 4 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку: $\sum P_y = 0; \quad R_1 - q \cdot 3,5 + R_5 = 0;$

$$5,86 - 3 \cdot 3,5 + 4,64 = 10,5 - 10,5 = 0.$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Означимо на рамі характерні перерізи (див. рис. 6) так, щоб будувати епюру, “рухаючись” до вузла С.

Визначимо поздовжні сили N в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили N_1 та N_2 повинні діяти також горизонтально. Таких сил в перерізах 1 та 2 немає, отже

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому поздовжні сили повинні діяти також вертикально, але їх немає:

$$N_3 = N_4 = 0.$$

На перерізи 5 та 6 діє горизонтально розміщена сила $P=4$ кН, яка стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -4 \text{ кН.}$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї стискуючи діє реакції $R_5 = 4,64$ кН, тому

$$N_7 = N_8 = -R_5 = -4,64 \text{ кН.}$$

На ділянку 9...10 також діє горизонтально розміщена сила $P=4$ кН, яка її стискає, тому

$$N_9 = N_{10} = -P = -4 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 22). З'єднаємо добуті ординати прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище.

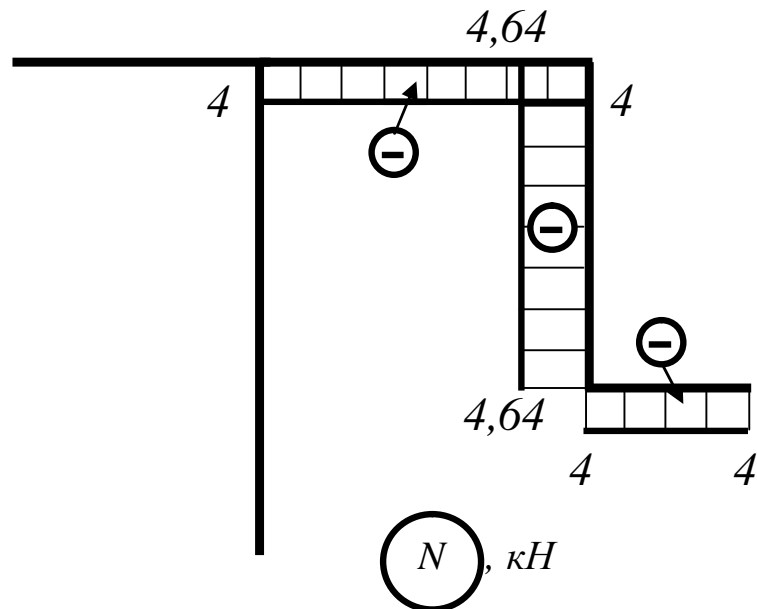


Рисунок 22 – Епюра поздовжніх сил

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізах.

У перерізі 1 діє реакція $R_1 = 5,86$ кН, яка намагається повернути відрізок рами за ходом годинникової стрілки, тобто має позначку “плюс”, тому

$$Q_1 = R_1 = 5,86 \text{ кН.}$$

У перерізі 2 завдяки розподіленому навантаженню поперечна сила зменшується до величини:

$$Q_2 = R_1 - q \cdot 1,5 = 5,86 - 3 \cdot 1,5 = 1,36 \text{ кН.}$$

У перерізах 3 та 4 поперечною силою є реакція $R_3 = 4$ кН, яка намагається повернути ділянку 3...4 проти хода годинникової стрілки, тому

$$Q_3 = Q_4 = -R_3 = -4 \text{ кН.}$$

На ділянці 5...6, яка розташована горизонтально, поперечною силою є реакція $R_5 = 4,64$ кН, яка намагається повернути цю ділянку проти хода годинникової стрілки, тому

$$Q_5 = Q_6 = -R_5 = -4,64 \text{ кН.}$$

У перерізах 7 та 8 поперечною силою є сила $P=4$ кН, яка намагається повернути ділянку 5...6 за ходом годинникової стрілки:

$$Q_7 = Q_8 = P = 4 \text{ кН.}$$

На переріз 9 діє реакція $R_5 = 4,64$ кН, яка намагається повернути відрізок рами проти хода годинникової стрілки, тобто має позначку “мінус”, тому

$$Q_9 = -R_5 = -4,64 \text{ кН.}$$

У перерізі 10 ми маємо реакцію R_5 та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке намагається повернути ділянку 9...10 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_{10} = -R_5 + q \cdot 2 = 4,64 - 3 \cdot 2 = 1,36 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 23).

З'єднаємо добуті ординати (див. рис. 23) прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище. На ділянках 1...2 та 9...10, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похиленою прямою (див. правило 2). На інших ділянках розподільного навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюються прямими, паралельними базі.

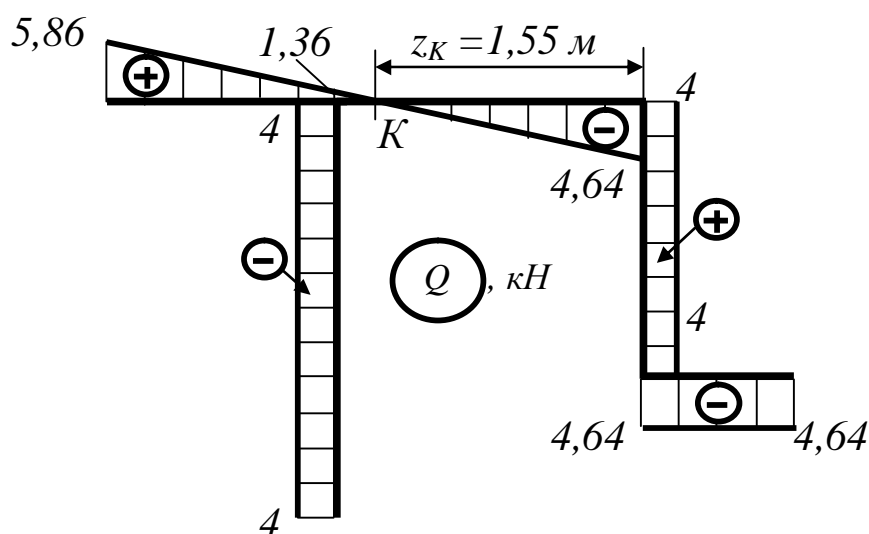


Рисунок 23 – Епюра поперечних сил

Визначимо згинальні моменти M в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_1 та розподілене навантаження діють на нескінченно малому відрізьку

$$M_1 = 0.$$

На 2-й перерізі діє розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає частину рами униз, тому означимо момент від неї, як і в балках, позначкою “мінус”, а момент від реакції R_1 нехай буде додатний:

$$M_2 = R_1 \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,86 \cdot 1,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_3 діє на нескінченно малому відрізьку,

$$M_3 = 0,$$

а 4-м перерізі:

$$M_4 = R_3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізах 5 та 6 будемо розмірковувати аналогічно попередньому:

$$M_5 = 0; \quad M_6 = R_5 \cdot 1 = 4,64 \cdot 1 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 діє той же момент, що і у перерізі 6, який загинає вертикальний стрижень вправо (будемо означати його позначкою “плюс”), а також зовнішній момент M , який загинає вертикальний стрижень в протилежному напрямку:

$$M_7 = M_6 - M = 4,64 - 6,5 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При обчислюванні згинального моменту у перерізі 8 треба врахувати всі зусилля, які діють нижче та праворуч даного перерізьку, тобто силу P , реакцію R_5 та момент M :

$$M_8 = R_5 \cdot 1 - P \cdot 2 - M = 4,64 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 6,5 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 9 діє той же момент, що і у перерізі 8, але він загинає дану частину рами униз. Будемо означати його тією ж позначкою:

$$M_9 = M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На переріз 10 крім сили P , реакції R_5 та моменту M діє також розподілене навантаження, тому знаходимо:

$$M_{10} = R_5 \cdot 3 - P \cdot 2 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 4,64 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -6,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 9...10 в перерізі K , де $Q = 0$ (див. рис.23), на епюрі M має бути екстремум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{\text{ЕКСТР}}$:

$$z_K = \frac{Q_9}{q} = \frac{4,64}{3} = 1,55 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{\text{ЕКСТР}} &= R_5(1 + z_K) - P \cdot 2 - M - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = \\ &= 4,64 \cdot 2,55 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = -6,27 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 24).

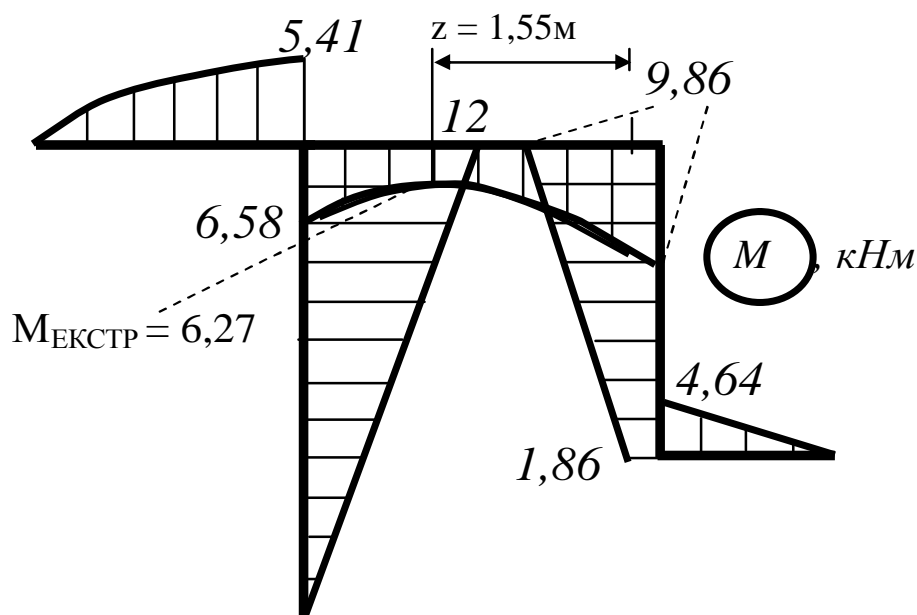


Рисунок 24 – Епюра згинальних моментів

При цьому будемо мати на увазі, що епюру згинальних моментів треба будувати на *стиснутих волокнах*, тобто у напрямку, куди сила чи момент загинає ділянку стрижня. Так на ділянці 1...2 розподілене навантаження q загинає стрижень униз (домовимось означати цей момент позначкою “мінус”), а реакція R_1 – уверх (означимо момент від R_1 позначкою “плюс”). Оскільки після підрахування момент $M_2 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (тобто має позначку “плюс”), то будемо відкладати епюру M уверх.

При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх (див. рис. 24).

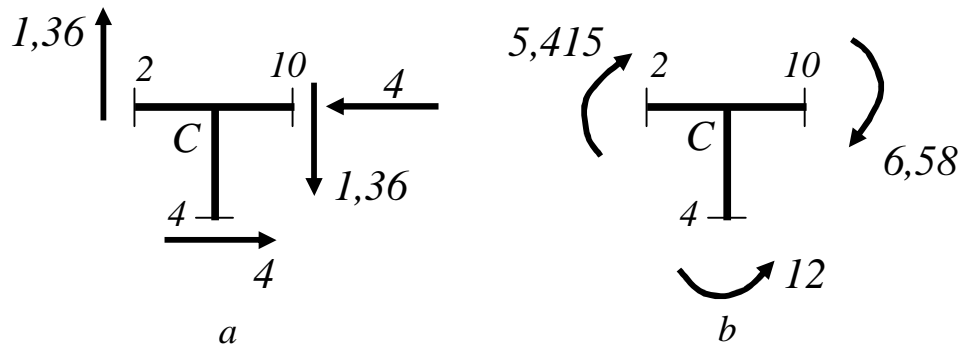
На ділянці 3...4 реакція R_3 загинає стрижень вправо, тому епюру M будемо будувати на стиснутих волокнах, тобто праворуч (див. рис. 24). Значення моментів $M_3 = 0$ та $M_4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ з’єднаємо прямою лінією.

На ділянці 5...6 реакція R_5 загинає стрижень уверх, тому епюру M будемо на верхніх (стиснутих) волокнах (див. рис. 24). Значення моментів $M_5 = 0$ та $M_6 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}$ з’єднаємо також прямою лінією.

Частина вертикального стрижня нижче перерізу 7 моментом від дії реакції R_5 загинається праворуч (означимо момент від R_5 позначкою “плюс”). Але зовнішній момент M загинає частину стрижня ліворуч (тобто з позначкою “мінус”). Після підрахування маємо $M_7 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Таким чином ми повинні відкладати знайдене значення ліворуч (див. рис. 24). У перерізі 8 ми маємо $M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$, тому його також відкладаємо ліворуч вертикально розміщеної базової лінії.

Ділянка 9...10 зовнішніми силами загинається униз, що підтверджується позначками “мінус” в моментах M_9 та M_{10} . Тому відкладаємо епюру униз (див. рис. 24). А оскільки на ділянці 9...10 діє розподілене навантаження q , то епюра згинального моменту повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх.

Зробимо перевірку побудови епюри M , для чого розглянемо рівновагу вузлу C (див. рис. 21) під дією поздовжніх та поперечних сил, а також моментів. Не викликає сумніву, що сума поздовжніх сил (див. рис. 25, а) дорівнює 0.



a – під дією сил, b – під дією моментів

Рисунок 25 – Вузол C з трьохопорної рами

Згідно з епюрою M (див. рис. 24), в перерізу 2 згинальний момент дорівнює $M_2 = 5,415 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і загинає переріз 2 уверх, тобто момент M_2 діє за ходом годинникової стрілки (див. рис. 25). Згинальний момент у перерізі 10 загинає переріз, який ми розглядаємо, униз, тобто момент $M_{10} = 6,58 \text{ кН}\cdot\text{м}$ треба направити також за ходом годинникової стрілки (див. рис. 25). У перерізі 4 згинальний момент $M_4 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ згинає ділянку вертикального стрижня праворуч (див. рис. 24), тому момент M_4 діє проти хода годинникової стрілки (див. рис. 25).

Сума цих моментів дорівнює:

$$M_2 + M_4 + M_{10} = 5,415 - 12 + 6,58 = -0,005 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

що співпадає з похибкою розрахунку. Тому можна вважати, що епюра згинальних моментів побудована вірно.

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

На рисунку 26 зображені завдання для самостійного розв'язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях взяті однакові числові значення величин: $P = 12 \text{ кН}$; $q = 8 \text{ кН/м}$; $M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Завдання розташовані таким чином, щоб надати студентам можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого завдання до останнього.

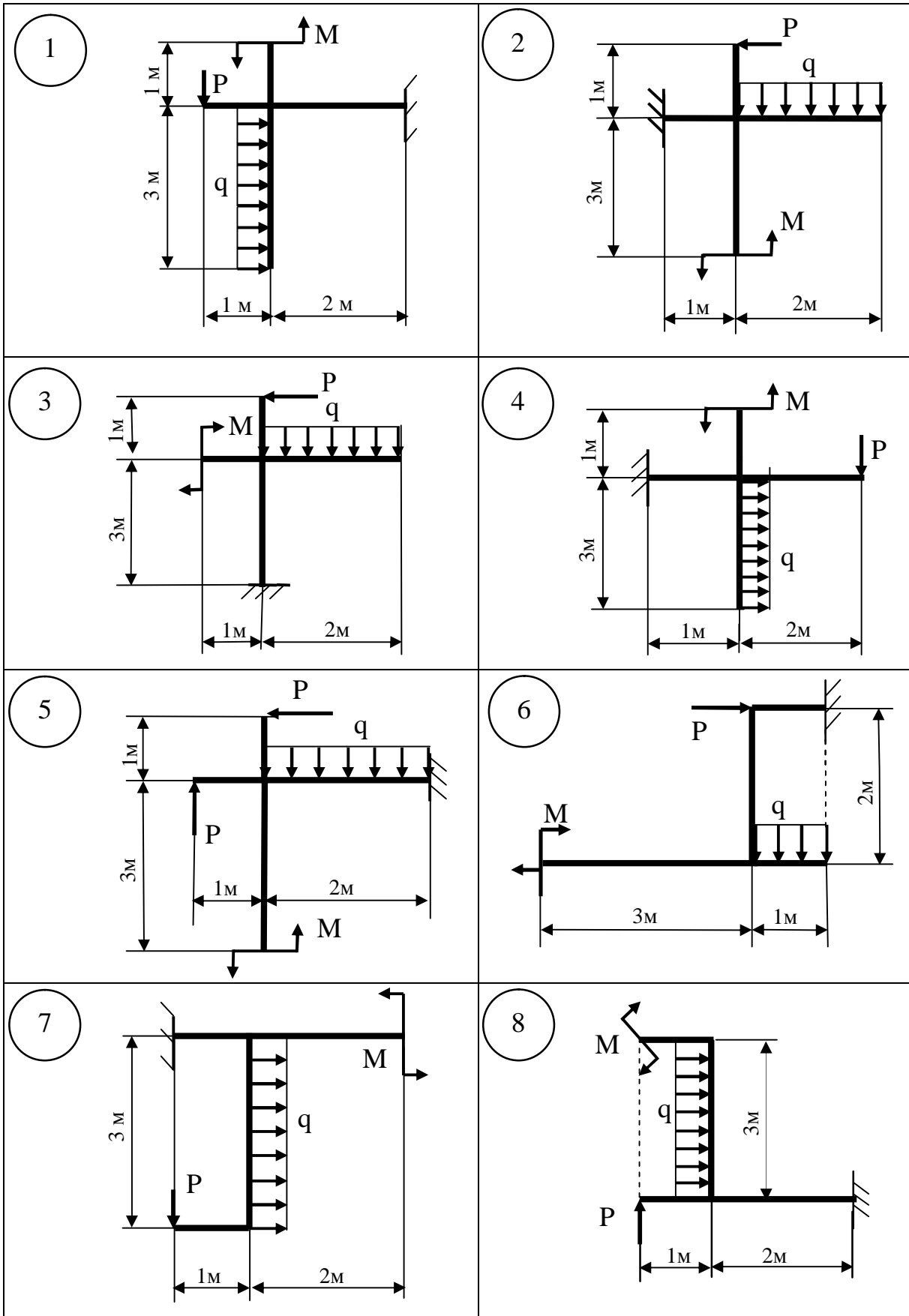


Рисунок 26

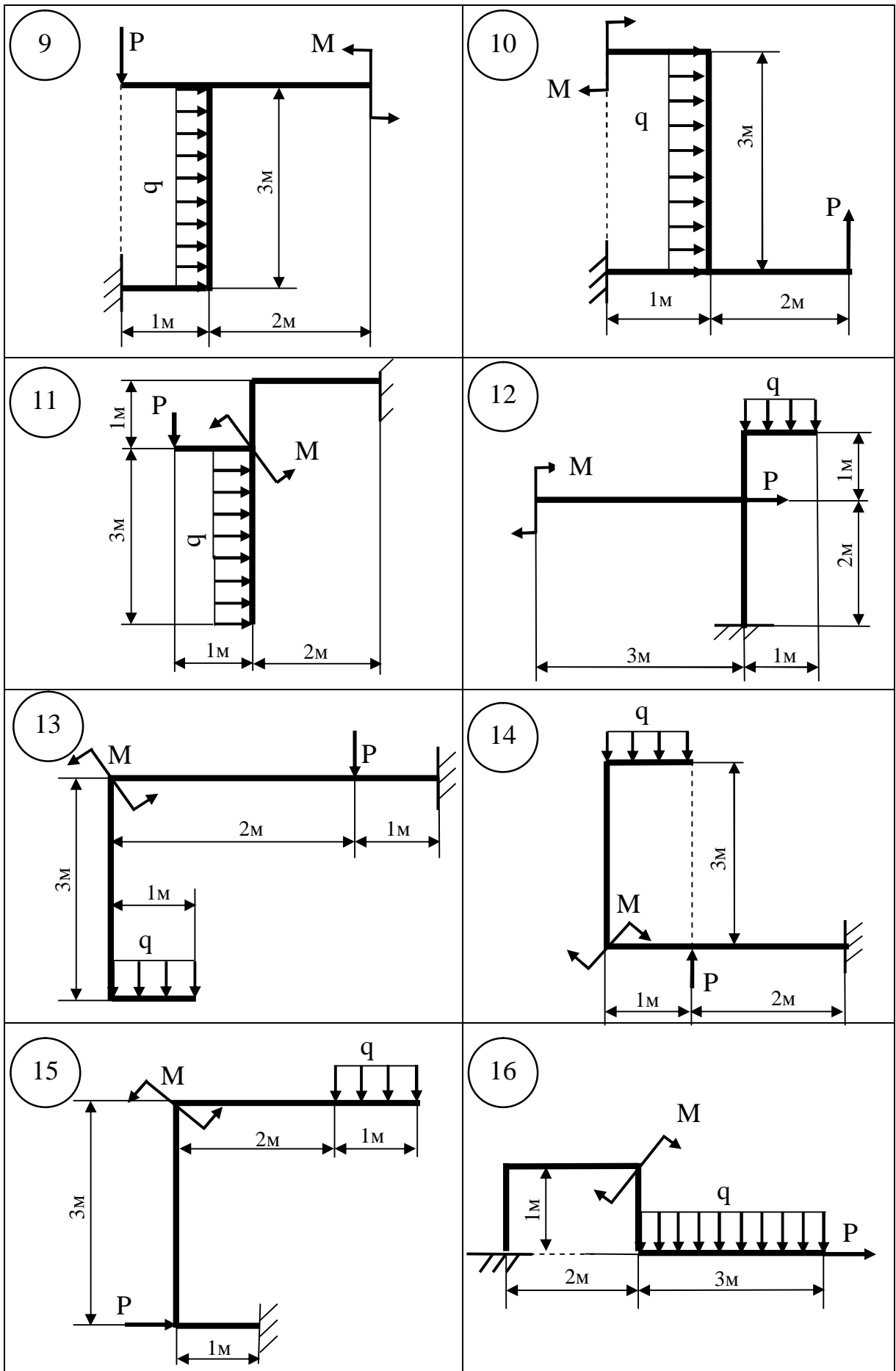


Рисунок 26, аркуш 2

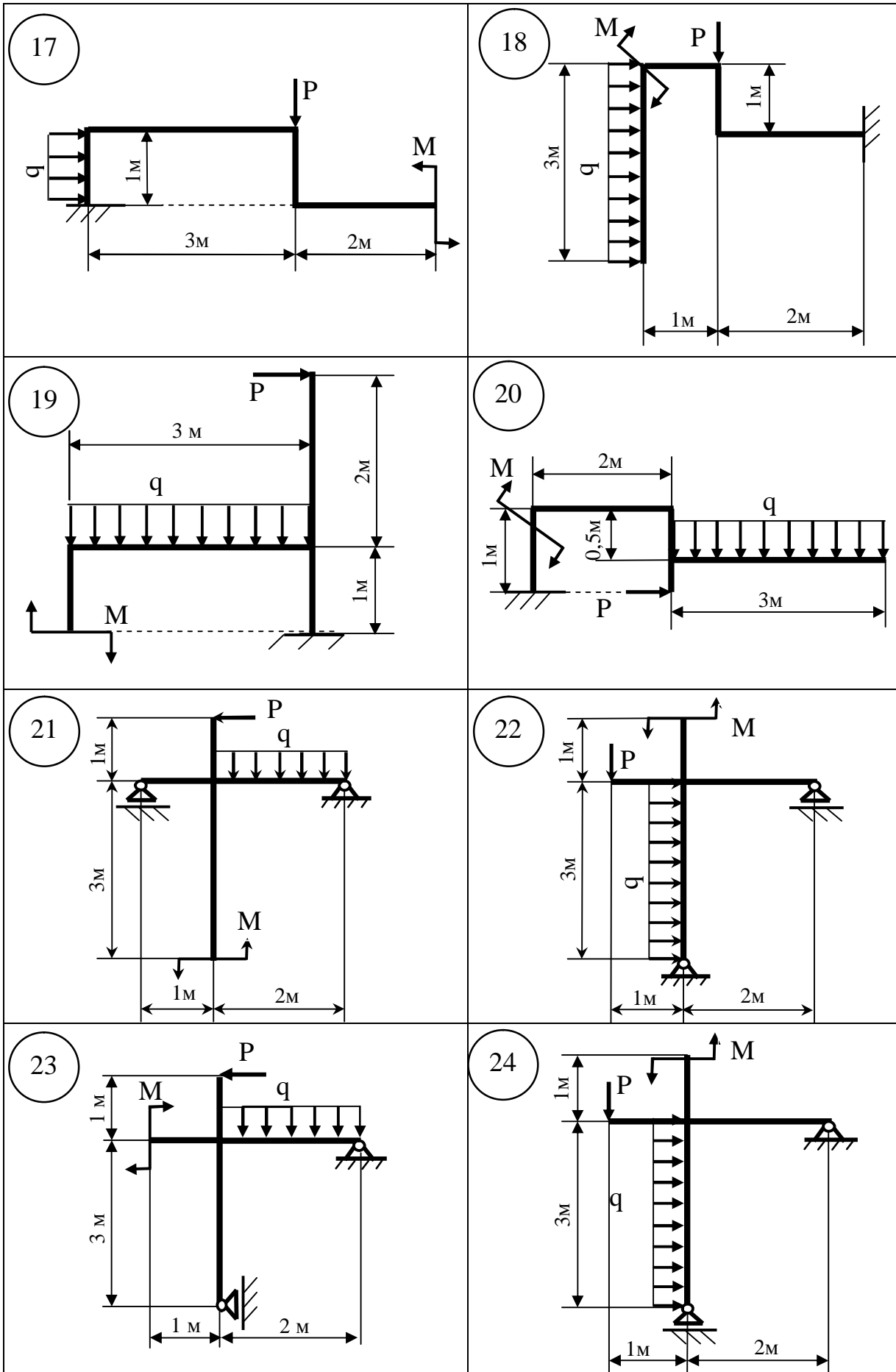


Рисунок 26, аркуш 3

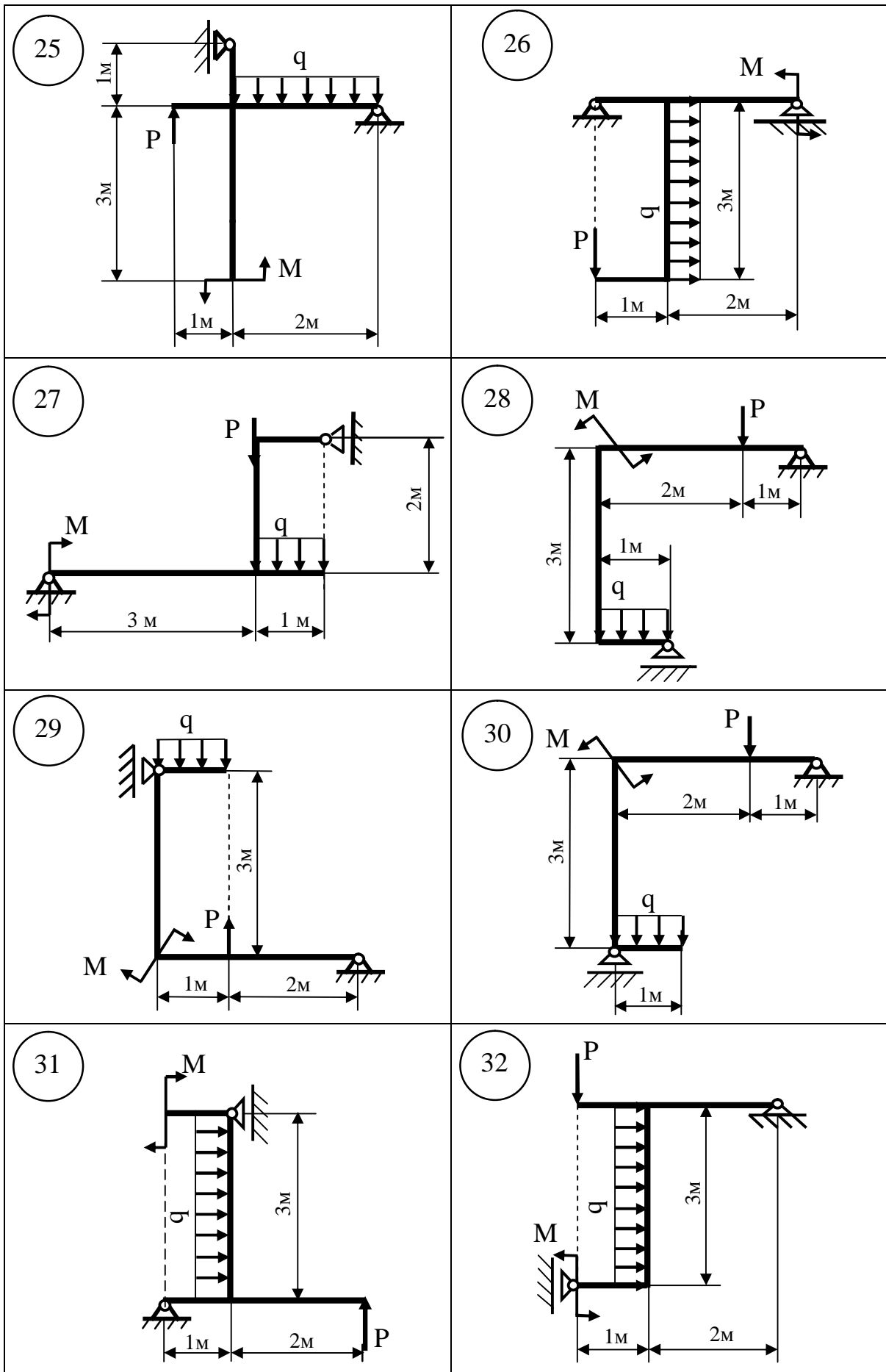


Рисунок 26, аркуш 4

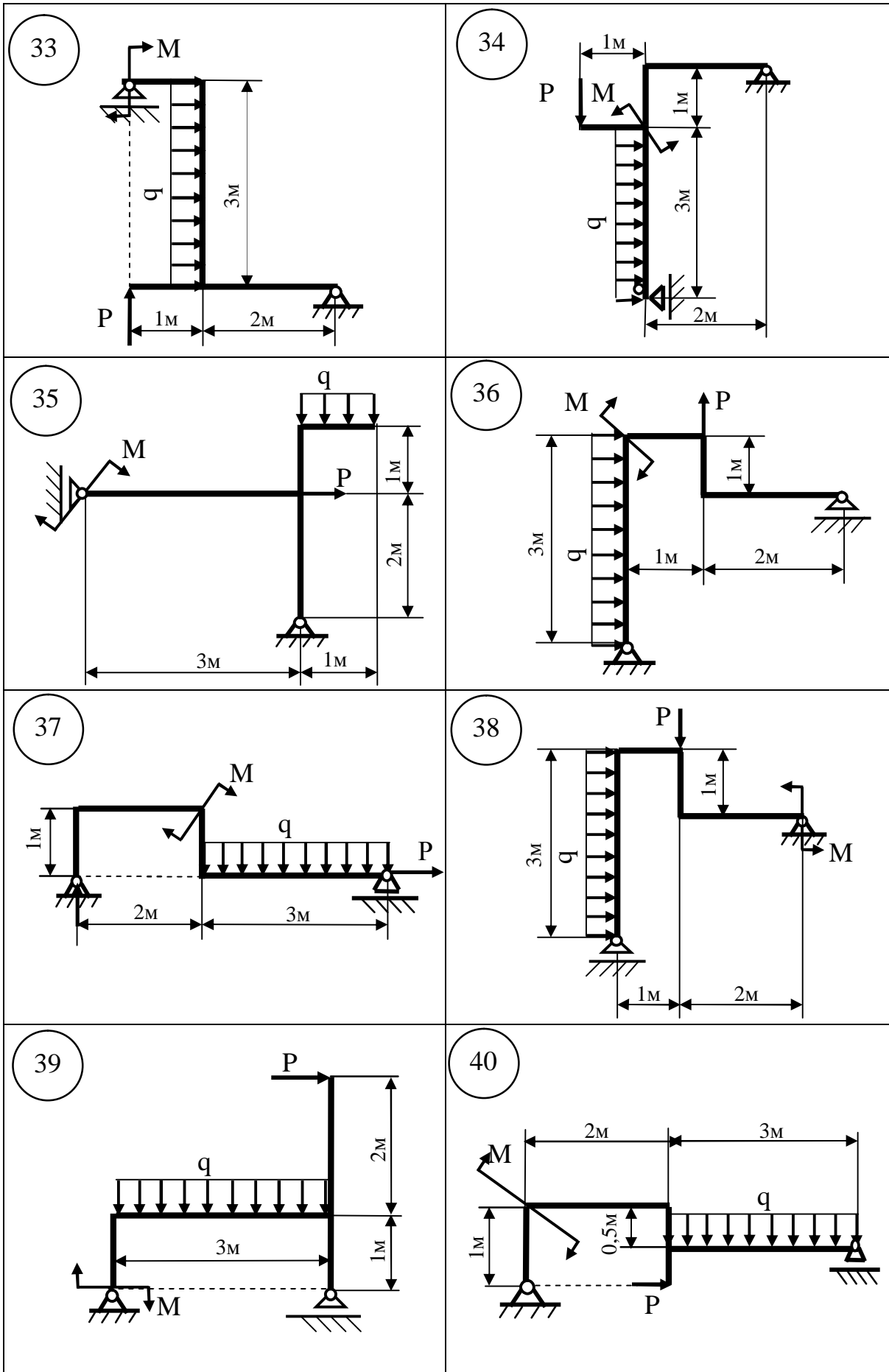


Рисунок 26, аркуш 5

2.4 Відповіді до завдань

Розв'язуючи те чи інше завдання, студент має можливість проконтролювати себе за допомогою відповідей до завдань, що наведені на рис. 27.

