

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

**Автори: Л. В. Кутовий,
В. А. Овчаренко,
Ю. С. Холодняк,
В. О. Соломін,
Ю. Ю. Деньшиков**

**ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ОПР МАТЕРІАЛІВ»**

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

До друку прим.
Перший проректор
_____ А. М. Фесенко

Затверджено
на засіданні
вченої ради ДДМА
Протокол № _____ від _____ 2006

Краматорськ 2006



**Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко,
Ю. С. Холодняк, М. О. Соломін,
О. Ю. Деньщиків**

**ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

**Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко, Ю. С. Холодник,
М. О. Соломін, О. Ю. Деньщиків**

**ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ОПР МАТЕРІАЛІВ»**

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Краматорськ 2006

ББК 30.121

УДК 539. 3/6

3-41

Рецензенти:

В. Л. Бусов, доц.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

(лист № від)

Відп. за випуск	С. В. Подлесний, доц..	
Автори:	Л. В. Кутовий, доц.	– розділ 2;
	В. А. Овчаренко, доц.	– розділи 1, 3;
	Ю. С. Холодняк, доц.	– розділ 4;
	М. О. Соломін, асист.	– розділ 5;
	О. Ю. Деньщиков, асист.	– розділ 6.

**Кутовий Л.В., Овчаренко В.А., Холодняк Ю.С.,
Соломін М. О., Деньщиков О. Ю.**

3-41 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання). – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 220 с.

ISBN

Містяться умови задач, які входять до завдань, даються короткі теоретичні викладки за тематикою задач, які виконуються, рекомендації з їх розв'язання, приклади їх виконання та аналіз одержаних результатів.

УДК 539. 3/6

ББК 30.121

© Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко,
Ю. С. Холодняк, М. О. Соломін,
О. Ю. Деньщиков, 2006

© ДДМА, 2006

ISBN

ЗМІСТ	Стор.
ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ	4
1 РОЗРАХУНОК СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ	5
1.1 Статично визначувана стрижнева система	5
1.2 Ступінчатий статично невизначуваний стрижень	14
1.3 Статично невизначувана стрижнева система	23
2 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА РАМ	34
2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двохопорна балка (задача 2.2)	34
2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двохопорна рама (задача 2.4)	55
3 РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	74
3.1 Симетричний складний переріз	74
3.2 Несиметричний складний переріз	81
4 СКЛАДНИЙ ОПІР	92
4.1 Повна перевірка міцності балки (задача 4.1)	92
4.2 Складне згинання (задача 4.2)	103
4.3 Позацентрове стискання	116
4.4 Згинання з крученням круглого валу	125
5 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ	136
5.1 Статично невизначувана рама	136
5.2 Нерозрізна балка	144
5.3	152
5.4	170
5.5	177
6 СТІЙКІСТЬ І КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ	191
6.1 Підбір стиснутої стійки	191
6.2 Визначення напружень під час коливань	205
ЛІТЕРАТУРА	218
Додаток А. Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання	219

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Курсові розрахунково-графічні завдання призначені для розвитку у студента навичок виконання типових міцностних розрахунків, які часто зустрічаються в інженерній практиці. Крім того, вони допомагають кращому засвоєнню теоретичного курсу і придбанню навичок самостійної практичної роботи.

Завдання видається після вивчення відповідного матеріалу.

Кожний студент одержує варіант, згідно з яким виконує усі завдання. Номер варіанта складається з чотирьох цифр. Перша та друга цифри вказують номери стовпчиків відповідно в першій та другій таблицях, третя і четверта – номер схеми.

Дані вказівки подають загальні вимоги і правила оформлення розрахунково-графічних завдань з курсу “Опір матеріалів” згідно з ДСТом.

Виконання завдання повинно мати такий вигляд:

1 Для кожної задачі на першій сторінці повинно бути записано завдання з даними, відповідно до варіанту, рисунок з усіма необхідними для розрахунку розмірами і значеннями навантаження.

2 На наступних сторінках необхідно привести в довільній формі текстову частину, розрахунки і додаткові рисунки, які пояснюють розв’язання задачі. Завдання повинно бути написано від руки на одній сторінці аркушу паперу формату А4.

3 Усі рисунки та епюри слід виконувати в масштабі.

4 Усі фізичні розміри необхідно виконувати в міжнародній системі одиниць (СІ).

5 Титульний аркуш повинен бути виконаний на цупкому папері формату А4 (зразок див. у додатку А).

6 При виконанні задач необхідно дотримуватись методичних вказівок до кожної задачі.

7 Усі числа, за допомогою яких ведуться розрахунки, повинні бути обґрунтованими.

1 РОЗРАХУНОК СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

1.1 Статично визначувана стрижнева система

Із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів:

стрижень 1 – круглого поперечного перерізу;

стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків;

стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунку 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
b , м	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
c , м	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	100	120	200	80	300	100	220	160	140	250
P , кН	400	300	450	200	350	240	250	280	340	320
q , кН/м	200	150	250	300	350	400	280	350	380	320

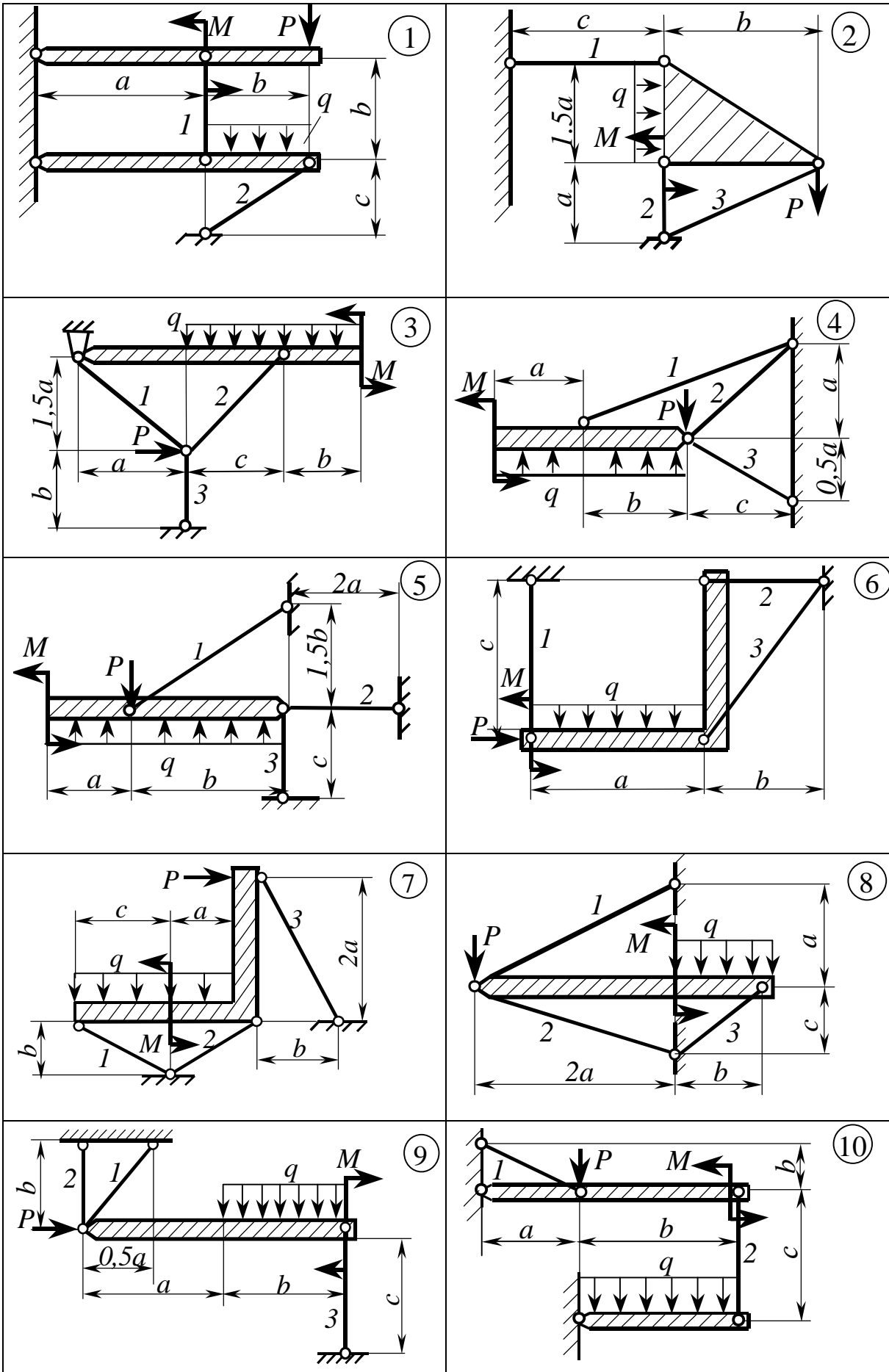


Рисунок 1.1

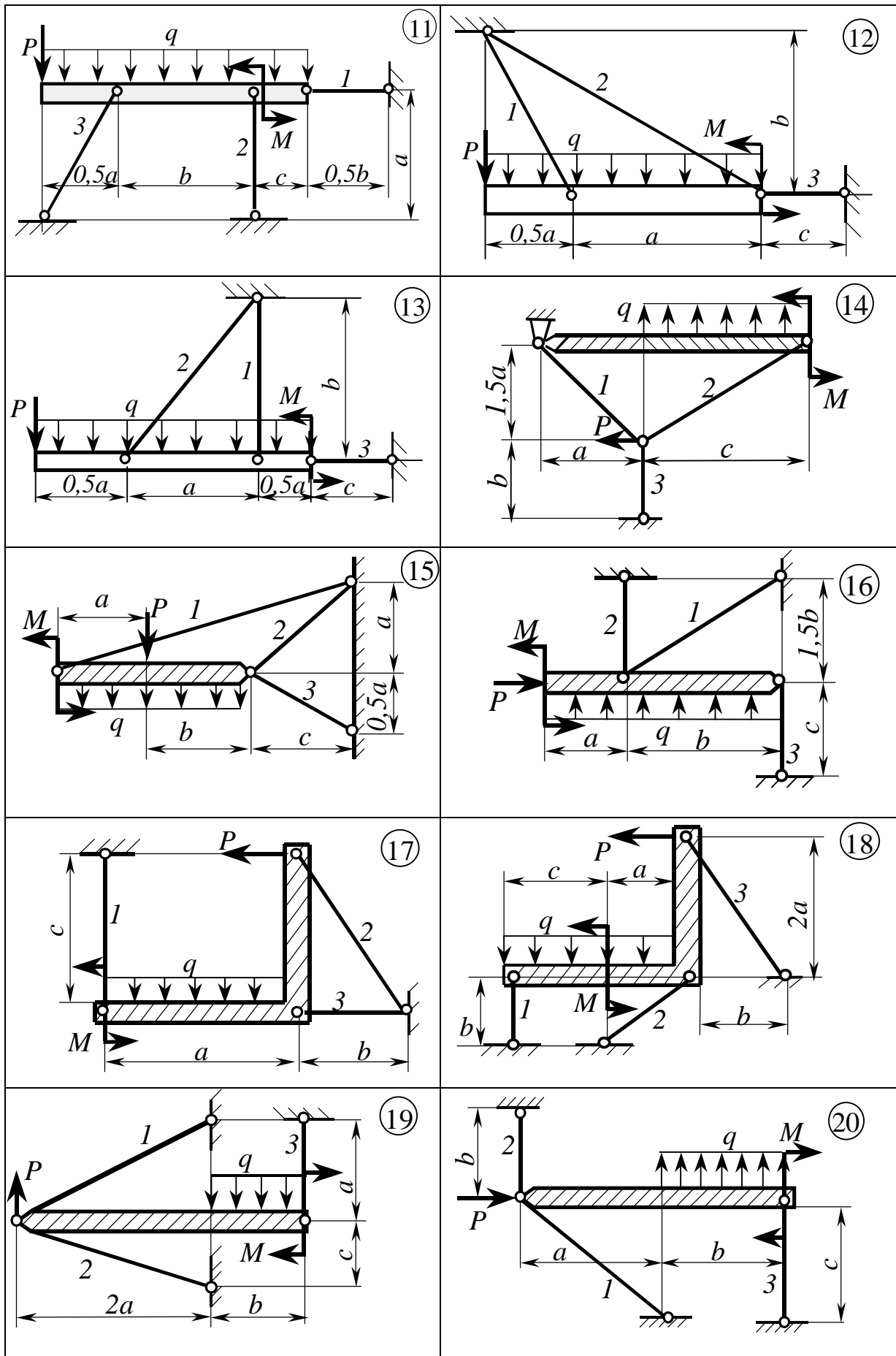


Рисунок 1.1, аркуш 2

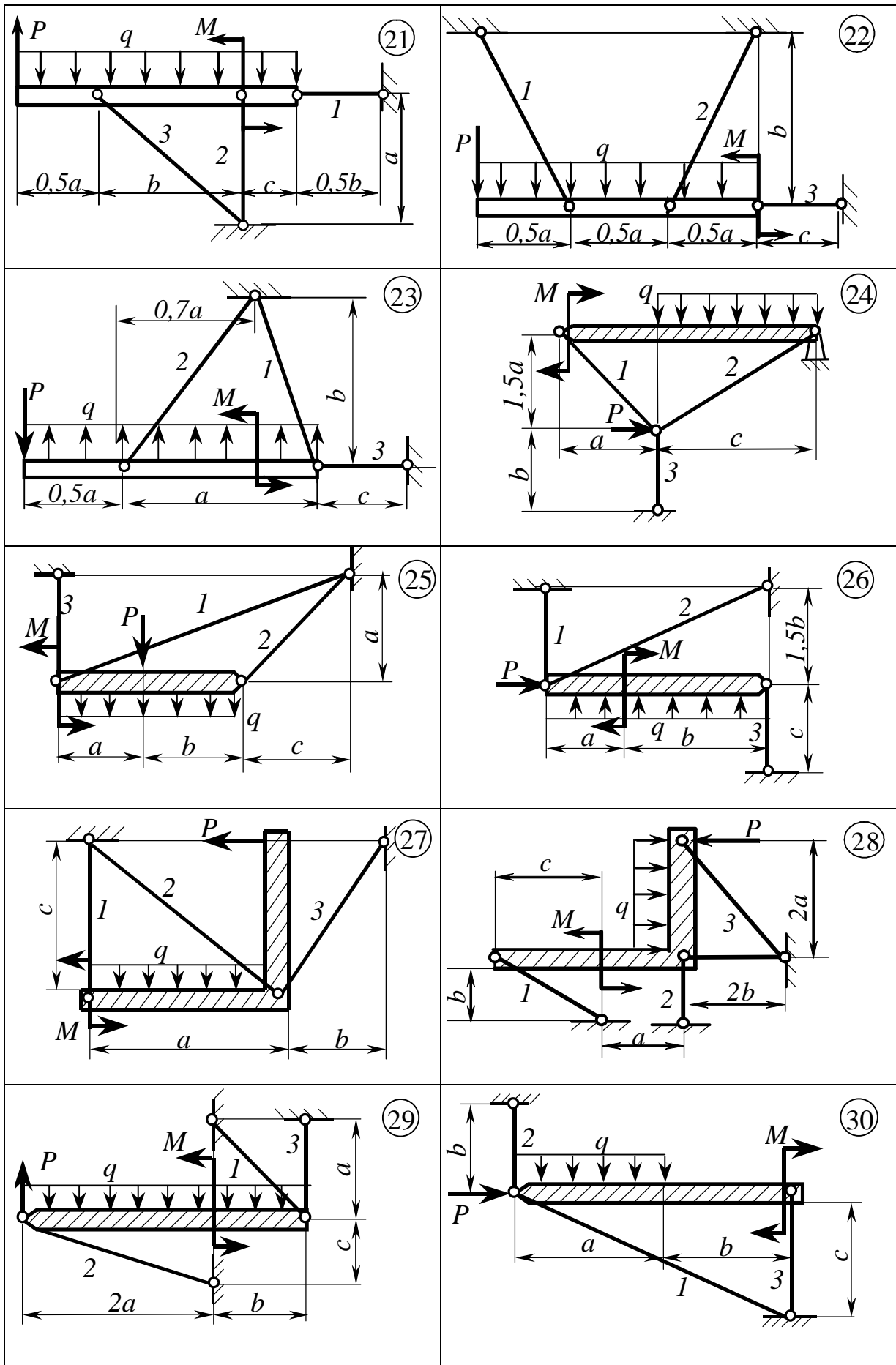


Рисунок 1.1, аркуш 3

1.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.1

Необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів можна знайти з умови міцності. Для даних стрижневих систем, які працюють на розтягання і стискання, умова міцності має вигляд:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

де N - подовжня (осьова) сила в стрижні;

F - площа поперечного перерізу стрижня;

$[\sigma]$ - допустиме напруження.

Для виконання проектувальних розрахунків необхідно визначити площу поперечних перерізів стрижнів:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (1.2)$$

У цій нерівності невідоме зусилля N .

Системи, які розглядаються, статично визначувані і зусилля в них можуть бути знайдені тільки з рівнянь рівноваги статички. Задачу слід розв'язувати за таким планом:

1 Скласти рівняння рівноваги, використовуючи тільки ті з них, до яких не входять реакції опор, котрі знаходити немає потреби, і розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 3.

2 Знайти площі поперечних перерізів стрижнів за формулою (1.2):

а) поперечний переріз стрижня 1 – круг. Для круглого поперечного перерізу

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ звідки } d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}, \quad (1.3)$$

після чого прийняти діаметр з рекомендованих розмірів згідно з Державним стандартом;

б) поперечний переріз стрижня 2 – два рівнобічних кутика.

За площею кутика $F^L = \frac{F_2}{2} = \frac{N_2}{2[\sigma]}.$

Із таблиці знаходимо номер кутика, площа якого повинна бути не меншою за F^L ;

в) поперечний переріз стрижня 3 – двотавр. За площею $F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]}$.

Із таблиці сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра. Якщо знайдені площі рівнобічного кутика і двотавра менші від площі найменшого профілю, то необхідно прийняти найменший профіль.

3 Визначити подовження (укорочення) стрижнів за законом Гука. Якщо стрижень розтягується, то Δl вважається додатним, а якщо стискається – від’ємним:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EF_i}, \quad (1.4)$$

де N_i - зусилля в i -му стрижні;

l_i - довжина i -го стрижня;

E - модуль пружності матеріалу;

F_i - площа поперечного перерізу підбраного профілю.

1.1.2 Приклад розв’язання задачі 1.1

Для стрижневої системи, показаної на рисунку 1.2, із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів: стрижень 1 – круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків, стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу. Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

Розв’язання. Відкидаємо зв’язки, їх вплив заміняємо зусиллями N_1 , N_2 та N_3 (рис. 1.3). У заданій стрижневій системі (рис. 1.2) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою.