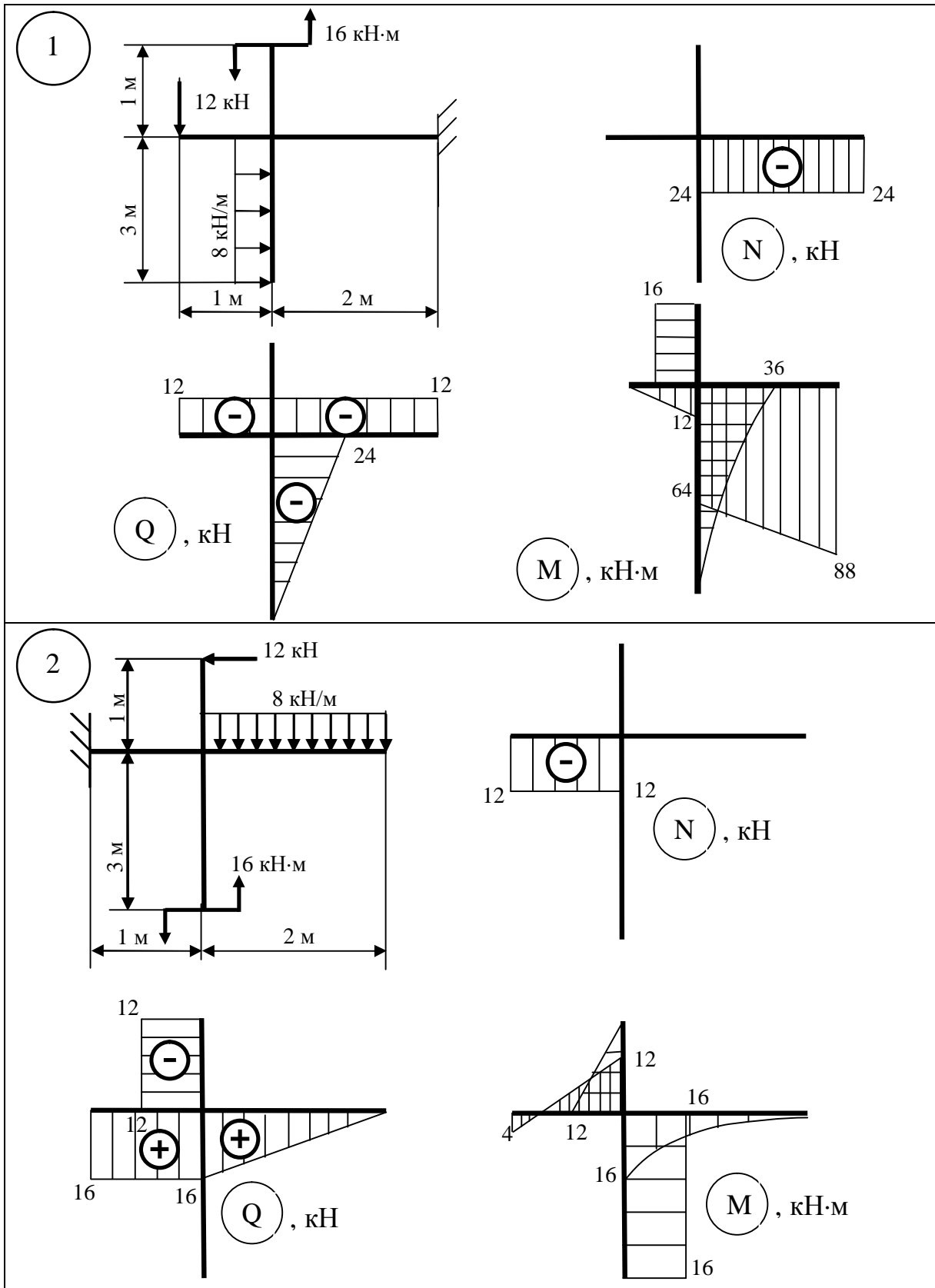


Рисунок 27

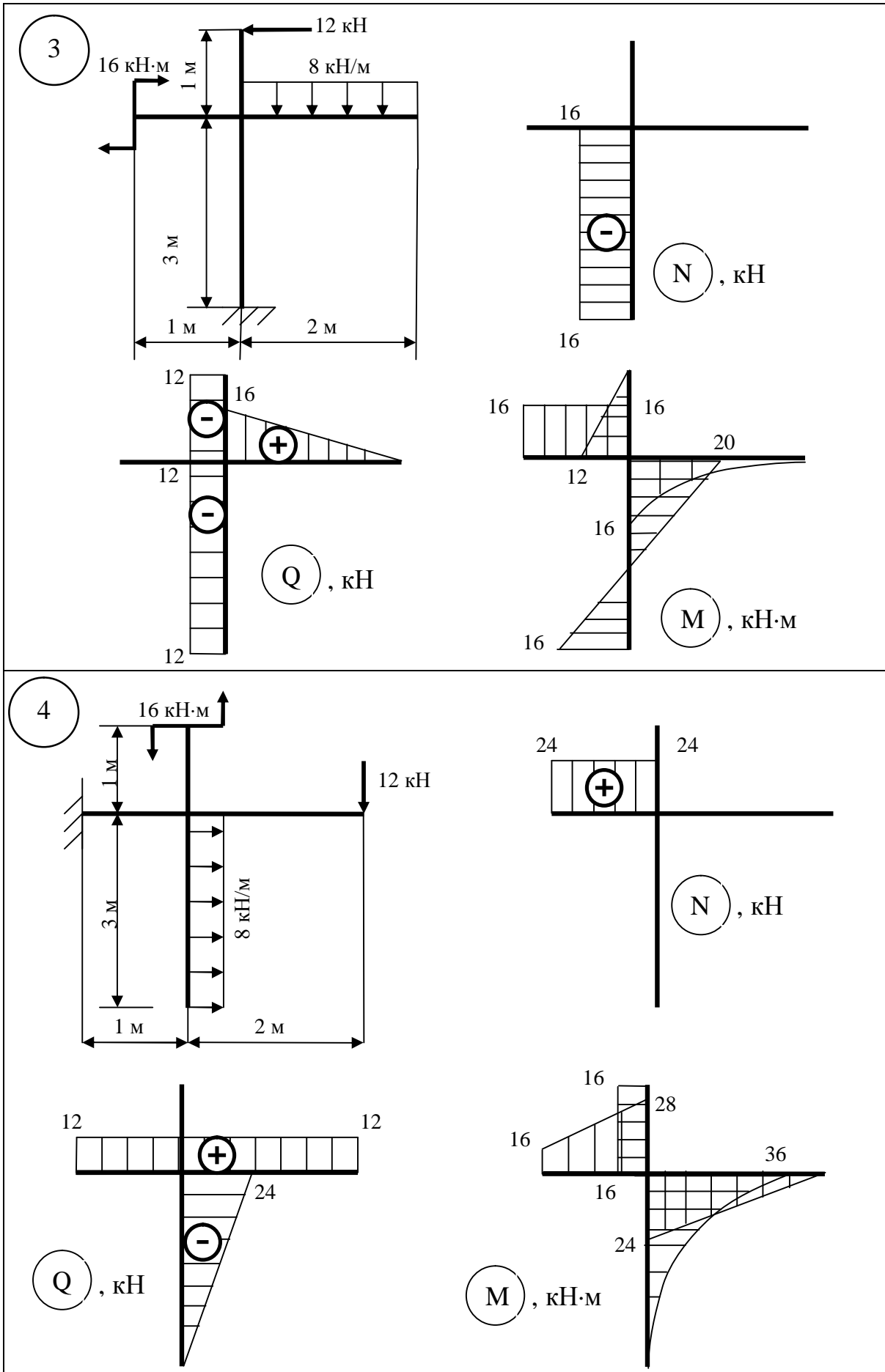


Рисунок 27, аркуш 2

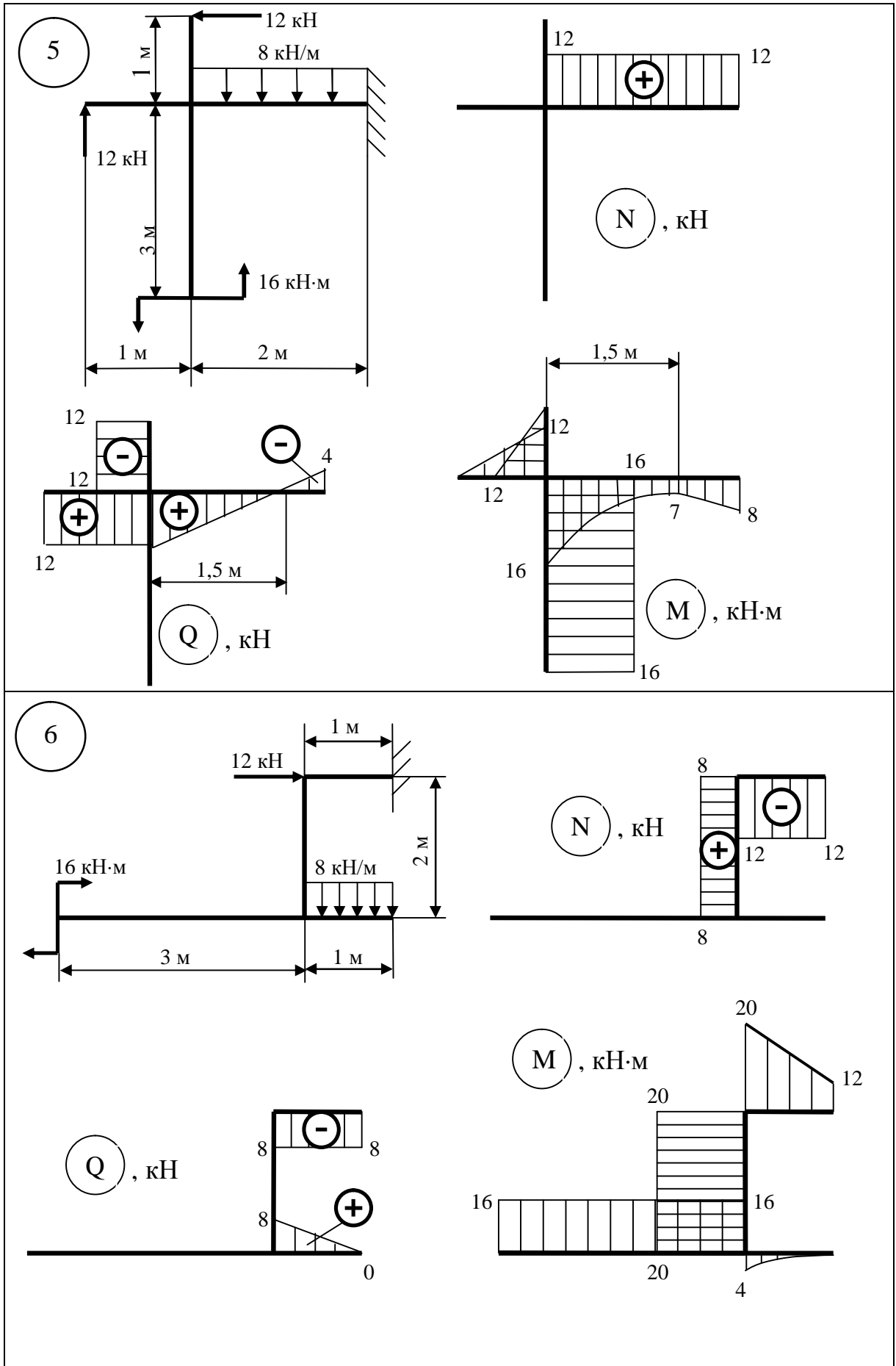


Рисунок 27, аркуш 3

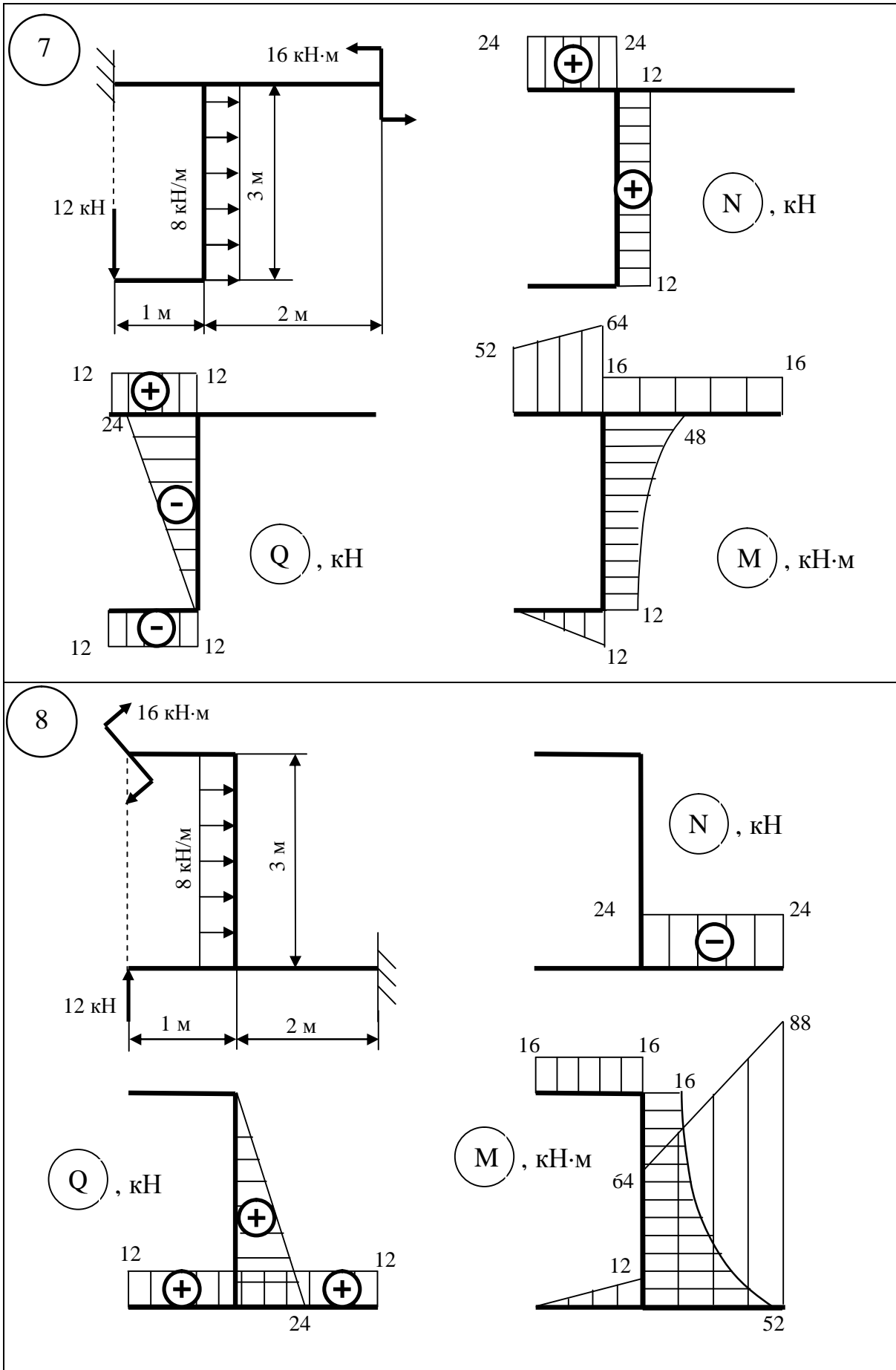


Рисунок 27, аркуш 4

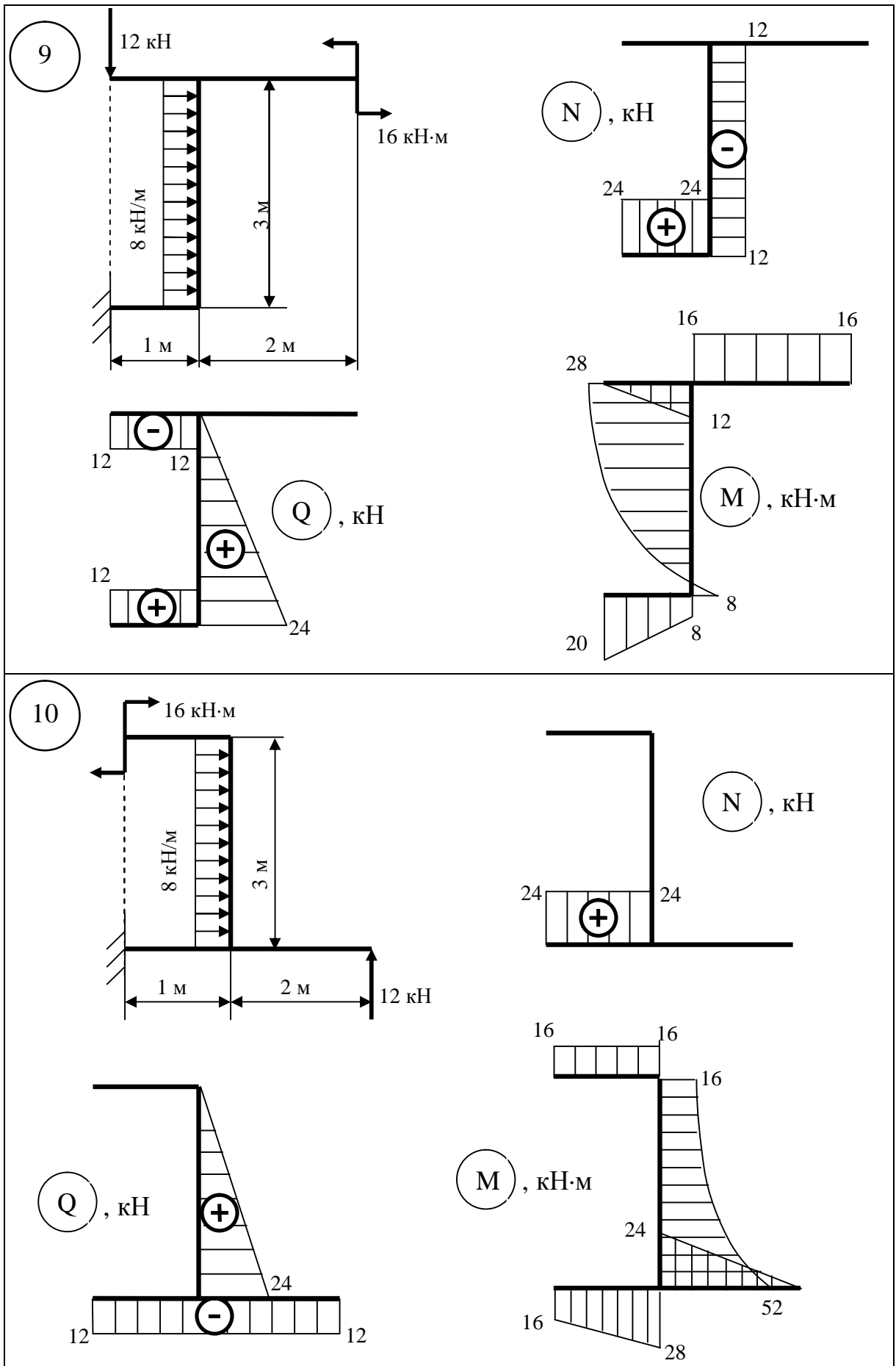


Рисунок 27, аркуш 5

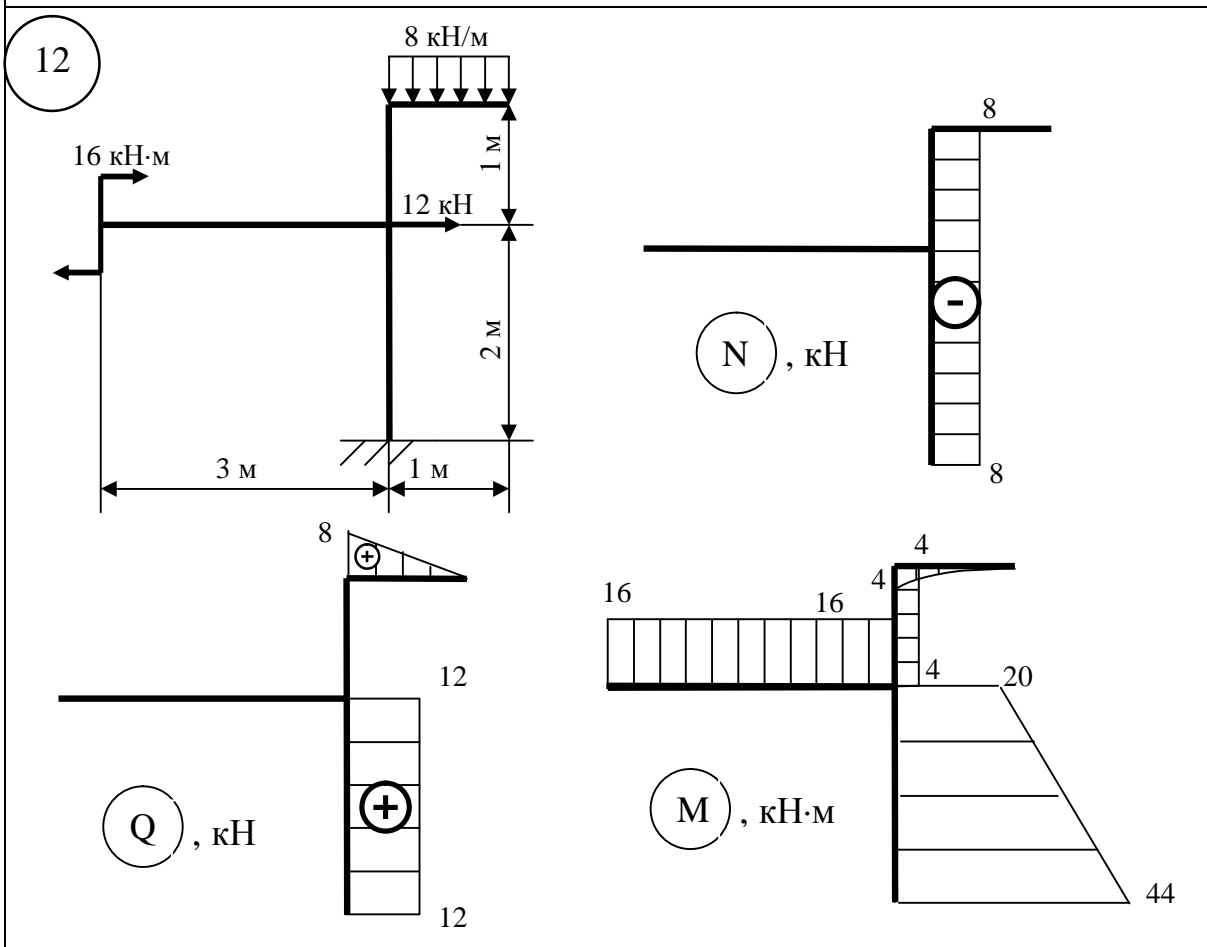
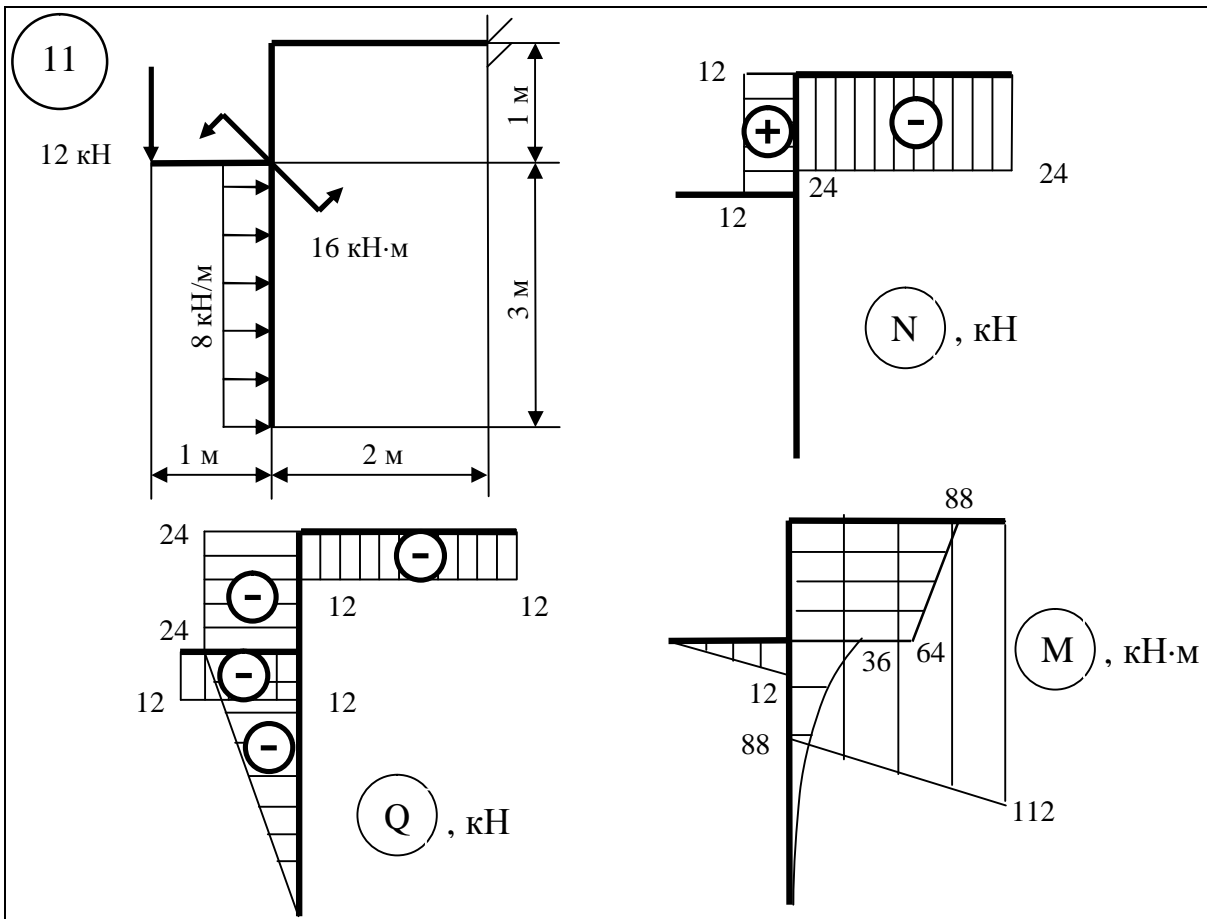


Рисунок 27, аркуш 6

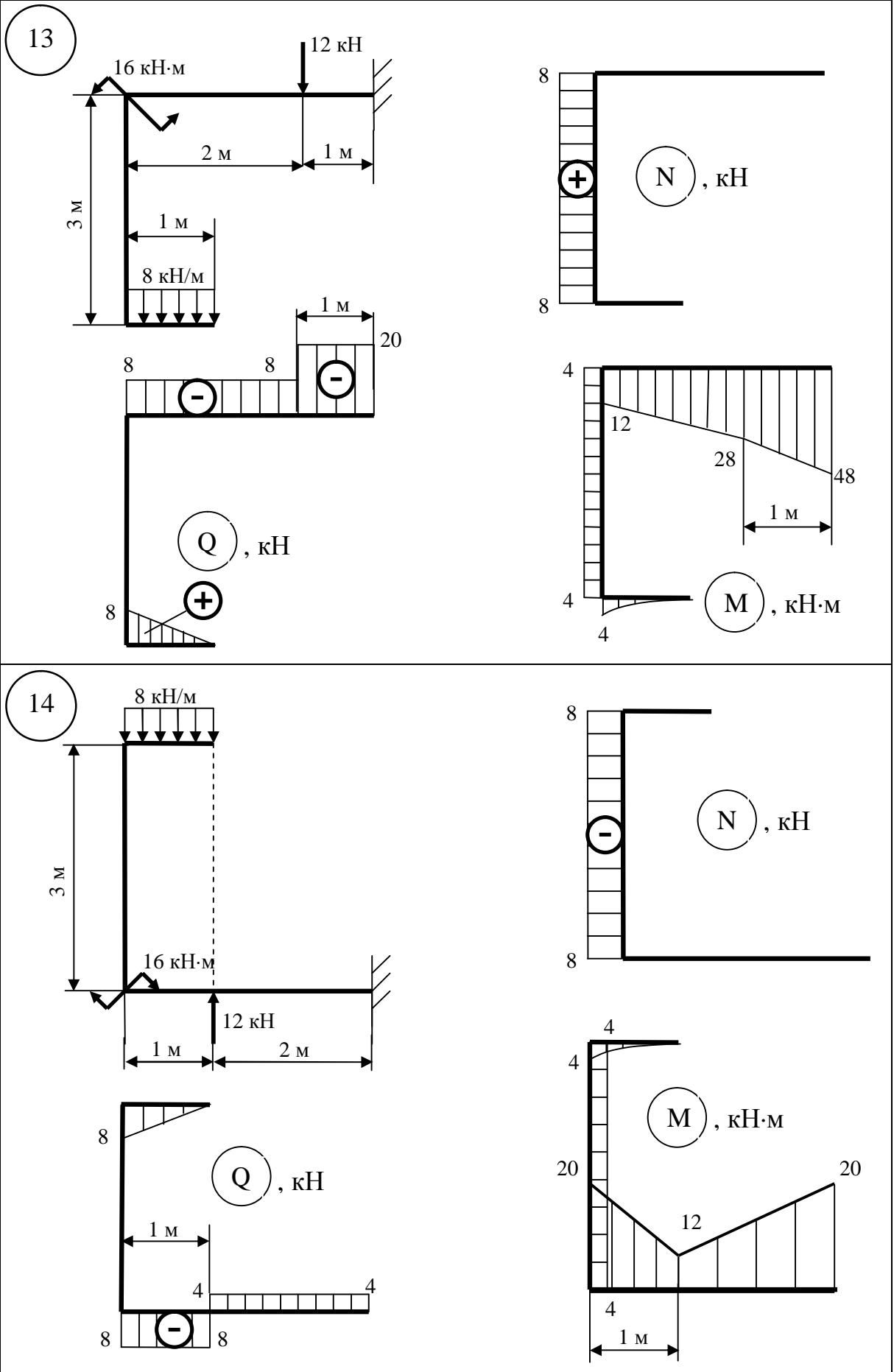


Рисунок 27, аркуш 7

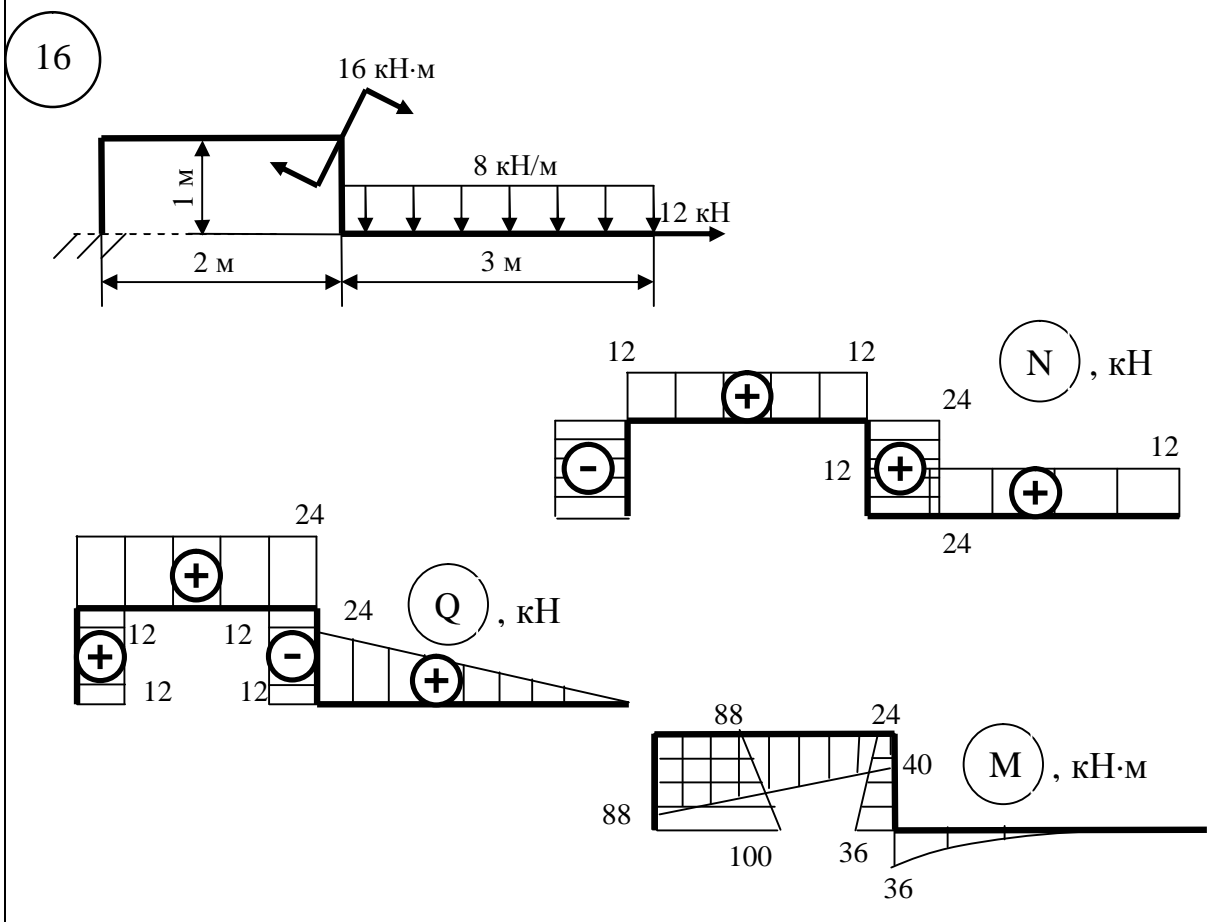
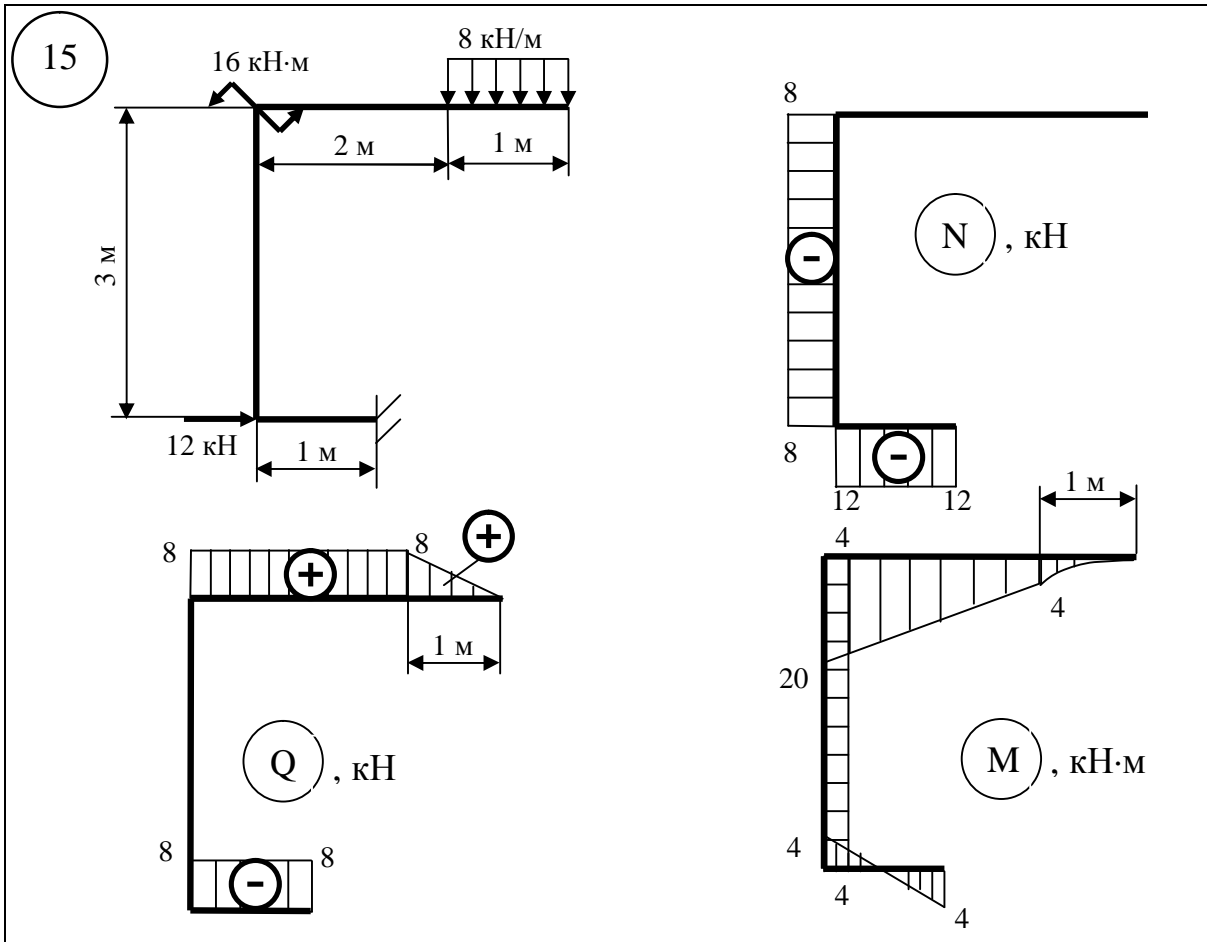


Рисунок 27, аркуш 8

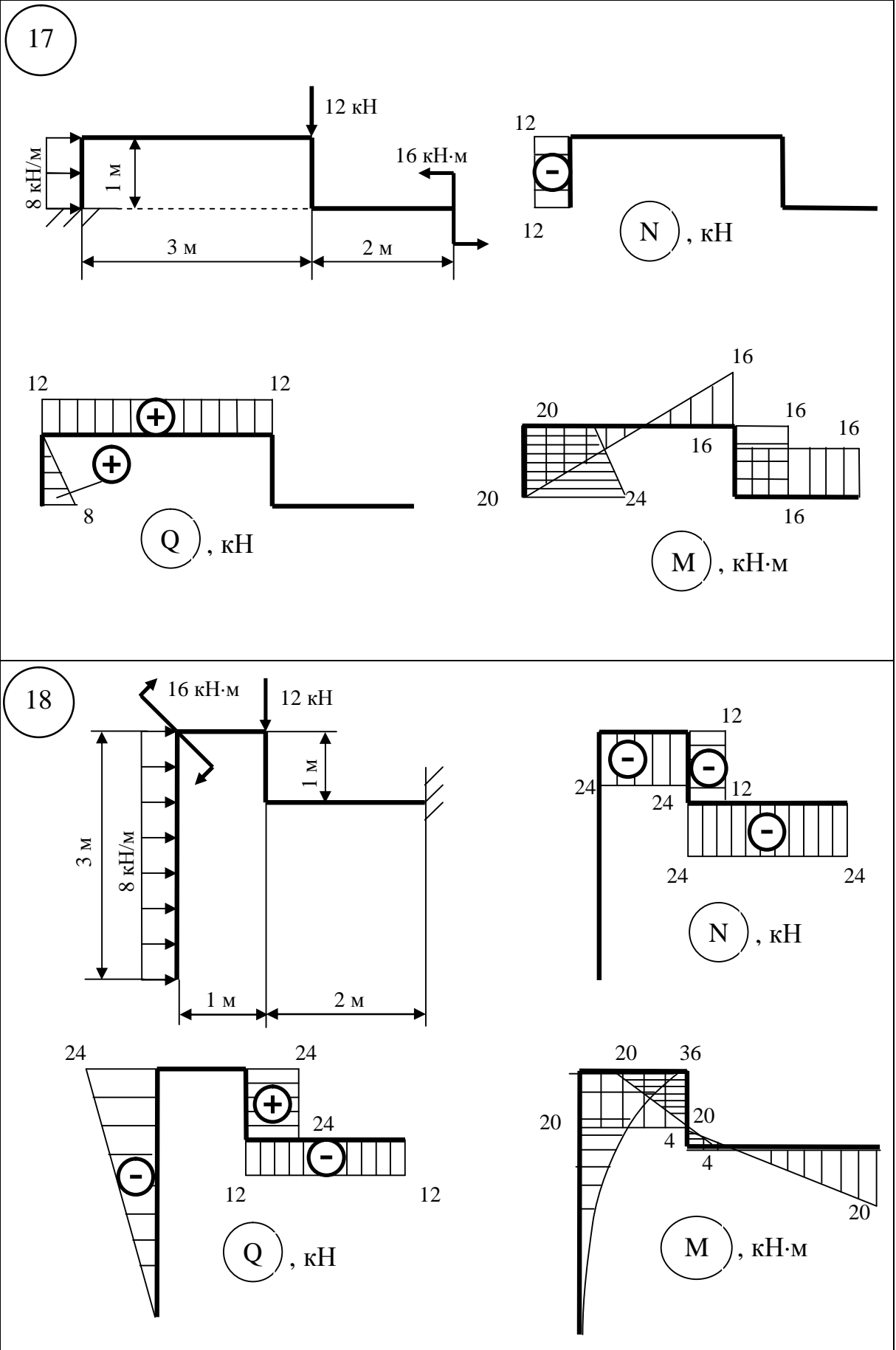


Рисунок 27, аркуш 9

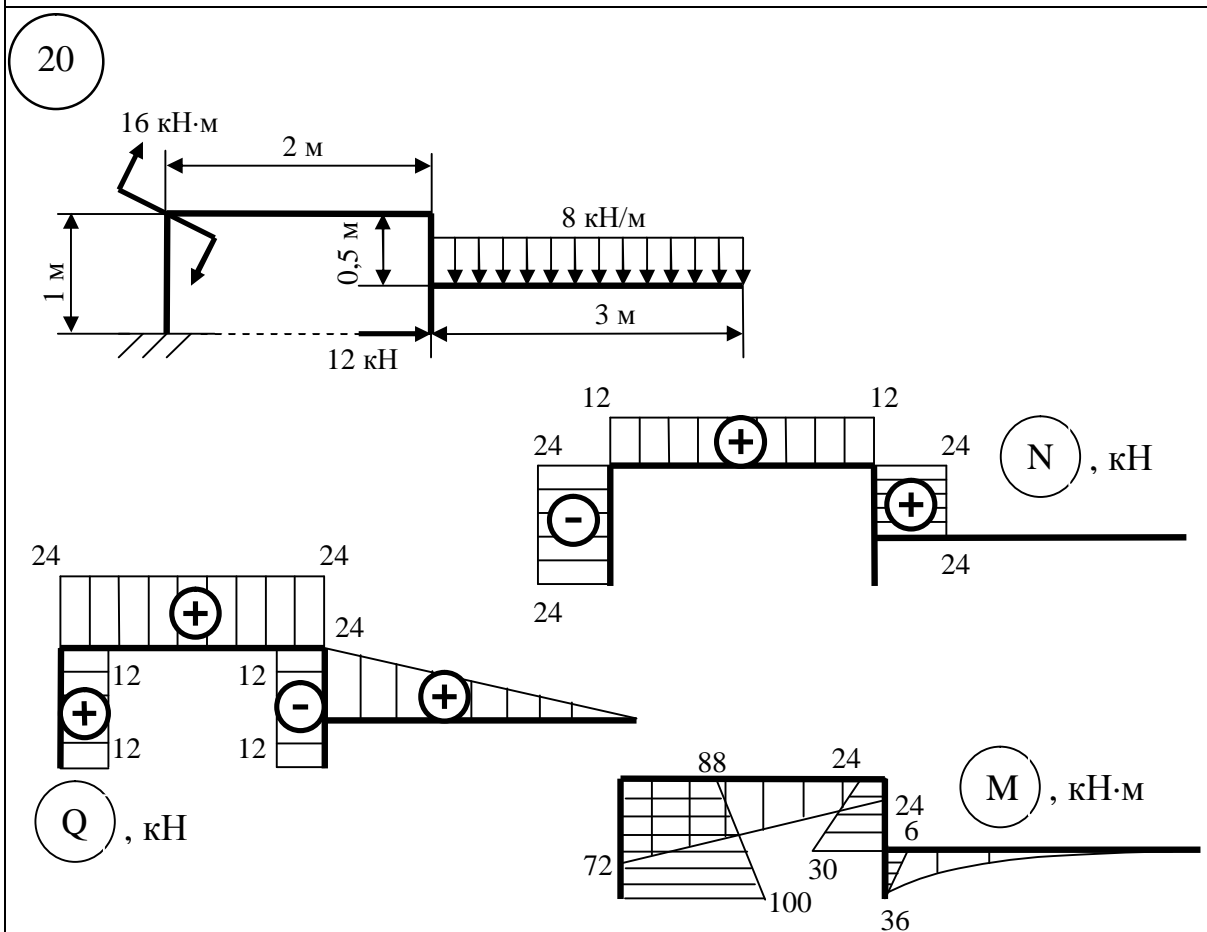
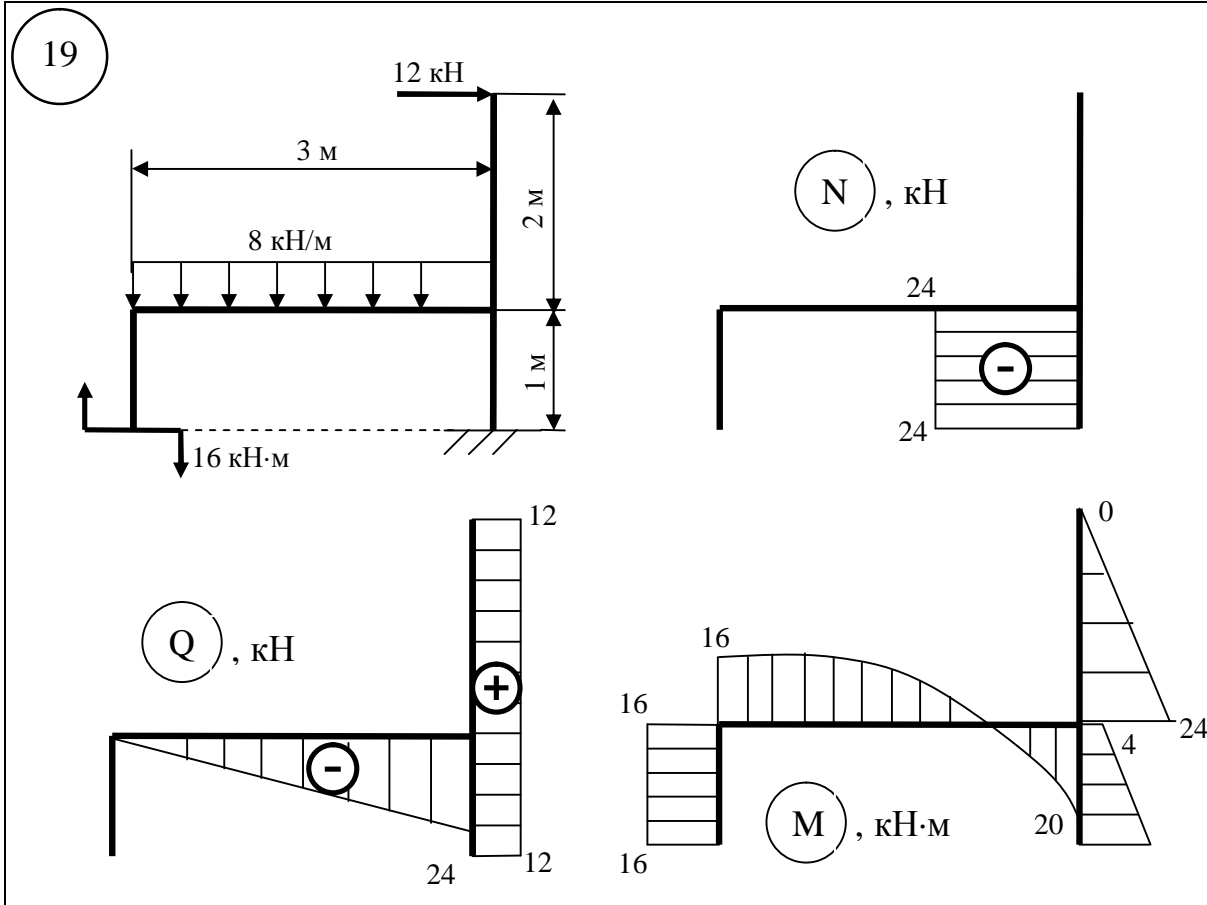