Для такої системи можна скласти три незалежних рівняння статички, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися скласти тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

Беремо суму моментів відносно точки A (див. рис. 1.3), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3 :

$$\Sigma M_A = 0; \quad N_1 \cdot 5 - P \cdot (5-3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0,$$

звідки
$$N_1 = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160 \text{ кН}.$$

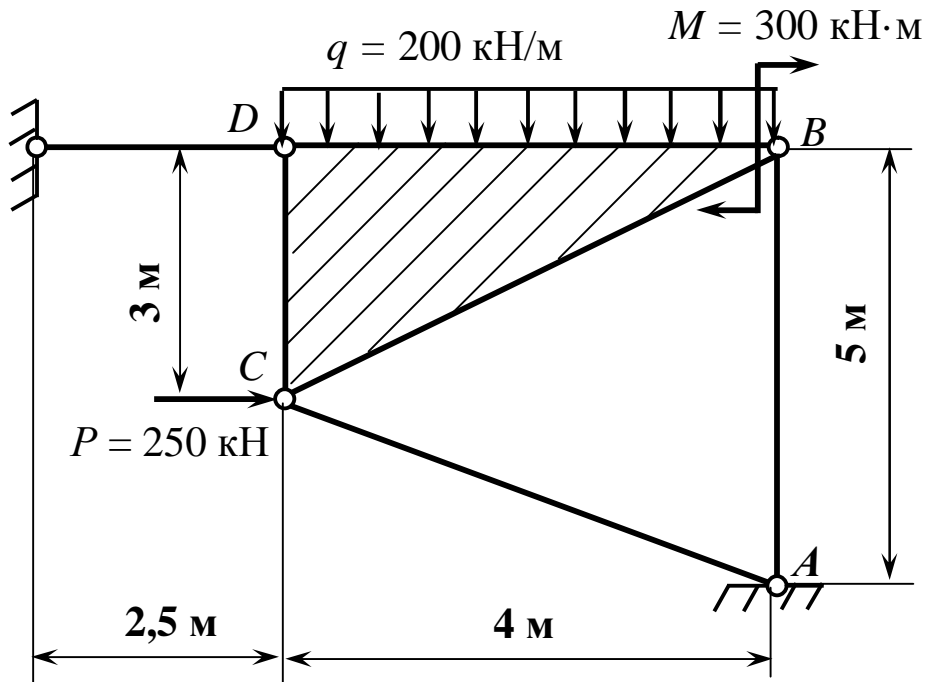


Рисунок 1.2 – Стрижнева система

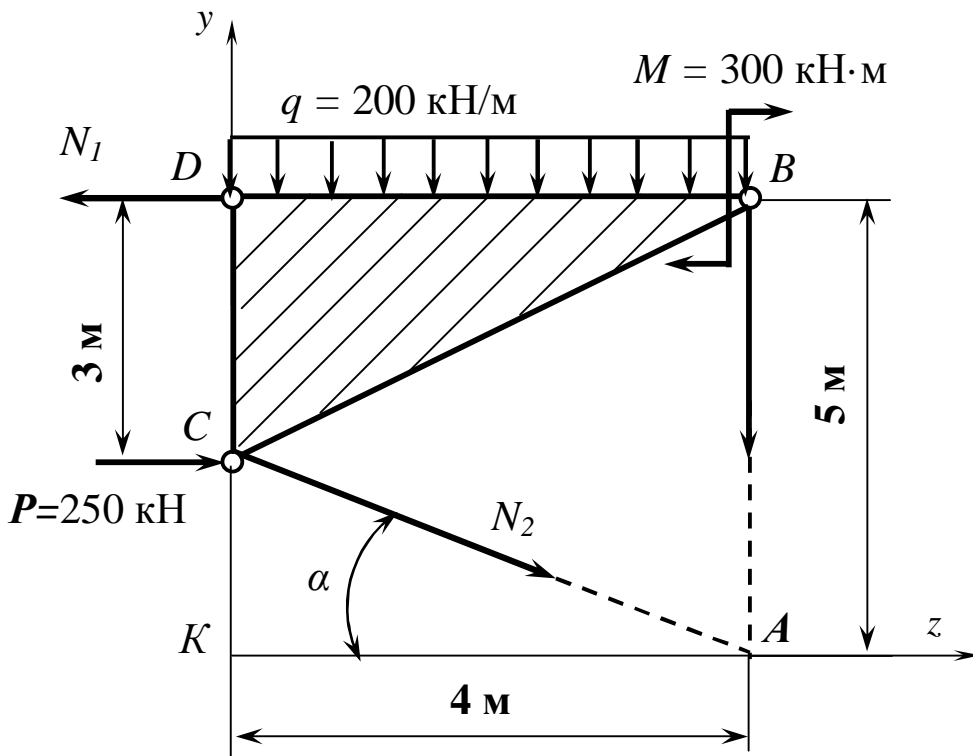


Рисунок 1.3 – Стрижнева система з відкинутими зв'язками

Тепер беремо суму моментів відносно точки B (у ній перетинаються зусилля N_1 та N_3):

$$\sum M_B = 0; P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cdot 5 \cdot \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$N_2 = \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5 \cdot \cos \alpha} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5 \cdot 0,893} = -459,2 \text{ кН.}$$

Косинус та синус кута α знаходимо з трикутника АКС (рис. 1.3).

$$l_3 = AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + (5-3)^2} = 4,48 \text{ м;}$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4,48} = 0,893; \quad \sin \alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4,48} = 0,446.$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проєкцій на вертикальну вісь –

$$\sum P_Y = 0; -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha = -200 \cdot 4 - (-459,2) \cdot 0,446 = -595,2 \text{ кН.}$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус – значить напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль.

$$\sum P_z = 0; P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$250 - (-160) - 460 \cdot 0,893 = 0; \quad 410 - 410 = 0.$$

$$\sum M_c = 0; N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 = 0;$$

$$-160 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 - 300 - (-595,2) \cdot 4 = 0; \quad -2380 + 2380,7 = 0.$$

Похибка складає $\frac{2380,7 - 2380}{2380} \cdot 100\% = 0,03\%$, що є допустимим.

Тепер за допомогою формули (1.2) підбираємо розміри поперечних перерізів стрижнів.

Стрижень 1 за умовою задачі – круглого поперечного перерізу:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10 \text{ см}^2.$$

Його діаметр:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3,57 \text{ см.}$$

З рекомендованого ряду чисел (за ГОСТом 6636-69) приймаємо діаметр стрижня $d = 40$ мм.

Стрижень 2 за умовою задачі складається з двох рівнобічних кутиків:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{459,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 24,17 \text{ см}^2.$$

Звідси площа одного кутика:

$$F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{24,17}{2} = 12,085 \text{ см}^2.$$

З таблиці сортаменту приймаємо кутик 90 x 90 x 7 (ДСТУ 2251-93), площа якого $F = 12,3 \text{ см}^2$.

Стрижень 3 за умовою задачі – двотаврового поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{595,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 37,2 \text{ см}^2.$$

З таблиці сортаменту приймаємо двотавр 24а (ГОСТ 8239-89), площа якого $F = 37,5 \text{ см}^2$.

Підібравши площі поперечних перерізів, знаходимо їх абсолютні подовження за формулою (1.4):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{-160 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{p \cdot 4^2}{4} \cdot 10^{-4}} = -15,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,59 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{-459,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 12,3 \cdot 10^{-4}} = -46,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -4,69 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{-595,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4,48}{2 \cdot 10^5 \cdot 37,5 \cdot 10^{-4}} = -35,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,56 \text{ мм}.$$

Остаточно можемо зробити висновок, що всі три стрижні укорочуються.

1.2 Ступінчатий статично невизначуваний стрижень

Для сталевого стрижня побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо між стрижнем та стіною до зміни температури і прикладення зусиль був зазор δ . Вихідні дані вибрати із таблиць 1.3, 1.4 і рисунку 1.4.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
b , м	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
c , м	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6
t , °С	30	35	50	45	25	55	60	20	40	65

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F , см ²	10	8	11	13	16	18	20	15	14	17
P , кН	100	150	180	230	200	140	130	170	280	250
d , мм	0,01	0,02	0,04	0,03	0,07	0,08	0,04	0,03	0,04	0,05

1.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.2

Якщо при нагріванні стрижня і дії на нього зусиль P зазор закрийється, то в обох жорстких опорах з'являться реакції, які будуть діють вздовж осі. При осьовій дії усіх зусиль можна записати лише одне рівняння рівноваги – суму проєкцій усіх зусиль на вісь стрижня, у якому будуть обидві реакції. Очевидно, що знайти дві реакції з одного рівняння неможливо.

Система, в якій кількість невідомих зусиль перевищує кількість рівнянь статички, називається статично невизначуваною. Нагадаємо, що для плоскої довільної системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, для плоско-паралельної і плоско-збіжної – два.

Статистично невизначувані системи розв'язуються за таким планом:

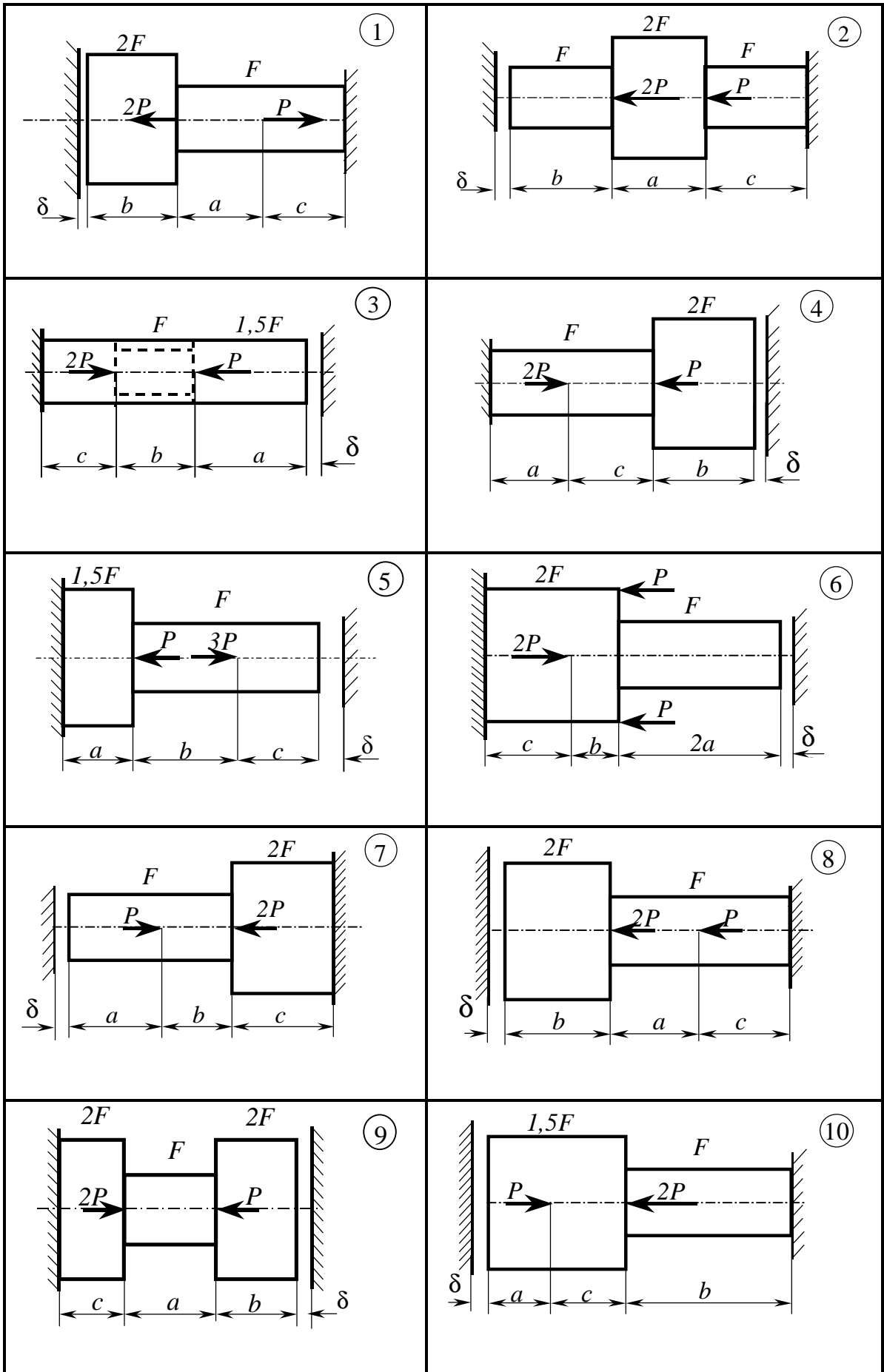


Рисунок 1.4

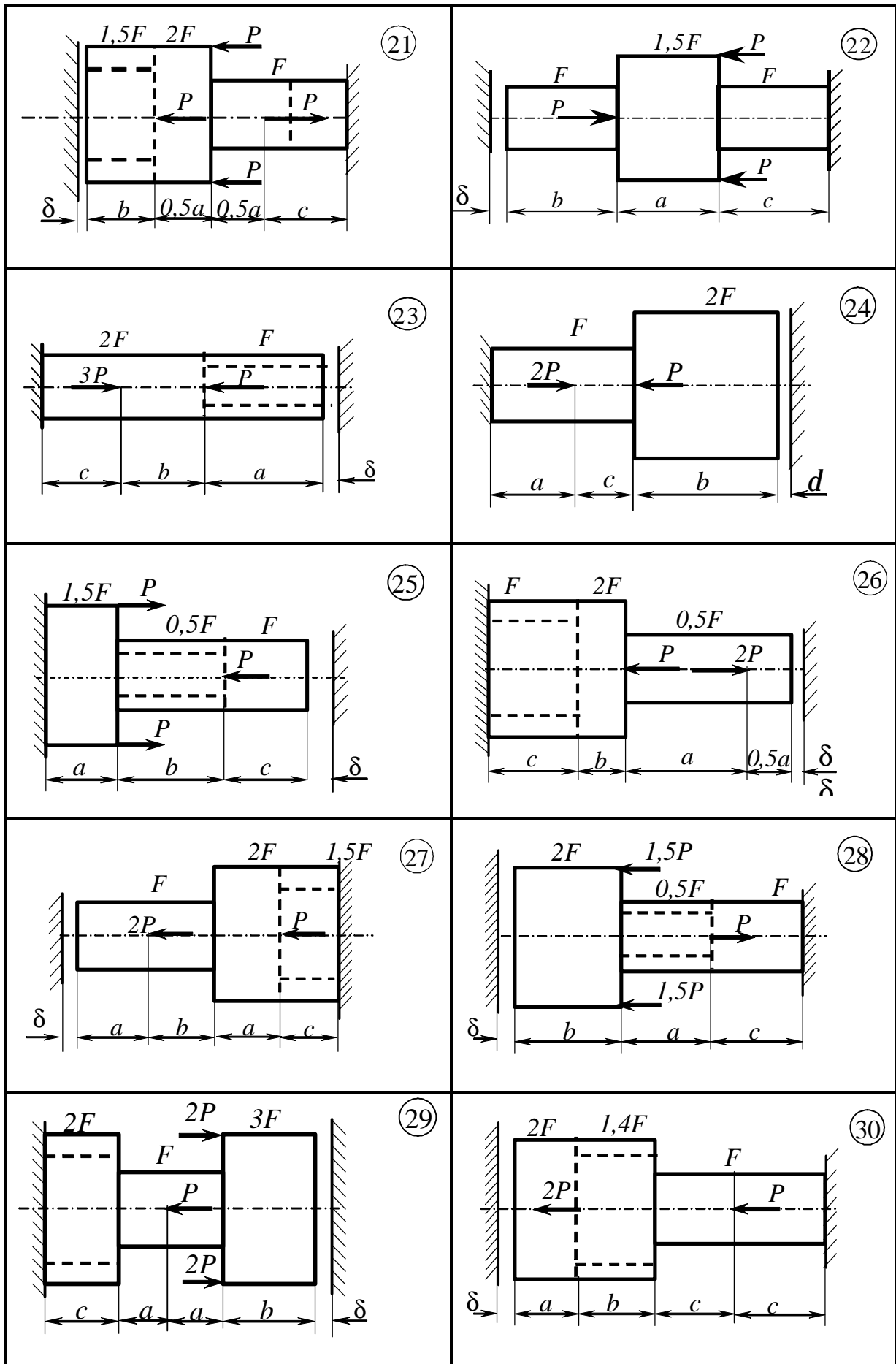


Рисунок 1.4, аркуш 3

1 Визначається ступінь статичної невизначуваності конструкції, тобто кількість зайвих невідомих, яка дорівнює різниці між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статички. У цій задачі $S = 2 - 1 = 1$.

2 Для розв'язання статично невизначуваної системи необхідно розглянути три аспекти задачі:

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля, – суму проєкцій усіх сил, включаючи реакції опор на вісь стрижня:

$$\sum P_{kz} = 0, \quad (1.5)$$

Геометричний аспект задачі. Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають рівняннями сумісності (нерозривності) деформацій. У цій задачі до прикладення зусиль і зміни температури між одним кінцем і опорою був зазор δ . Після нагрівання і дії заданих зусиль він закривається. Таким чином, стрижень зможе змінити свою довжину на δ і рівняння сумісності буде мати вигляд:

$$\Delta \mathbf{l} = \Delta \mathbf{l}_N + \Delta \mathbf{l}_t = \delta, \quad (1.6)$$

де $\Delta \mathbf{l}_N$ - деформація від зусиль;

$\Delta \mathbf{l}_t$ - деформація від температури.

Фізичний аспект задачі. Оскільки зусилля N змінюються за довжиною стрижня, то для наочності рекомендується зобразити епюру N у загальному вигляді (через задані зусилля і реакції опор), використовуючи для цього метод перерізів.

Поздовжня сила дорівнює сумі проєкцій на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють з одного боку від перерізу. Якщо сила діє від перерізу, вважати зусилля в ньому додатним. Підставити зусилля на кожній ділянці стрижня з епюри N з урахуванням знака, довжини відповідних ділянок, площі їх поперечних перерізів. Знайти деформації стрижнів $\Delta \mathbf{l}_N$ від зусиль за формулою (1.4). Зусилля N_i підставити з урахуванням знака.

Оскільки матеріал усіх ділянок однаковий, то деформацію стрижня від нагрівання можна знайти із залежності:

$$\Delta \mathbf{l}_t = \alpha \mathbf{l} \Delta t ,$$

де \mathbf{l} - довжина всього стрижня;

α - температурний коефіцієнт осьового подовження,

для сталі $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$;

Δt - температура нагрівання.

Таким чином, умова сумісності деформацій (1.6) матиме вигляд:

$$\Delta \mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \mathbf{l}_i}{EF_i} + \alpha \mathbf{l} \Delta t = \delta. \quad (1.7)$$

Синтез. Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

З Одержаний розв'язок необхідно аналізувати. Реакція з боку зазору не може бути спрямована від стрижня (заздалегідь напрямок реакцій довільний), оскільки сили P задані таким чином, що їх рівнодіюча R спрямована на опору з зазором (рис. 1.5)

Отже, реакція від сили в опорі A спрямована на стрижень (див. рис. 1.5, опора A), а в опорі B – від нього (див. рис. 1.5).

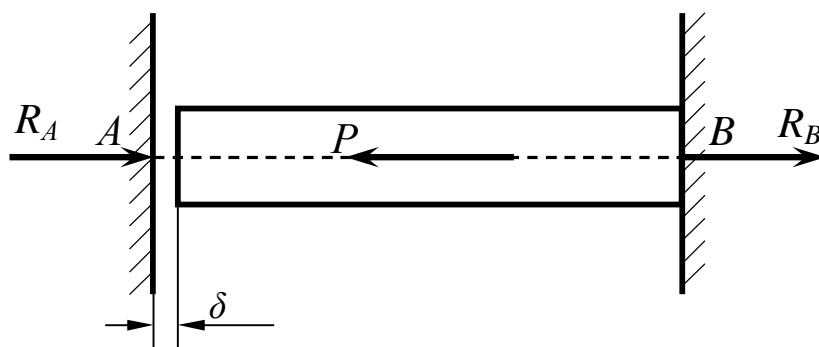


Рисунок 1.5 – Статично невизначуваний стрижень

Температурні напруження від нагрівання викликають в опорах A і B реакції, спрямовані на стрижень (рис. 1.5).

Після того, як знайшли реакції опор, необхідно побудувати епюру подовжніх сил N .

4 Знайти напруження на кожній ділянці:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}. \quad (1.8)$$

5 Побудувати епюру напружень. При оформленні задачі рекомендується рисунок стрижня, попередню і остаточну епюри N та епюру напружень малювати на одному аркуші одну під другою.

1.2.2 Приклад розв'язання задачі 1.2

Для сталевого стрижня (рис. 1.6) побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо зазор $\delta = 0,4$ см був до зміни температури $\Delta t = 55^\circ \text{C}$ і прикладення зусиль.

Розв'язання. На стрижень АВ діють сили вздовж осі. Реакції в жорстких закріпленнях після закриття зазору (тобто реакції R_A і R_B) теж виникають вздовж цієї ж осі.

Таким чином, маємо систему сил з двома невідомими реакціями в закріпленнях R_A і R_B , які діють вздовж однієї лінії і для яких можливо скласти тільки одне рівняння – суму проєкцій сил на цю вісь.