Рисунок 27, аркуш 10

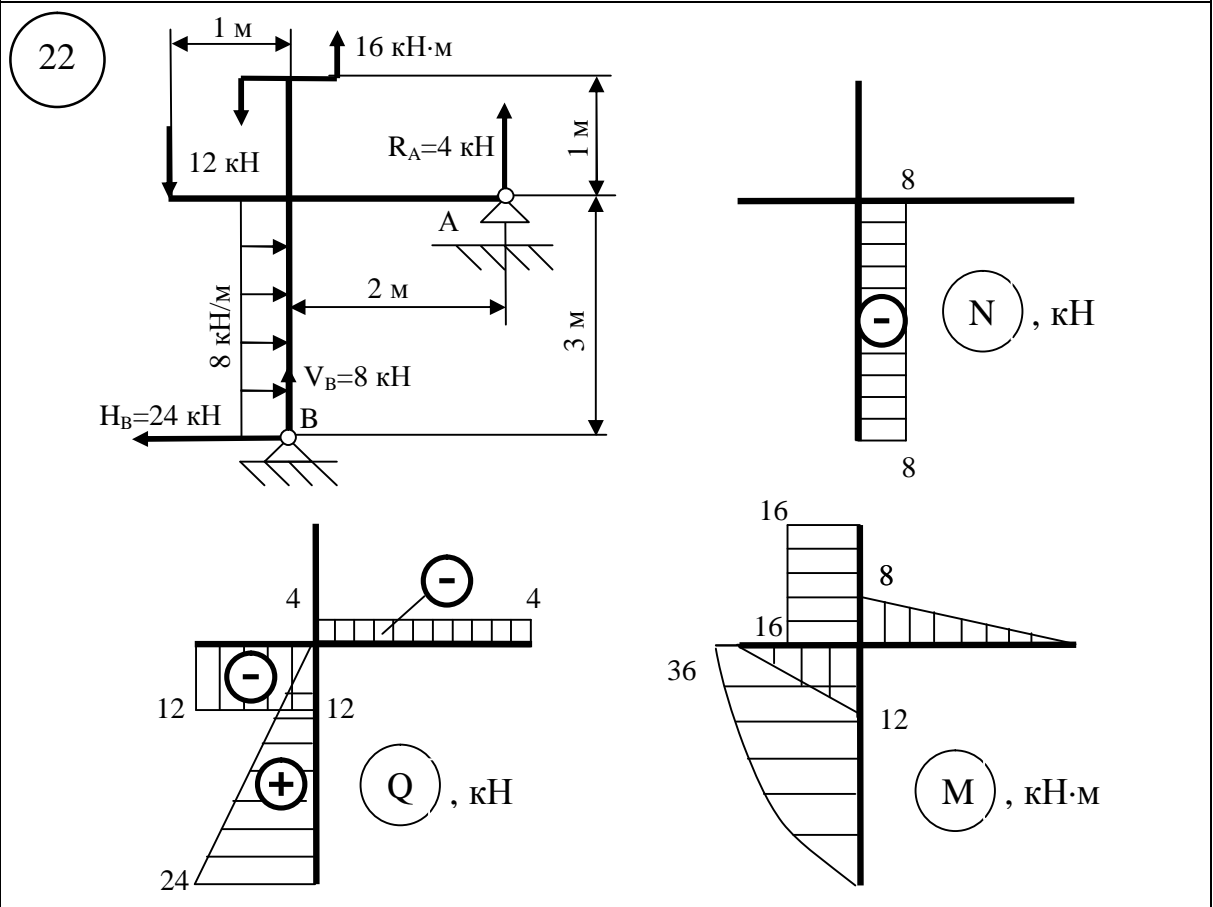
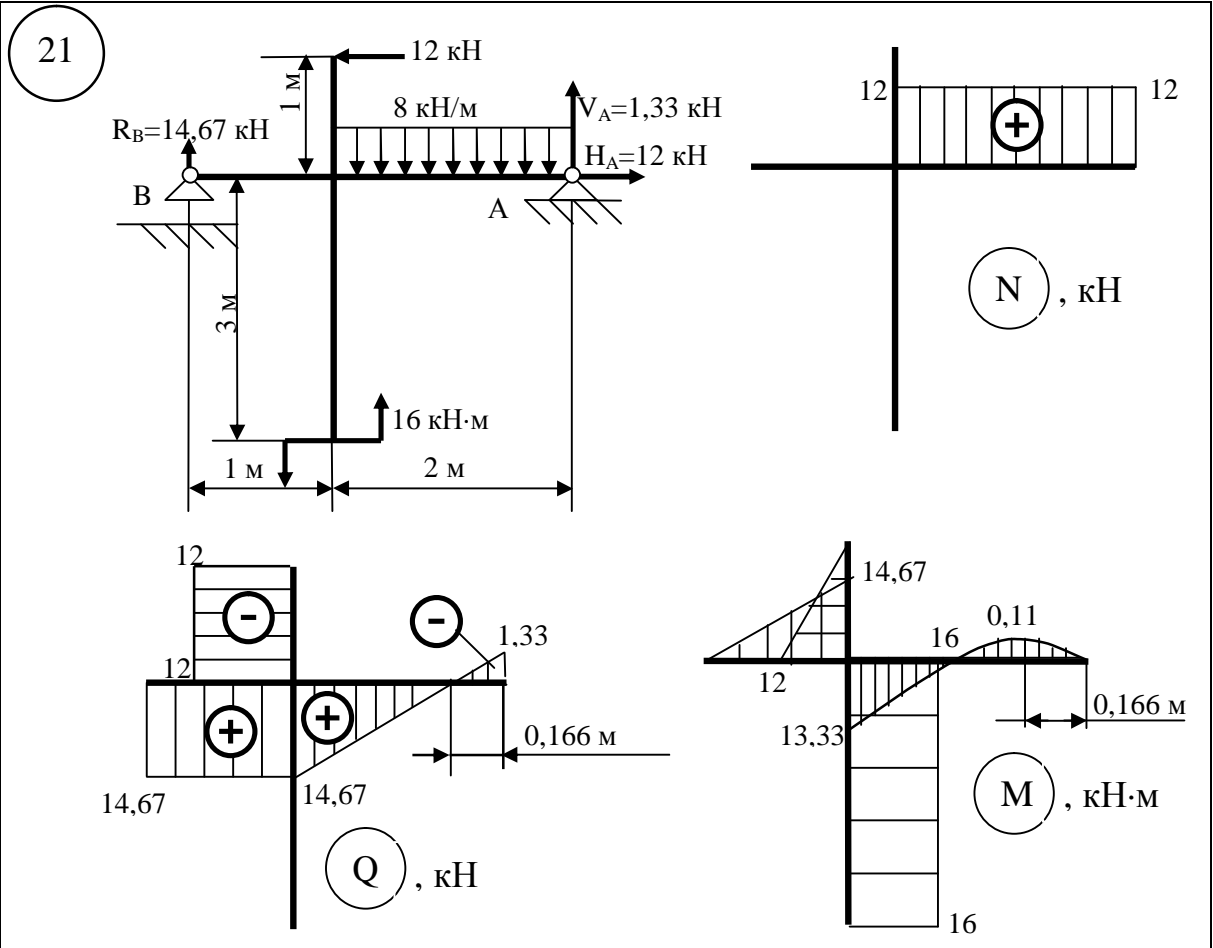


Рисунок 27, аркуш 11

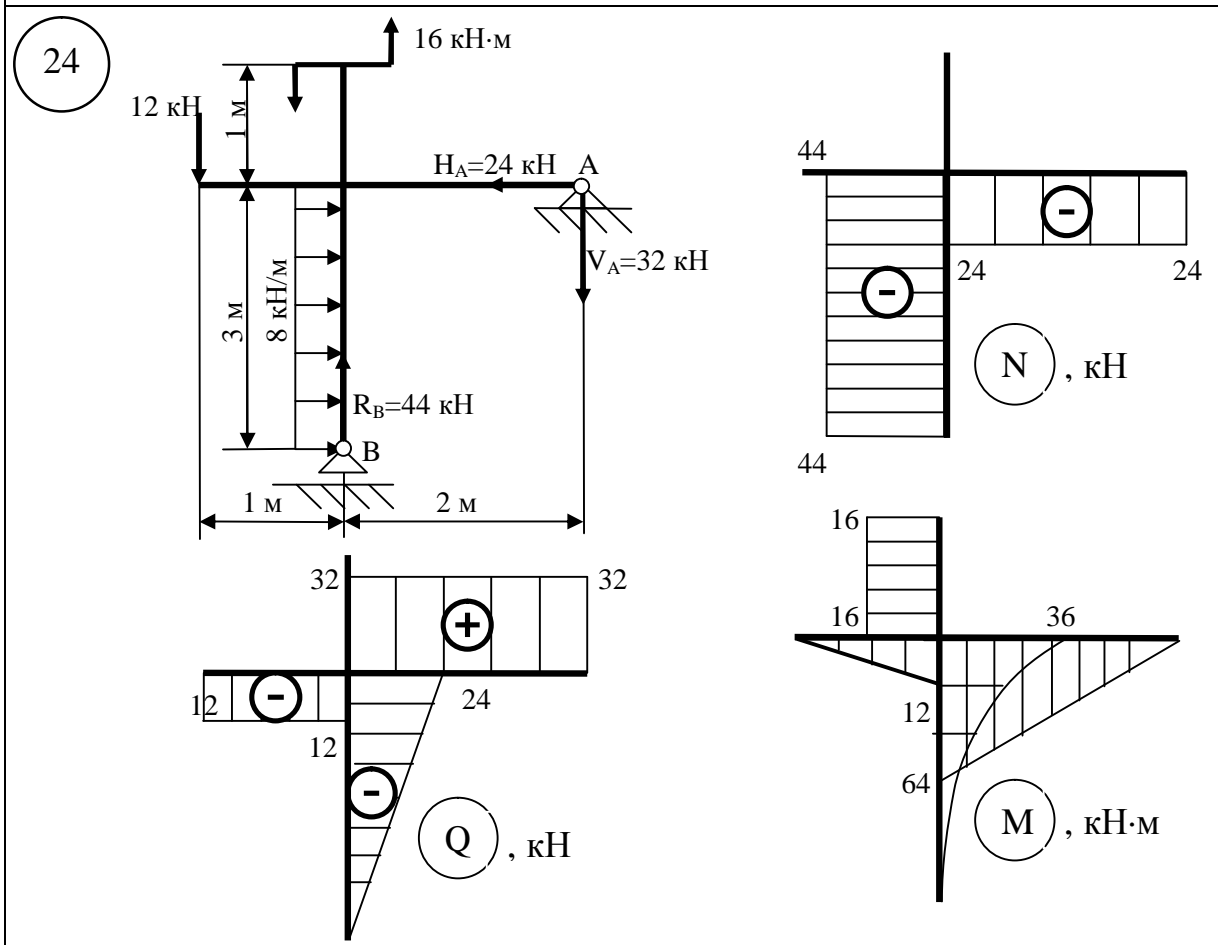
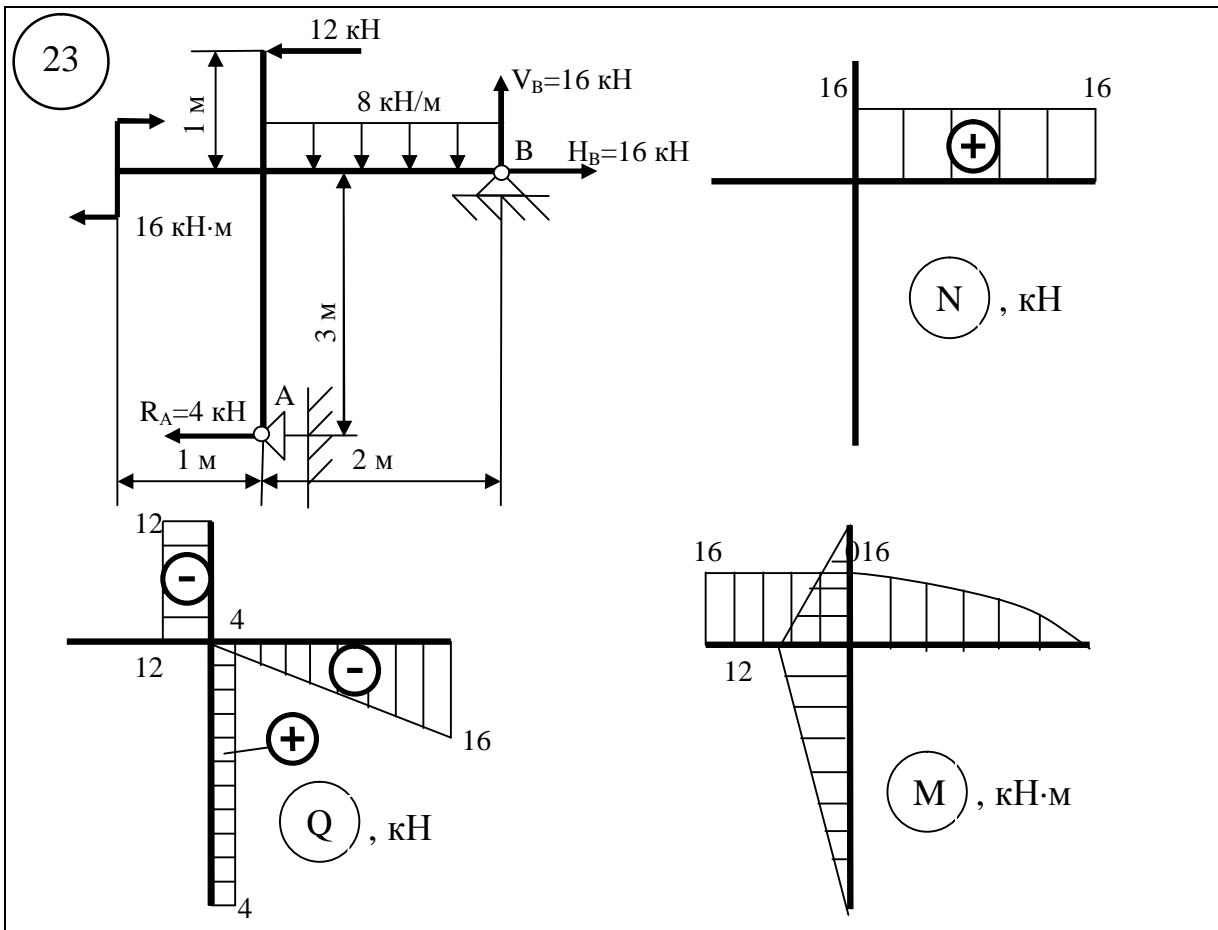


Рисунок 27, аркуш 12

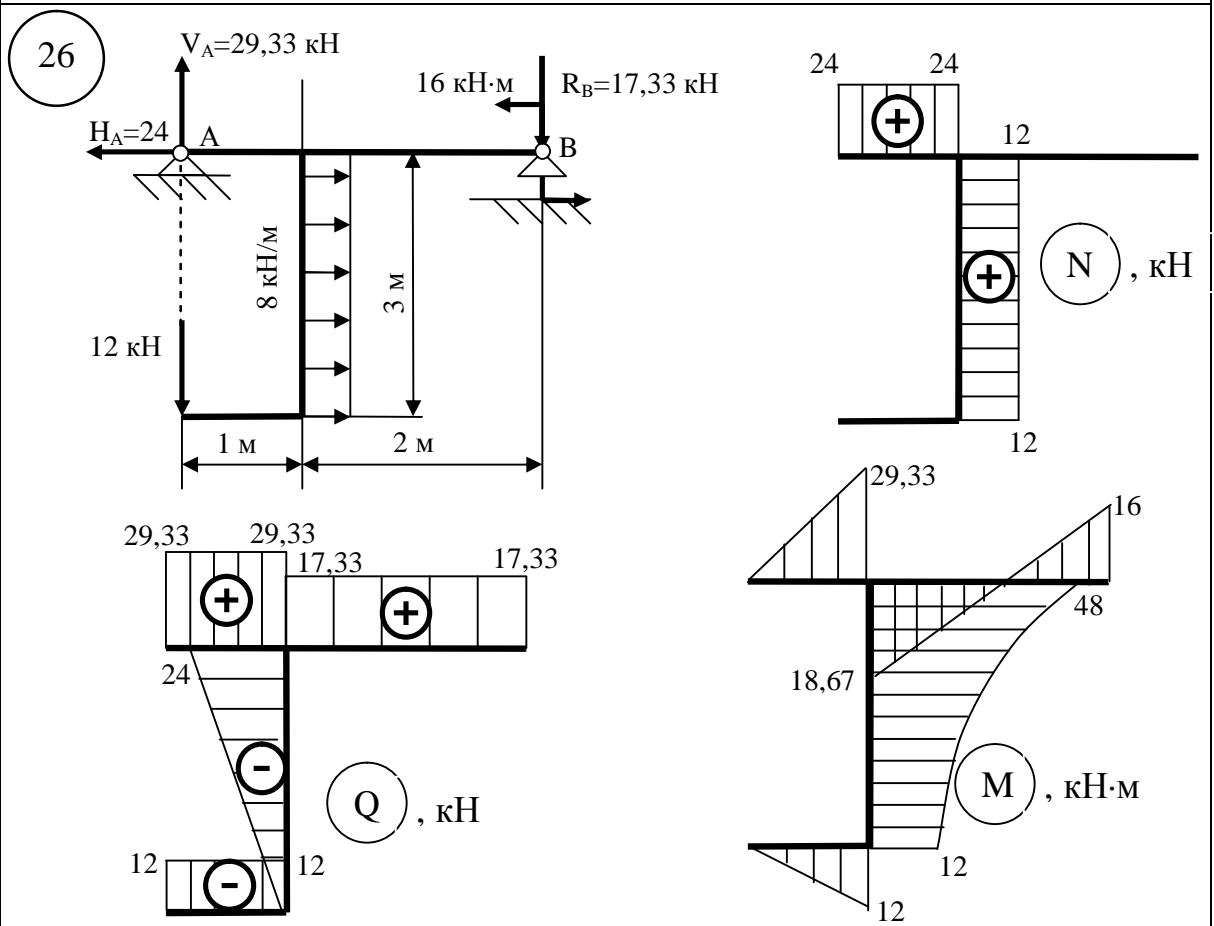
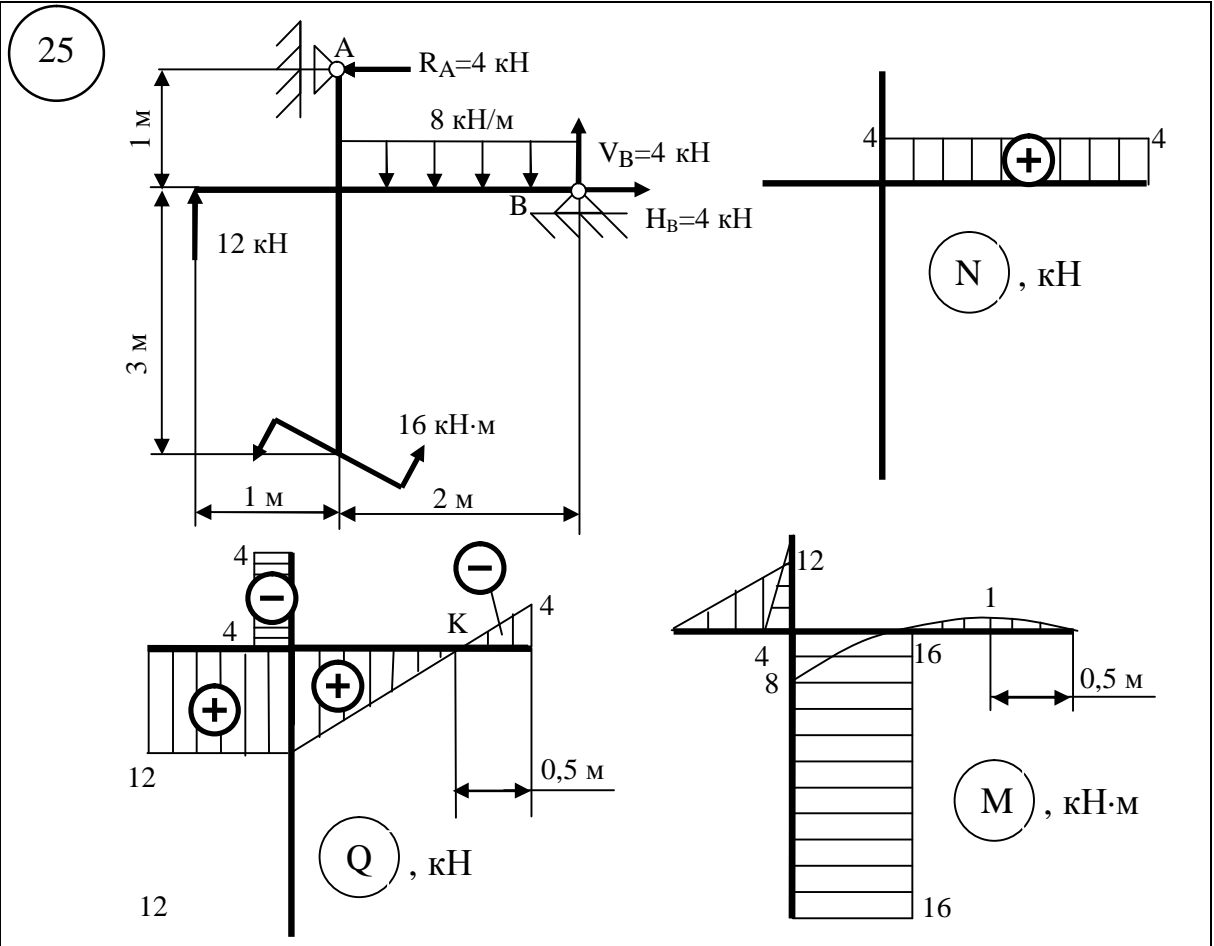


Рисунок 27, аркуш 13

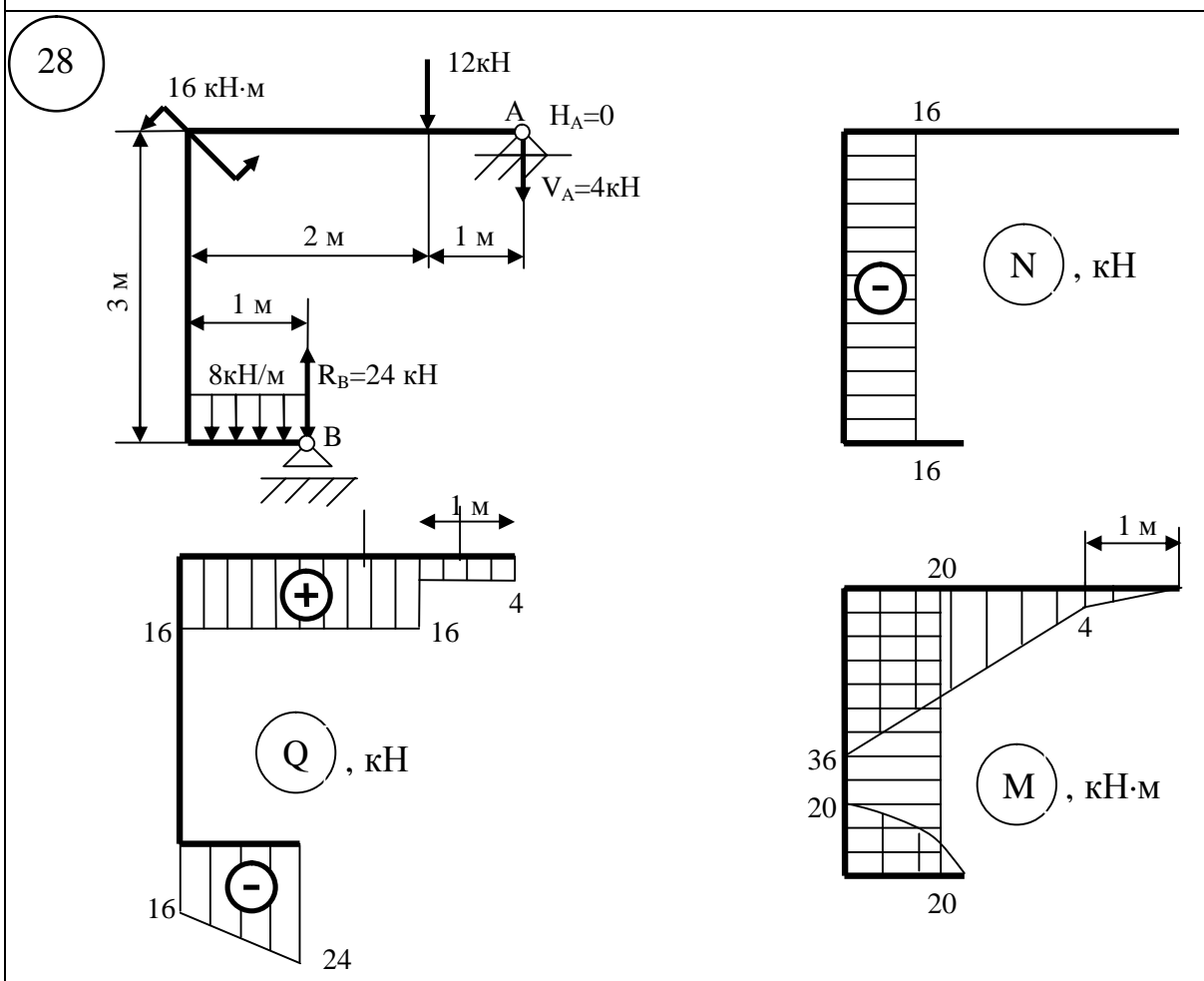
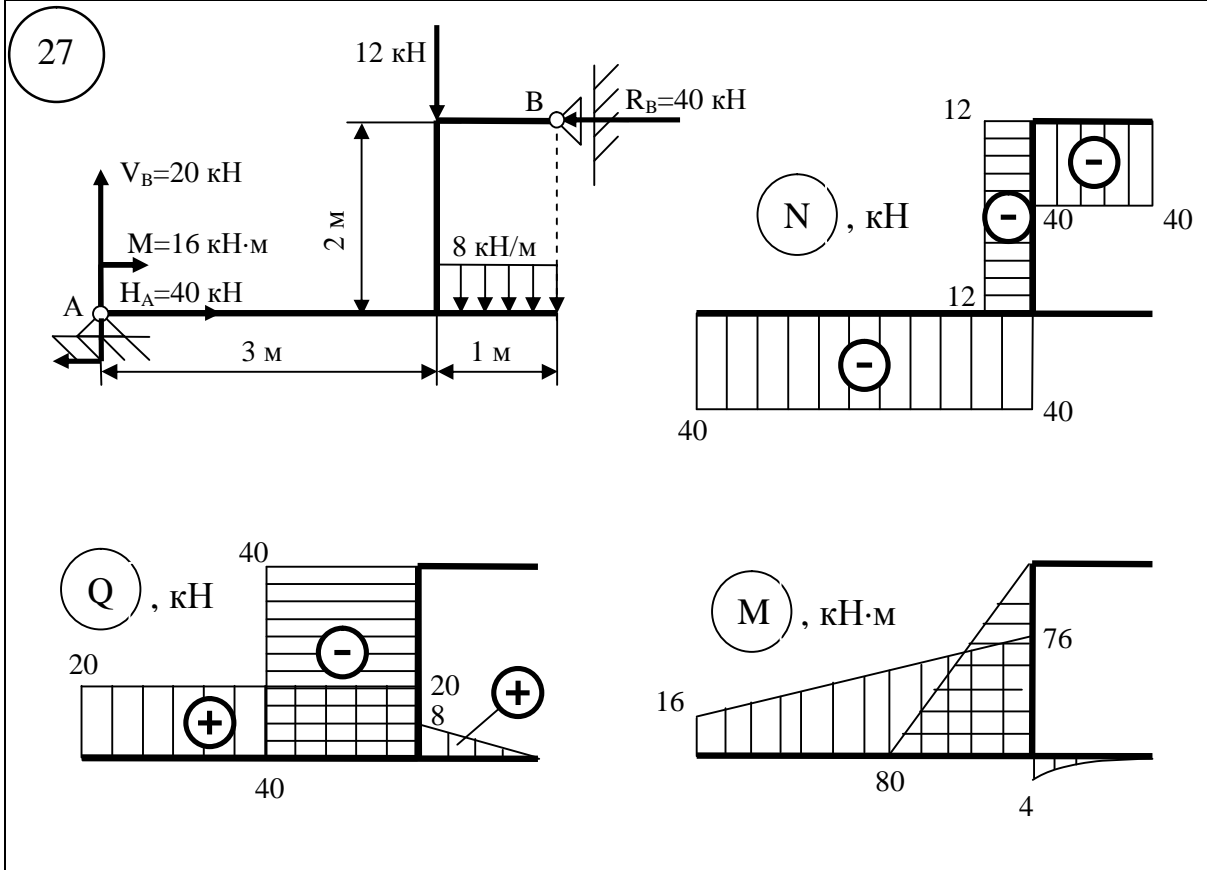


Рисунок 27, аркуш 14

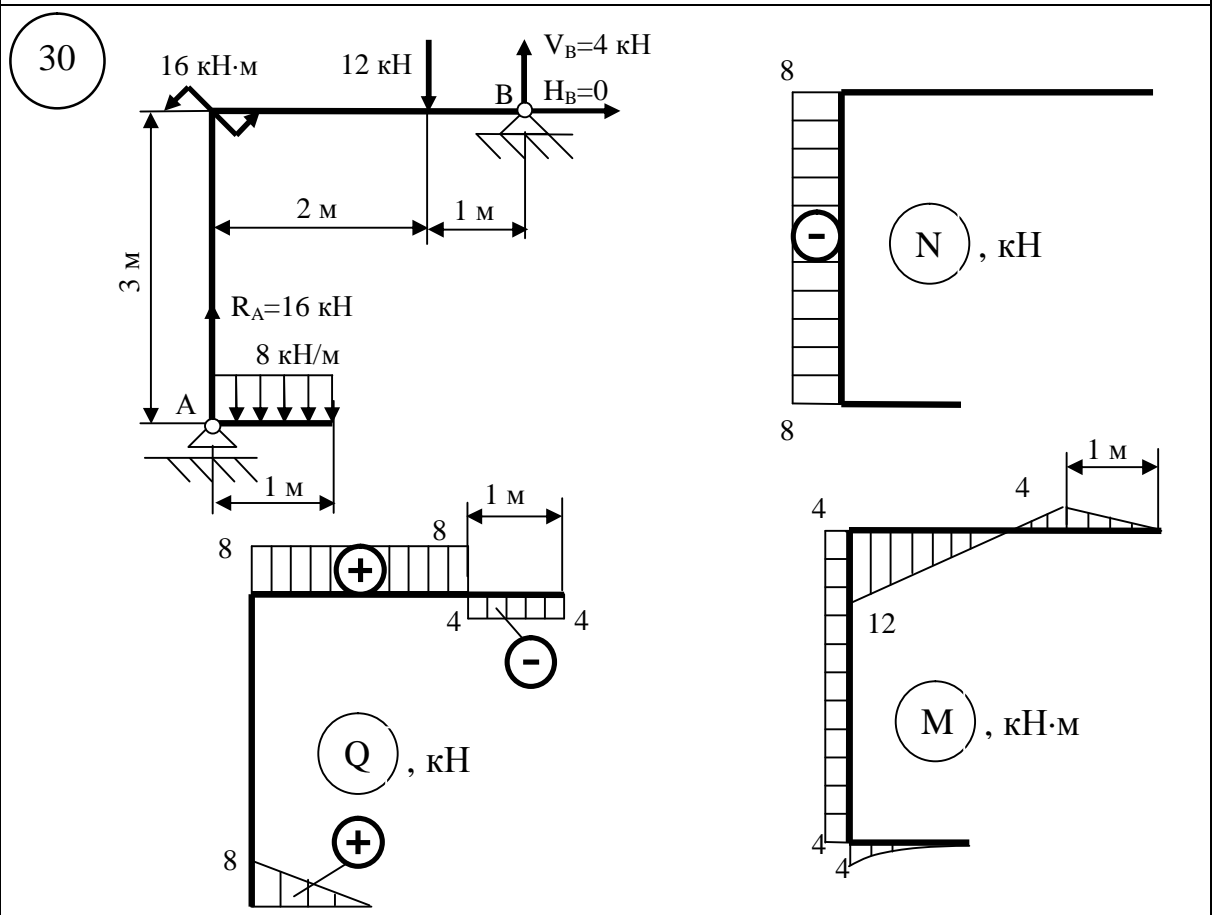
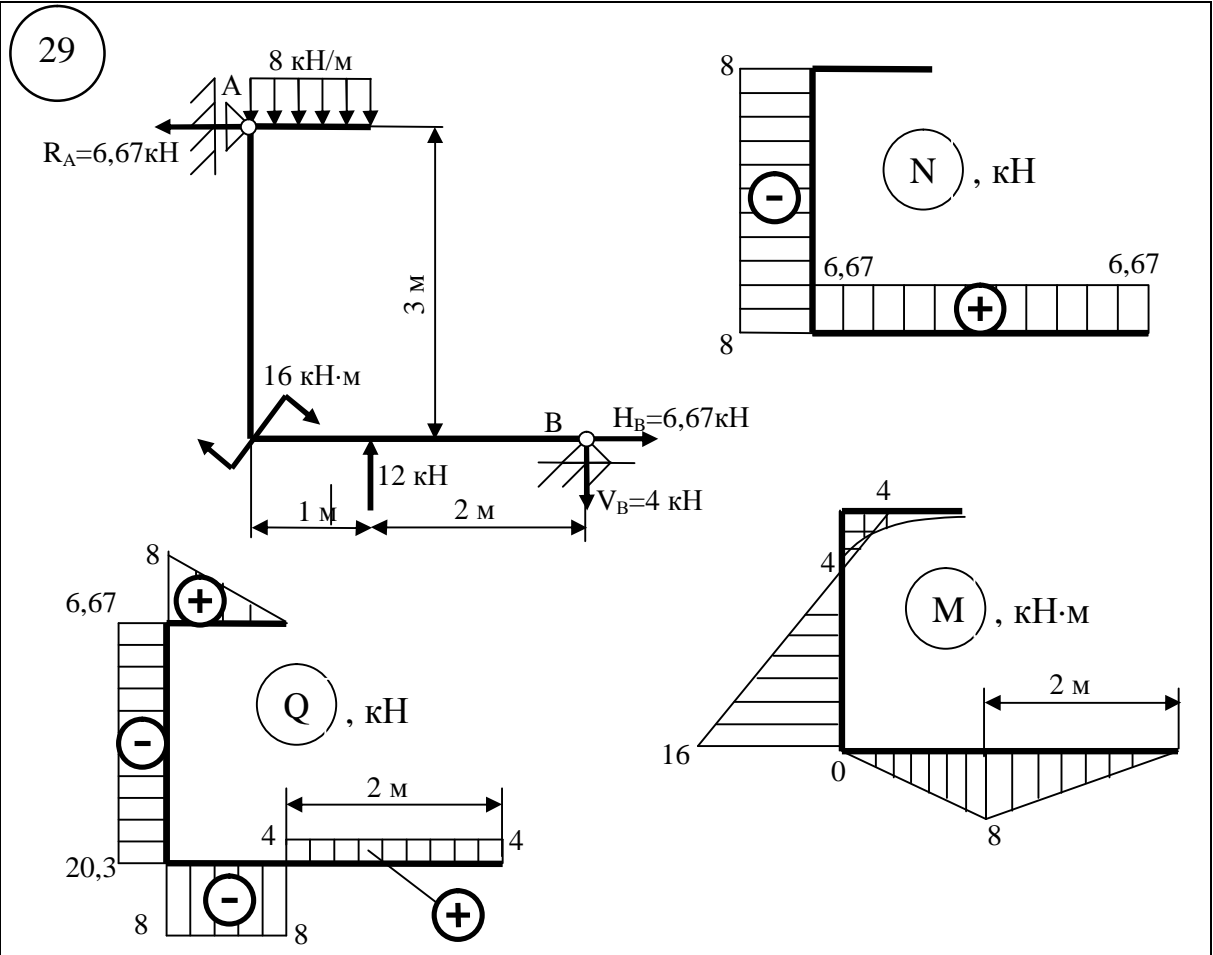


Рисунок 27, аркуш 15

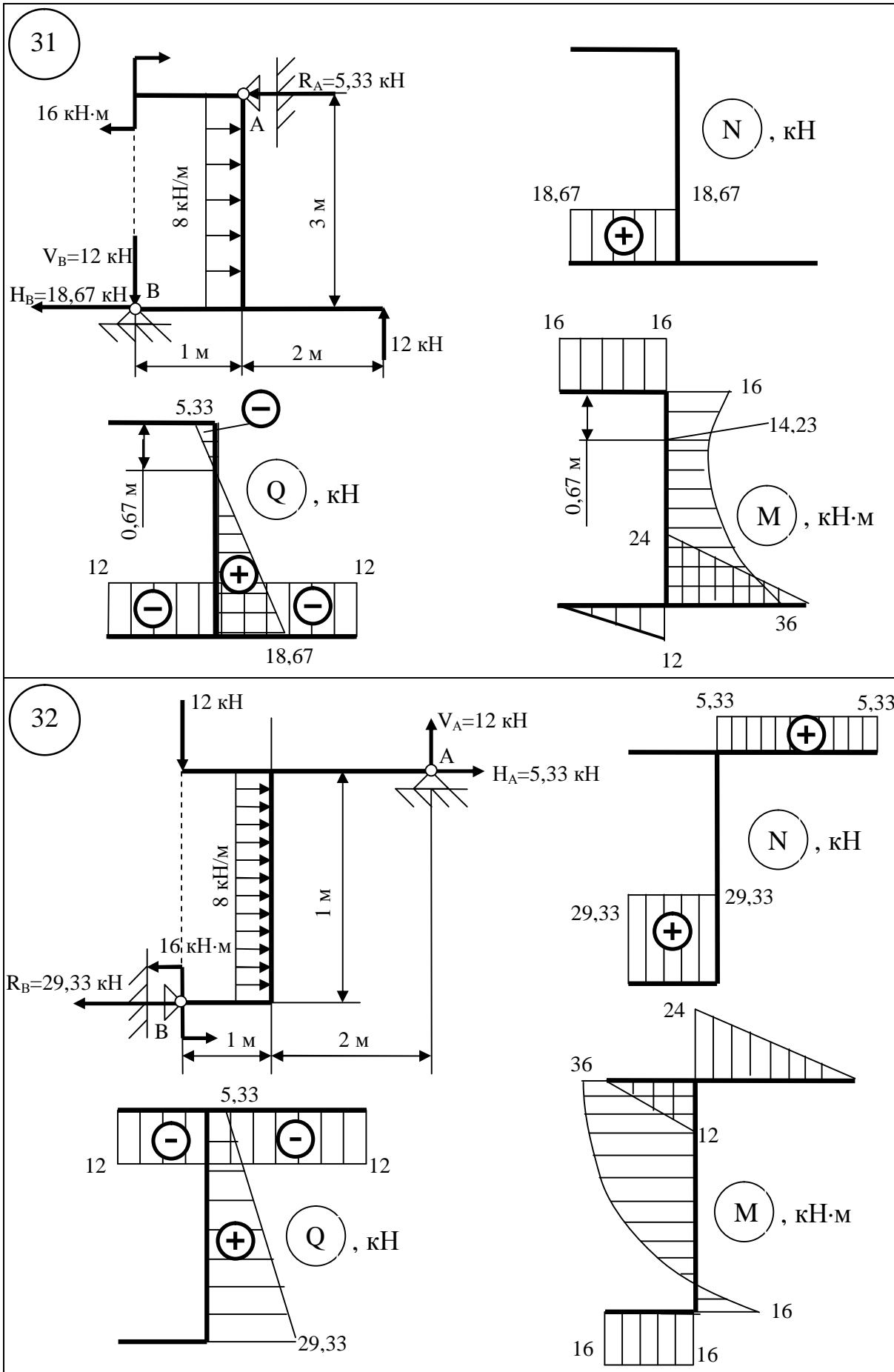


Рисунок 27, аркуш 16

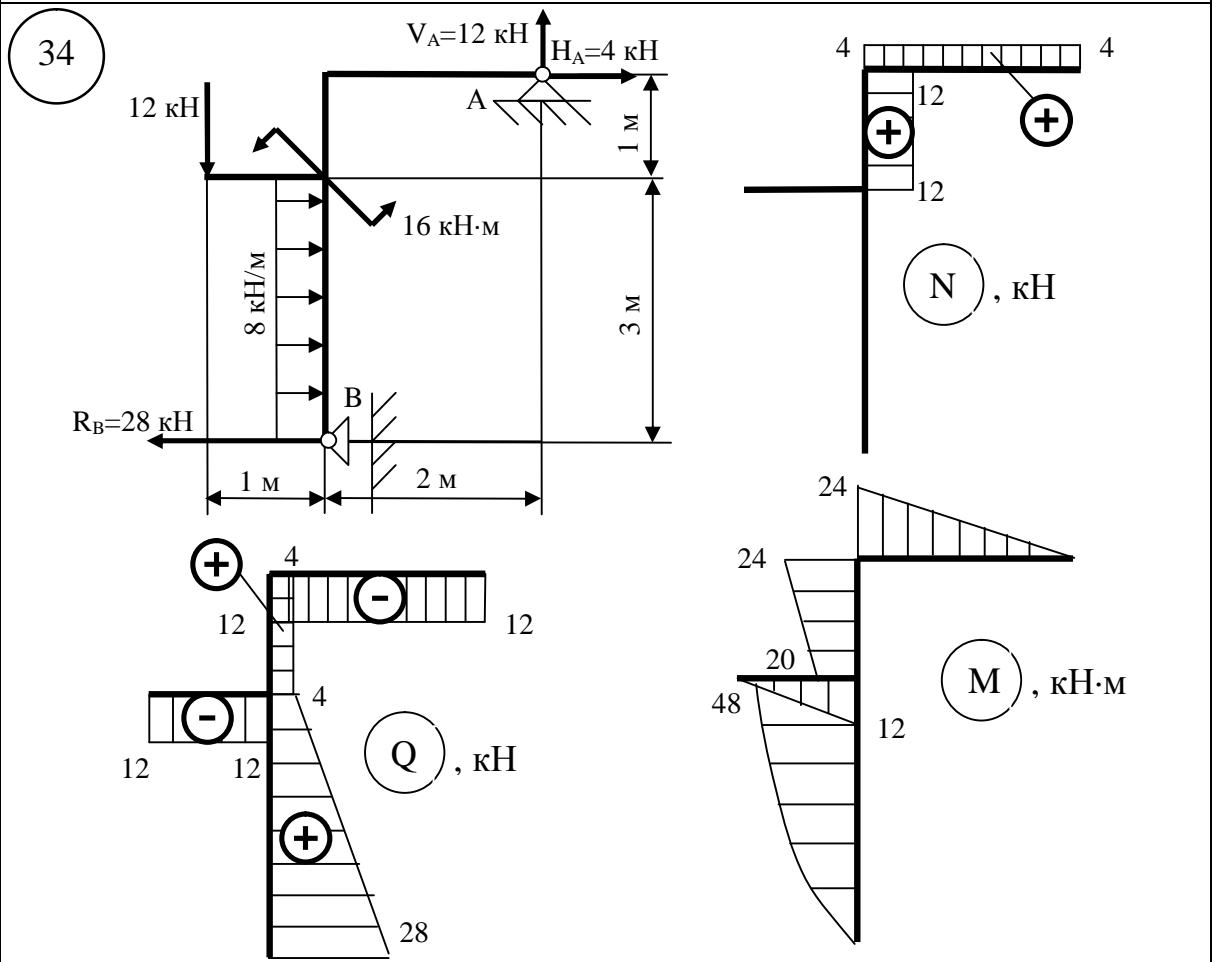
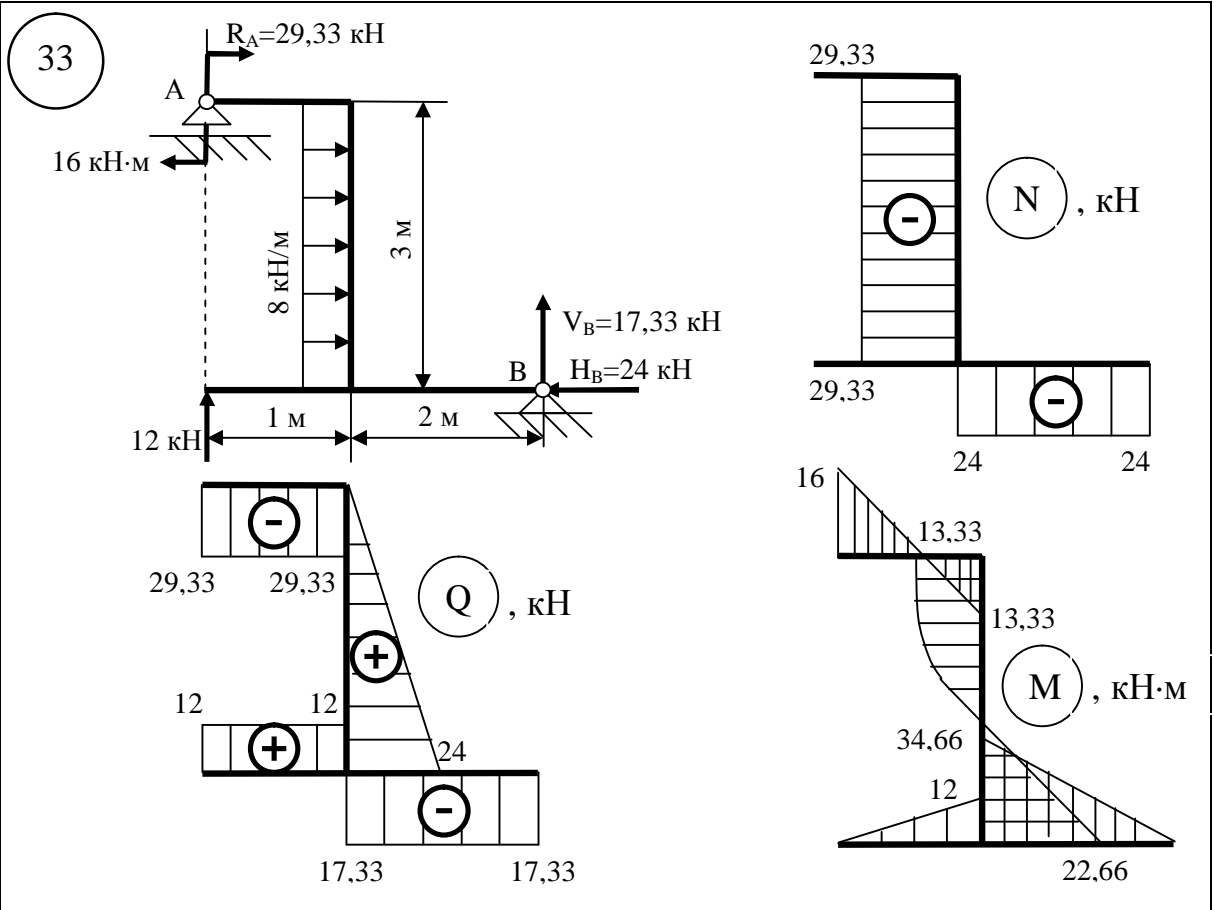