Тобто задача є один раз статично невизначуваною. Її розв'язання можливе із застосуванням трьох аспектів задачі – статичного, геометричного і фізичного.

Статичний аспект задачі. Відкидаємо зв'язки (див. рис. 1.6, б), їх вплив заміняємо реакціями R_A і R_B і складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \dot{a}P_Z = 0; \quad -R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0; \\ -R_A - 150 + 250 - R_B = 0; \\ R_A + R_B = 100. \end{aligned} \quad (1.9)$$

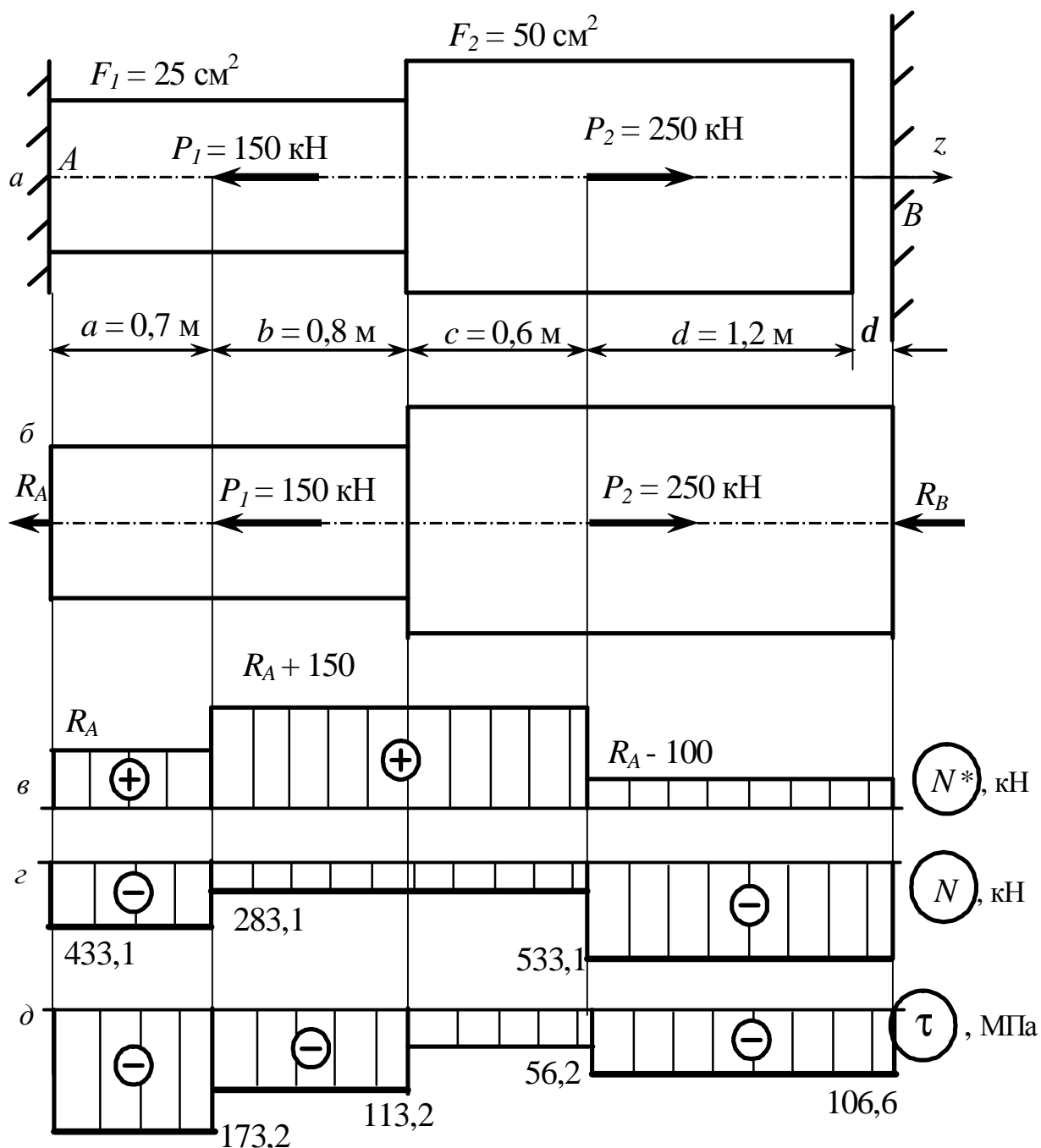
Геометричний аспект задачі. У результаті дії сил та температури зазор закриється і повне подовження стрижня буде дорівнювати d , тобто

$$Dl = d = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (1.10)$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля (див. рис. 1.6, в):

$$\Delta l = \frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2). \quad (1.11)$$



а - задана схема; б - схема сил, які діють на стрижень; в - етюра подовжніх сил у загальному вигляді; г - етюра подовжніх сил в числовому значенні; д - етюра нормальних напружень

Рисунок 1.6 – Ступінчатий статично невизначуваний стрижень

Тепер сумісно розв'язуємо рівняння (1.9) – (1.11), які одержані з розгляду трьох аспектів задачі.

Прирівнюємо вирази (1.10) і (1.11):

$$\frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2) = 0,4 \cdot 10^{-3},$$

звідки $R_A = -433,1$ кН.

З рівняння (1.9) випливає:

$$R_B = 100 - R_A = 100 - (-433,1) = 533,1 \text{ кН.}$$

Реакцію R_B одержали додатною, тобто, як і передбачали, зазор закритється і запрацює праве жорстке закріплення.

Знайшовши реакції в закріпленнях, будуємо епюру подовжніх сил в числових значеннях (див. рис. 1.6, г).

Напруження на кожній ділянці знаходимо за формулою (1.8):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-433,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -173,2 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -113,2 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -56,6 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-533,1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -106,6 \text{ МПа.}$$

За знайденими значеннями будуємо (див. рис. б, д) епюру нормальних напружень σ .

1.3 Статично невизначувана стрижнева система

Визначити діаметр поперечного перерізу сталених стрижнів, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[s] = 160$ МПа.

Вихідні дані вибрати з таблиць 1.5, 1.6 і рисунку 1.7.

Таблиця 1.5 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P , кН	100	300	150	250	200	100	250	150	200	450
q , кН/м	300	150	100	200	150	250	100	200	250	150
M , кН·м	400	200	300	100	400	300	300	100	300	400

Таблиця 1.6 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,6	0,5	0,7	0,9	0,8	1,0	0,4	0,7	0,8	0,6
b , м	1,0	0,8	0,5	0,7	0,4	1,3	0,8	0,9	0,7	0,8
c , м	0,5	0,6	0,9	0,8	0,7	1,0	0,5	0,4	0,4	1,2

1.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.3

Діаметр поперечного перерізу стрижнів 1 та 2 можна знайти з умови міцності. Стрижні системи, які прикріплені до жорсткого бруса шарнірно, працюють на розтягання або на стискання, для яких умова міцності записується згідно з виразом (1.1). Діаметр стрижнів визначається за формулою (1.3).

Для розкриття статичної невизначуваності необхідно розглянути три аспекти задачі: статичний, геометричний та фізичний.

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги, використовуючи ті з них, які не включають реакції опор, в розрахунку яких немає необхідності. Невідомі зусилля бажано спрямовувати заздалегідь від вузлів прикріплення стрижнів, вважаючи їх спочатку розтягненими.