Рисунок 27, аркуш 17

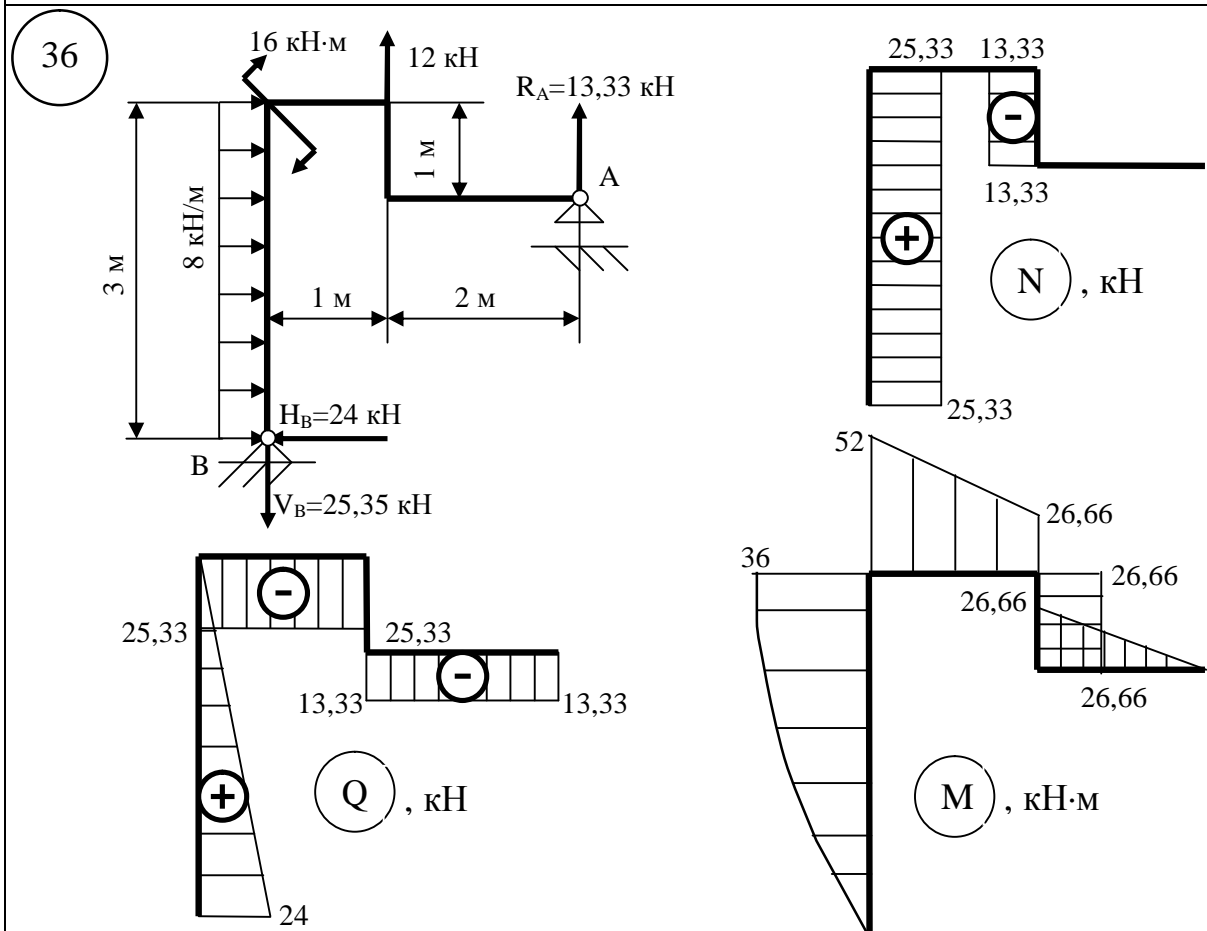
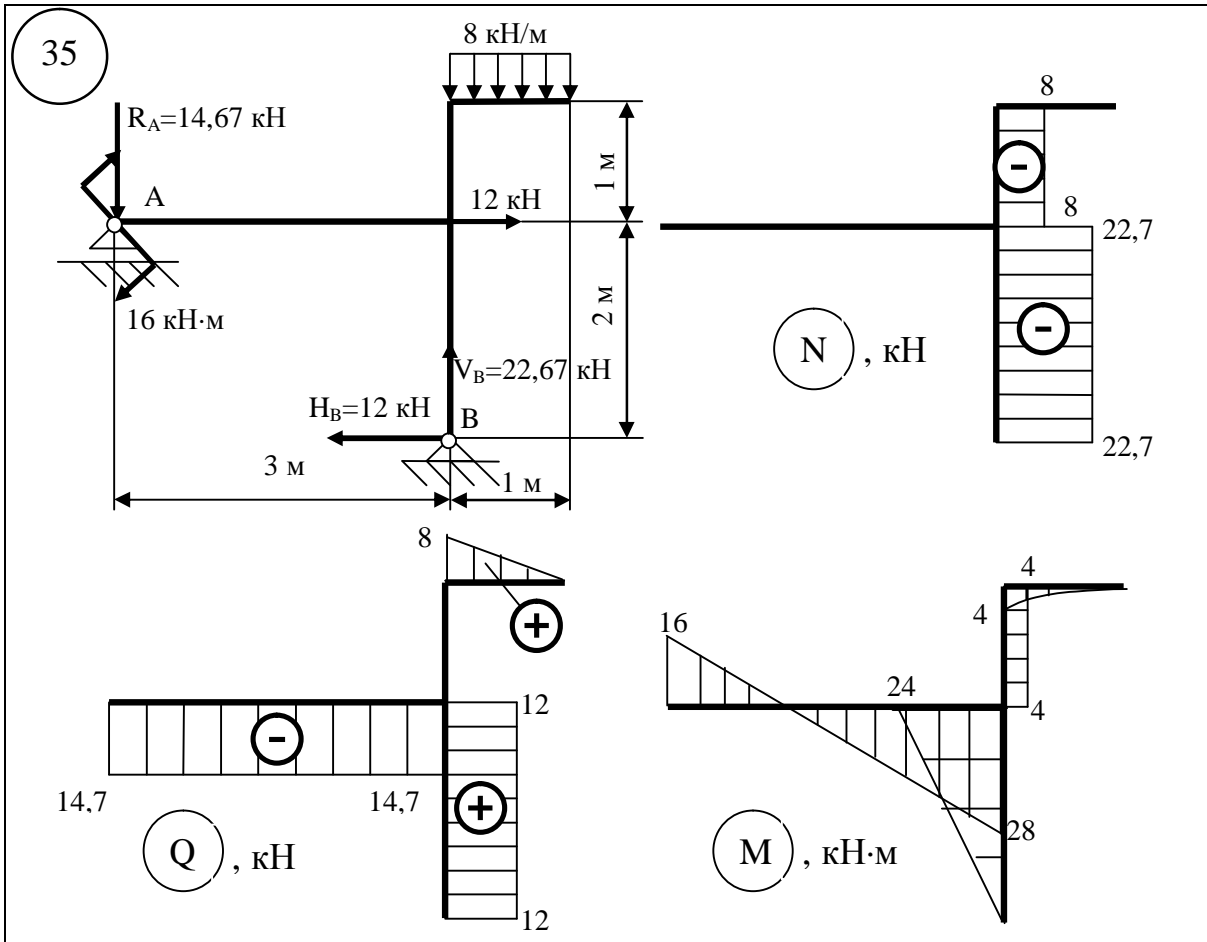


Рисунок 27, аркуш 18

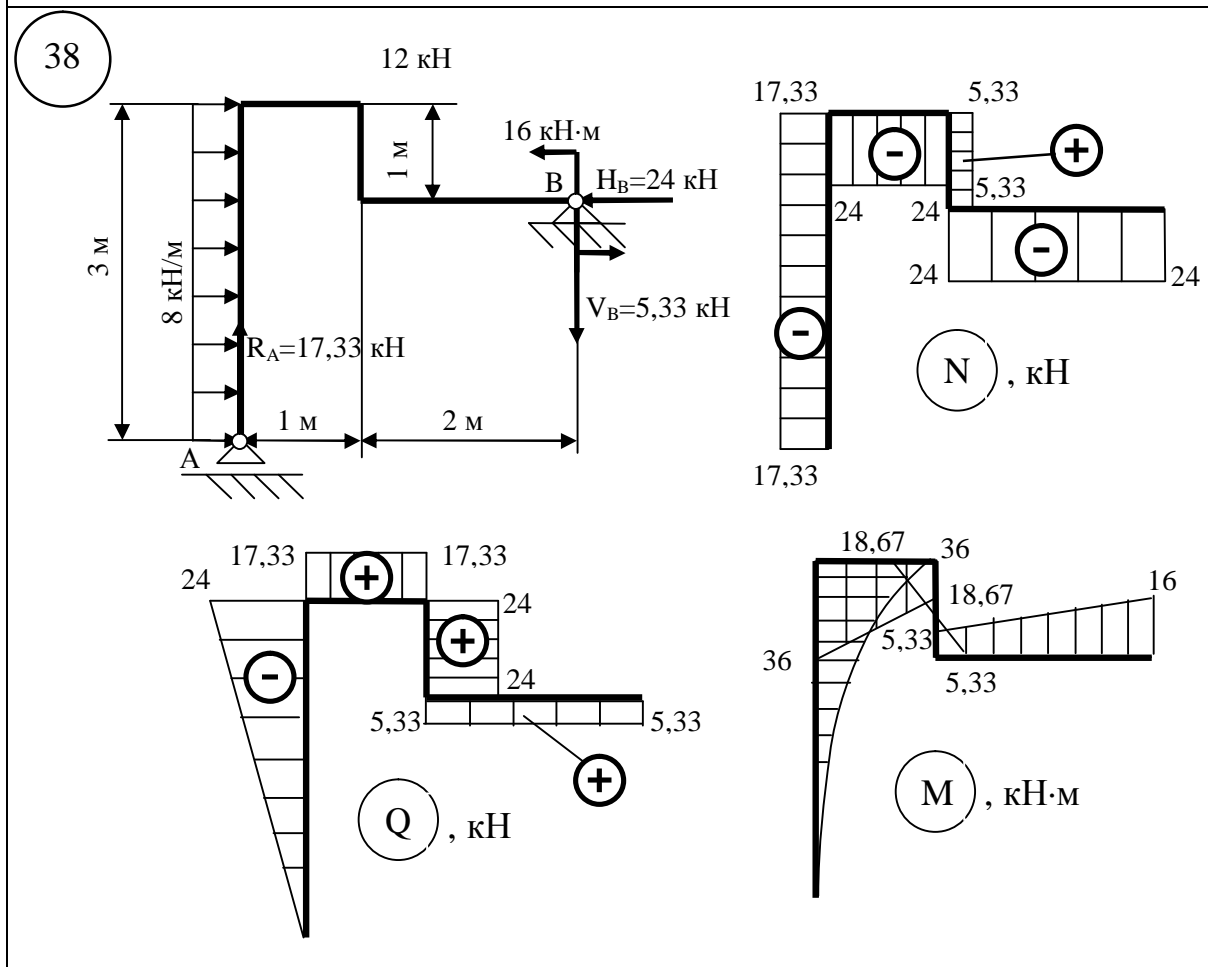
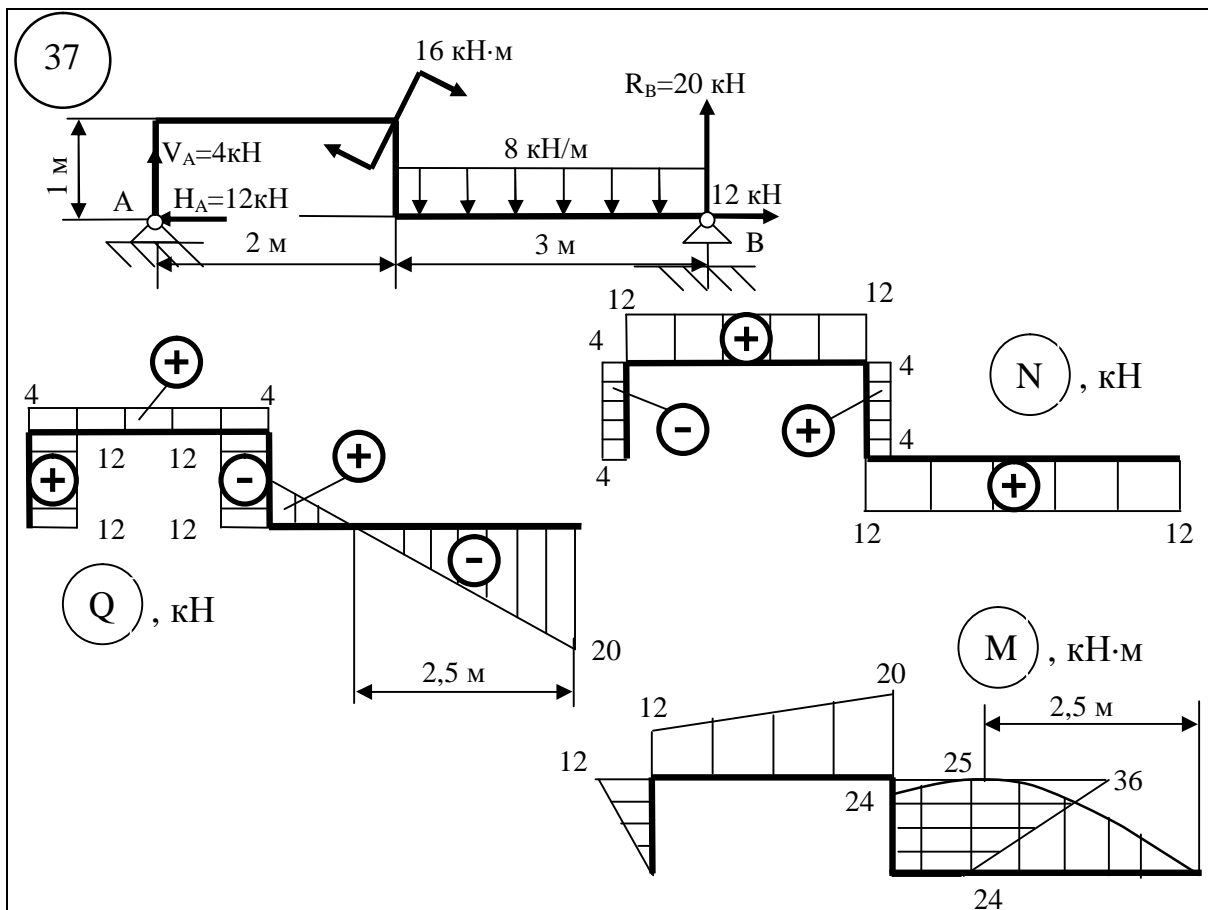


Рисунок 27, аркуш 19

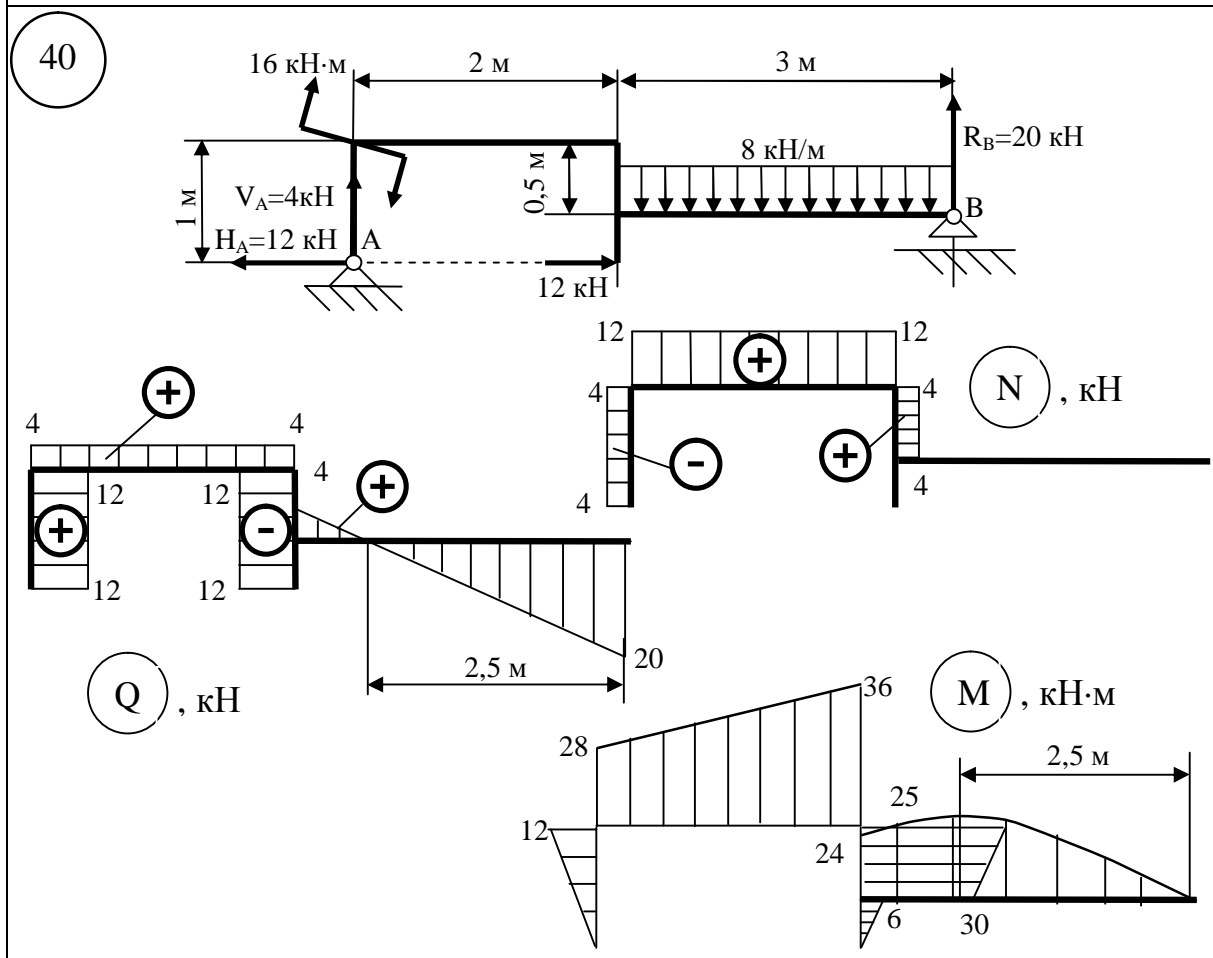
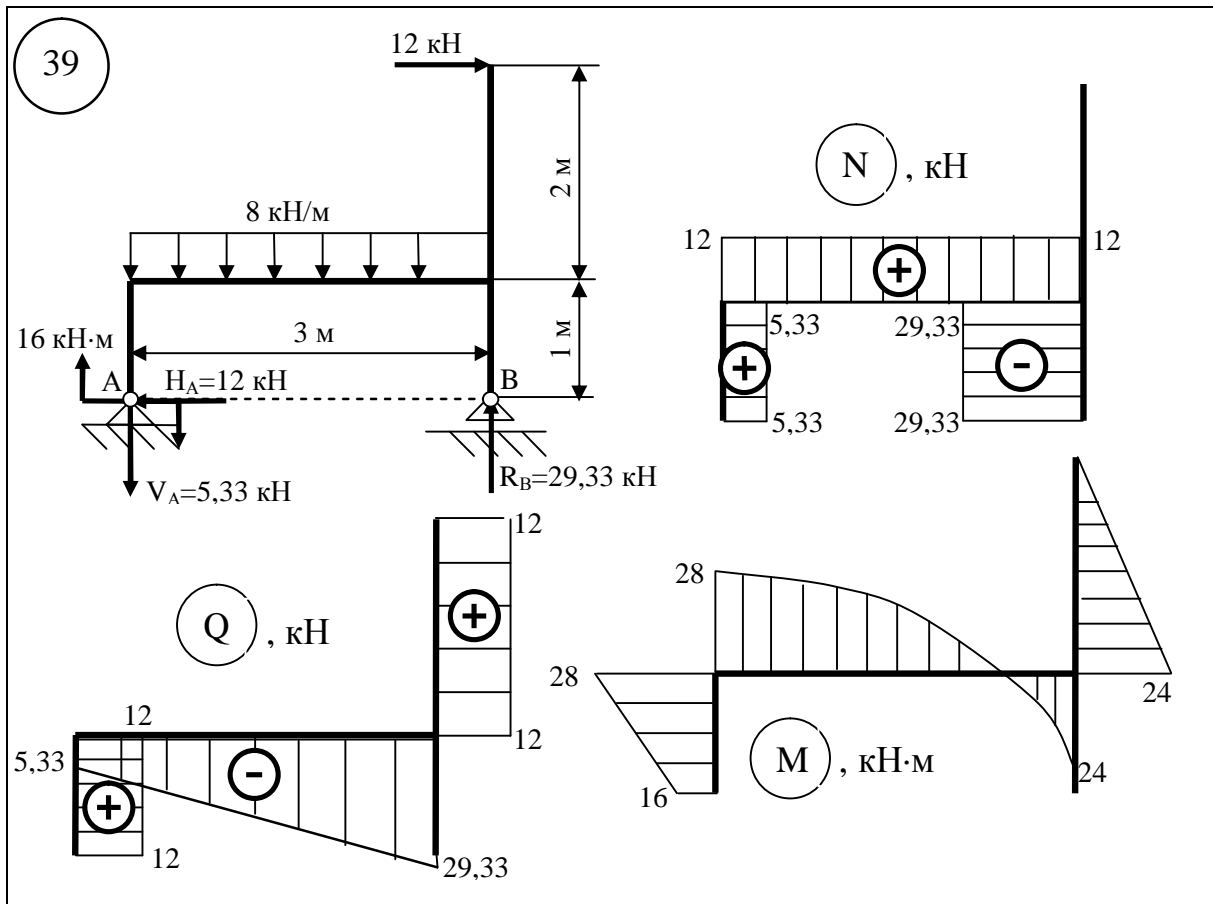


Рисунок 27, аркуш 20

3 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ БАЛКИ

3.1 Основні теоретичні відомості

Розрахунок статично невизначуваних систем методом сил

Для розкриття статичної невизначуваності найширше в машинобудуванні використовується *метод сил*. Він полягає в наступному:

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності, тобто визначаємо кількість "зайвих" зв'язків або "зайвих" зусиль (будь-яким способом): кількість зв'язків, при якій досягається кінематична незмінність, називається *необхідною* кількістю зв'язків.

Всякий зв'язок, накладений понад необхідну, називають додатковим або "зайвим". Число додаткових ("зайвих") зв'язків визначає ступінь статичної невизначуваності системи.

2 Шляхом видалення "зайвих" зв'язків замінюємо початкову статично невизначувану систему статично визначеною і кінематично незмінною.

Система, звільнена від додаткових зв'язків, називається основною.

Вибір основної системи (ОС) і, відповідно, "зайвих" невідомих залежить від розрахувача. Одній і тій же заданій системі (рис. 28, а) може відповідати декілька основних систем (рис. 28, б...г).

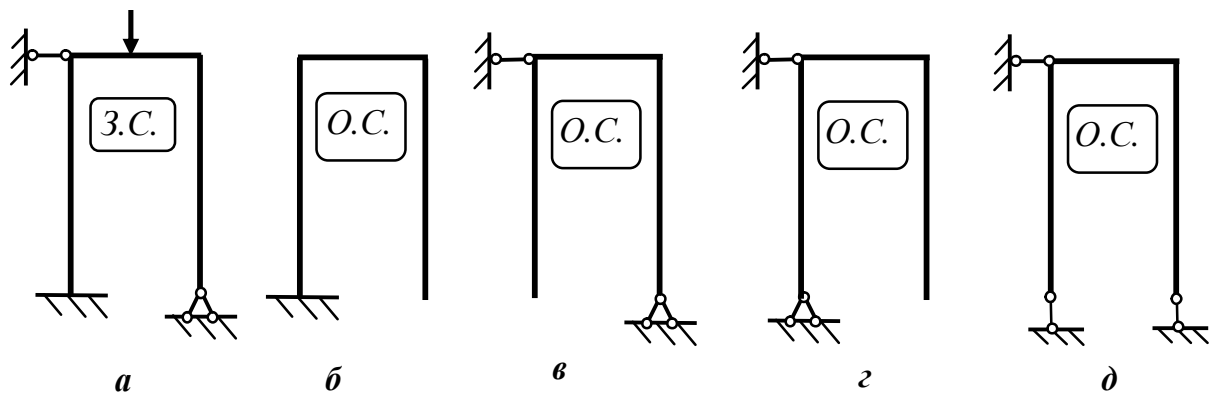


Рисунок 28

3 Навантажуємо основну систему (ОС) заданим навантаженням, а в точках прикріплення видалених зв'язків прикладаємо "зайві" невідомі зусилля, замінюючи ними дію видалених зв'язків.

*Основна система, навантажена заданими зовнішніми силами і "зайвими" невідомими силами (або "зайвими" невідомими моментами), які замінюють видалені зв'язки, називається **еквівалентною системою**.*

Фізичний сенс канонічних рівнянь (6) – рівність нулю переміщень за напрямком відкинутих зв'язків

З одержаних рівнянь визначаємо значення "зайвих" невідомих.

5 Після визначення кількості "зайвих" невідомих зусиль визначення реакцій, побудова епюр внутрішніх зусиль і розрахунки на міцність проводять звичайними способами. Розрахунок за вказаною схемою носить назву *методу сил*, оскільки як невідомі вибирають сили за напрямком видалених зв'язків.

Перемноження епюр

Розглянемо одну з ділянок балки або рами (рис. 30).

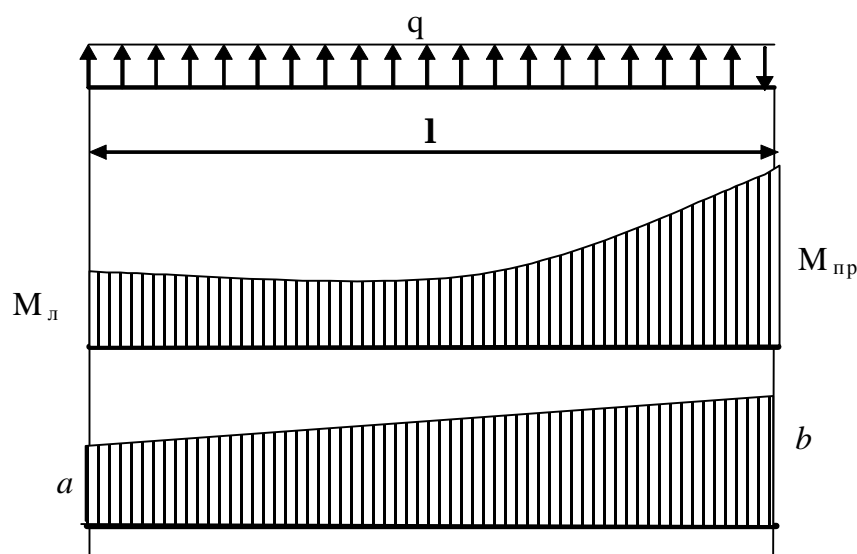


Рисунок 30

Позначимо ординати на лівому і правому кінцях ділянки відповідно $M_{л}$ і $M_{пр}$, для вантажної епюри, та a і b для одиничної.

Для перемножування епюр зручно використовувати *формулу крайніх ординат*:

$$\delta = \frac{l}{6EI_x} (2 \cdot M_{л} \cdot a + 2 \cdot M_{пр} \cdot b + M_{л} \cdot b + M_{пр} \cdot a) - \frac{q l^3}{24EI_x} (a + b), \quad (7)$$

де всі значення на епюрах та навантаженні мають знак відповідний Декартовій системі координат.

Особливості розрахунку нерозрізних балок

Нерозрізними називаються балки, що спираються більш ніж на дві опори і що не мають проміжних шарнірів

Нерозрізна балка є окремих випадком статично невизначуваної стрижньової системи, тому до неї застосовні всі положення розрахунку таких систем. Їх розрахунок, як відомо, починається з вибору *основної системи*. При її виборі необхідно прагнути до того, щоб канонічні рівняння вийшли можливо простішими. При найбільш вдалому виборі основної системи для нерозрізної балки можна добитися того, що деякі коефіцієнти канонічних рівнянь перетворяться на нулі, і при будь-якій кількості прольотів жодне рівняння не міститиме більше три невідомих.

Для розкриття статичної невизначуваності нерозрізної балки, як *основної системи*, найзручніше застосовувати систему з *врізаними шарнірами*, які замінюють “зайві” проміжні опори (рис. 31).

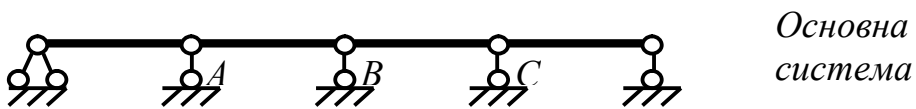


Рисунок 31

У цьому випадку балка розбивається шарнірами на окремі, незалежні балки, кожна з яких деформується самостійно. При цьому їх кути нахилу (рис. 32, а) зліва і праворуч від шарніра, нерівні ($q_{\text{лів}} \neq q_{\text{пр}}$).

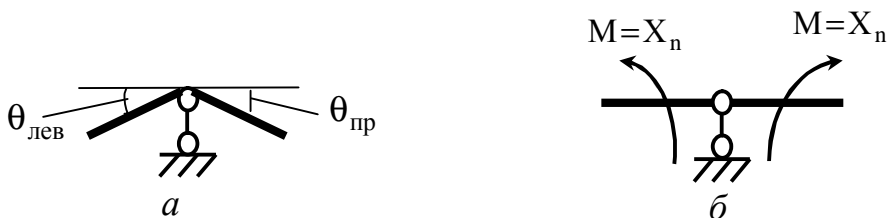


Рисунок 32

Оскільки постановкою шарніра ліквідовується згинальний момент в даному перерізі балки, то для відновлення втрачених зв'язків прикладаємо до кожної опори два рівних і протилежно направлених моменти $M = X_n$ (див. рис. 32, б), таких, що їх дія компенсує вплив віддалених шарніром частин балки.

Рівняння переміщень в цьому випадку є рівністю нулю взаємного кута повороту перерізів правої і лівої балки, що примикають до шарніра:

$$D_n = q_{\text{лів}} + q_{\text{пр}} = 0. \quad (8)$$

При такому виборі основної системи дія заданого навантаження розповсюджується тільки на проліт, де вона прикладена. Тому для наочності проміжні опори часто зображають спареними (рис. 33).



Рисунок 33

Оскільки всі балки роз'єднані, то навантаження якого-небудь прольоту не робить впливу на сусідні прольоти. Таким чином, *еквівалентна система* буде рядом простих балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами $M_1 = X_1; M_2 = X_2 \dots M_n = X_n$, що замінюють відкинутий зв'язок між сусідніми прольотами.

3.2 Приклади побудови епюр

Приклад 1

Розкрити статичну невизначуваність балки, побудувати епюри, поперечних сил та згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити прогин в точці К та кут повороту вузла А.

Розв'язання:

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій чотири (див. рис. 34, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана конструкція один раз статично невизначувана.

2 Для нерозрізної балки як основну систему краще вибрати таку ж балку, але з врізаним шарніром на проміжній опорі (рис. 34, б). До основної системи прикладаємо задане навантаження і моменти X_1 – одержуємо еквівалентну систему (рис. 34, в).

3 Врізавши шарнір на проміжній опорі, одержали дві незалежні балки. До них прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 34, г), визначаємо реакції опор і будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 34, д).

4 Знімаємо задане навантаження, до ненавантаженої системи прикладаємо моменти $X_1=1$ і від них будуємо епюру згинальних моментів (рис. 34, е).

5 Складаємо канонічне рівняння

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

6 Коефіцієнти рівняння δ_{11} та Δ_{1P} визначаємо методом Мору шляхом “перемножування” відповідних епюр.

“Перемноживши” \bar{M}_1 на \bar{M}_1 , одержимо δ_{11} .

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{5}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_X}.$$

“Перемноживши” епюри \bar{M}_1 на M_P , одержимо Δ_{1P} .

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & + \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 1 \cdot 35) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_X}(0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 18 \cdot 1) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_X}(1 + 0,6) + \\ & + \frac{3}{6EJ_X}(2 \cdot 18 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_X}(0,6 + 0) = \frac{98,2}{EJ_X}. \end{aligned}$$

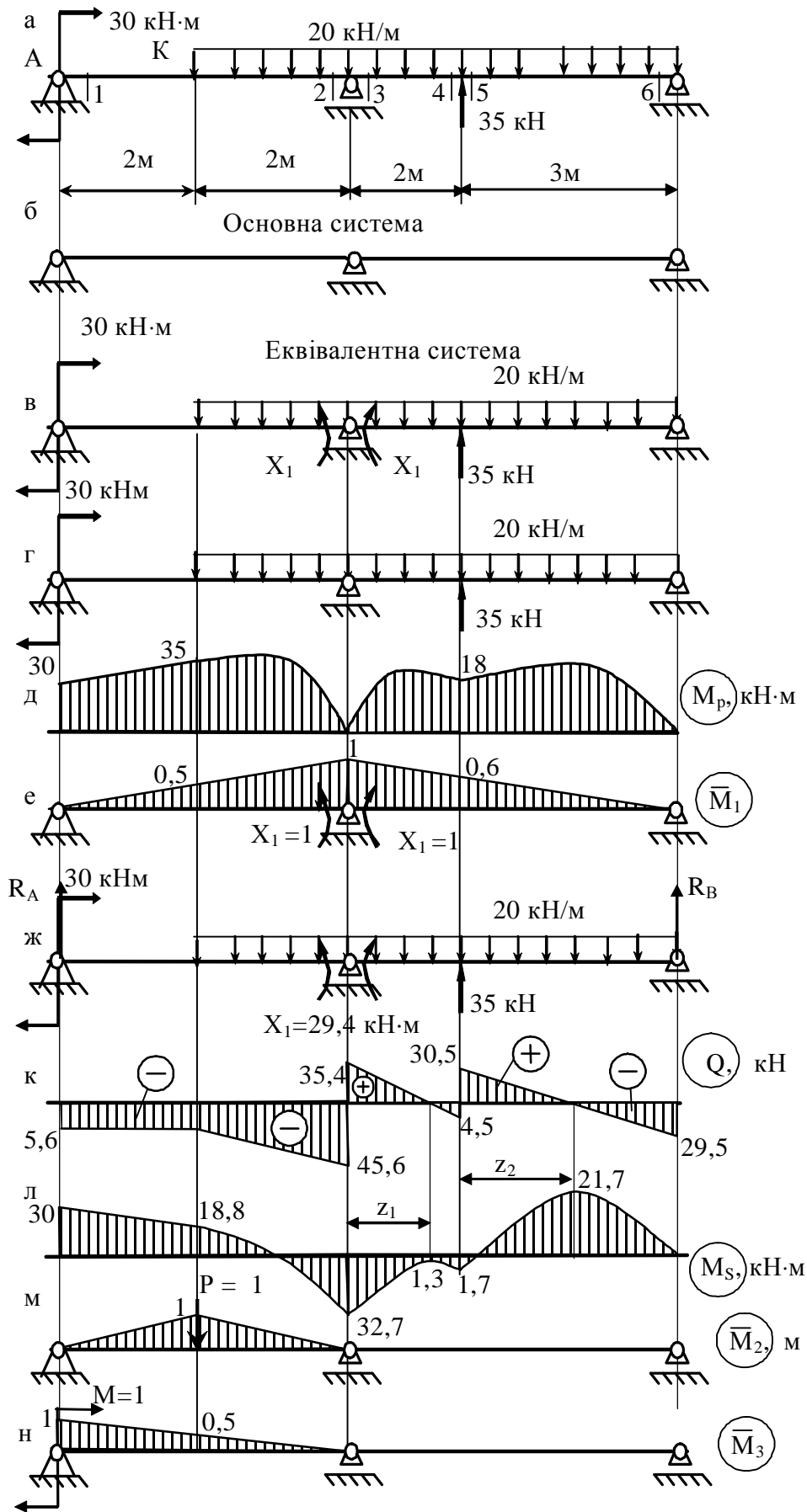


Рисунок 34

7 Підставляємо знайдені коефіцієнти в канонічне рівняння, вирішуючи яке знаходимо X_1 :

$$\frac{3}{EJ_X} X_1 + \frac{98,2}{EJ_X} = 0, \text{ звідки } X_1 = -\frac{98,2}{3} = -32,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

8 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис. 34,ж, рис 35,а, рис. 36,а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис.35,б і рис 36, б) і згинальних моментів (рис.35,в, рис 36,в). Зістикувавши за ділянками відповідно епюри Q і M , одержимо остаточні епюри (рис. 34, к, рис. 34, л).