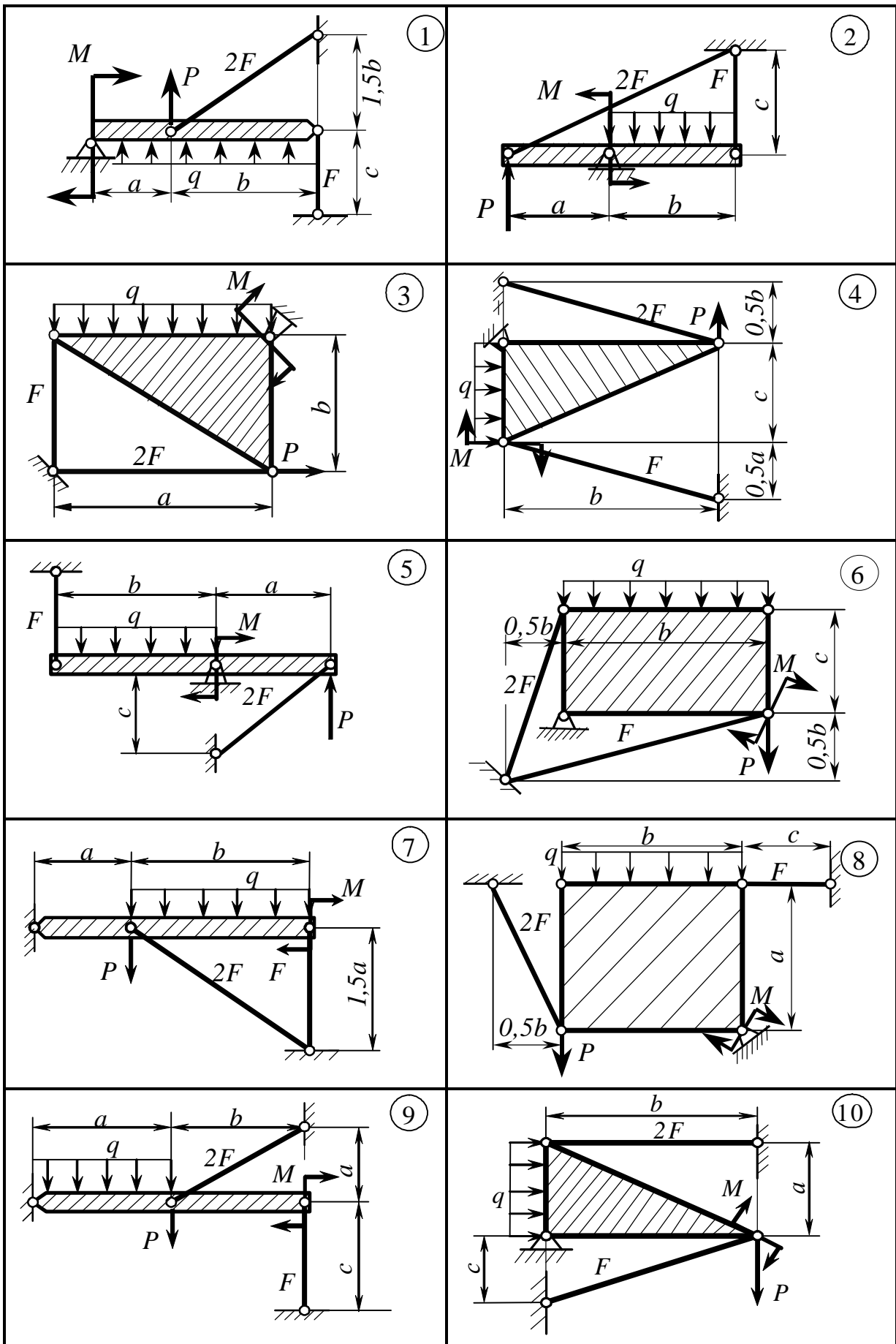


Рисунок 1.7

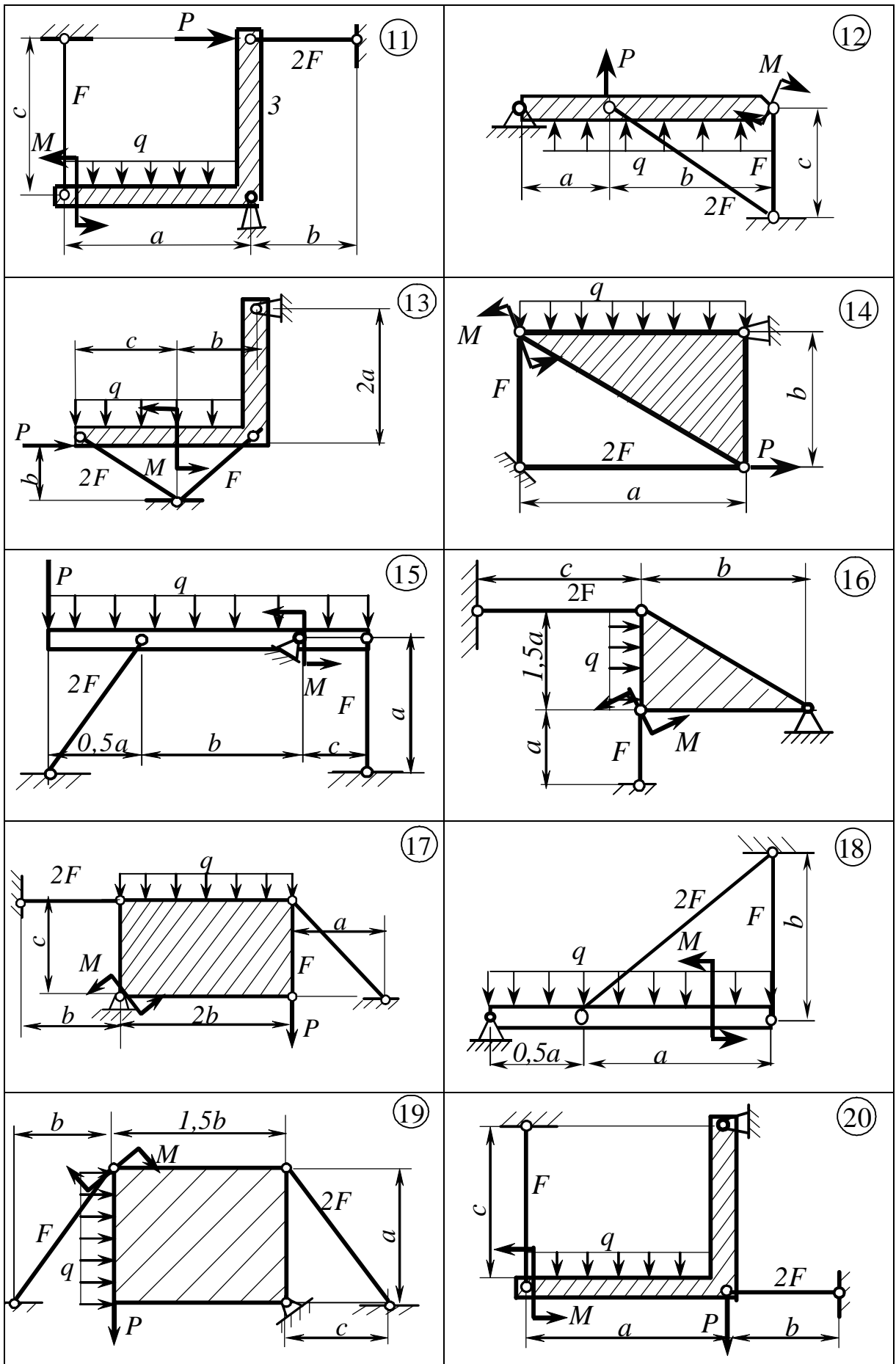


Рисунок 1.7, аркуш 2

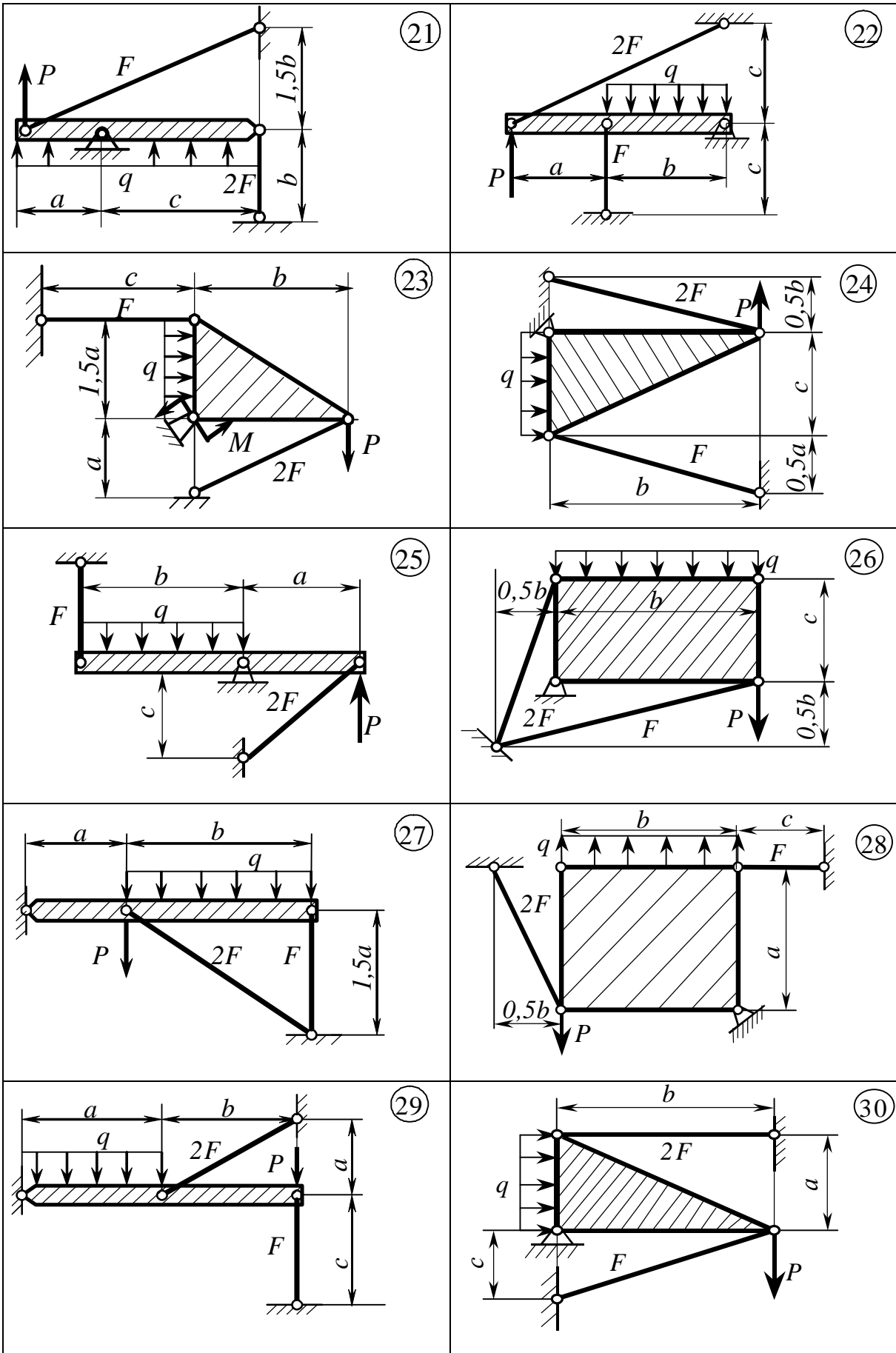


Рисунок 1.7, аркуш 3

Геометричний аспект задачі. Встановити взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів заданої системи.

Для цього необхідно зобразити положення системи до і після навантаження, задаючи їй можливі переміщення, тобто ті переміщення, які дозволяють мати системі зв'язки.

Якщо система має шарнірно-нерухому опору, то під дією будь-яких факторів система буде повертатися, а точки прикріплення стрижнів при цьому будуть переміщуватися (при умові малих деформацій) перпендикулярно до їх радіусів поворотання (рис. 1.8).

Очевидно, переміщення D_i при цьому співвідносяться як радіуси повороту, тобто:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{r_2}{r_3} \text{ і т.п.} \quad (1.12)$$

Коли система опирається за допомогою шарнірно-рухомих опор, можливі лінійні переміщення перпендикулярні до опорних стрижнів (рис. 1.9).

Оскільки дана система жорстка, то ці переміщення однакові, тобто $D_1 = D_2$.