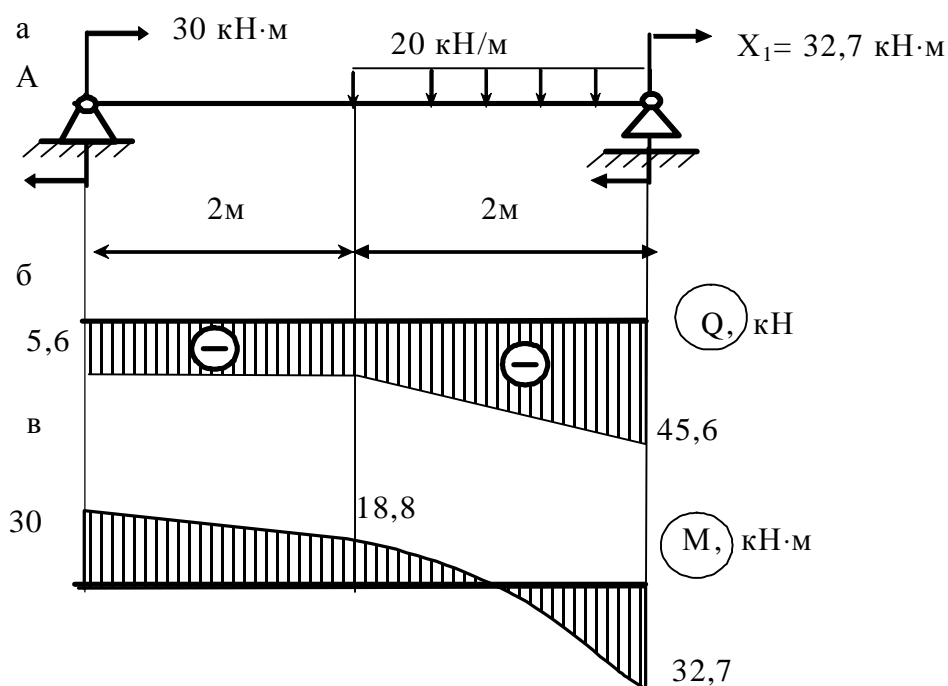


Рисунок 35

$$R_a = \frac{20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 30 - 32,7}{2+2} = -5,6 \text{ кН}, R_b = \frac{20 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2\right) + 30 + 32,7}{2+2} = 45,6 \text{ кН}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_a = -5,6 \text{ кН}, Q_4 = -R_b = -45,6 \text{ кН}$$

$$M_1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_2 = M_3 = 30 - 5,6 \cdot 2 = 18,8 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_4 = -32,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$R'_b = \frac{20 \cdot \frac{5^2}{2} + 32,7}{2+3} = 35,5 \text{ кН}, R_c = \frac{20 \cdot \frac{5^2}{2} - 32,7}{2+3} = 29,5 \text{ кН}.$$

$$Q_5 = R'_b = 35,5 \text{ кН}, Q_6 = 35,5 - 20 \cdot 2 = -4,5 \text{ кН}, Q_7 = -4,5 + 35 = 30,5 \text{ кН}$$

$$Q_8 = -28,5 \text{ кН}, M_5 = -32,7 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_6 = 35,5 \cdot 2 - 32,7 - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$z_1 = \frac{35,5}{20} = 1,775 \text{ м}; M_{\text{екстр}1} = -32,7 + 35,5 \cdot 1,775 - 20 \cdot 1,775 \cdot \frac{2}{2} = -1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$z_2 = \frac{29,5}{2} = 1,475 \text{ м}, M_{\text{екстр}2} = 29,5 \cdot 1,475 - 20 \cdot \frac{1,475^2}{2} = 21,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

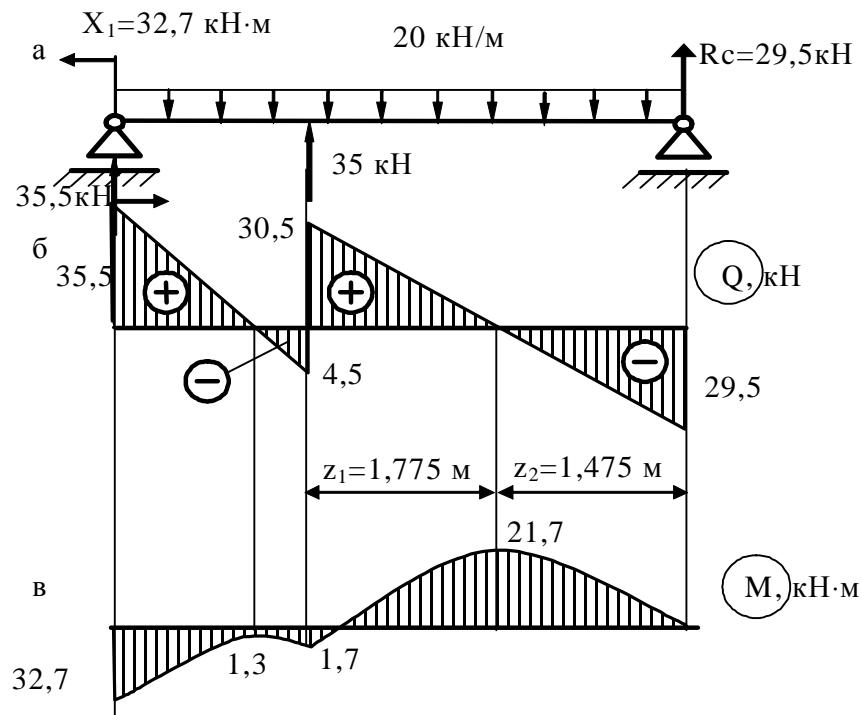


Рисунок 36

9 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюри M_s на \bar{M}_1 повинен вийти нуль.

$$\begin{aligned} \Delta_{IS} = & \frac{2}{6EJ_X} (2 \cdot 0,5 \cdot 18,8 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_X} (2 \cdot 18,8 \cdot 0,5 - 2 \cdot 1 \cdot 32,7 - \\ & 0,5 \cdot 32,7 + 18,8 \cdot 1) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_X} (0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_X} (-2 \cdot 1 \cdot 32,7 - 2 \cdot 0,6 \cdot 1,7 - \\ & - 32,7 \cdot 0,6 - 1 \cdot 1,7) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_X} (1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_X} (-2 \cdot 0,6 \cdot 1,7) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_X} (0,6 + 0) = \frac{(-57,8 + 58)}{EJ_X}. \end{aligned}$$

Нев'язка складає :

$$\frac{(-57,8 + 58)}{EJ_X} \cdot 100\% = 0,35\%.$$

10 З епюри згинальних моментів (див. рис. 34, л) знаходимо небезпечний переріз, $M_{\max} = 32,7 \text{ кНм}$.

З умови міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_o} \leq [\sigma]$$

$$W_o \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{32,7 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 204,4 \text{ см}^3 .$$

За таблицею сортаменту обираємо двотавр № 22, $W_x=232 \text{ см}^3$, $J_x=2550 \text{ см}^4$.

11 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 34, м), яку «перемножуємо» на епюру M_s (рис. 34, л).

$$y_A = \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 1 \cdot 18,8 + 1 \cdot 30] + \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 18,8 \cdot 1 - 32,7 \cdot 1] +$$

$$+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) = \frac{34,2}{EJ_x} = \frac{34,2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 6,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Знак «плюс» указує на те, що точка К переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вниз.

12 Визначаємо кут повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 34, н), яку «перемножуємо» на епюру M_s (рис. 34, л)

$$\theta_A = \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 30 + 18,8 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 + 18,8 \cdot 1] + \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 18,8 \cdot 0,5 -$$

$$- 32,7 \cdot 1] + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 0) = \frac{32,8}{EJ_x} = \frac{32,8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 6,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз А повертається у напрямку одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

Приклад 2

Розкрити статичну невизначуваність балки, побудувати епюри, поперечних сил та згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити прогин в точці К та кут повороту вузла А.

Розв'язання:

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій чотири (див. рис. 37,а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана конструкція один раз статично невизначувана.

2 Різниця з попереднім прикладом полягає у тому, що задану схеми неможливо замінити балкою з врізаним шарніром на проміжній опорі. У такому випадку потрібно замінити жорстке закріплення на нерухомий шарнір та ліворуч додати ще одну ділянку безкінечно малої довжини (рис. 3.10,б). До основної системи прикладаємо задане навантаження і моменти X_1 – одержуємо еквівалентну систему (рис. 37, в).

3 Врізавши шарнір на проміжній опорі, одержали дві незалежні балки. При цьому балкою, що розташована ліворуч можна знехтувати, так як вона має безкінечну довжину, і на неї не діють ніякі силові фактори. Прикладаємо до правої балки зовнішнє навантаження (рис. 37, г), визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 37, д).

$$R_B = \frac{20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 30}{2 + 4 + 3} = 6,67 \text{ кН.}$$

$$M_1=0; M_2=R_B \cdot a=6,67 \cdot 2=13,33 \text{ кНм.}$$

$$M_3=M_2+M=13,33+30=43,33 \text{ кНм.}$$

$$M_4=M_5=R_B(a+b)+M=6,67 \cdot (2+4)+30=70 \text{ кНм.}$$

4 Знімаємо задане навантаження, до ненавантаженої системи прикладаємо момент $X_1=1$ і від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 37,е).

5 Складаємо канонічне рівняння

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

6 Коефіцієнти рівняння d_{11} та Δ_{1p} визначаємо методом Мору шляхом “перемножування” відповідних епюр.

“Перемноживши” \bar{M}_1 на \bar{M}_1 , одержимо d_{11} .

$$\delta_{11} = \frac{2 + 4 + 3}{6EJ_X} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_X}.$$

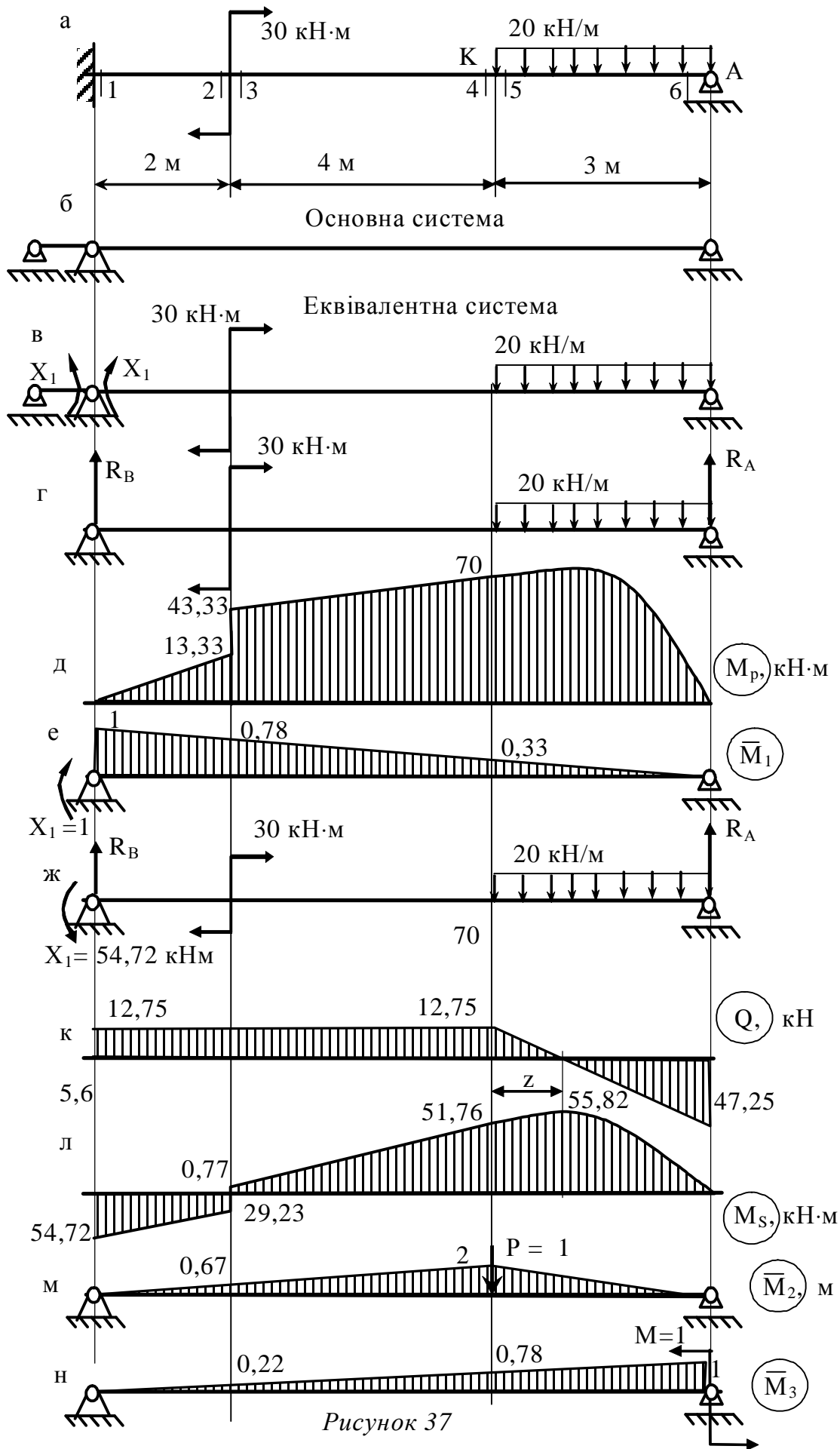


Рисунок 37

“Перемноживши” епюри \bar{M}_1 на M_p , одержимо Δ_{1p} .

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 13,33 \cdot 0,78 + 13,33 \cdot 1,0) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 43,33 \cdot 0,78 + 2 \cdot 70 \cdot 0,33 + 43,33 \cdot 0,33 + 70 \cdot 0,78) + \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 70 \cdot 0,33) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0,33 + 0) = \frac{164,17}{EJ_x}.$$

7 Підставляємо знайдені коефіцієнти в канонічне рівняння, вирішуючи яке знаходимо X_1 :

$$\frac{3}{EJ_x} X_1 + \frac{164,17}{EJ_x} = 0, \text{ звідки } X_1 = -\frac{164,17}{3} = -54,72 \text{ кНм.}$$

8 Прикладаємо до балки задане навантаження і знайдений момент (рис. 37, ж). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 37, к) і згинальних моментів (рис. 37, л).

$$R_B = \frac{20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 30 + 54,72}{2 + 4 + 3} = 12,75 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = R_B = 12,75 \text{ кН;}$$

$$Q_6 = R_B - qc = 12,75 - 20 \cdot 3 = -47,253 \text{ кН}$$

Епюра перетинає вісь, знаходимо точку перерізу:

$$z = \frac{Q}{q} = \frac{12,75}{20} = 0,64 \text{ м.}$$

$$M_1 = -X_1 = -54,72 \text{ кНм; } M_2 = R_B \cdot a - X_1 = 6,67 \cdot 2 - 54,72 = -29,23 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = M_2 + M = -29,23 + 30 = 0,77 \text{ кНм}$$

$$M_4 = M_5 = R_B(a+b) + M - X_1 = 6,67 \cdot (2+4) + 30 - 54,72 = 51,76 \text{ кНм.}$$

$$M_{\text{екстр}} = R_A(2+4+z) + M - X_1 - q \frac{z^2}{2} = 55,82 \text{ кНм.}$$

9 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюри M_s на \bar{M}_1 повинен вийти нуль.

$$\begin{aligned} \Delta_{IP} = & -\frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 54,72 \cdot 1,0 + 2 \cdot 29,23 \cdot 0,78 + 29,23 \cdot 1,0 + 54,72 \cdot 0,78) + \\ & + \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 0,77 \cdot 0,78 + 2 \cdot 51,76 \cdot 0,33 + 0,77 \cdot 0,33 + 51,76 \cdot 0,78) + \\ & + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 51,76 \cdot 0,33) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0,33 + 0) = 0. \end{aligned}$$

10 З епюри згинальних моментів (див. рис. 37, л) знаходимо небезпечний переріз, $M_{\max} = 55,82$ кНм.

З умови міцності:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_o} \leq [\sigma] \\ W_o &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{55,82 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 310,11 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

За таблицею сортаменту обираємо двотавр №24а, $W_x = 317$ см³, $J_x = 3800$ см⁴.

11 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 37, м), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис. 37, л).

$$\begin{aligned} y_A = & \frac{2}{6EJ_x}[2 \cdot (-29,23) \cdot 0,67 - 54,72 \cdot 0,67] + \frac{2}{6EJ_x}[2 \cdot 0,77 \cdot 0,67 + \\ & + 2 \cdot 51,76 \cdot 2 + 0,67 \cdot 2 + 51,76 \cdot 0,67] + \frac{3}{6EJ_x}[2 \cdot 51,76 \cdot 2] + \\ & + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x}(2 + 0) = 0,0323 \text{ м}. \end{aligned}$$

Знак «плюс» указує на те, що точка К переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вниз.

12 Визначаємо кут повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 37, н), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис. 37, л):

$$\begin{aligned} \theta_A = & \frac{2}{6EJ_X} [2 \cdot (-29,23) \cdot 0,22 - 54,72 \cdot 0,22] + \frac{4}{6EJ_X} [2 \cdot 0,77 \cdot 0,22 + \\ & + 2 \cdot 51,76 \cdot 0,78 + 0,67 \cdot 0,78 + 51,76 \cdot 0,22] + \frac{3}{6EJ_X} [2 \cdot 51,76 \cdot 0,78 + 51,76 \cdot 1] + \\ & + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_X} (0,78 + 1) = 1,91 \cdot 10^{-2} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз А повертається у напрямку одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

Приклад 3

Розкрити статичну невизначуваність балки, побудувати епюри, поперечних сил та згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити прогин в точці К та кут повороту вузла А.

Розв'язання:

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій п'ять (див. рис. 38, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана задача двічі статично невизначувана.

2 Для нерозрізної балки як основну систему краще вибирати таку ж балку, але з врізаними шарнірами на проміжних опорах (рис.38, б).

3 Врізавши шарнір на проміжних опорах, одержали три незалежні балки. До них прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 38, б), визначаємо реакції опор і будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис.38, в).

4 Знімаємо задане навантаження, до ненавантаженої системи прикладаємо моменти $X_1=1$ і від них будуємо епюру згинальних моментів (рис.38, г). Аналогічним чином отримуємо епюру від згинальних моментів $X_2=1$ (рис.38, д).

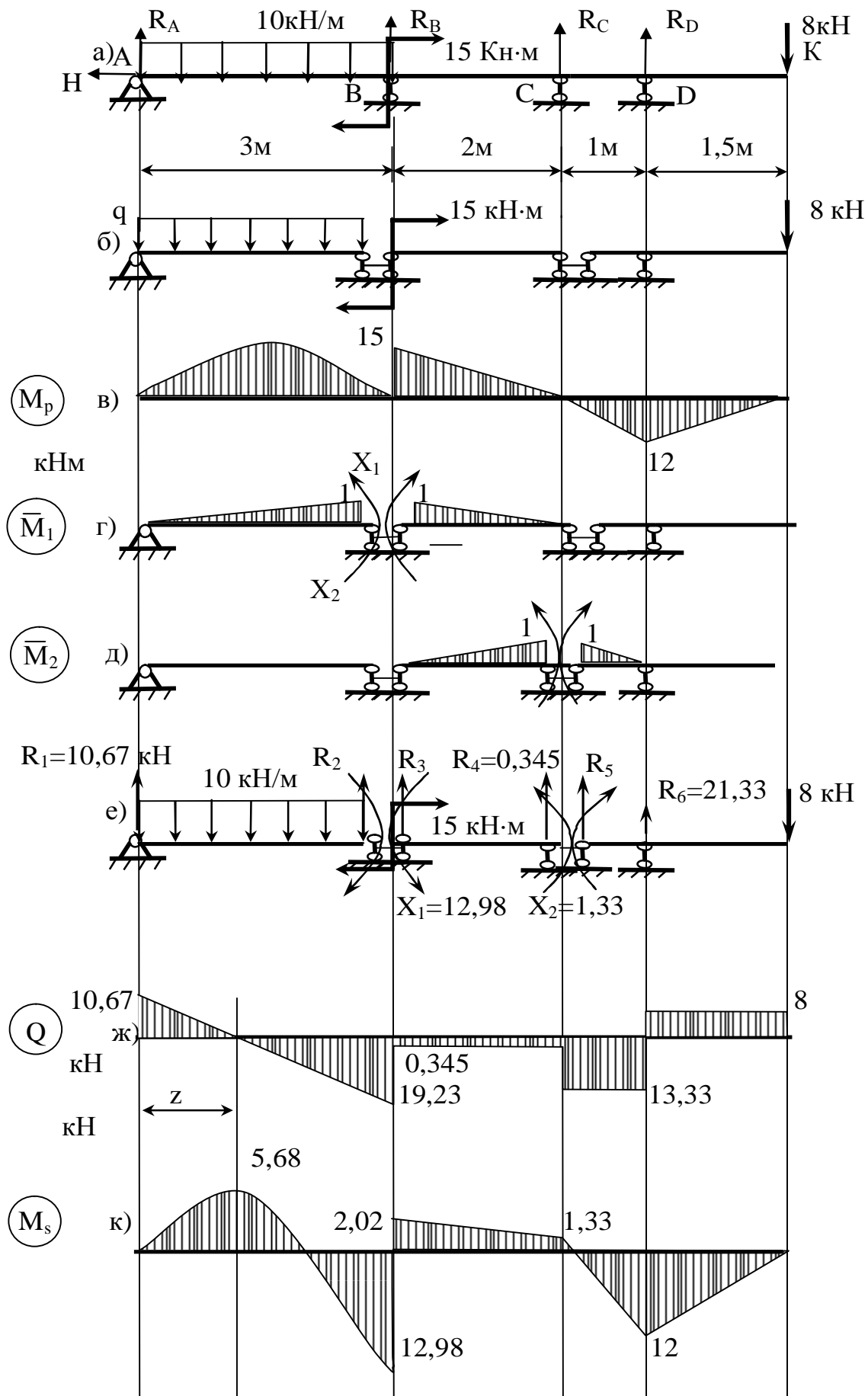


Рисунок 38

5 Складаємо канонічні рівняння:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

6 Коефіцієнти рівняння δ_{11} і Δ_{1P} визначаємо методом Мору шляхом “перемножування” відповідних епюр:

$$\delta_1 EI_x = \frac{3}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) = 1,67$$

$$\Delta_{1P} = EI_x = \frac{2}{6}(2 \cdot 15 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24}(0 + 1) = 21,25$$

$$\delta_{22} EI = \frac{2}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) = 1$$

$$\Delta_{2P} EI_x = \frac{2}{6}(15 \cdot 1) + \frac{1}{6}((-12) \cdot 1) = 3$$

$$\delta_{12} EI_x = \frac{2}{6}(1 \cdot 1) = 0,33$$

7 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1, X_2 :

$$\begin{cases} 1,67x_1 + 0,33x_2 + 21,35 = 0 \\ 0,33x_1 + 1x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5,01x_1 - x_2 - 63,75 = 0 \\ 0,33x_1 + x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$-4,68x_1 - 60,75 = 0$$

$$x_1 = -\frac{60,75}{4,68} = -12,98 \text{ кНм}$$

$$0,33(-12,98) + x_2 + 3 = 0$$

$$x_2 = 1,33 \text{ кНм}$$

8. До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис.38, е). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис.38, ж) і згинальних моментів (рис.38, е).

9 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюр M_s на \bar{M}_1 та M_s на \bar{M}_2 повинен вийти нуль.

$$\Delta_{1s}EI_x = \frac{3}{6}(2 \cdot (-12,98) \cdot 1) + \frac{2}{6}(2 \cdot 2,02 \cdot 1 + 1,33 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24}(0 + 1) = -12,98 + 1,76 + 11,25 = 0,03$$

$$\delta = \frac{0,03}{1,76 + 11,25} \cdot 100\% = 0,23\%$$

$$\Delta_{2s}EI_x = \frac{2}{6}(2 \cdot 1,33 \cdot 1 + 2,02 \cdot 1) + \frac{1}{6}(2 \cdot 1,33 \cdot 1 - 12 \cdot 1) = 1,56 - 1,56 = 0$$

10 З епюри згинальних моментів (див. рис.38, е) знаходимо небезпечний переріз, $M_{\max} = 12,98$ кНм.

З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_o} \leq [\sigma]$$

$$W_o \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,98 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 81,125 \text{ см}^3.$$

З таблиць сортаменту обираємо двотавр №14, $W_x=81,7\text{см}^3$, $J_x=572 \text{ см}^4$.

11 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис.39, а), яку “перемножуємо” на епюру M_s (див. рис.38, к).

$$y_K = \frac{1}{6EJ_x} [2 \cdot (-12) \cdot 1,5 + 1,33 \cdot 1,5] + \frac{1,5}{6EJ_x} [2 \cdot (-12) \cdot 1,5] = \frac{-14,67}{EJ_x} = \frac{-14,67 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -1,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,8 \text{ мм}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що точка К переміщується по напрямку протилежному напрямку одиничної сили, тобто вниз.

12 Визначення кута повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будемо епюру згинальних моментів (рис.39, б), яку «перемножимо» на епюру M_s (див. рис. 38, к)

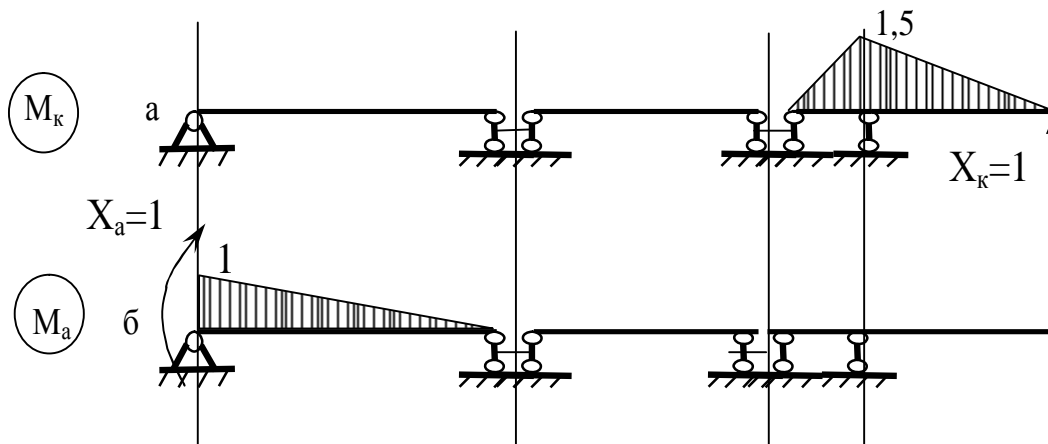


Рисунок 39

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{3}{6EJ_X}(-12,98 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X}(1 + 0) = \frac{4,76}{EJ_X} = \\ &= \frac{4,76 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 4,16 \cdot 10^{-4} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз А повертається у напрямку одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

На рисунку 40 зображені 20 завдань для їх самостійного розв'язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях прийняті однакові числові значення величин: $a = b = c = d = 2$ м; $P = 12$ кН; $q = 8$ кН/м; $M = 16$ кН·м. Завдання розташовані таким чином, щоб надати студентам можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого завдання до останнього.

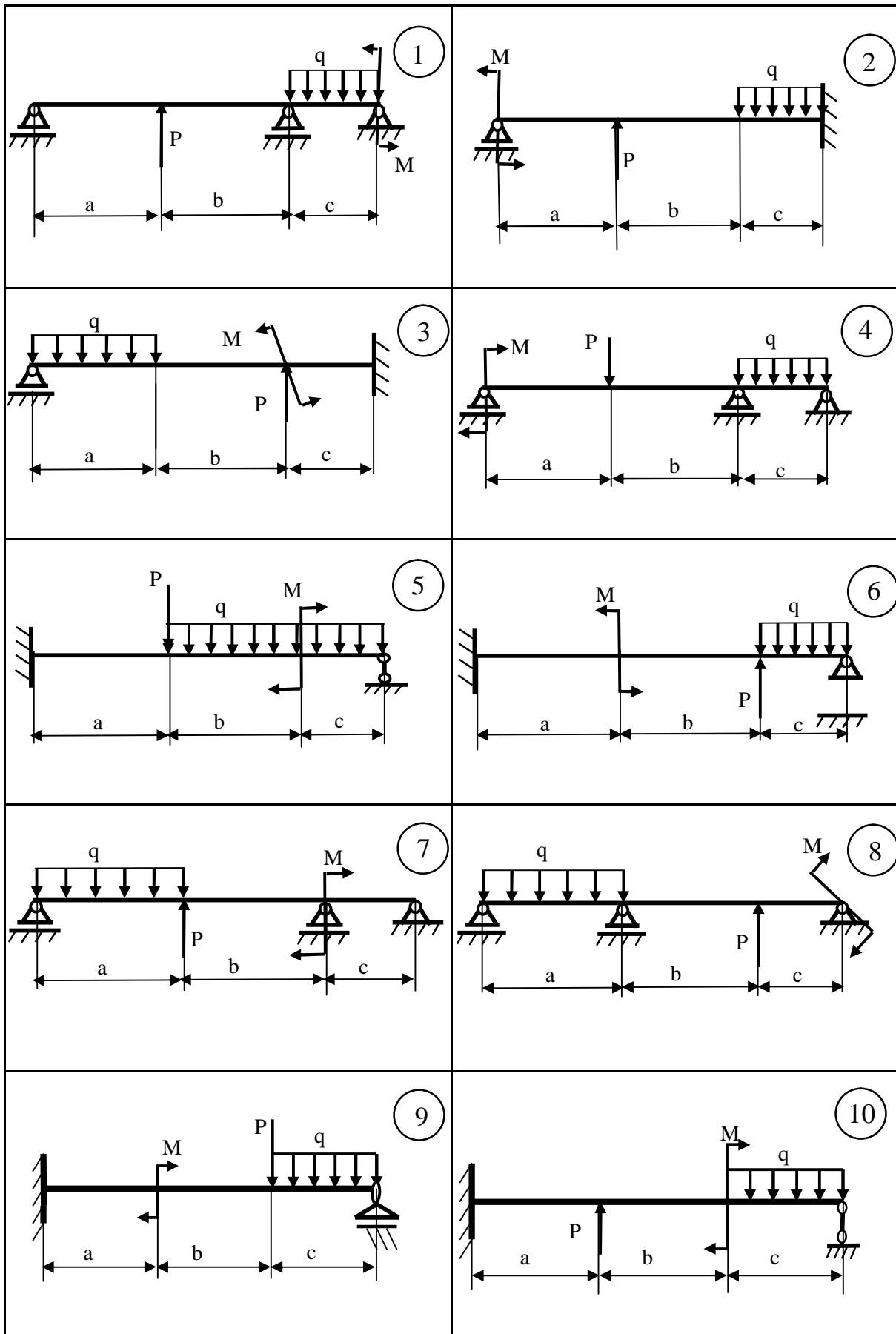


Рисунок 40

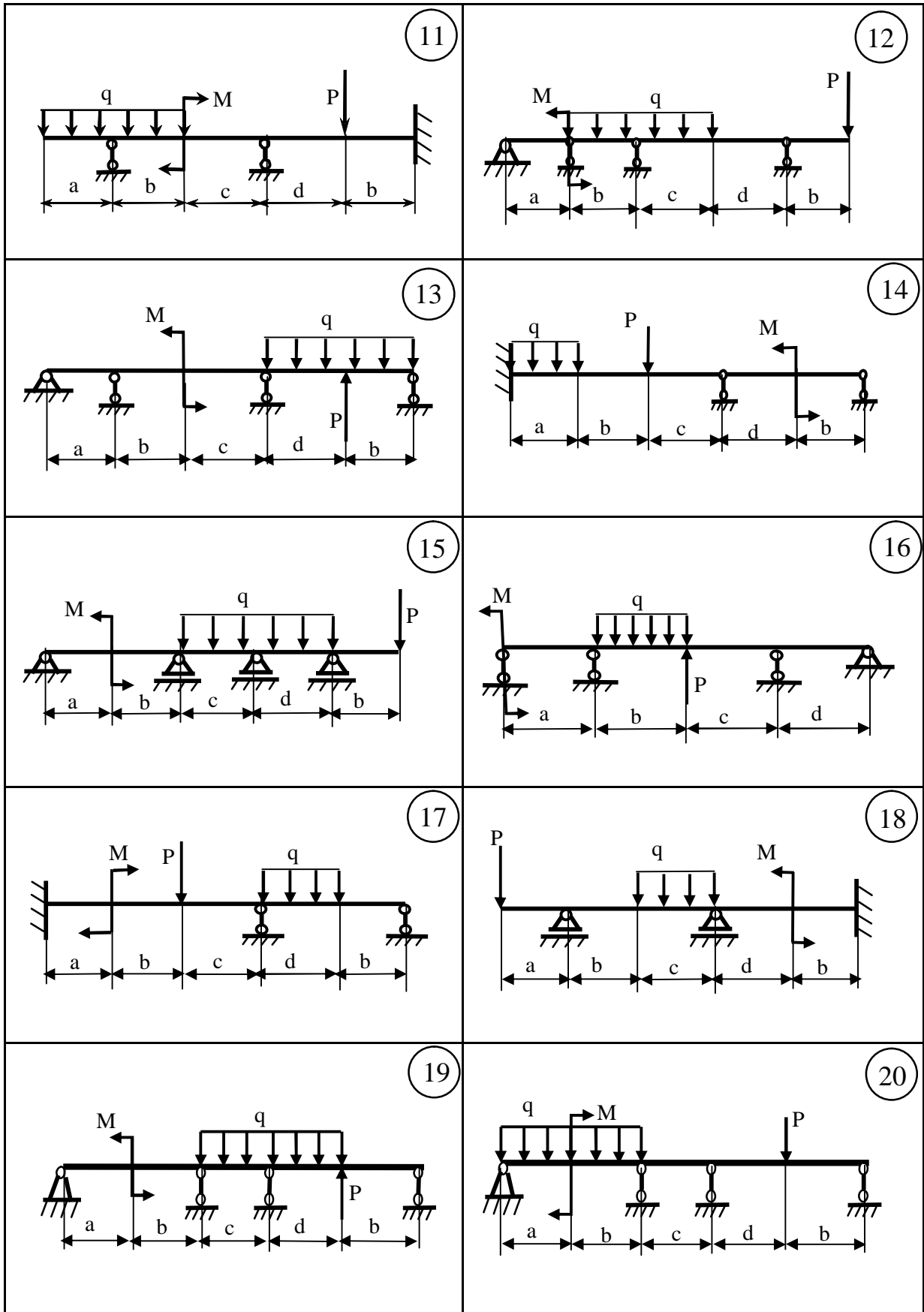


Рисунок 40, аркуш 2

3.4 Відповіді до завдань

Розв'язуючи те чи інше завдання, студент має можливість проконтролювати себе за допомогою відповідей до завдань, що наведені на рис. 41.

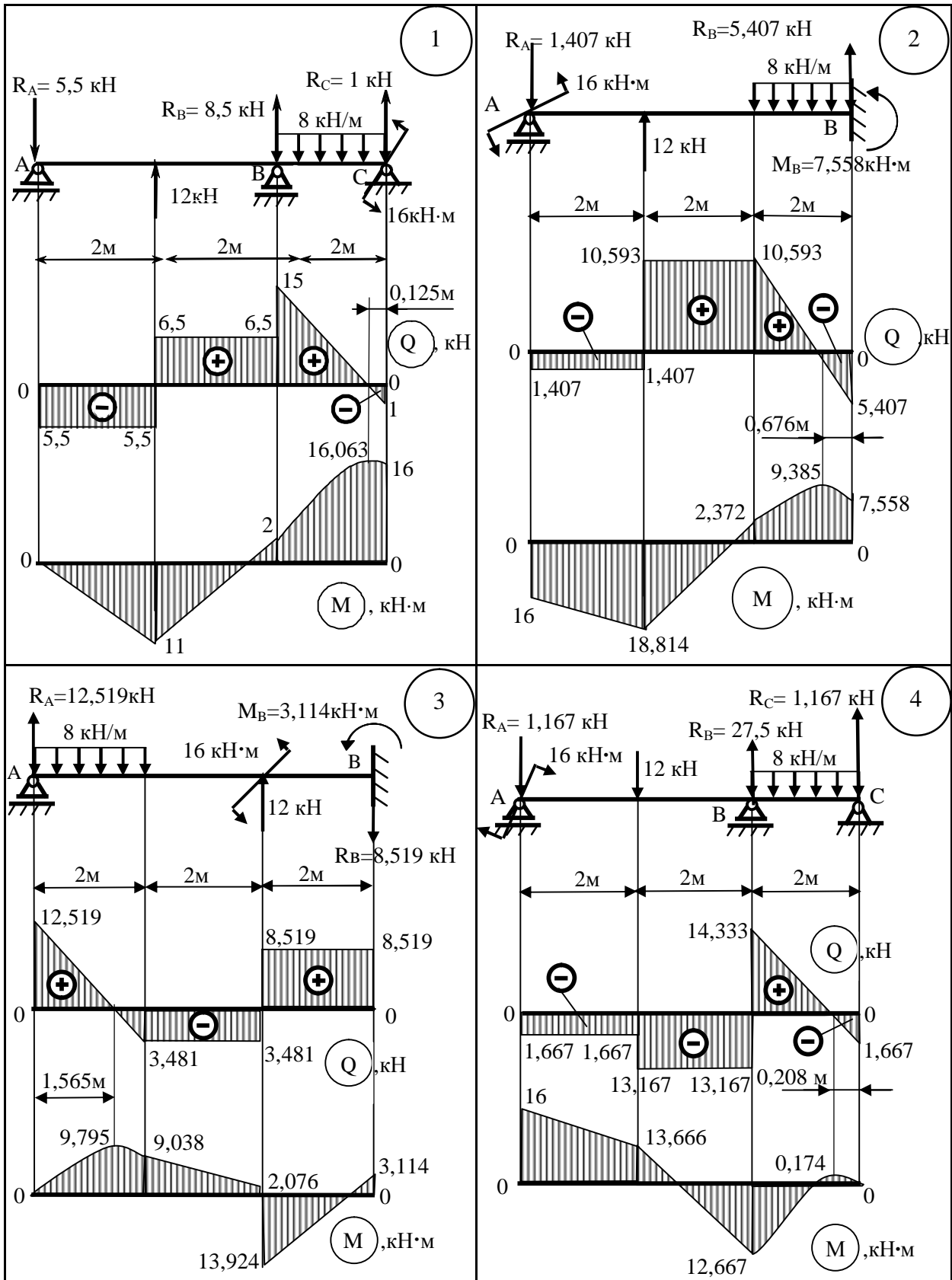


Рисунок 41

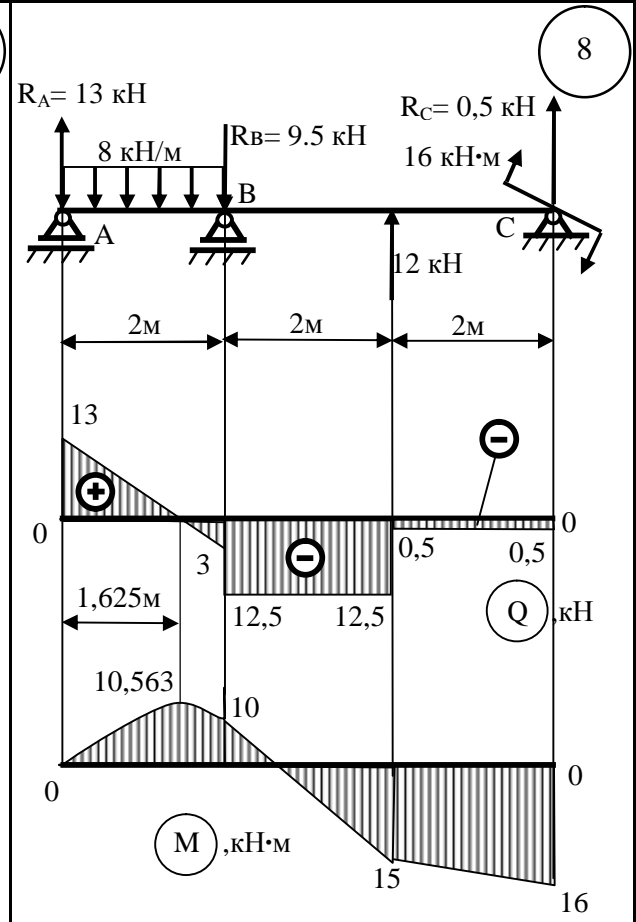
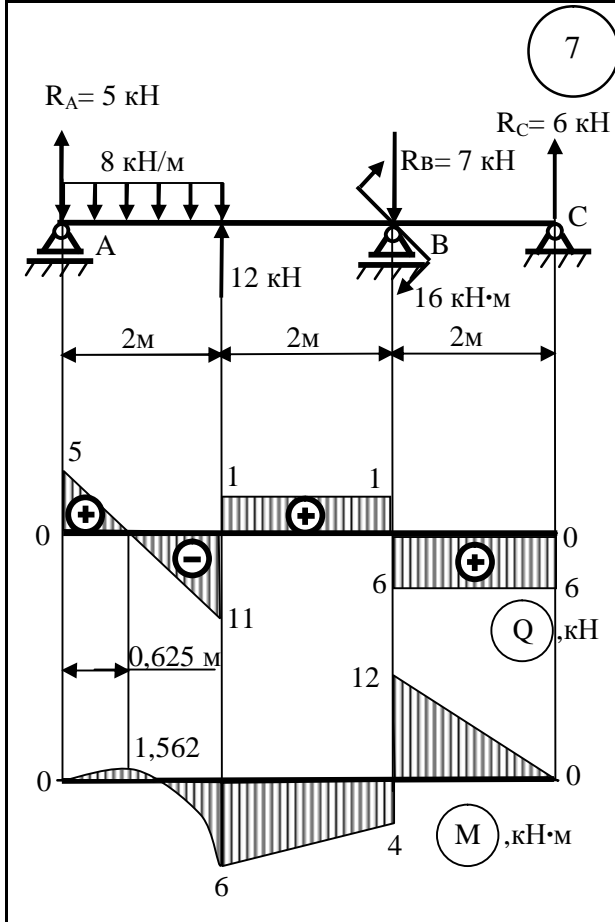
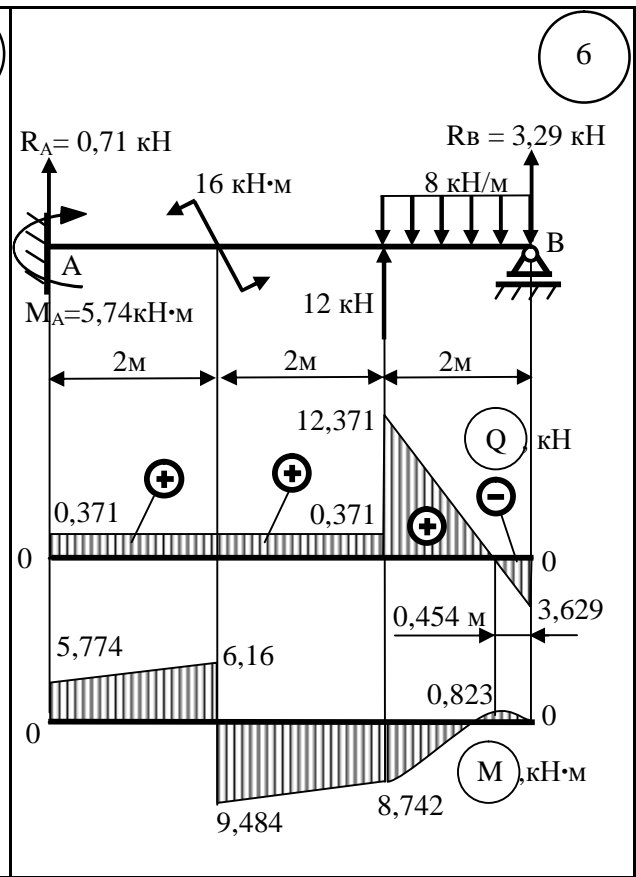
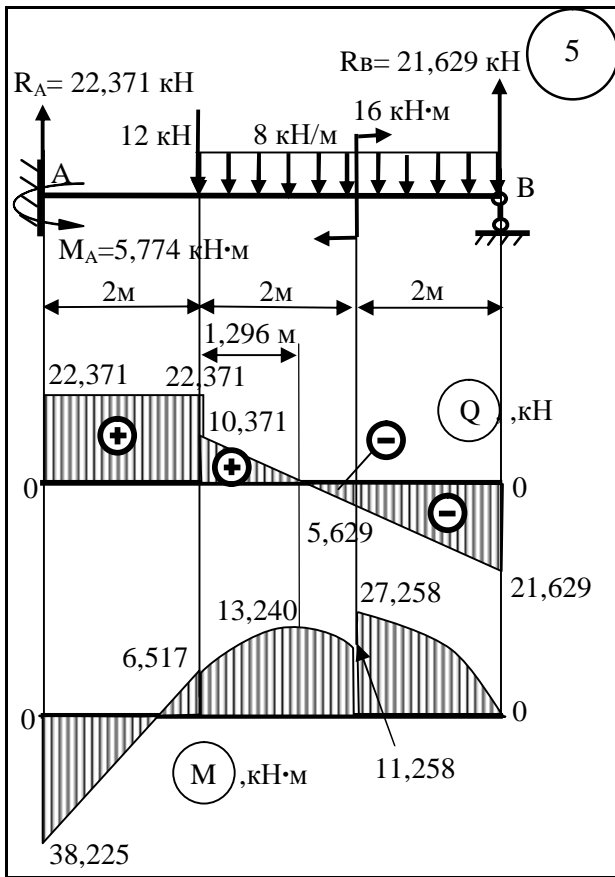