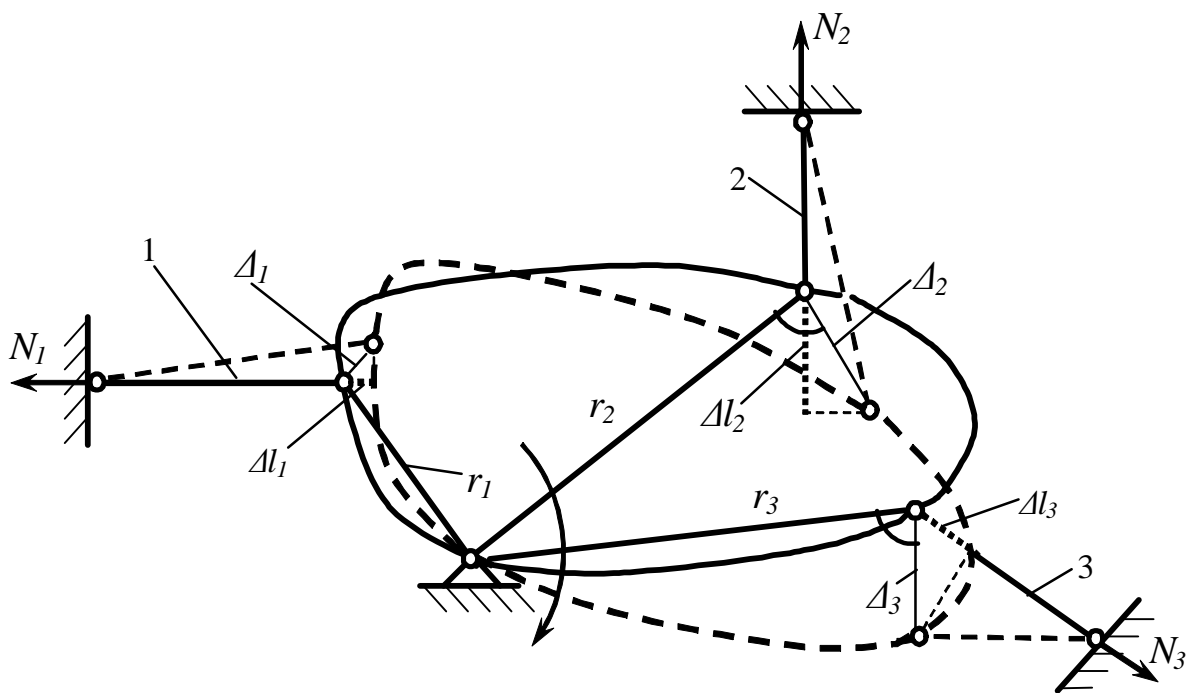


Рисунок 1.8 – Поворот тіла навколо шарнірно-нерухомої опори

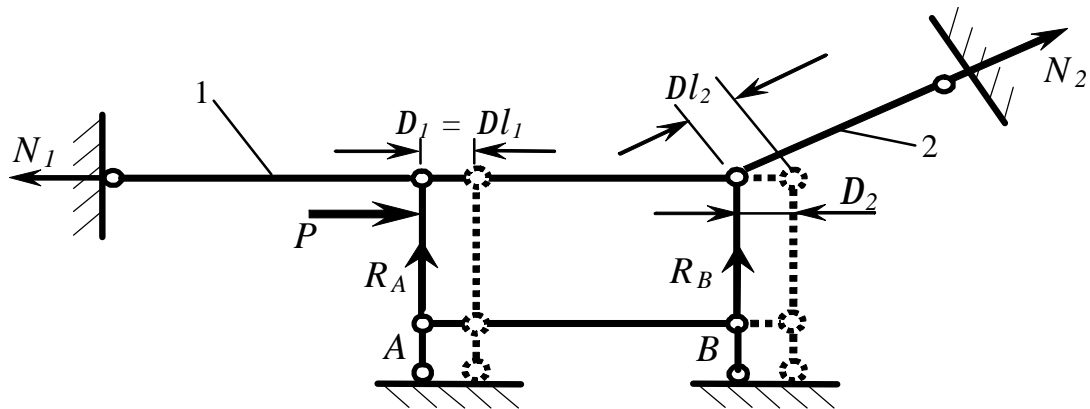


Рисунок 1.9 – Переміщення тіла перпендикулярно шарнірно-рухомим опорам

При знайдених переміщеннях кожний zdeформований елемент системи здобуде подовження або укорочення Δl_i , через які необхідно виразити відповідні переміщення Δ_i . Якщо точка прикріплення стрижня переміщується вздовж його напрямку, то деформація стрижня дорівнює його переміщенню (стрижень 1, рис. 1.9). В іншому разі для знаходження деформації стрижня необхідно переміщення проектувати на напрямок стрижня (стрижні 1-3, рис. 1.8 або стрижень 2, рис. 1.9).

Виразивши у формулі (1.12) переміщення D_i через деформації Dl_i , знайдемо взаємозв'язок деформацій окремих елементів системи та одержимо рівняння сумісності або нерозривності деформацій.

Абсолютно жорсткий брус може прикріплюватися декількома паралельними стрижнями (рис. 1.10).

Ця система статично невизначувана (три невідомі зусилля в стрижнях 1-3, а рівнянь рівноваги для плоско-паралельної системи можна скласти тільки два) і вирішується за планом двох попередніх задач.

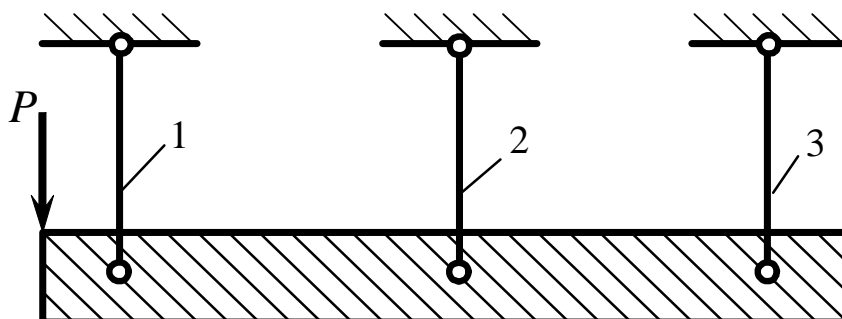


Рисунок 1.10 – Брус на паралельних стрижнях

Коли розглядається геометричний аспект задачі, потрібно мати на увазі, що під дією навантаження система поступально переміщується вниз і повертається (рис. 1.11).

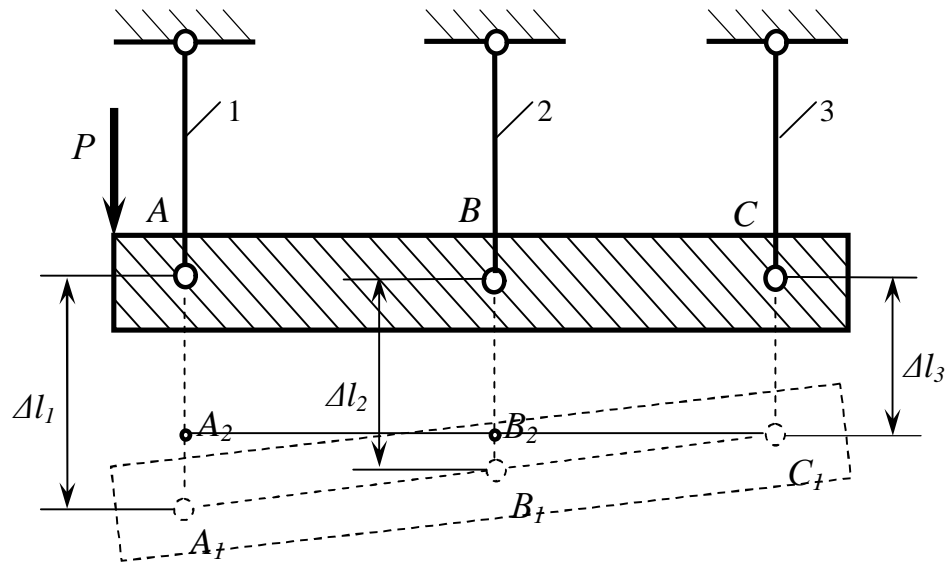


Рисунок 1.11 – Положення брусу після деформації стрижнів

З рисунку 1.11 видно, як пов'язати деформації стрижнів між собою:

$$AA_1 = \Delta l_1; BB_1 = \Delta l_2; CC_1 = \Delta l_3; B_1B_2 = \Delta l_2 - \Delta l_3; A_1A_2 = \Delta l_1 - \Delta l_3.$$

$$\frac{A_1A_2}{AC} = \frac{B_1B_2}{BC}; \frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{\Delta l_2 - \Delta l_3}.$$

Фізичний аспект задачі. За законом Гука необхідно замінити деформацію через зусилля згідно з формулою (1.4). Спрямовуємо задалегідь зусилля від вузлів прикріплення. При цьому в усіх стрижнях зусилля N_i будуть розтягуючі, тобто додатні. Додатнім зусиллям повинно відповідати подовження стрижнів. Якщо якийсь стрижень при навантаженні укорочується, то його деформація буде від'ємною, тобто входить в рівняння сумісності з мінусом (Δl_3 – рис. 1.8 або Δl_2 – рис. 1.9).

Синтез. Розв'язати сумісно рівняння рівноваги і рівняння сумісності деформацій, внаслідок чого знайти невідомі зусилля в стрижнях.

Знаючи зусилля і матеріал (допустимі напруження) з умови міцності при розтяганні-стисканні, знайти площі поперечних перерізів стрижнів за виразом (1.2).

Згідно з умовою стрижні мають круглий поперечний переріз. Отже, з виразу (1.3) знаходимо діаметри стрижнів.

1.3.2 Приклад розв'язання задачі 3

Для стрижневої системи (рис.1.12), визначити діаметри поперечних перерізів сталевих стрижнів, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[s] = 160$ МПа.

Статичний аспект задачі. Відкидаємо зв'язки, їх вплив заміняємо реакціями (див. рис. 1.13), складаємо рівняння статички. Їх можна скласти три, але в два з них будуть входити реакції R_A або H_A , які нам не потрібні.