Рисунок 41, аркуш 2

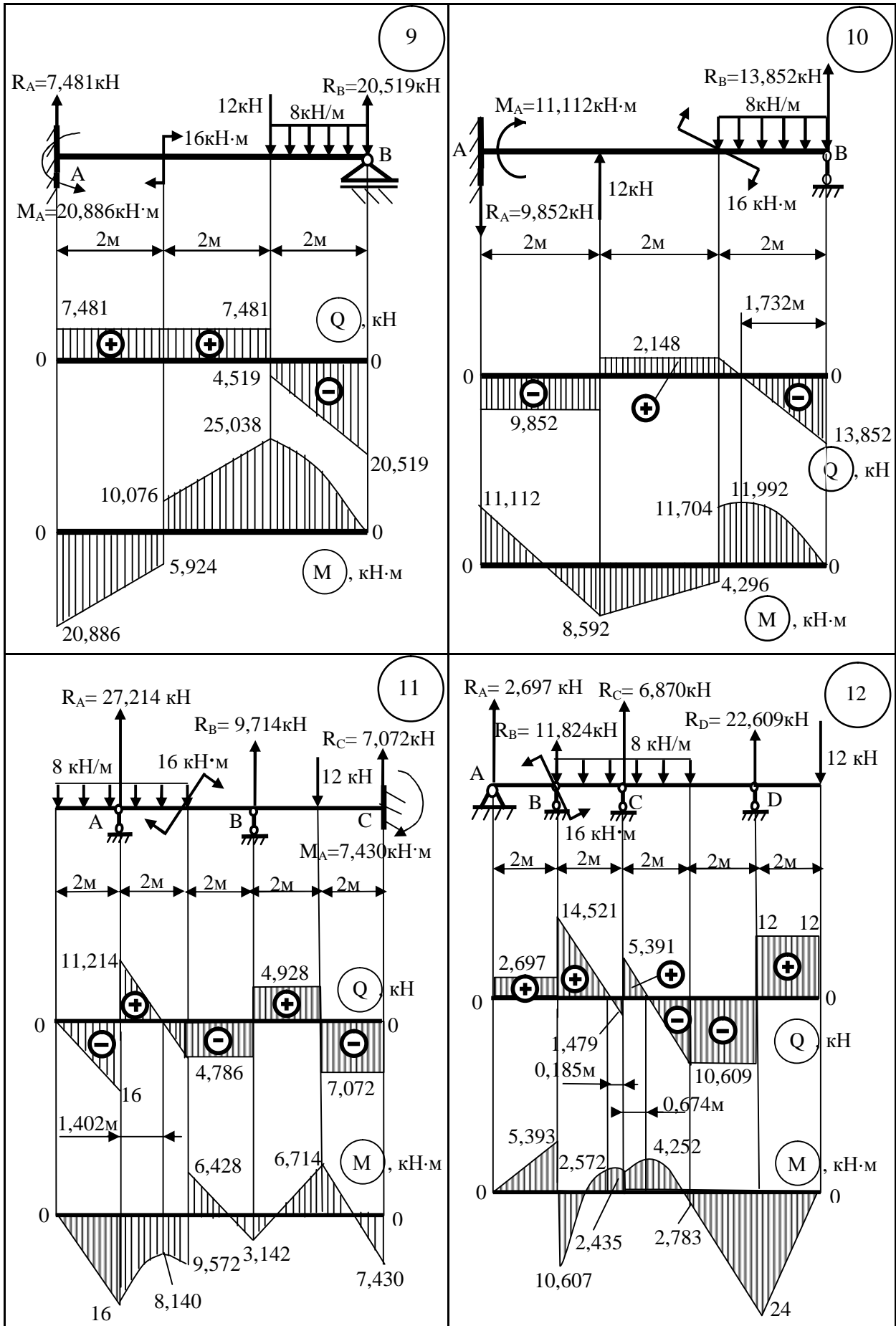


Рисунок 41, аркуш 3

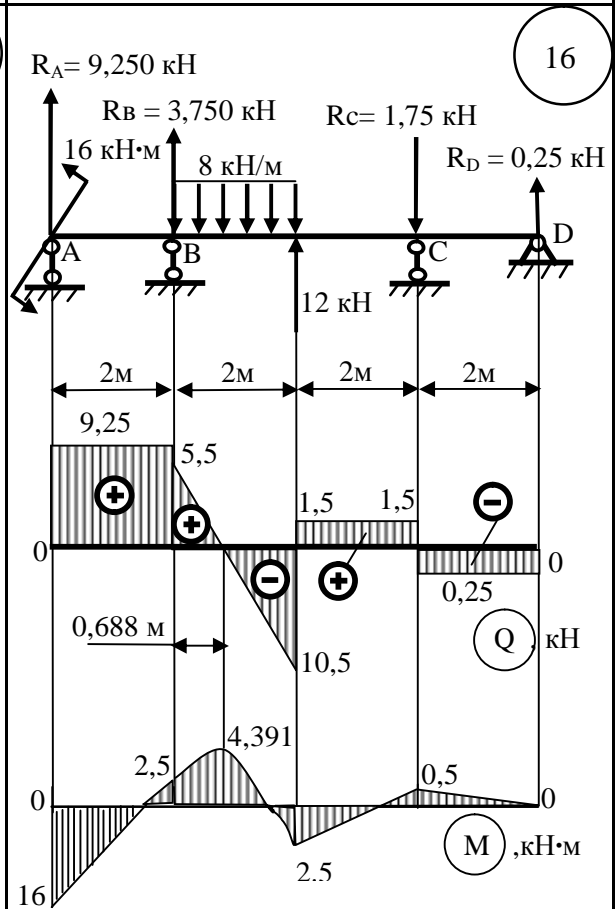
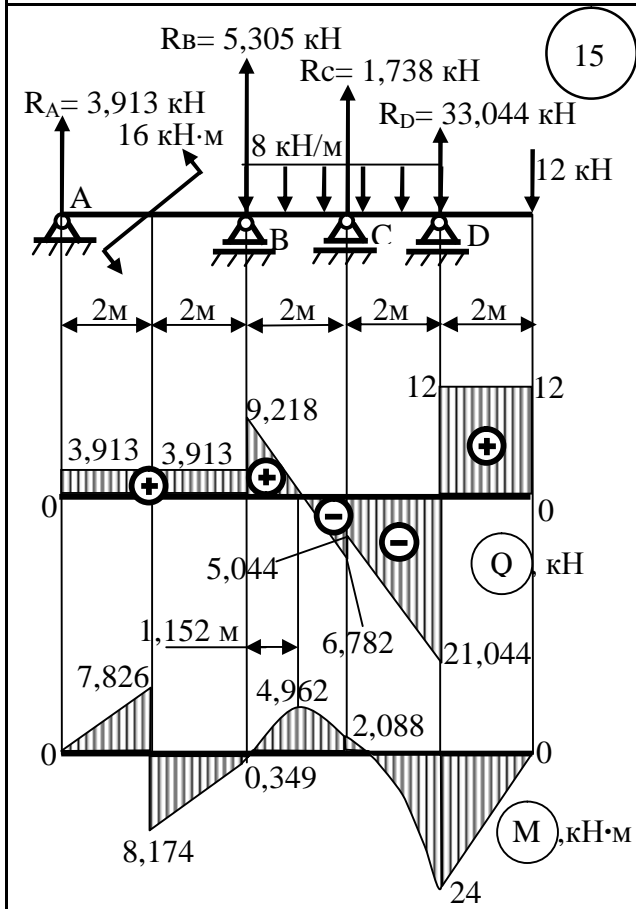
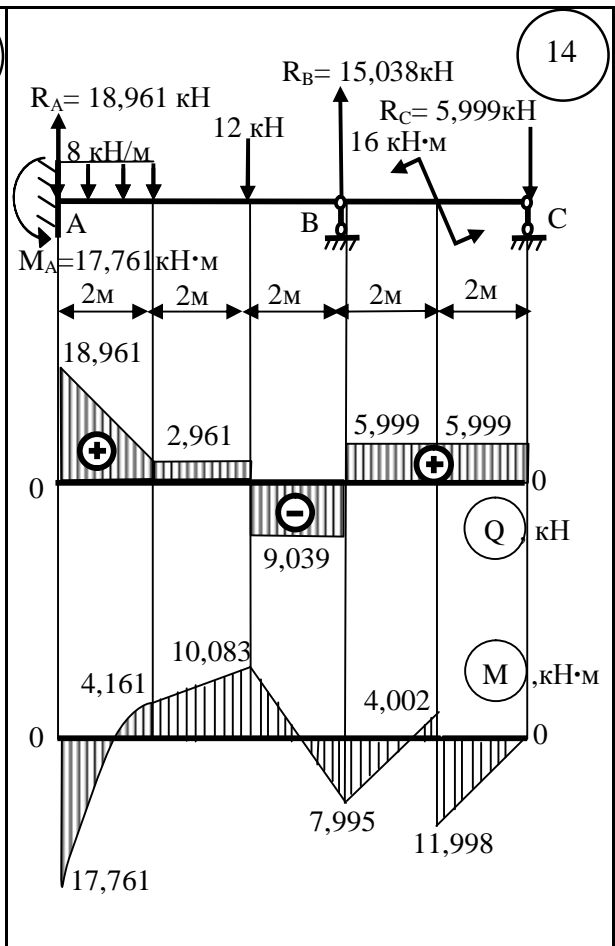
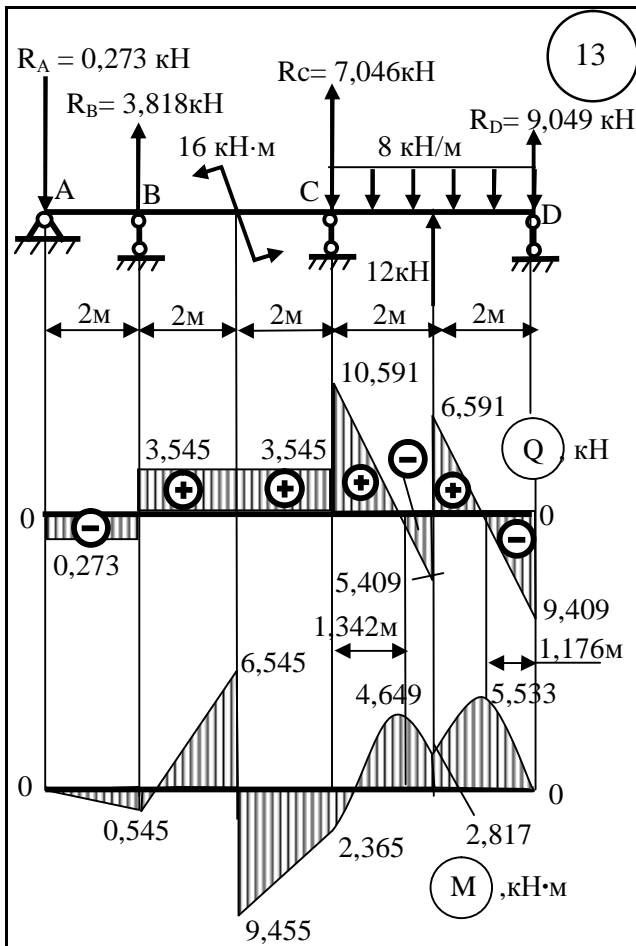


Рисунок 41, аркуш 4

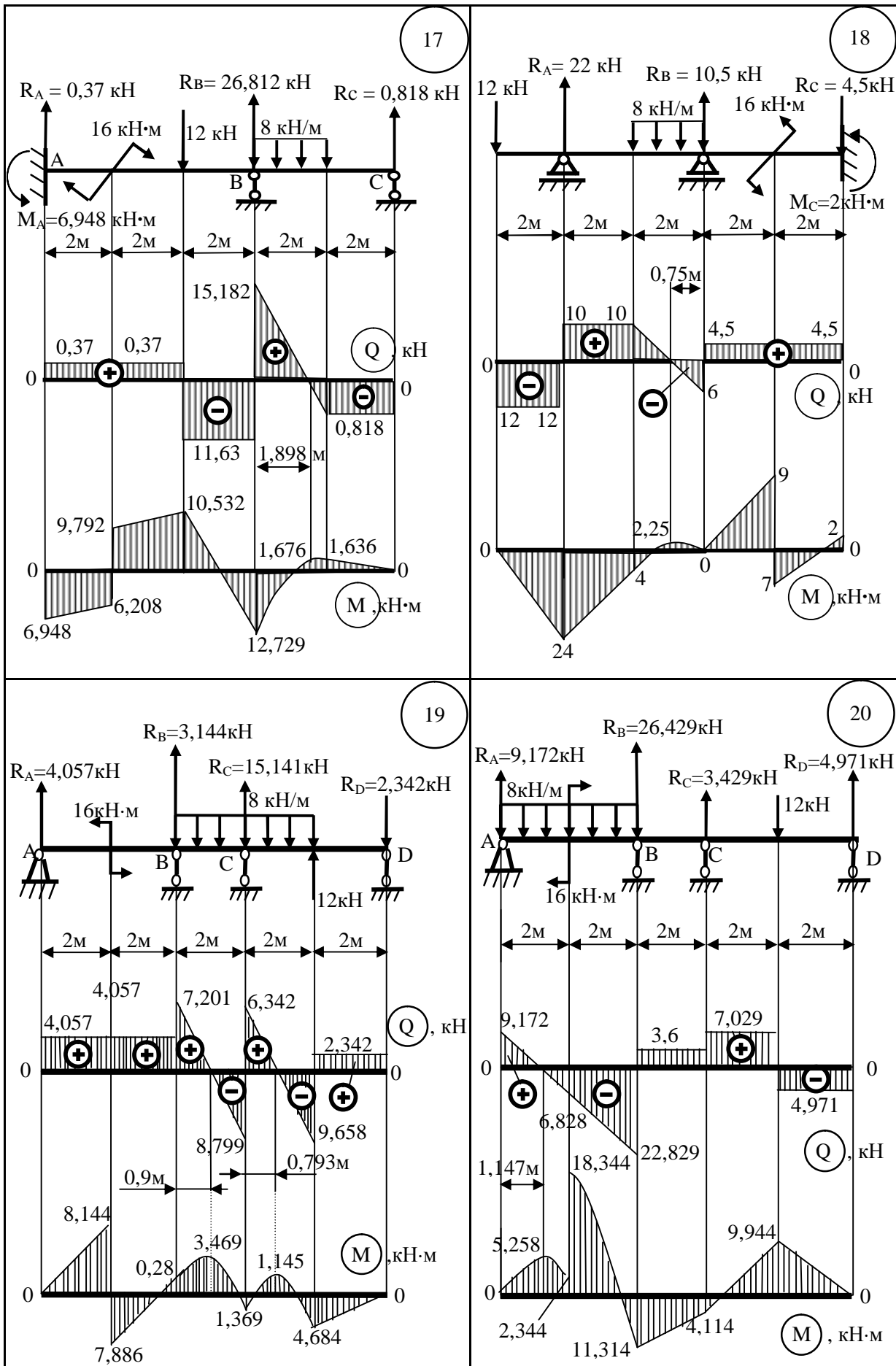


Рисунок 41, аркуш 5

4 СТАТИЧНО НЕ ВИЗНАЧУВАНІ РАМИ

4.1 Основні теоретичні відомості

Розрахунок внутрішніх силових чинників для статично не визначуваних рам в цілому аналогічний такому для нерозрізних балок. Відмінність полягає у виборі основної системи. Якщо для балок основна система обирається «врізанням» проміжних шарнірів, то для рам такий метод у більшості випадків використати неможливо. Основна система для рами обирається шляхом заміни «зайвих» реакцій на невідомі зусилля.

Розглянемо план рішення задачі.

1 Вибрати основну систему.

2 Побудувати еквівалентну систему, для чого до основної системи прикласти зовнішні навантаження і невідомі зусилля.

3 Скласти систему канонічних рівнянь.

4 Побудувати епюри згинальних моментів окремо від зовнішніх навантажень і від одиничних сил, прикладених замість прибраних «зайвих» зв'язків до основної системи.

5 Шляхом перемножування епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени.

6 Вирішити систему рівнянь і визначити невідомі зусилля. Прикласти до рами задане навантаження, обчислені зусилля і побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

4.2 Приклади побудови епюр

Приклад 1

Розкрити статичну невизначуваність рами, побудувати епюри по вздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити кут повороту вузла К.

Розв'язання. 1 Аналізуємо задану систему (рис. 42, а). У ній невідомих реакцій чотири, а рівнянь рівноваги можна скласти тільки три.

Значить, дана система один раз статично невизначувана. Відкинувши один зв'язок, одержуємо основну систему (рис. 42,б). До основної системи прикладаємо задане навантаження і зусилля у напрямку “зайвого” зв'язку, одержуємо еквівалентну систему (рис. 42, в).

2 Складаємо канонічне рівняння

$$\delta_{11}X_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

3 Для визначення коефіцієнтів канонічного рівняння будемо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 42, г і д) і одиничною «зайвою» невідомою (рис. 42, е).

4 Знаходимо коефіцієнти канонічного рівняння:

$$\delta_{11} = \frac{1,5}{6EJ_X} [2 \cdot 1,5 \cdot 1,5] + \frac{5}{6EJ_X} [2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - 1,5 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 1,5] + \frac{2,5}{6EJ_X} (2 \cdot 2,5 \cdot 2,5) = \frac{14,3}{EJ_X},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{6EJ_X} [-2 \cdot 0,1 \cdot 24 + 24 \cdot 1,5] + \frac{3}{6EJ_X} [-2 \cdot 24 \cdot 0,1 - 2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 24 \cdot 2,5 - 15 \cdot 0,1] + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X} (-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_X} [-2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5] = \frac{136,4}{EJ_X}.$$

5 Підставляємо коефіцієнти в канонічне рівняння і визначаємо X_1 :

$$\frac{14,3}{EJ_X} X_1 - \frac{136,4}{EJ_X} = 0, \quad X_1 = \frac{136,4}{14,3} = 9,56 \text{ кН}.$$

6 До основної системи прикладаємо задане навантаження і знайдену невідому X_1 (рис. 43, а). Від них визначаємо реакції опор і будемо епюри N , Q , M_s (рис. 43, б, в, г).

7 Виконуємо деформаційну перевірку. Для цього «перемножуємо» епюри M_s (див. рис. 43, г) та M_1 (див. рис. 42, е). Цим самим визначаємо переміщення в заданій системі (див. рис. 42, а) в точці А в горизонтальному напрямку. Воно має дорівнювати нулю, оскільки в заданій системі є зв'язок, що перешкоджає переміщенню.

При визначенні нев'язки необхідно обчислити всі додатні та від'ємні величини роздільно, а потім різницю розділити на меншу з величин за модулем і помножити на 100%.

$$\begin{aligned} \Delta_{IS} = & \frac{1,5}{6EJ_X} (2 \cdot 14,35 \cdot 1,5) + \frac{2}{6EJ_X} (2 \cdot 1,5 \cdot 14,35 - 2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 - 14,35 \cdot 0,1 + \\ & + 23,04 \cdot 1,5) + \frac{3}{6EJ_X} (-2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 + 2 \cdot 8,91 \cdot 2,5 - 23,04 \cdot 2,5 + 0,1 \cdot 8,91) + \\ & + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X} (-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_X} (2 \cdot 8,91 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = \frac{1}{EJ_X} (77,2 - \\ & - 77,84) = -\frac{0,64}{EJ_X}. \end{aligned}$$

$$\text{Нев'язка } \Delta = \frac{0,64}{77,2} \cdot 100\% \approx 0,8\% .$$

8 З епюри M_s (див. рис. 4.2,г) знаходимо найбільший згинальний момент, $M_{\max}=23,85$ кНм.

9 З умови міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]$$

знаходимо необхідний момент опору двотавра:

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{23,85 \cdot 10^{-3}}{180} \cdot 10^6 = 131,4 \text{ см}^3 .$$

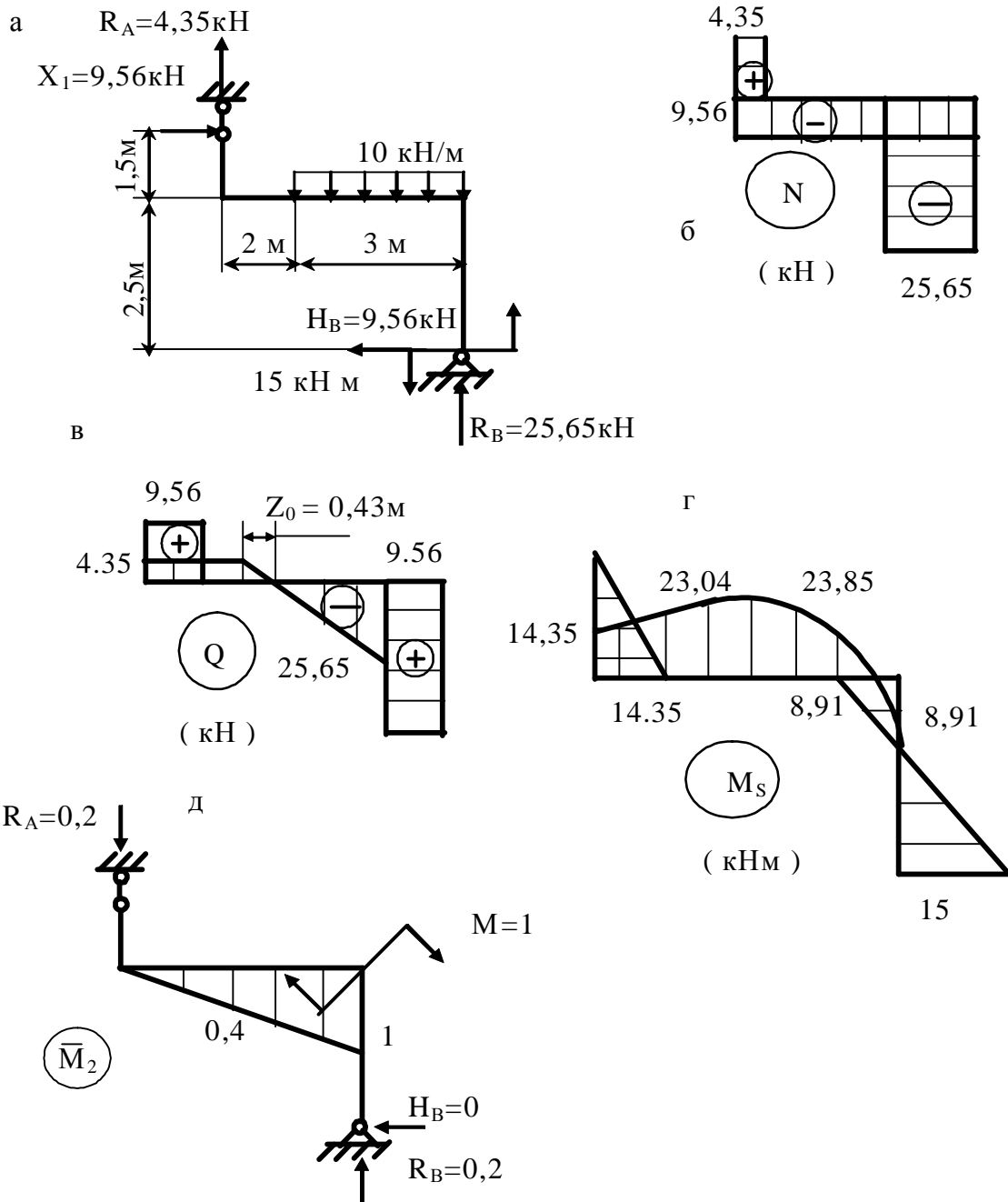


Рисунок 43

З таблиці сортаменту обираємо двотавр №18, $W_x=143\text{см}^3$, $J_x=1290\text{см}^4$.

10 Визначаємо кут повороту перерізу К. Для цього до основної системи у вузлі К прикладаємо одиничний момент. Від нього визначаємо реакції опор, будуємо епюру згинальних моментів (рис. 43, д), яку “перемножуємо” на епюру M_s (див. рис. 43, г):

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{2}{6EJ_X}(-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 - 14,35 \cdot 0,4) + \frac{3}{6EJ_X}(-2 \cdot 0,4 \cdot 23,04 + \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 8,91 - 23,04 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8,91) + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X}(-0,4 - 1) = -\frac{35}{EJ_X} = \\ &= -\frac{35 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -0,0136 \text{ рад} \quad .\end{aligned}$$

Кут одержали з «мінусом», тобто переріз К повертається у напрямку, протилежну одиничному моменту, проти годинникової стрілки.

Приклад 2

Розкрити статичну невизначуваність рами (рис. 44, а), побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити кут повороту вузла К.

Розв'язання

Основна система завантажується тільки заданими навантаженнями (рис. 44, б), знаходяться опорні реакції, і будується епюра згинальних моментів M_p (рис. 44, в).

Визначаємо реакції:

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0; \quad R_a = 0; \\ M_1 &= M_2 = M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_3 &= -M = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_5 &= q \frac{b^2}{2} = 10 \frac{1,6^2}{2} = 12,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо одиничні епюри, для цього основну систему завантажуємо по черзі тільки одним одиничним навантаженням у перерізі та напрямку 1, 2 відкинутого зв'язку. (рис. 44, г, д)

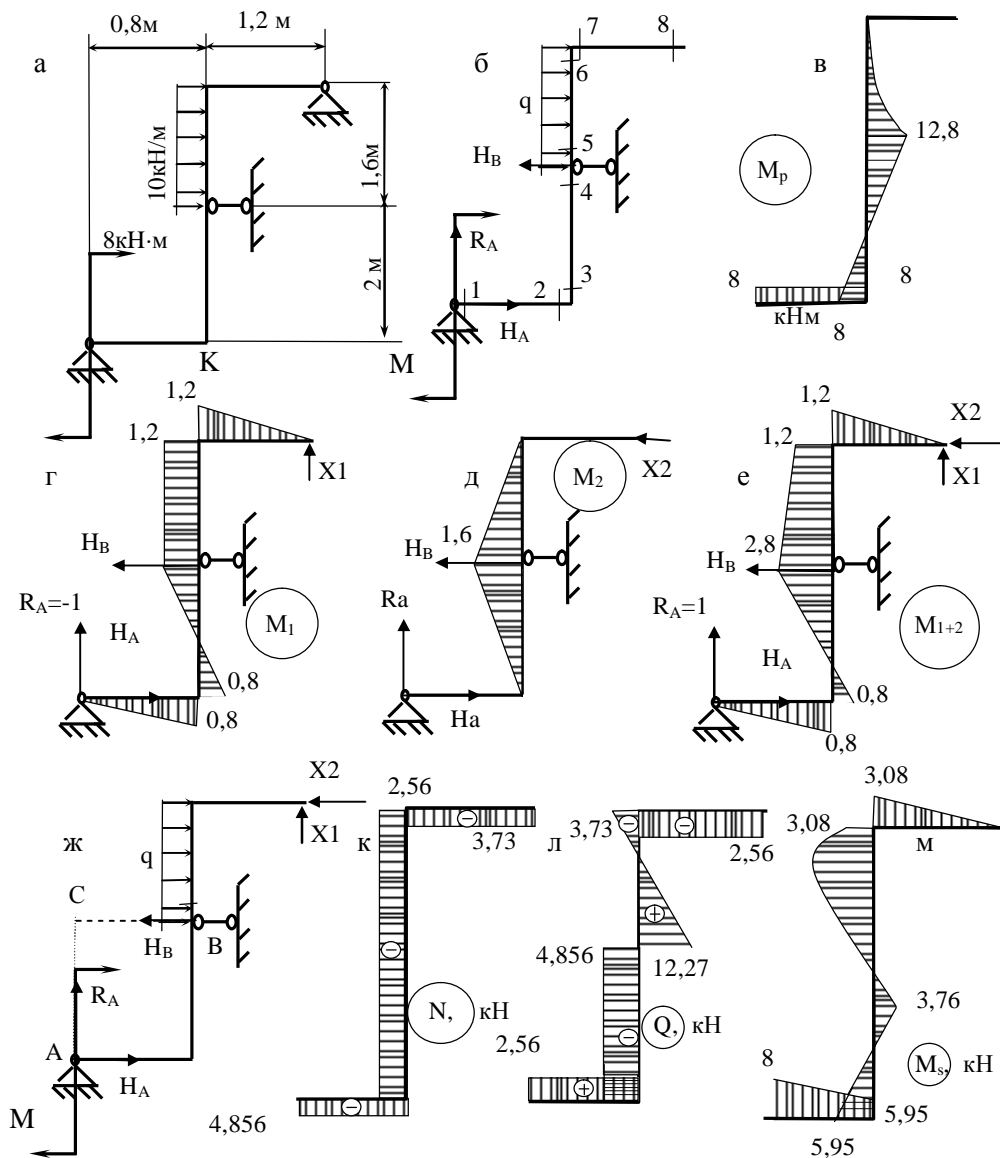


Рисунок 44

Визначаються коефіцієнти і вільний член системи, «перемножуючи» епюри:

$$\delta_{11}EJ_x = \frac{0,8}{6}(2 \cdot 0,8^2) + \frac{2}{6}(2 \cdot 0,8^2 + 2 \cdot 1,2^2 - 2 \cdot 1,2 \cdot 0,8) + \frac{1,6}{6}(6 \cdot 1,2^2) + \frac{1,2}{6}(2 \cdot 1,2^2) = 3,8.$$

$$\delta_{22}EJ_x = \frac{1,6}{6}(2 \cdot 1,6^2) + \frac{2}{6}(2 \cdot 1,6^2) = 3,07.$$

$$\delta_{12}EJ_x = \frac{2}{6}(2 \cdot 1,6 \cdot 1,2 - 1,6 \cdot 0,8) + \frac{1,6}{6}(2 \cdot 1,6 \cdot 1,2 + 1,6 \cdot 1,2) = 2,39.$$

Виконаємо перевірку правильності обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь.

Для цього побудуємо епюру від сумарної дії одиничних силових факторів X_1 та X_2 (рис 44,е).

$$\begin{aligned} \delta_{(1+2)(1+2)} E J_x &= \frac{0,8}{6} (2 \cdot 0,8^2) + \frac{2}{6} (2 \cdot 0,8^2 + 2 \cdot 2,8^2 - 2 \cdot 2,8 \cdot 0,8) + \\ &+ \frac{1,6}{6} (2 \cdot 1,2^2 + 2 \cdot 2,8^2 + 2 \cdot 2,8 \cdot 1,2) + \frac{1,2}{6} (2 \cdot 1,2^2) = 11,651; \\ \delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} &= \delta_{(1+2)(1+2)}; \\ 3,8 + 3,07 + 2 \cdot 2,39 &= 11,651; \\ 11,65 &\approx 11,651. \end{aligned}$$

Знаходимо вантажні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} E J_x &= -\frac{0,8}{6} (2 \cdot 8 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,8) - \frac{2}{6} (2 \cdot 8 \cdot 0,8 + 2 \cdot 12,8 \cdot 1,2 - 8 \cdot 1,2 - 12,8 \cdot 0,8) - \\ &- \frac{1,6}{6} (2 \cdot 12,8 \cdot 1,2 + 12,8 \cdot 1,2) + \frac{10 \cdot 1,6^3}{24} (1,2 + 1,2) = -18,65. \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} E J_x = \frac{2}{6} (2 \cdot 12,8 \cdot (-1,6) + 8 \cdot 1,6) - \frac{1,6}{6} (2 \cdot 12,8 \cdot 1,6) + \frac{10 \cdot 1,6^3}{24} (1,6) = -17,58.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(1+2)p} E J_x &= -\frac{0,8}{6} (2 \cdot 8 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,8) - \frac{2}{6} (2 \cdot 8 \cdot 0,8 + 2 \cdot 12,8 \cdot 2,8 - 8 \cdot 2,8 - \\ &- 12,8 \cdot 0,8) - \frac{1,6}{6} (2 \cdot 12,8 \cdot 2,8 + 12,8 \cdot 1,2) + \frac{10 \cdot 1,6^3}{24} (1,2 + 2,8) = -36,23 \end{aligned}$$

Перевірка

$$\begin{aligned} D_{1p} &= D_{2p} = D_{(1+2)p}; \\ -18,65 - 17,58 &= -36,23 \end{aligned}$$

Складаємо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3,8 X_1 + 2,39 X_2 - 18,65 = 0 \\ 3,39 X_1 + 3,07 X_2 - 17,58 = 0 \end{cases}$$

Знаходимо невідомі за допомогою метода Гауса, для цього перемножимо друге рівняння системи на $\left(-\frac{3,8}{2,39}\right)$ та додаємо його до першого.

$$\begin{cases} 3,8X_1 + 2,39 X_2 - 18,65 = 0 \\ 3,39X_1 + 3,07 X_2 - 17,58 = 0 \end{cases} \left\| \times \left(-\frac{3,8}{2,39}\right)\right.$$

$$\begin{cases} 5,08X_1 + 3,24 X_2 - 18,65 = 0 \\ -2,49 X_2 - 9,3 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння:

$$X_2 = 3,73 \text{ кН.}$$

Підставляємо знайдене X_2 у перше рівняння:

$$3,8X_1 + 2,39 \cdot (3,73) - 18,65 = 0$$

$$X_1 = 2,56 \text{ кН;}$$

Прикладаємо зовнішні навантаження та знайдені X_1 та X_2 до основної системи – отримуємо еквівалентну систему (рис. 44, ж).

Визначаємо реакції:

$$\sum P_y = 0; R_a = -X_1 = -4,59 \text{ кН.}$$

$$\sum M_a = 0; qb\left(\frac{b}{2} + c\right) + M - X_1 \cdot (d + a) - X_2 \cdot (b + c) - H_b \cdot c = 0;$$

$$10 \cdot 1,6 \cdot 2,8 + 8 - 2,56 \cdot 2 - 3,73 \cdot 3,6 - H_b \cdot 2 = 0;$$

$$34,252 - 2H_b = 0;$$

$$H_b = 17,126 \text{ кН.}$$

$$\sum M_c = 0; qb\left(\frac{b}{2}\right) + M - X_1 \cdot (a + d) - X_2 \cdot b - H_a \cdot c = 0;$$

$$10 \cdot 1,6 \cdot 0,8 + 8 - 2,56 \cdot 2 - 3,73 \cdot 1,6 - H_a \cdot 2 = 0;$$

$$9,712 - 2H_a = 0;$$

$$H_a = 4,856 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_x = 0; H_a - H_b + q \cdot b - X_2 = 0;$$

$$4,856 - 17,126 + 10 \cdot 1,6 - 3,73 = 0;$$

$$20,856 - 20,856 = 0$$

Будуємо остаточні епюри подовжніх (рис. 44, к), поперечних сил (рис. 44, л) і згинальних моментів (рис 44, м):

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = -H_a &= -4,856 \text{кН}; \\ N_3 = N_4 = N_5 = N_6 &= -R_a = -2,56 \text{кН}; \\ N_7 = N_8 &= -X_2 = -3,73 \text{кН}; \\ Q_1 = Q_2 &= R_a = 2,56 \text{кН}; \\ Q_3 = Q_4 &= -H_a = -4,856 \text{кН}; \\ Q_5 &= -H_a + H_b = -4,856 + 17,126 = 12,27 \text{кН}; \\ Q_6 &= -X_2 = -3,73 \text{кН}; \\ Q_7 = Q_8 &= -X_1 = -2,56 \text{кН}. \end{aligned}$$

$$z = \frac{12,27}{12} = 1,227 \text{м}.$$

$$\begin{aligned} M_1 = M &= 8 \text{кНм}; \\ M_2 = M + R_a \cdot d &= 8 - 2,56 \cdot 0,8 = 5,95 \text{кНм}; \\ M_3 = -M_2 &= -5,95 \text{кНм}; \\ M_5 &= -5,95 + 4,856 \cdot 2 = 3,76 \text{кНм}; \\ M_7 = X_1 \cdot a &= 2,56 \cdot 1,2 = 3,08 \text{кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$M_{\text{екс}} = -5,95 + 4,856 \cdot (2 + 1,227) - 10 \frac{1,227^2}{2} = -3,76 \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Виконаємо деформаційну перевірку:

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} E J_x &= -\frac{0,8}{6} (2 \cdot 5,95 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,8) - \frac{2}{6} (2 \cdot 5,95 \cdot 0,8 + 2 \cdot 3,76 \cdot 1,2 - \\ &- 5,95 \cdot 1,2 - 3,76 \cdot 0,8) + \frac{1,6}{6} (2 \cdot 3,76 \cdot (-1,2) + 2 \cdot 3,08 \cdot 1,2 + 3,08 \cdot 1,2 - \\ &- 3,76 \cdot 1,2) + \frac{10 \cdot 1,6^3}{24} (1,2 + 1,2) + \frac{1,2}{6} (2 \cdot 3,08 \cdot 1,2) = -2,122 - 2,799 - \\ &- 0,653 + 4,096 + 1,478 = 5,574 - 5,574 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} E J_x &= -\frac{2}{6} (2 \cdot 3,76 \cdot 1,6 + 5,95 \cdot 1,6) - \frac{1,6}{6} (2 \cdot 3,76 \cdot 1,6 - 3,08 \cdot 1,6) + \\ &+ \frac{10 \cdot 1,6^3}{24} (1,6) = -0,837 - 1,893 + 2,73 = 2,73 - 2,73 = 0. \end{aligned}$$

З епюри згинальних моментів $M_{\max} = 8\epsilon l \cdot i$;

Тоді з умови міцності при плоскому згинанні

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{160} 10^6 = 50 \text{ см}^3 .$$

Обираємо двотавр 12 $J_x = 350 \text{ см}^4$; $W_x = 58,4 \text{ см}^3$.

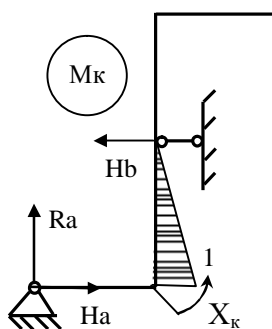


Рисунок 45

Знайдемо кут обертання точки К. Для цього прикладаємо у ній одиничний момент та будуємо епюру згинальних моментів (рис. 45), яку “перемножуємо” на епюру M_s (див. рис. 44, м):

$$\theta_k = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \left[-\frac{2}{6} (2 \cdot 5,95 \cdot 1 - 3,76 \cdot 1) \right] = -0,00388 \text{ рад.}$$

4.3 Завдання для самостійного розв’язання

На рисунку 46 зображені 24 завдання для їх самостійного розв’язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях взяті однакові числові значення величин: $a = 1 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$; $c = 3 \text{ м}$; $P = 12 \text{ кН}$; $q = 8 \text{ кН/м}$; $M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Завдання розташовані таким чином, щоб надати студентам можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого завдання до останнього.

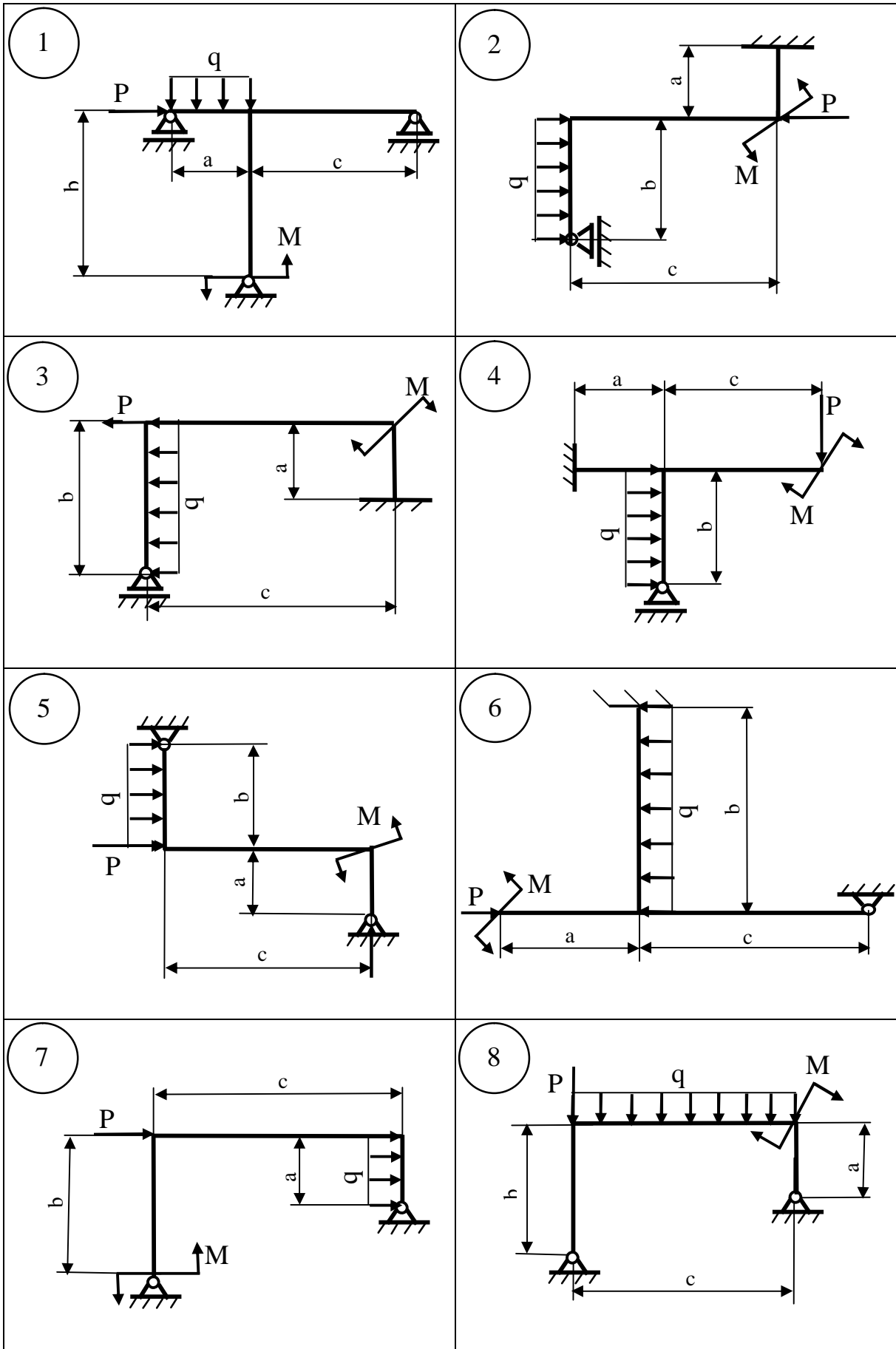


Рисунок 46

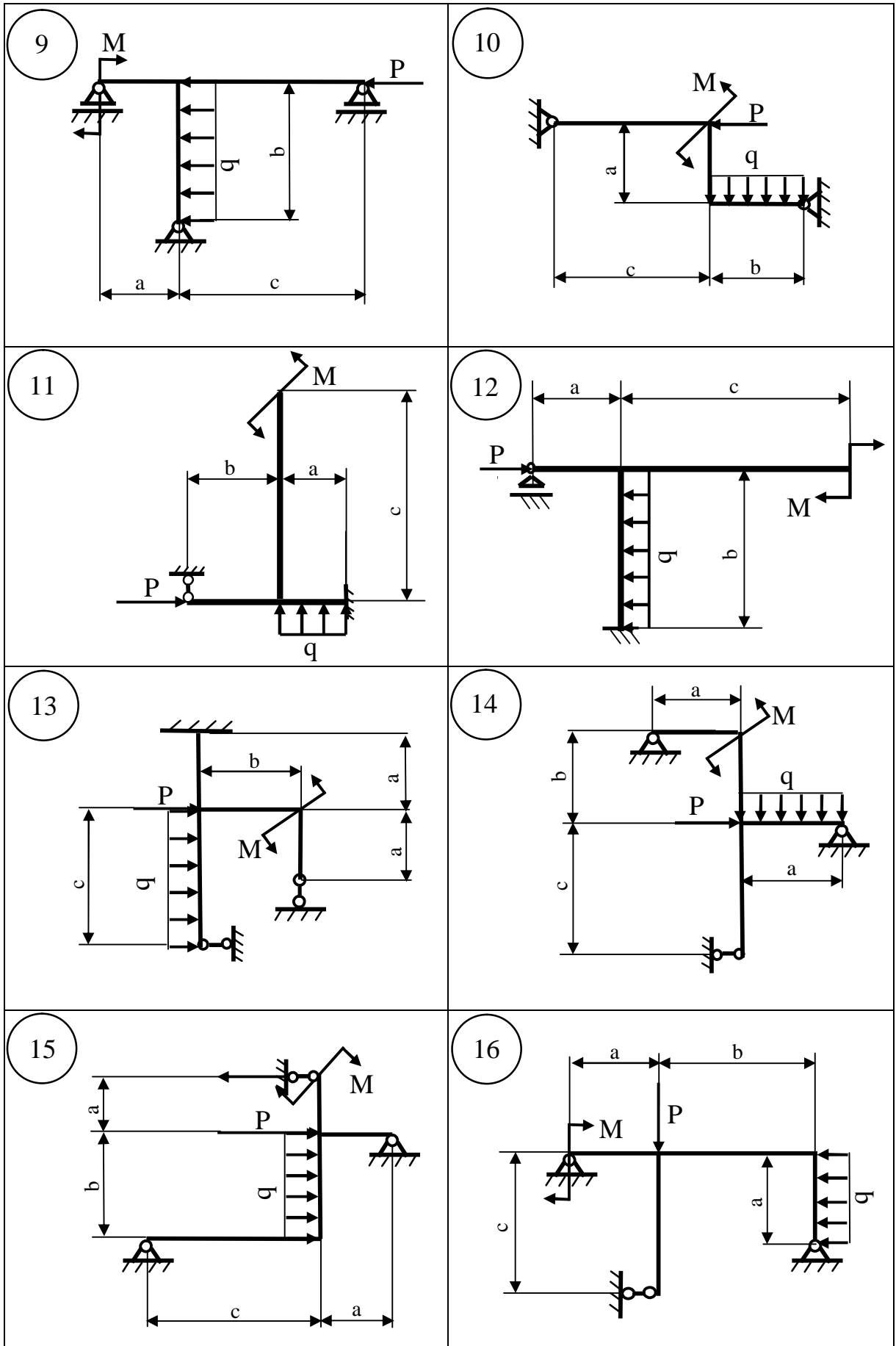


Рисунок 46, аркуш 2

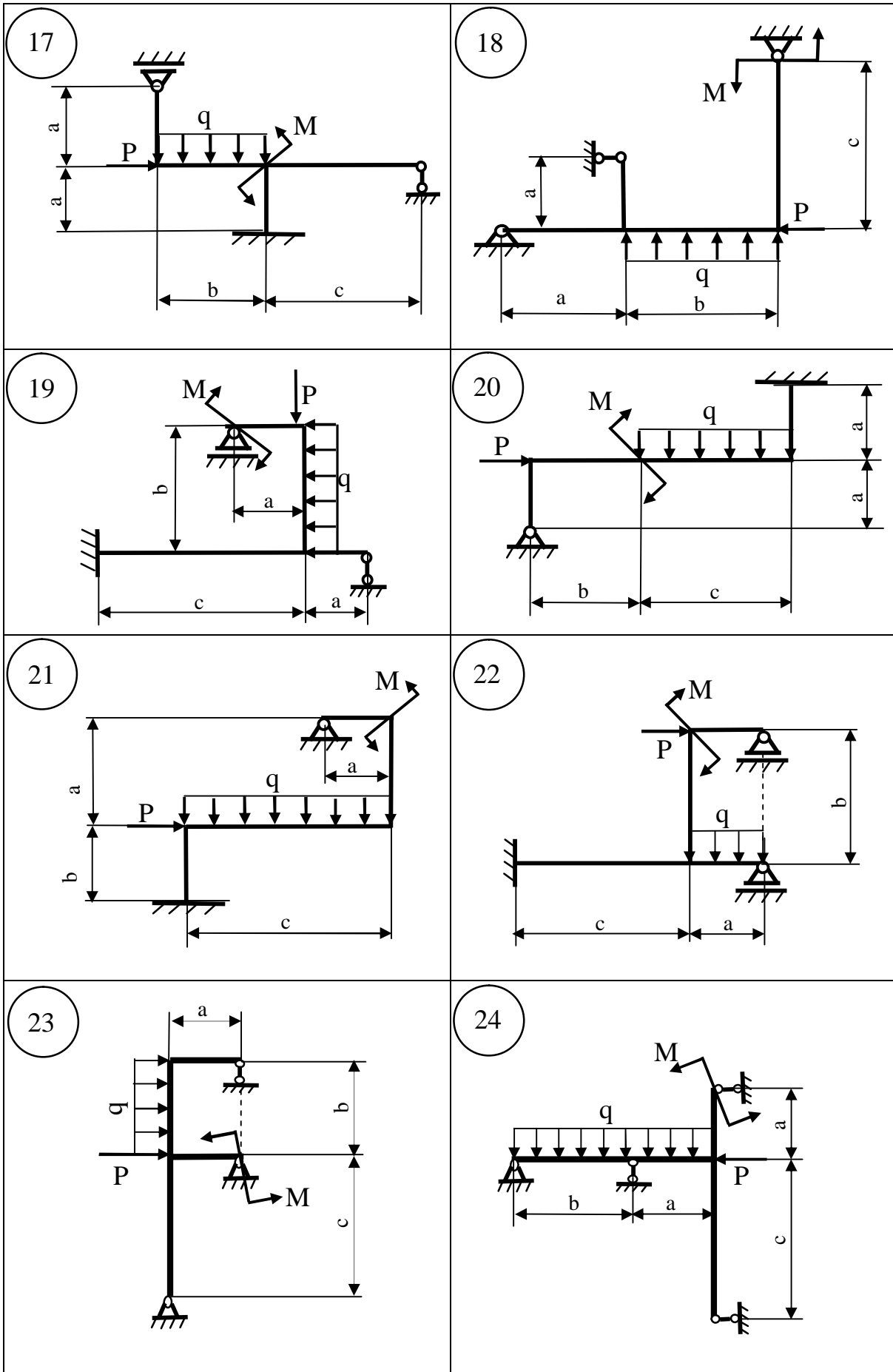


Рисунок 46, аркуш 3

4.4 Відповіді до завдань

Розв'язуючи те чи інше завдання, студент має можливість проконтролювати себе за допомогою відповідей до завдань, що наведені на рис. 47.

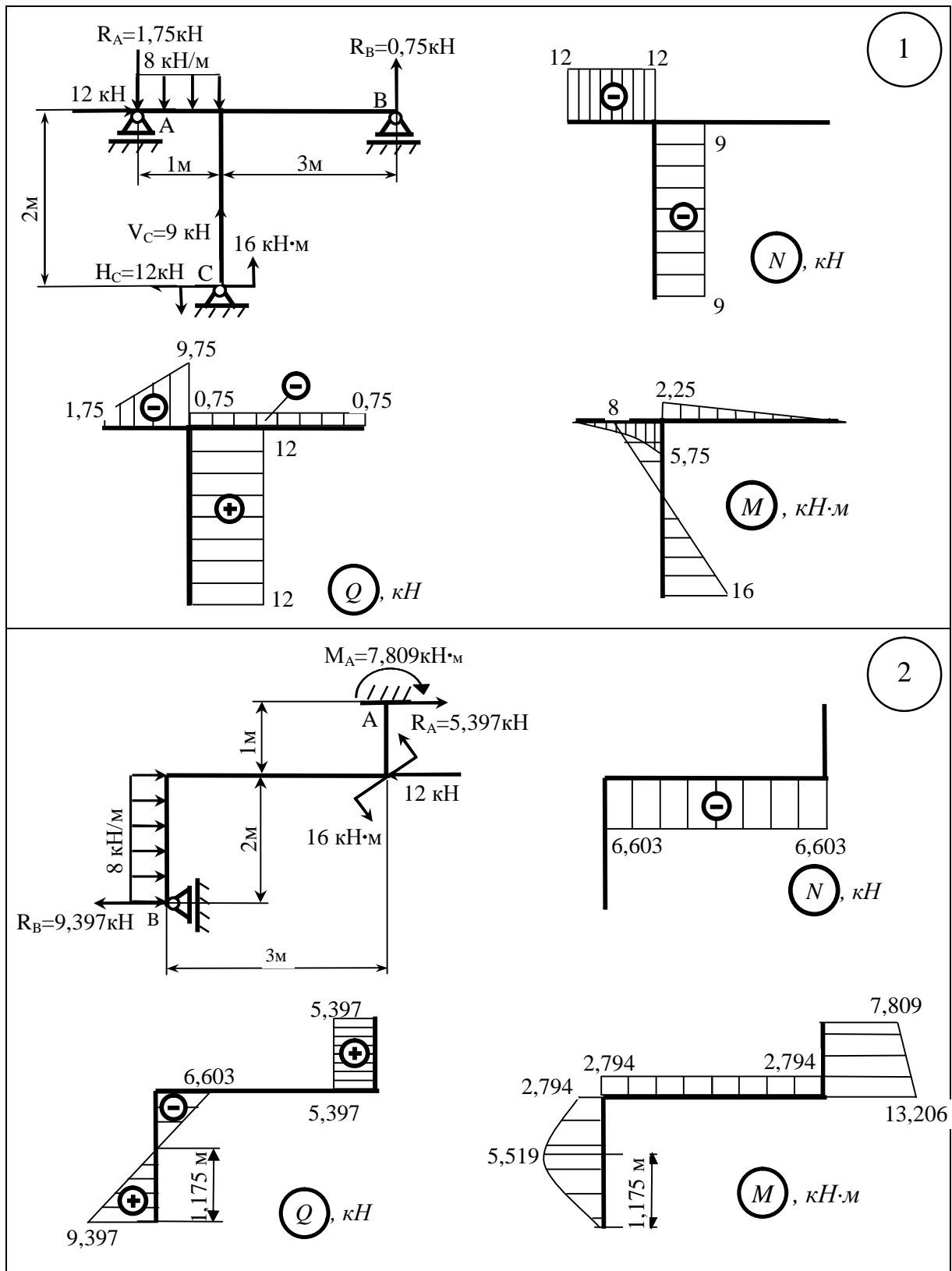


Рисунок 47

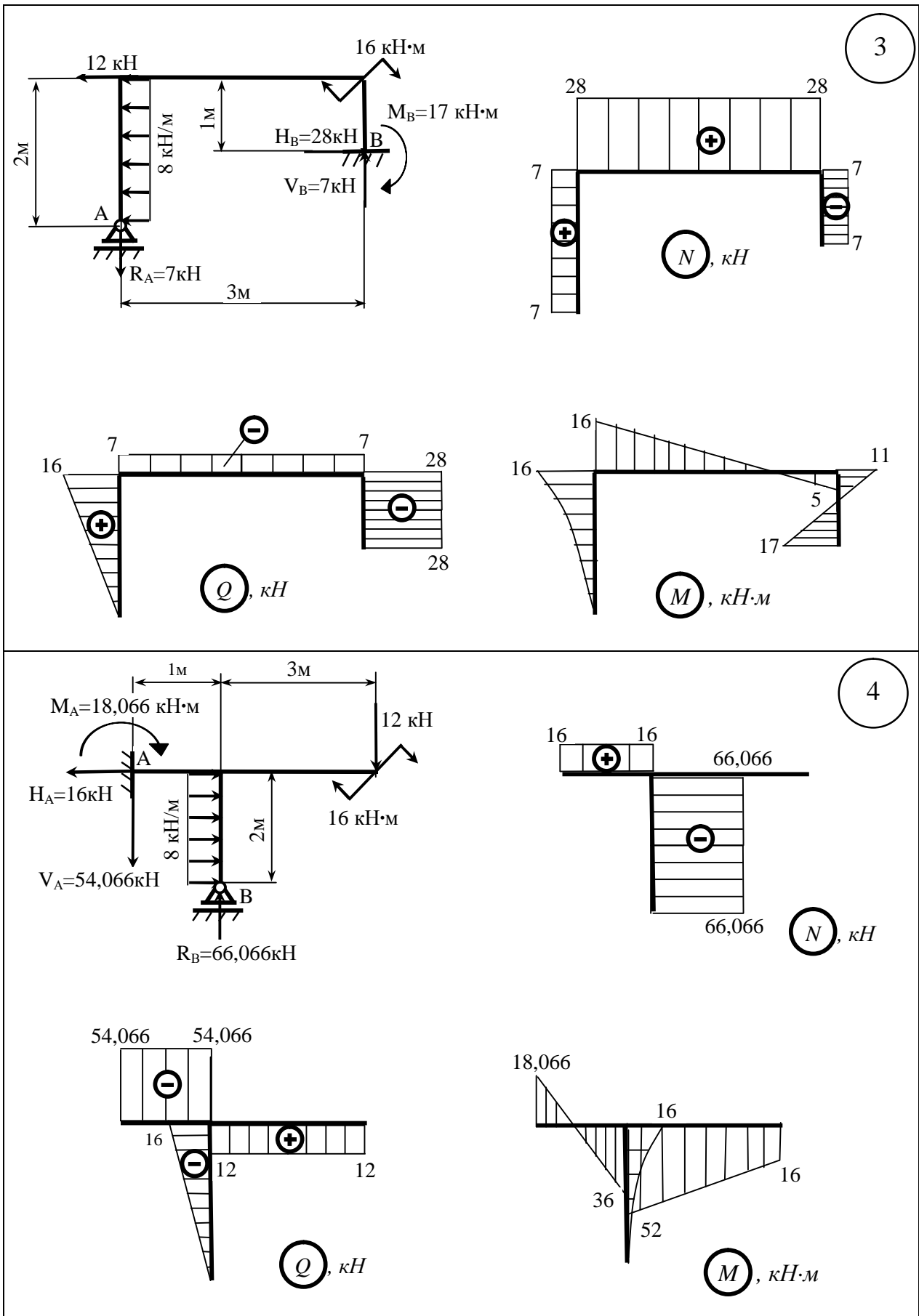


Рисунок 47, аркуш 2

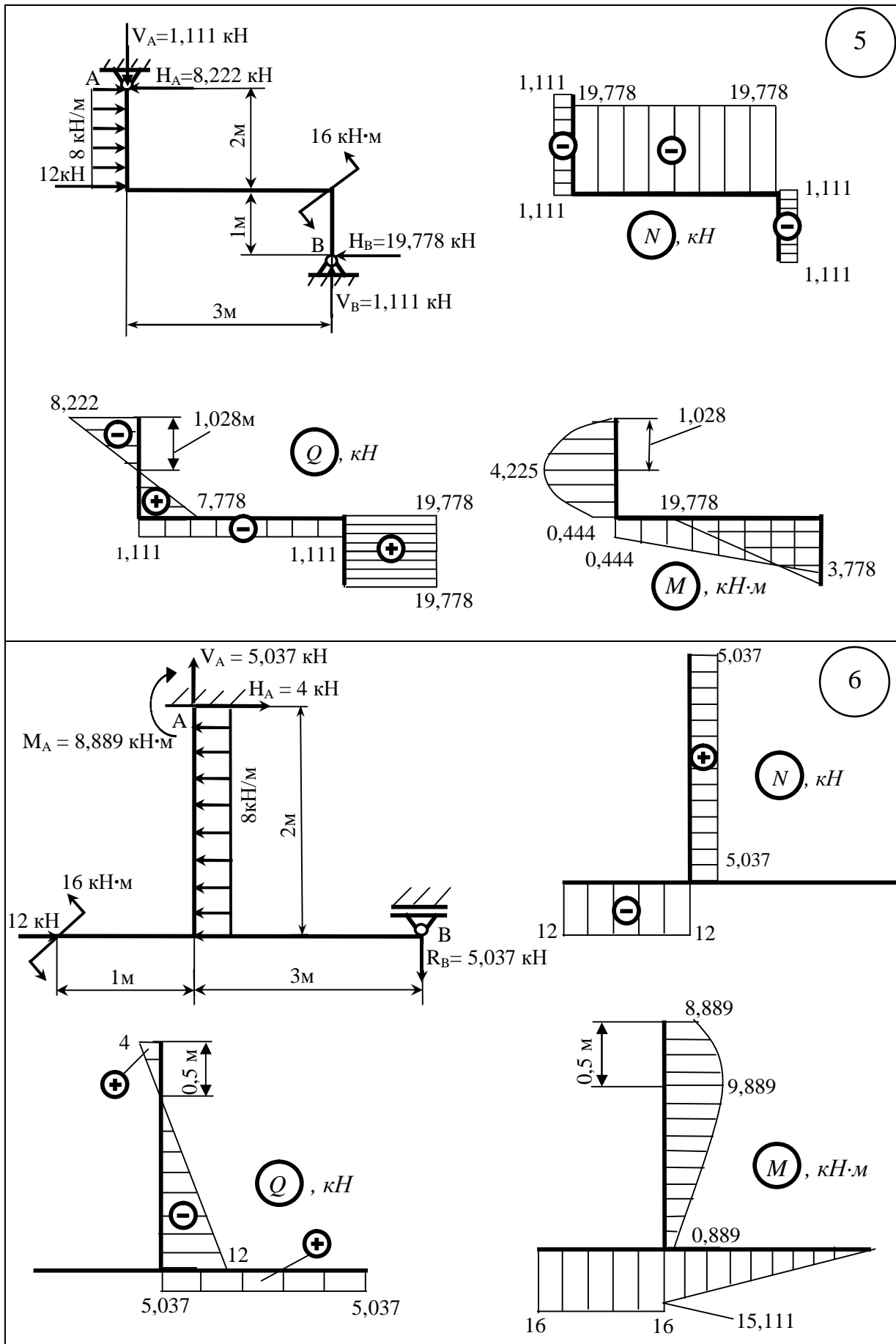


Рисунок 47, аркуш 3

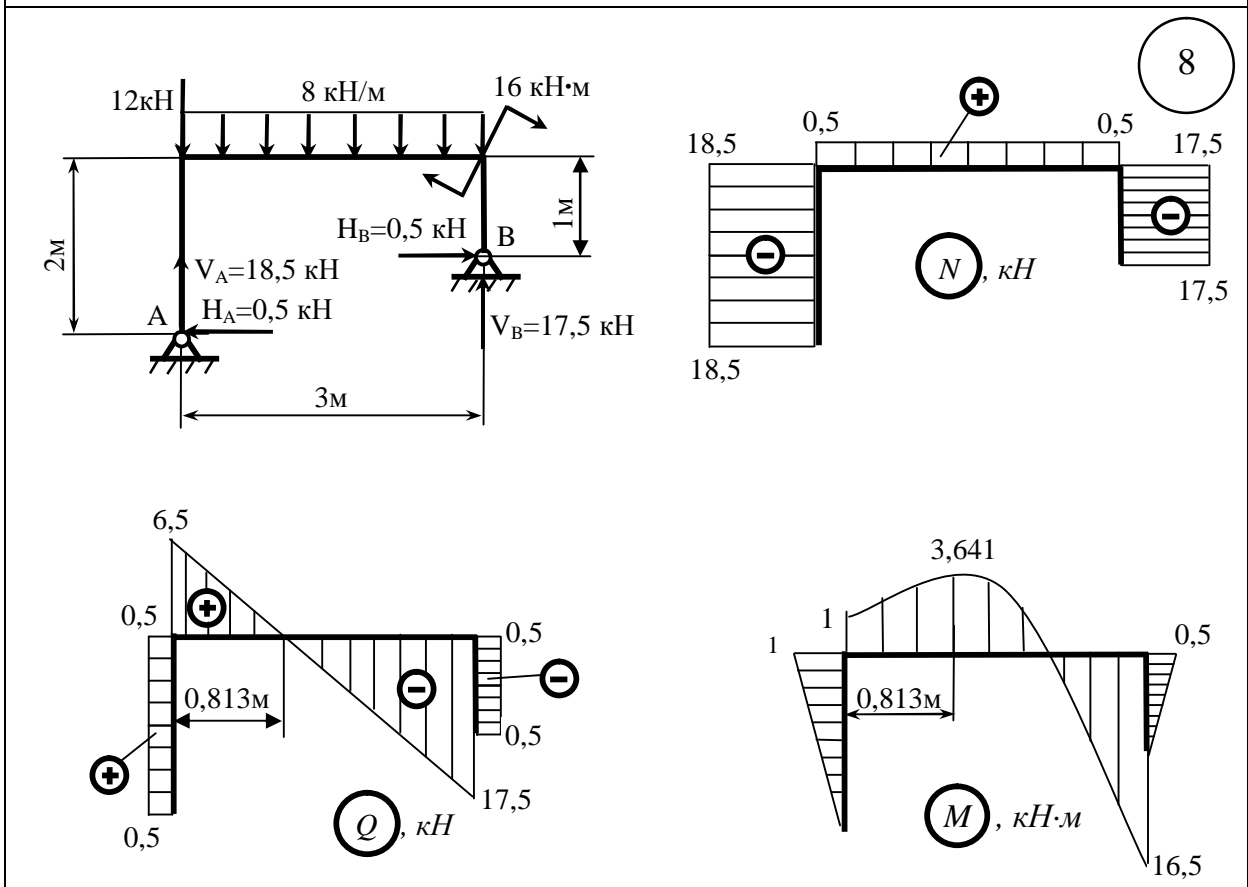
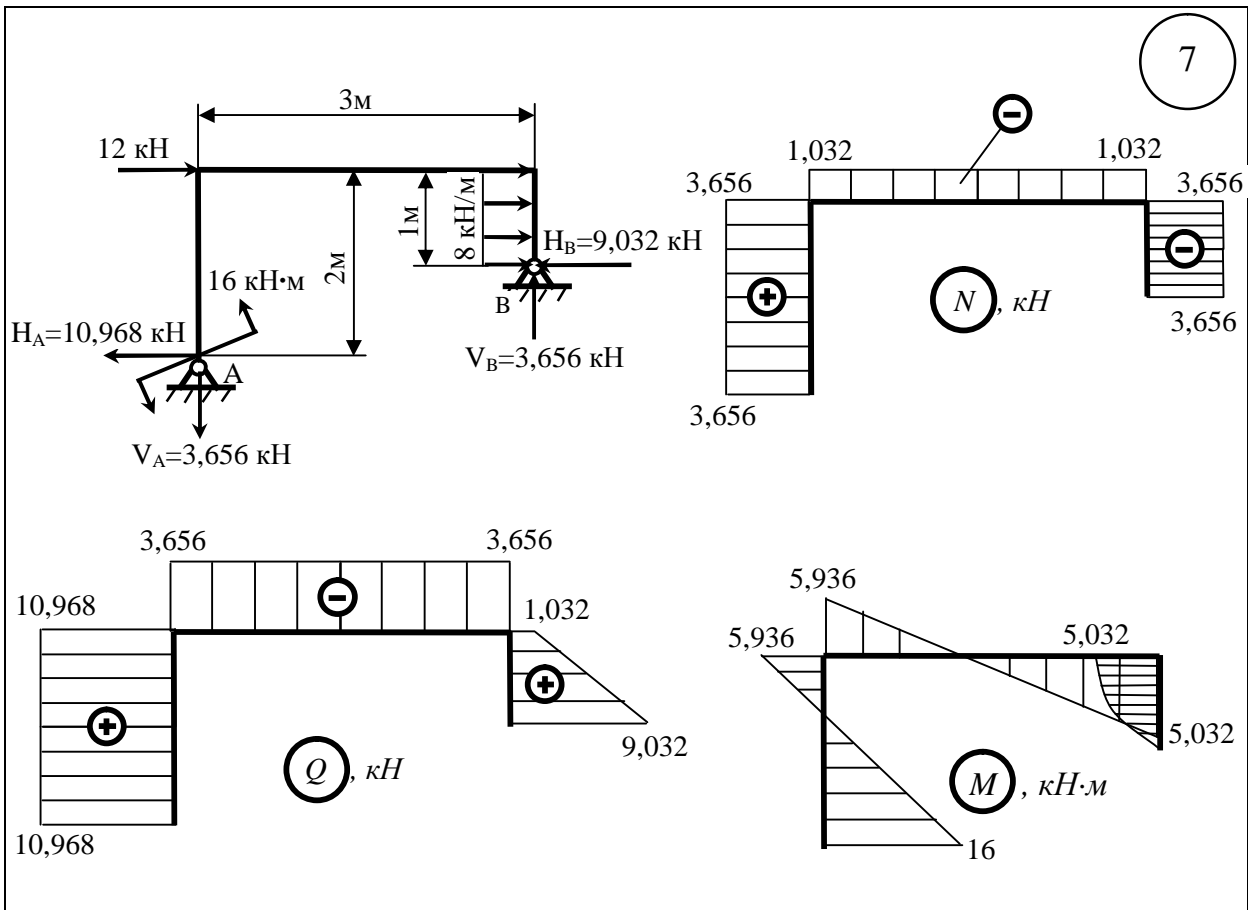


Рисунок 47, аркуш 4

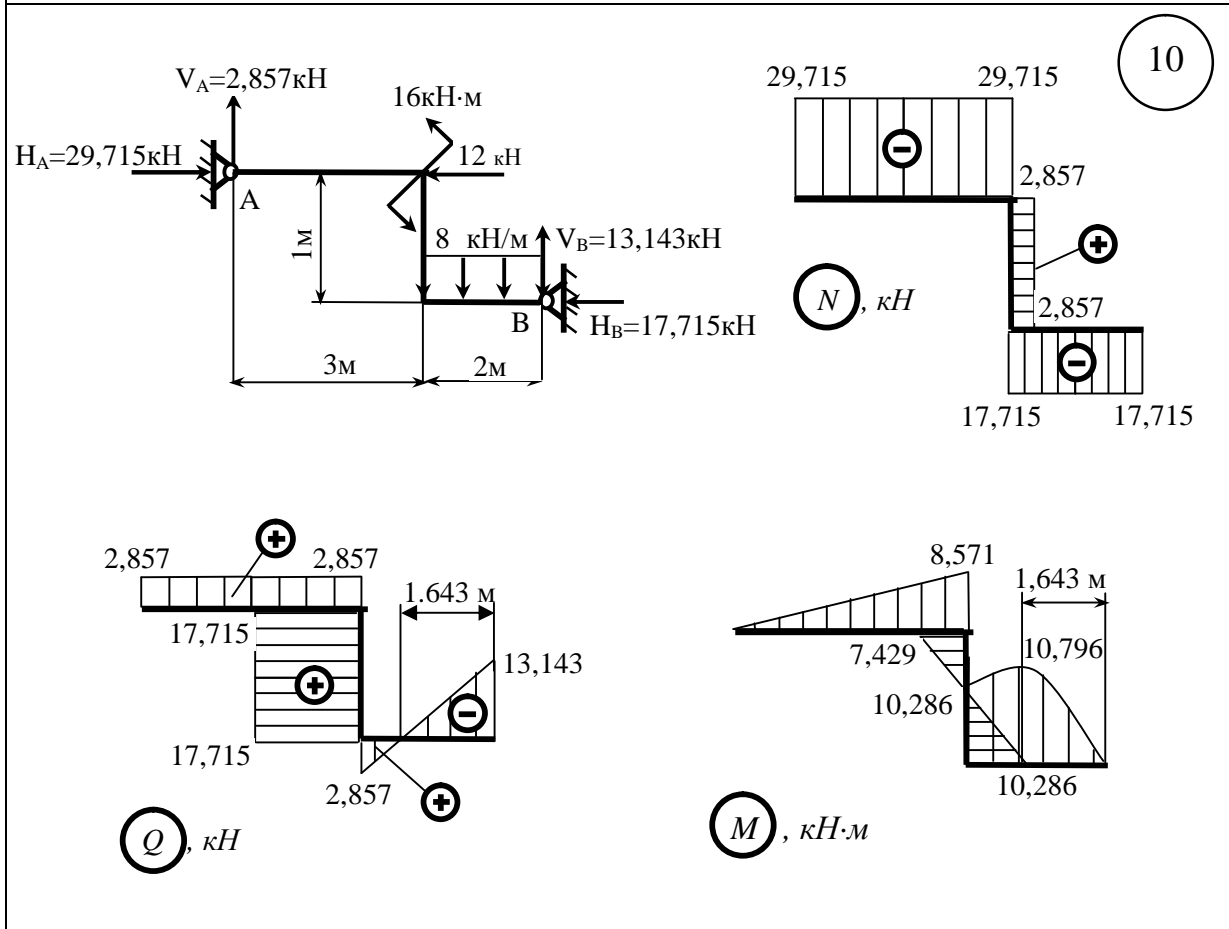
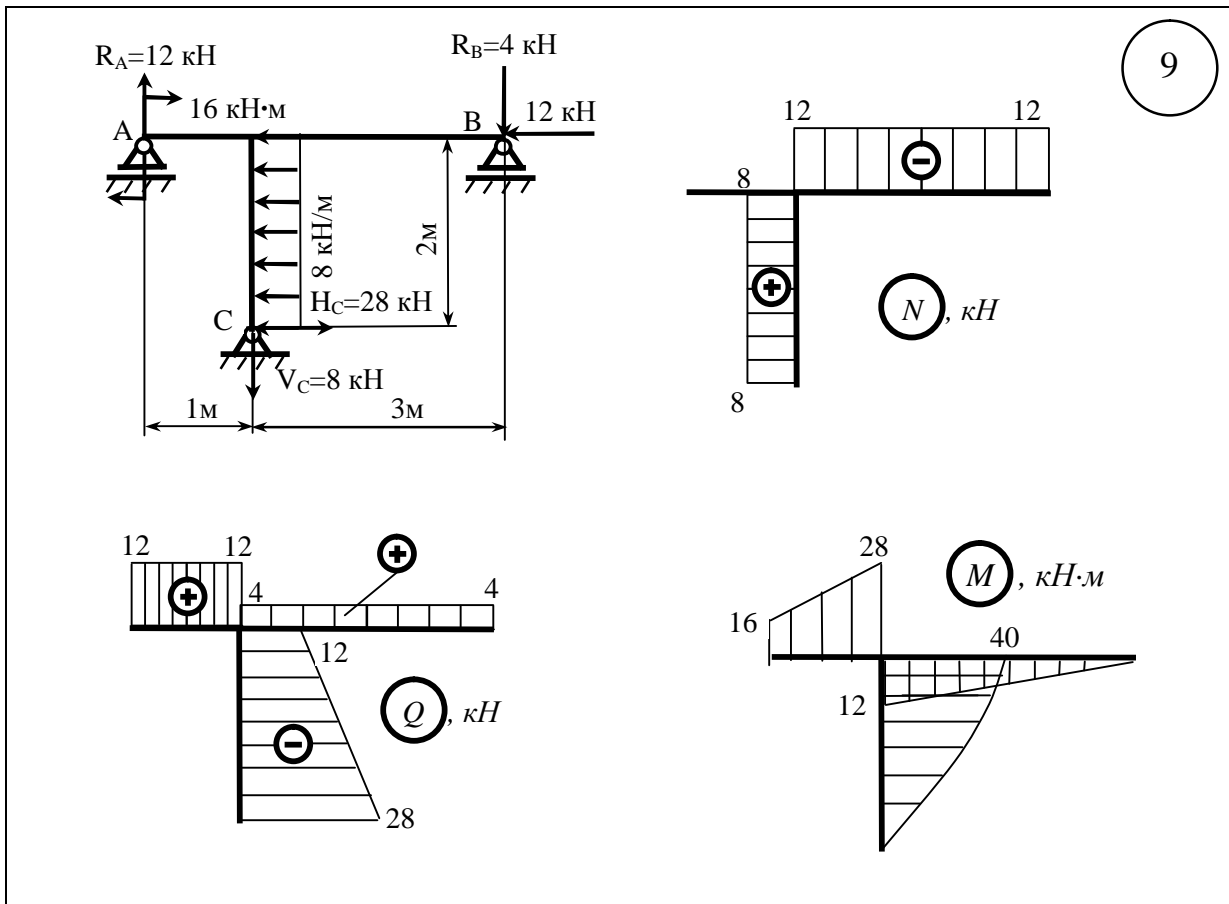


Рисунок 47, аркуш 5

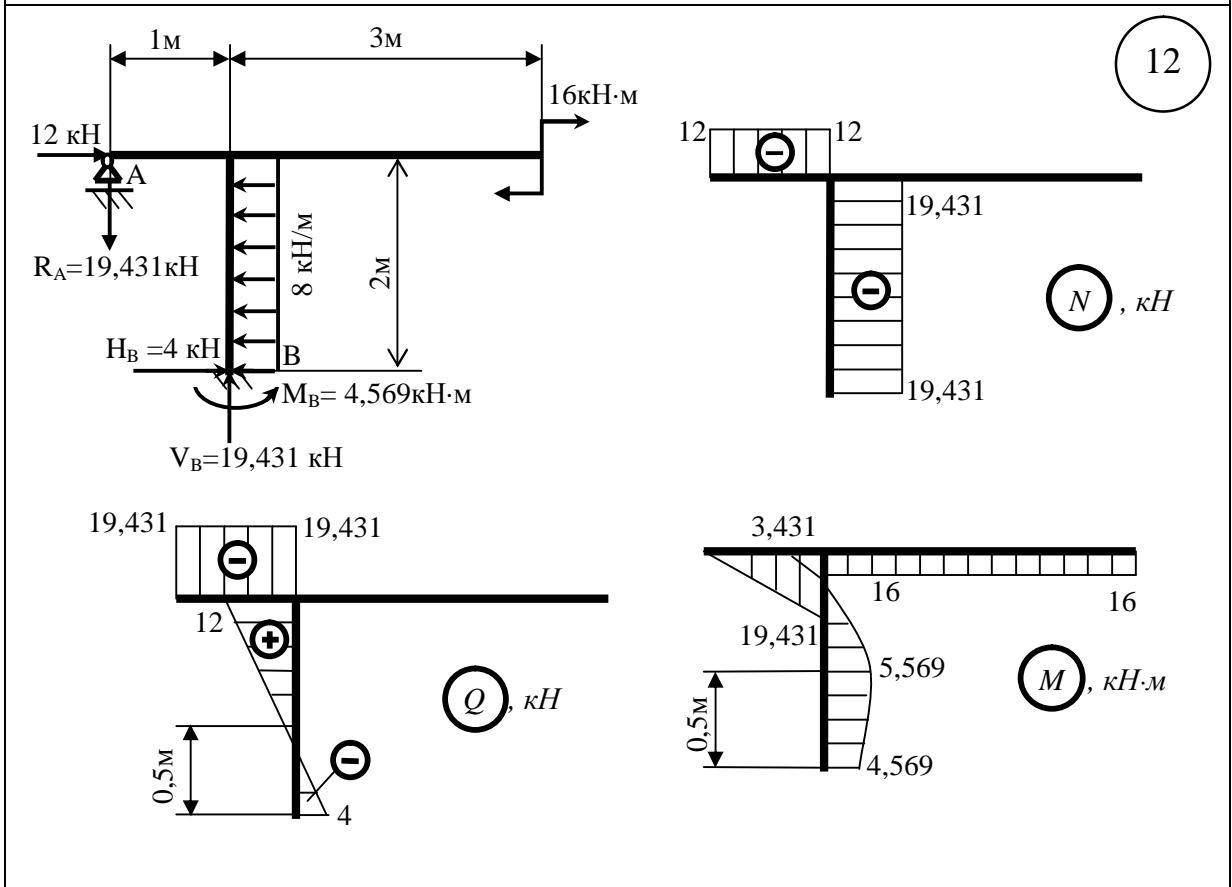
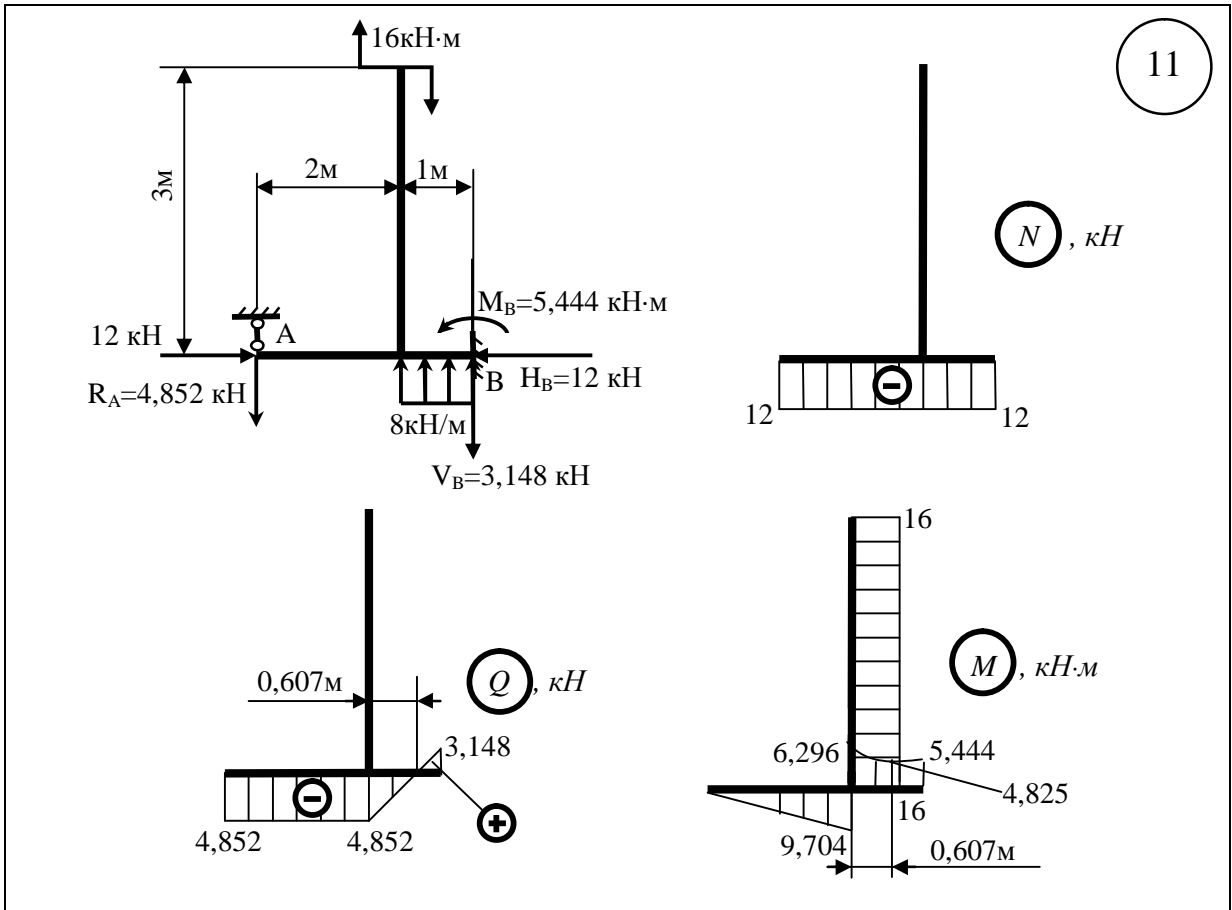


Рисунок 47, аркуш 6

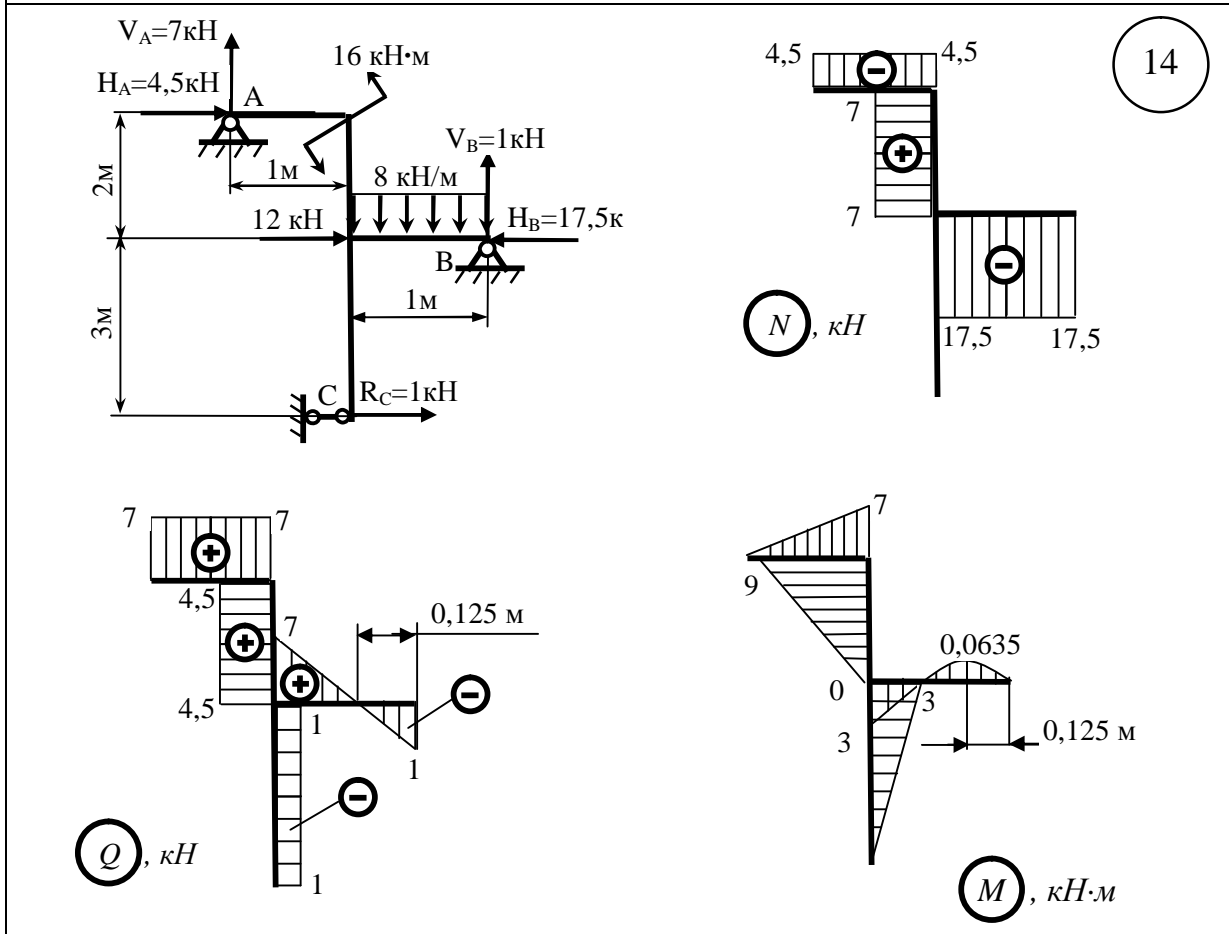
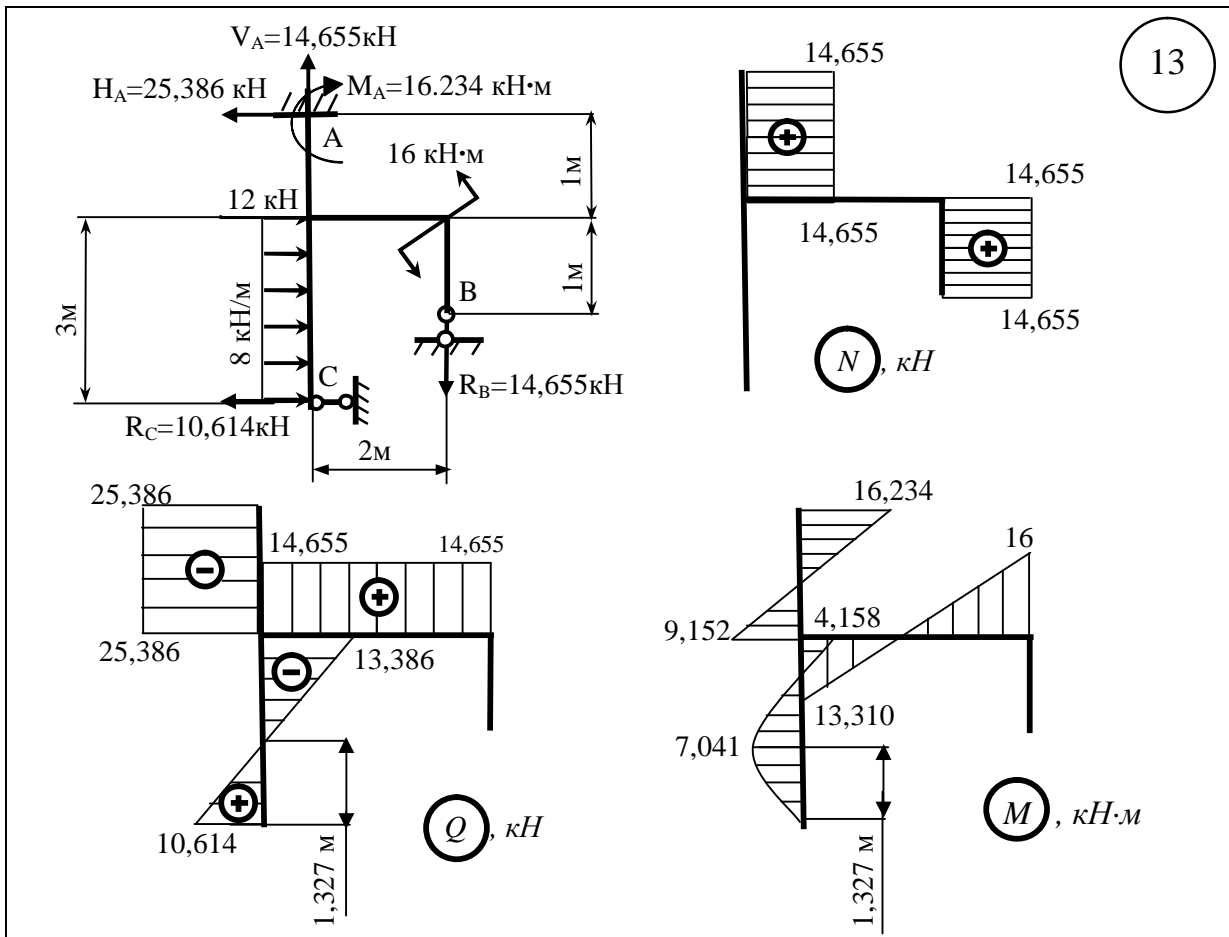


Рисунок 47, аркуш 7

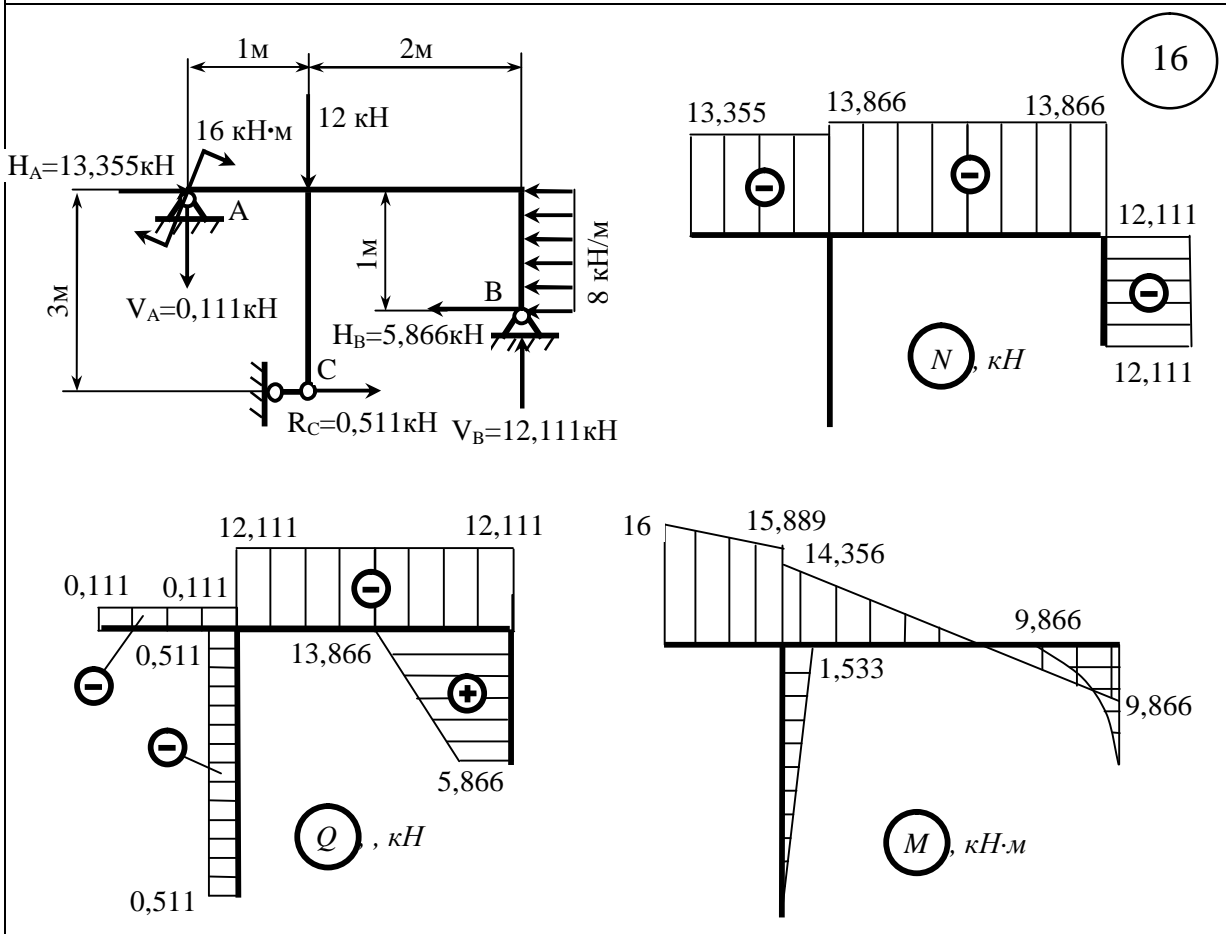
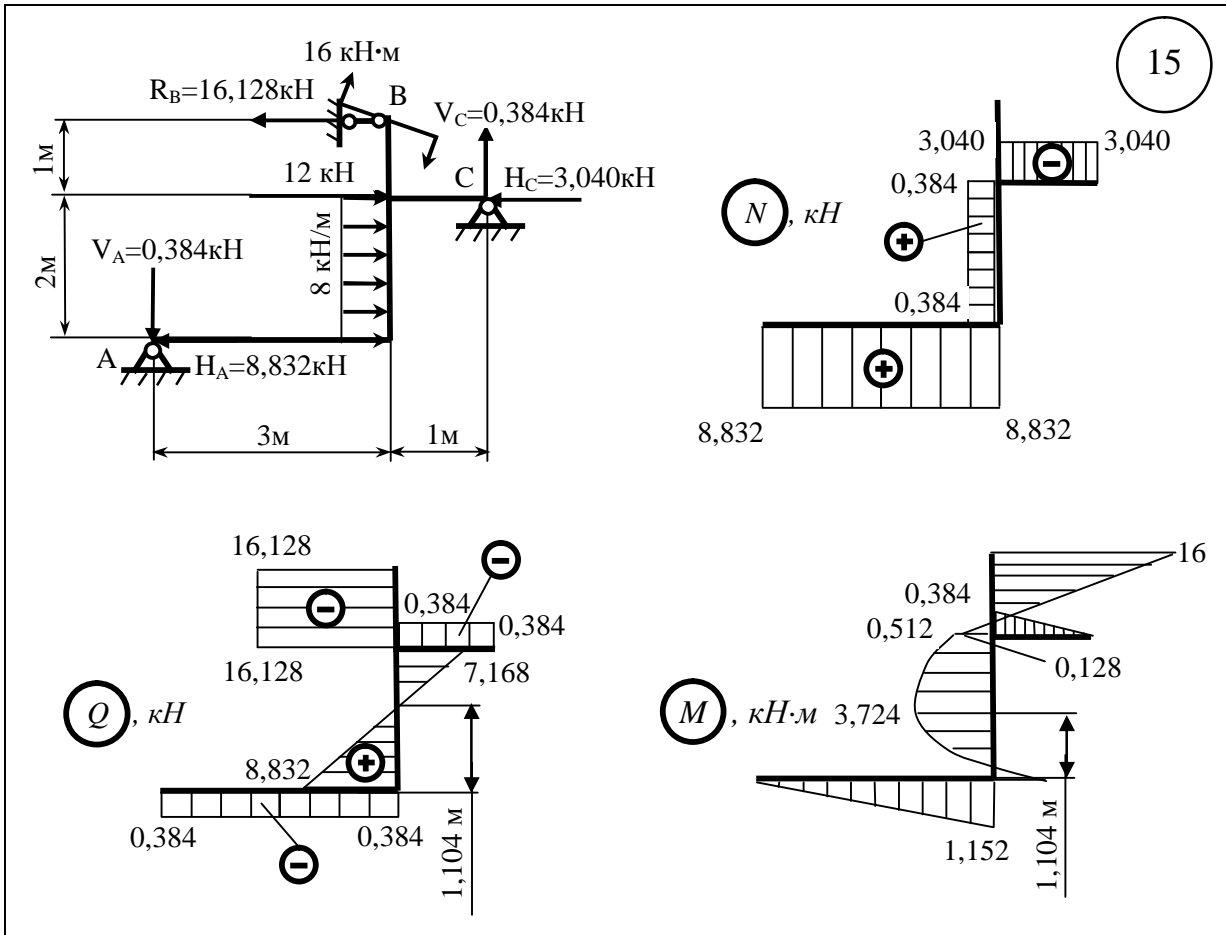


Рисунок 47, аркуш 8

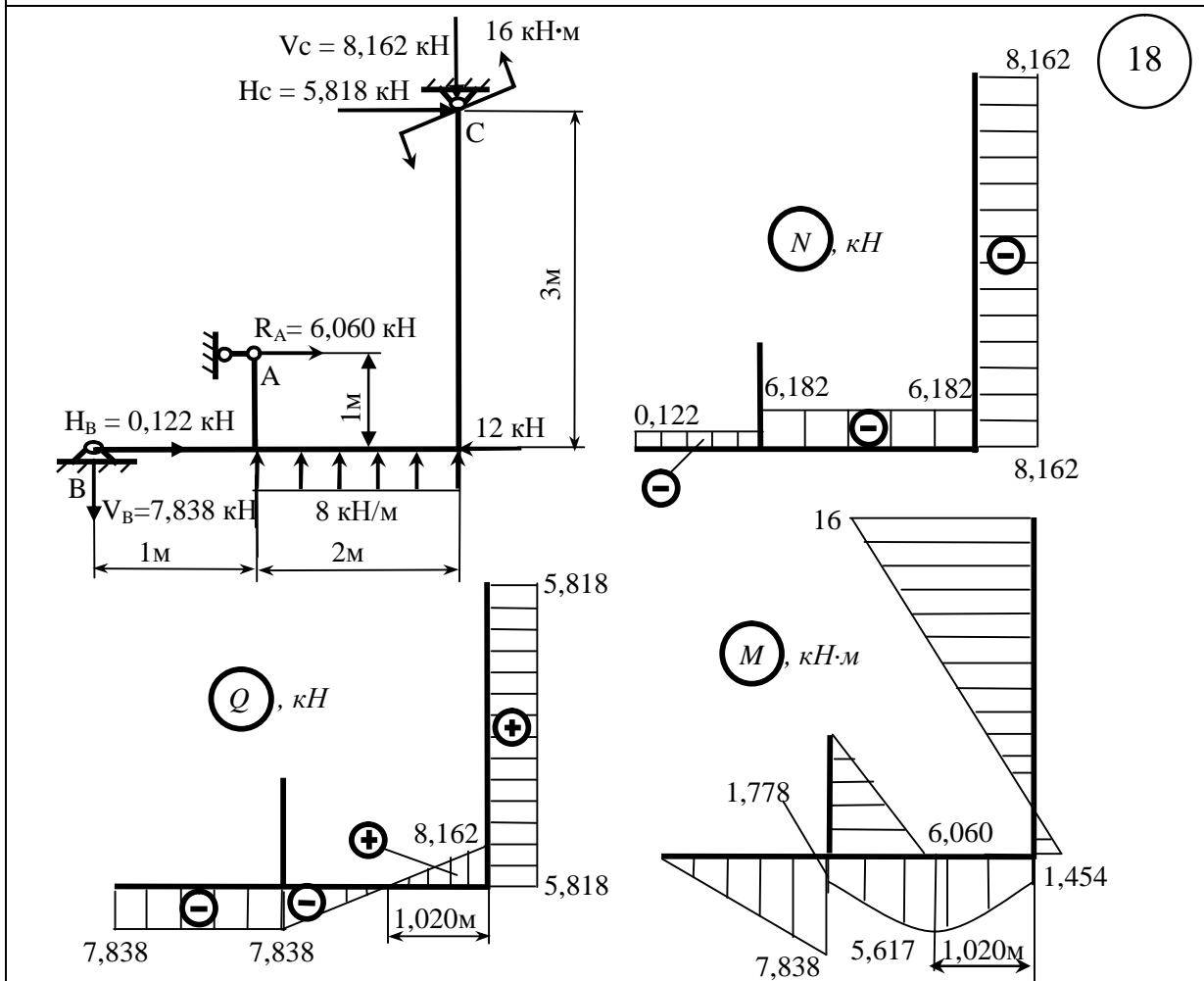
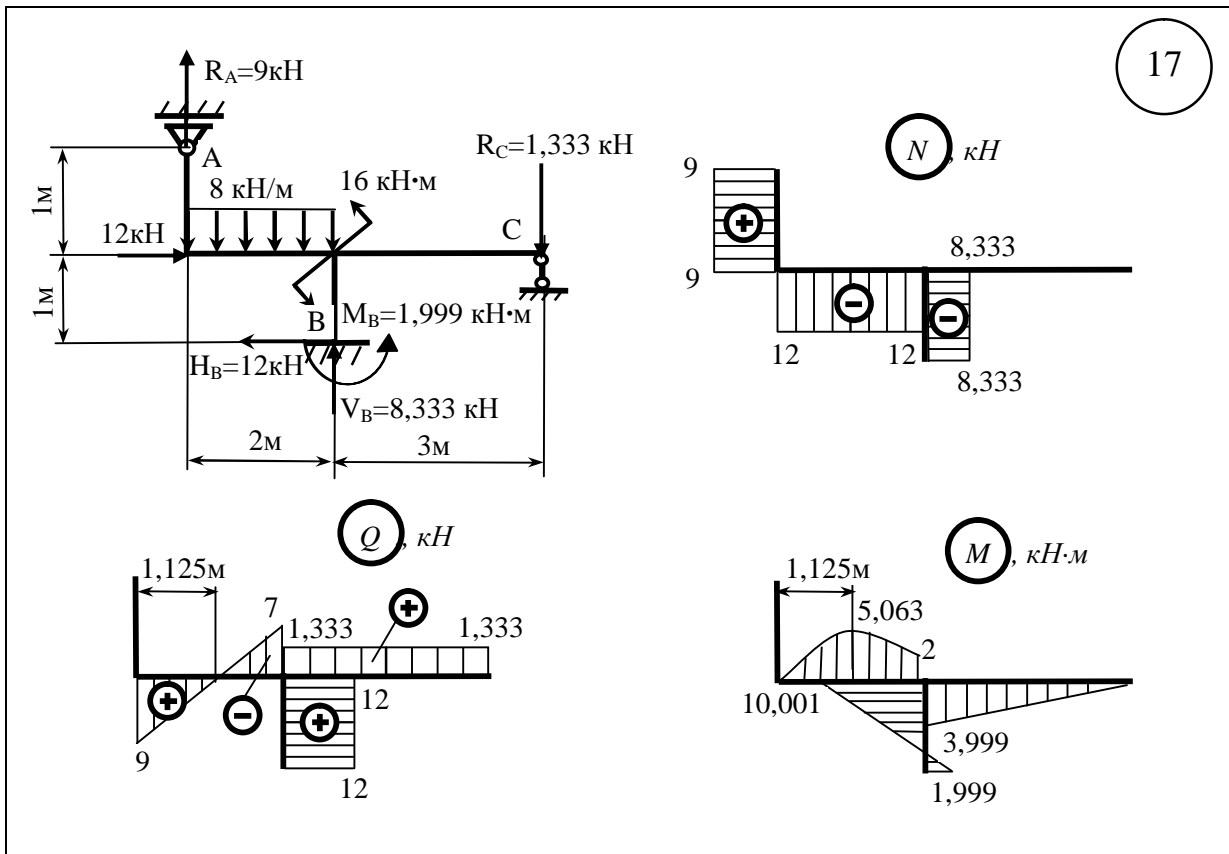


Рисунок 47, аркуш 9

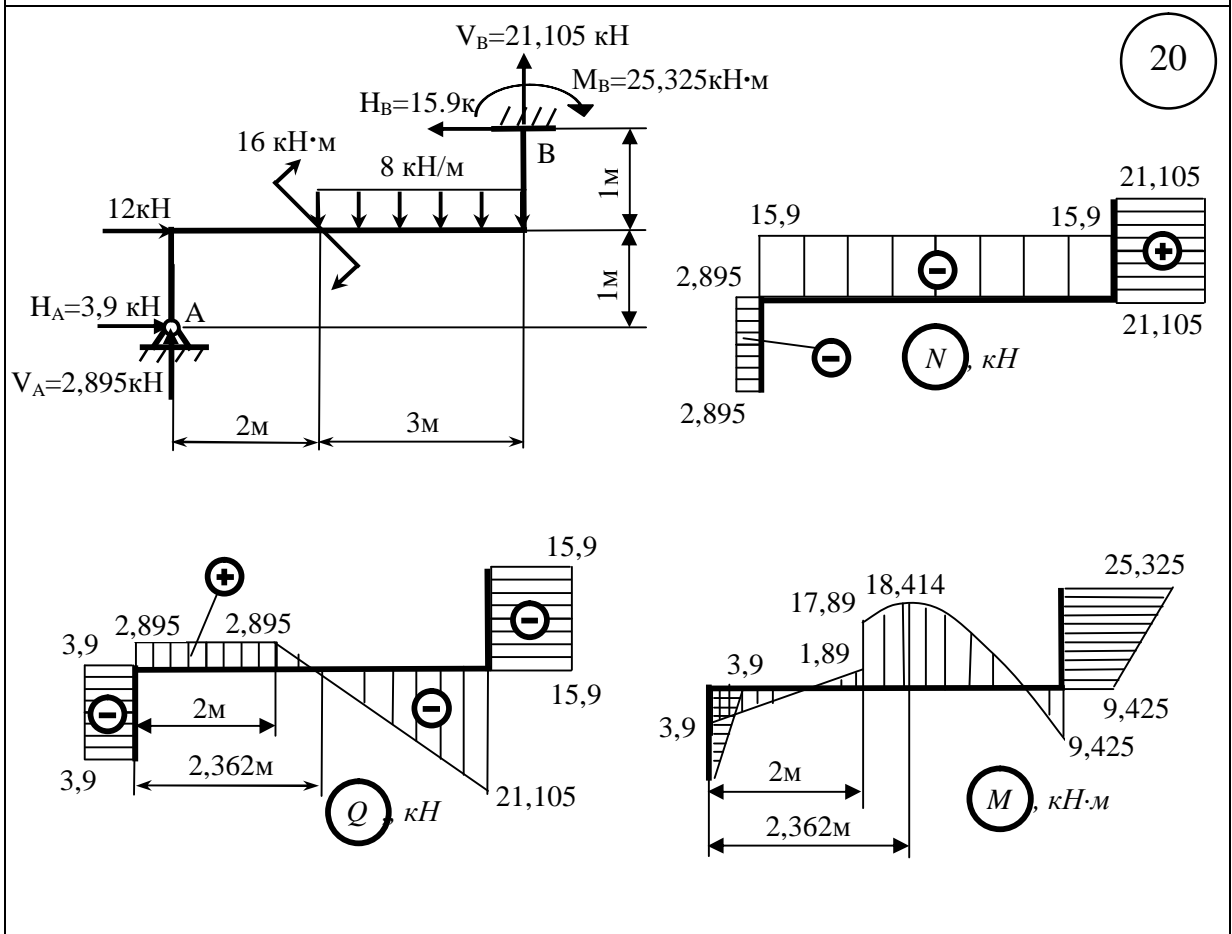
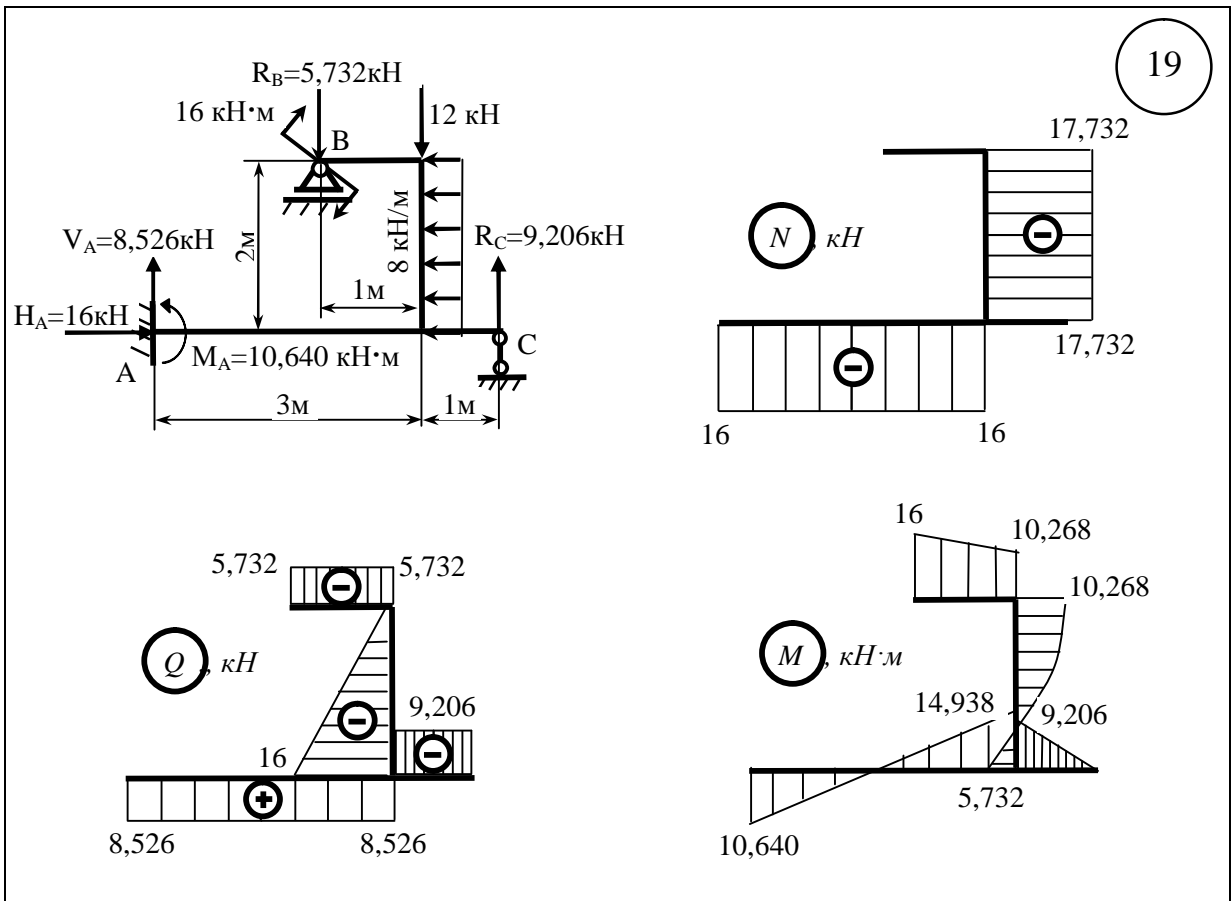


Рисунок 47, аркуш 10

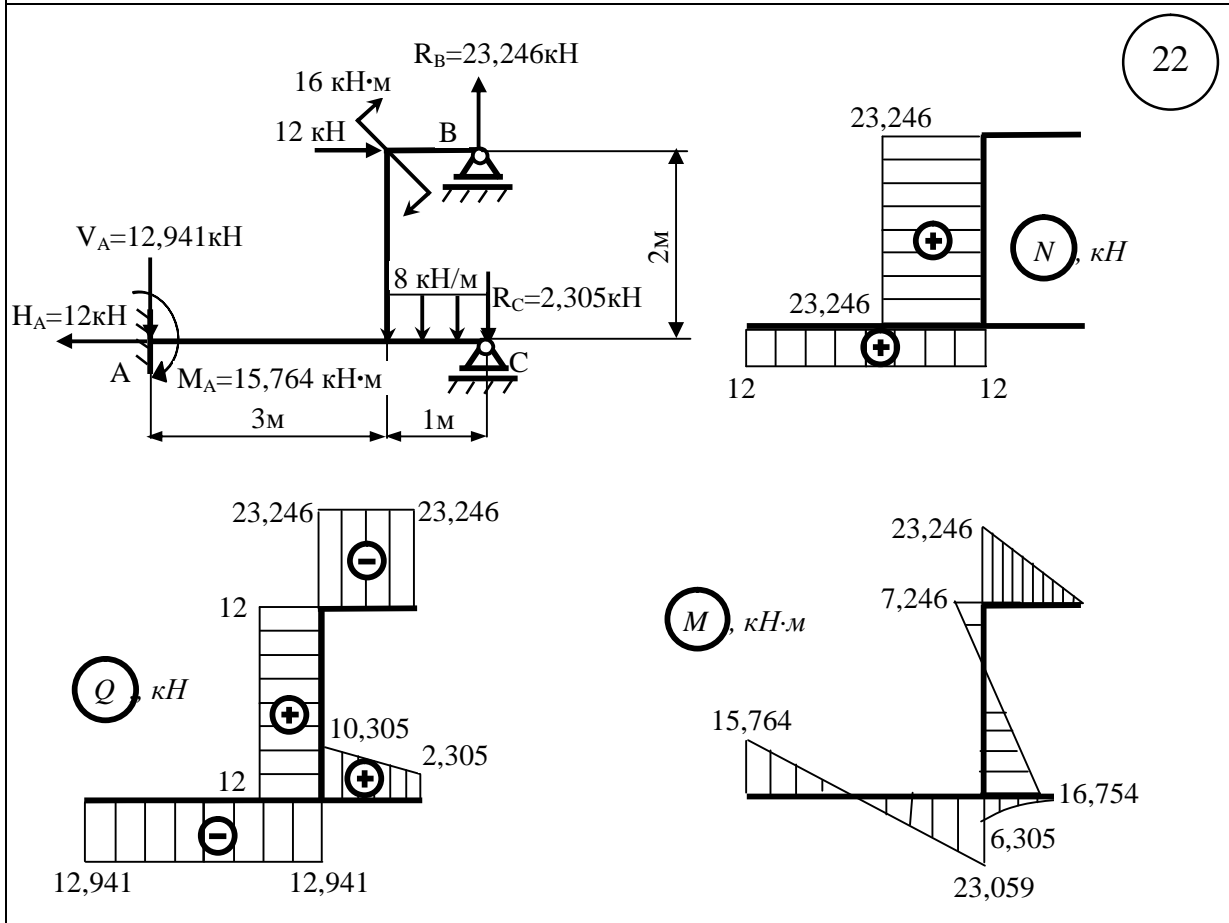
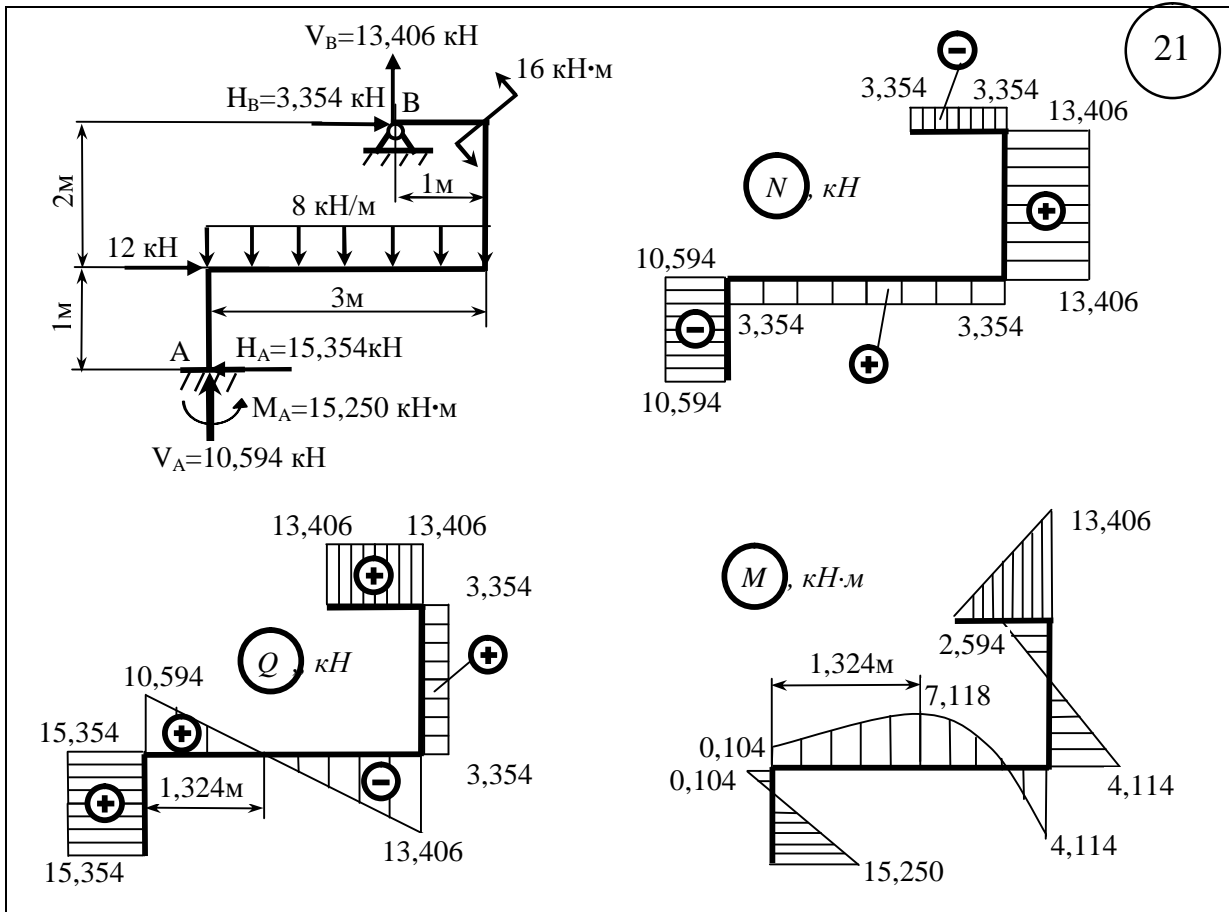


Рисунок 47, аркуш 11

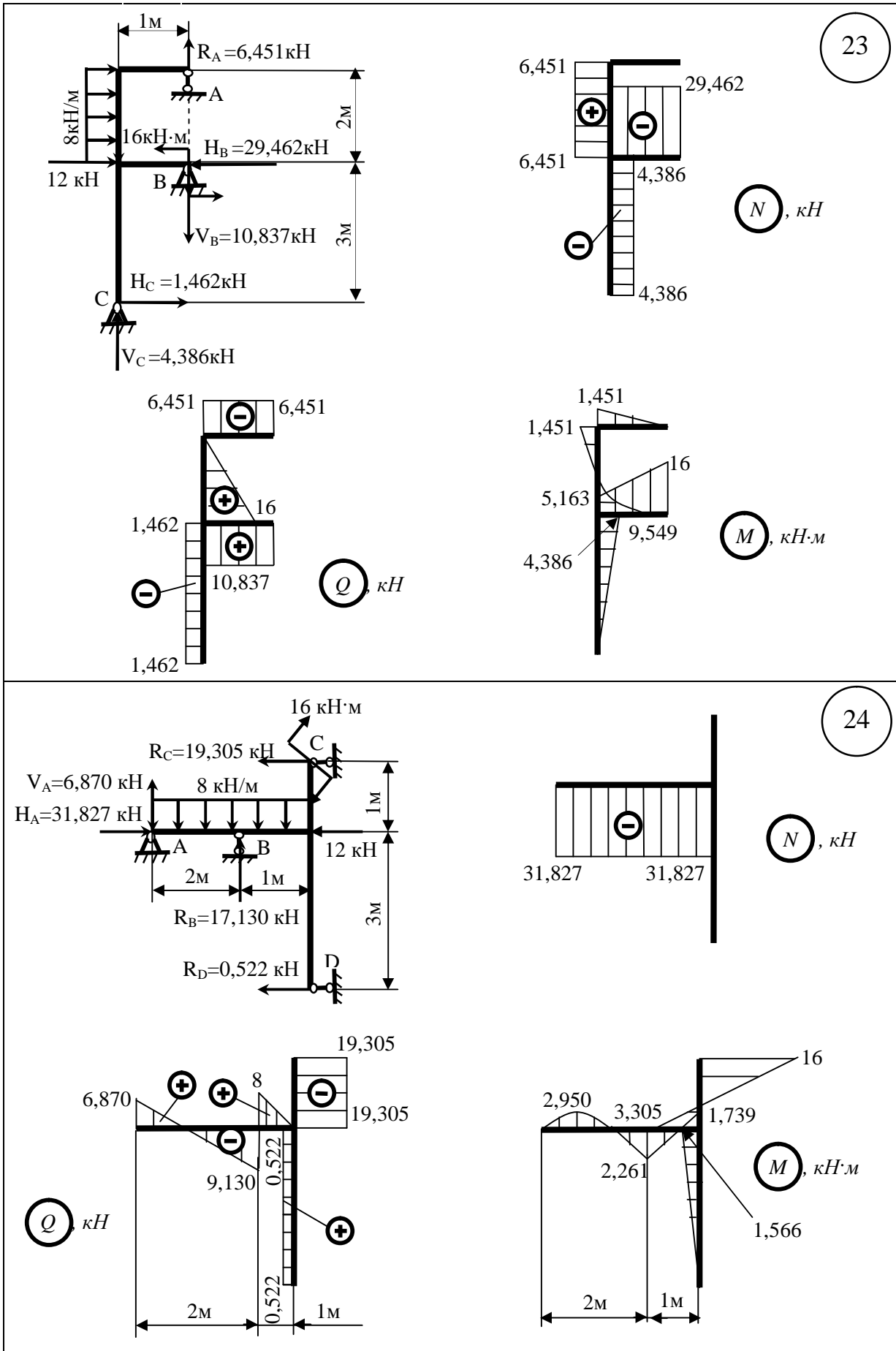


Рисунок 47, аркуш 12

ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов. – М. : Наука, 1976. – 608 с.
- 2 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А.В.Дарков, Г.С.Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.
- 3 **Миролюбов, И. Н.** Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М. : Наука, 1975. – 240 с.
- 4 **Ободовский, Б. А.** Сопротивление материалов в примерах и задачах / Б.А.Ободовский, С.Е.Ханин. – Харьков : Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 380 с.
- 5 Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. У 2 ч. Кн. 5 / В.Г.Піскунов [та ін.]. – К. : Вища шк., 1995. – 490 с.
- 6 **Писаренко, Г. С.** Опір матеріалів / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Є.С.Уманський. – К. : Вища шк., 1993. – 360 с.
- 7 Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К.Качурина. – М. : Наука, 1970. – 242 с.
- 8 Сопротивление материалов / под ред. А.Ф.Смирнова. – М. : Высш. шк., 1975. – 480 с.
- 9 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев. – Киев : Наук. думка, 1988. – 736 с.
- 10 **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И.Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 540 с.
- 11 **Ицкович, Г. М.** Руководство к решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для вузов / Г.М.Ицкович, Л.С.Минин, А.И.Винокуров; под ред. Л.С.Минина. – М. : Высш. шк., 2001. – 592 с.

Навчальне видання

**ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович
ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович
КУТОВИЙ Леонід Володимирович
ДЕНЬЩИКОВ Олександр Юрійович
РОМЕНСЬКИЙ Євген Юрійович**

**Побудова епюр внутрішніх силових
факторів для балок і плоских рам**

Навчальний посібник

Редактор

І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка

О.С.Орда

170/2007. Підп. до друку 31.03.10. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 11,74.
Тираж 175 прим. Зам. № 29.

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003