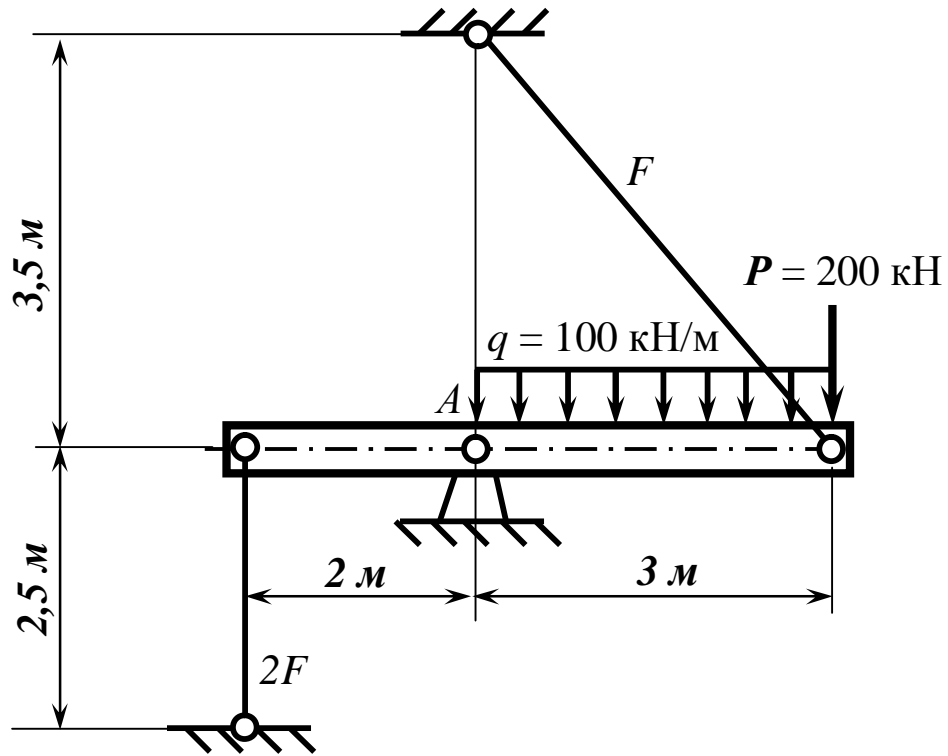


Рисунок 1.12 – Статично невизначувана стрижнева система

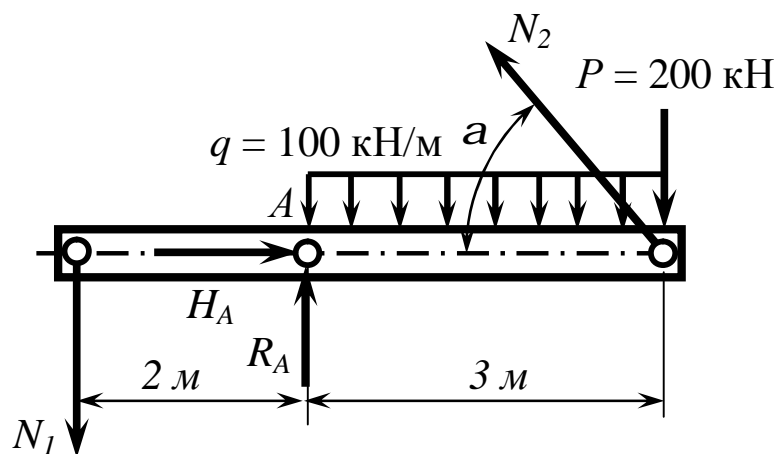


Рисунок 1.13 – Статично невизначувана стрижнева система з реакціями замість зв'язків

Тому складаємо тільки таке рівняння, куди входять лише зусилля N_1 і N_2 . Таким рівнянням є сума моментів усіх сил відносно точки A .

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot 2 + N_2 \sin \alpha \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - P \cdot 3 = 0;$$

де
$$\sin \alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \frac{3,5}{\sqrt{3,5^2 + 3^2}} = 0,759;$$

$$2N_1 + 3 \cdot 0,759N_2 - 100 \cdot 3 \cdot 1,5 - 200 \cdot 3 = 0;$$

$$N_1 + 2,277N_2 = 1050. \quad (1.13)$$

Геометричний аспект задачі. Показуємо систему в деформованому стані (рис. 1.14). Балка BC абсолютно жорстка, вона не деформується, а тільки повертається навколо нерухомої точки A . Показуємо подовження стрижнів.

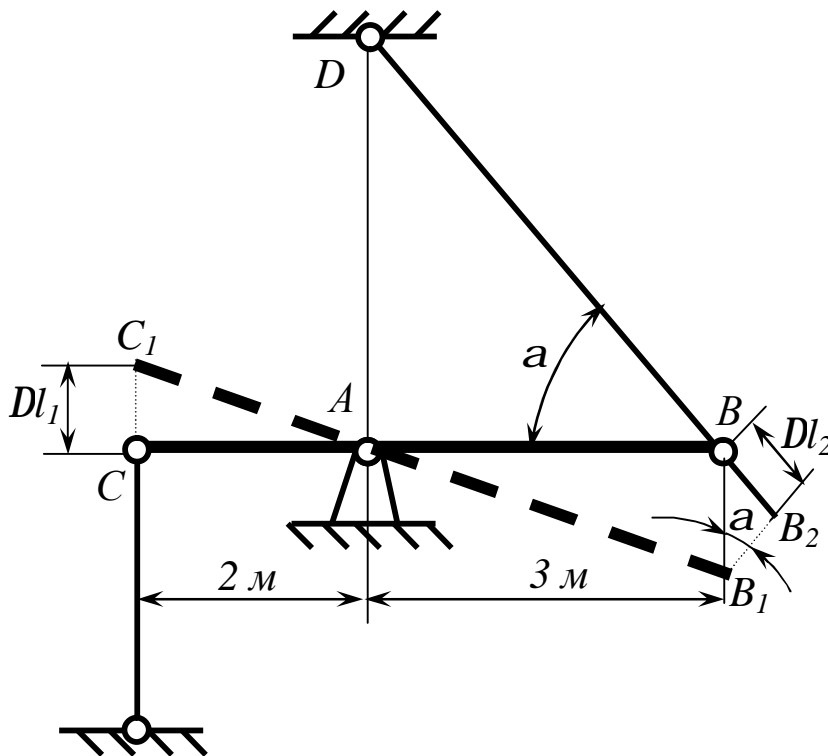


Рисунок 1.14 – Деформована схема стрижневої системи

Подовження першого стрижня Dl_1 є відрізок CC_1 , подовження другого стрижня Dl_2 є відрізок BB_2 . Точка B_2 знаходиться на перетині прямої DB і перпендикуляра до DB . Встановлюємо зв'язок між Dl_1 і Dl_2 . Трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні, звідки витікає

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB}; \quad CC_1 = Dl_1; \quad BB_1 = \frac{BB_2}{\sin a} = \frac{Dl_2}{\sin a};$$

$$\frac{Dl_1}{2} = \frac{Dl_2}{3 \cdot \sin a}; \quad \frac{Dl_1}{2} = \frac{Dl_2}{3 \cdot 0,759}; \quad Dl_1 = 0,878Dl_2. \quad (1.14)$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_1 \cdot 2,5}{E \cdot 2F}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_2 \cdot 4,61}{E \cdot F}, \quad (1.15)$$

де $l_2 = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{3,5^2 + 3^2} = 4,61 \text{ м.}$

При цьому необхідно мати на увазі, що при записі закону Гука необхідно брати знак “плюс”, якщо напрямок деформації співпадає з напрямком зусилля, і “мінус” – якщо не співпадає.

Тепер сумісно розв’язуємо рівняння, які одержані з розгляду трьох аспектів задачі. У вираз (1.14) підставляємо Dl_1 і Dl_2 із залежностей (1.15).

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{2EF} = 0,828 \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF},$$

звідки

$$N_1 = \frac{0,878 \cdot 4,61 \cdot 2}{EF} N_2,$$

остаточно:

$$N_1 = 3,24N_2. \quad (1.16)$$

Завдяки розгляду геометричного і фізичного аспектів задачі одержали залежність між зусиллями N_1 і N_2 (1.16), яку підставляємо в рівняння (1.13).

$$2 \cdot 3,24N_2 + 2,277N_2 = 1050, \quad \text{звідки } N_2 = 120 \text{ кН.}$$

Знайдене зусилля N_2 підставляємо в залежність (1.16) і знаходимо N_1 :

$$N_1 = 3,24 \cdot 120 = 388,5 \text{ кН.}$$

Тепер за допомогою формули (1.2) визначаємо площі поперечних перерізів стрижнів.

За зусиллям у першому стрижні:

$$F_1 = 2F = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{388,5 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 24,28 \text{ см}^2,$$

звідки

$$F = 12,14 \text{ см}^2.$$

За зусиллям у другому стрижні:

$$F_2 = F = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 7,5 \text{ см}^2.$$

Беремо більшу з площ, тобто $F = 12,14 \text{ см}^2$, тоді

$$F_1 = 2F = 24,28 \text{ см}^2, \quad \text{а} \quad F_2 = F = 12,14 \text{ см}^2.$$

У цьому випадку

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24,28}{\pi}} = 5,56 \text{ см},$$
$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,14}{\pi}} = 3,93 \text{ см}.$$

Приймаємо з рекомендованого ряду остаточно $d_1 = 60 \text{ мм}$, а $d_2 = 40 \text{ мм}$.

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА РАМ

2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двохопорна балка (задача 2.2)

Для заданих балок (рис. 2.1 та 2.2.) побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M .

Вихідні дані вибрати з таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.1 та 2.2.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для задач 2.1 та 2.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	12	14	16	18	20	18	16	14	12	16
P , кН	5	6	7	8	5	6	7	8	7	6
q , кН/м	3	2	4	5	4	3	2	5	3	4

Таблиця 2.2 – Вихідні дані для задач 2.1 та 2.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	2,0	3,0	2,4	2,8	1,6	1,8	2,4	1,8	1,6	1,4
b , м	1,6	1,8	1,2	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2,6	2,4
c , м	1,2	1,4	1,6	1,8	1,5	2,2	2,4	2,6	2,5	2,7
d , м	1,5	1,3	1,4	2,0	2,4	2,8	3,0	1,5	3,4	4,0

2.1.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.1 та 2.2

Балка – це стрижень, який працює на згинання.

Зовнішні навантаження, що діють на балку, зводяться до зосереджених сил P (кН або МН), пар сил M (кН·м або МН·м) і рівномірно чи нерівномірно розподілених по довжині балки навантажень з інтенсивністю q (кН/м або МН/м).

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки можуть виникнути два внутрішні зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

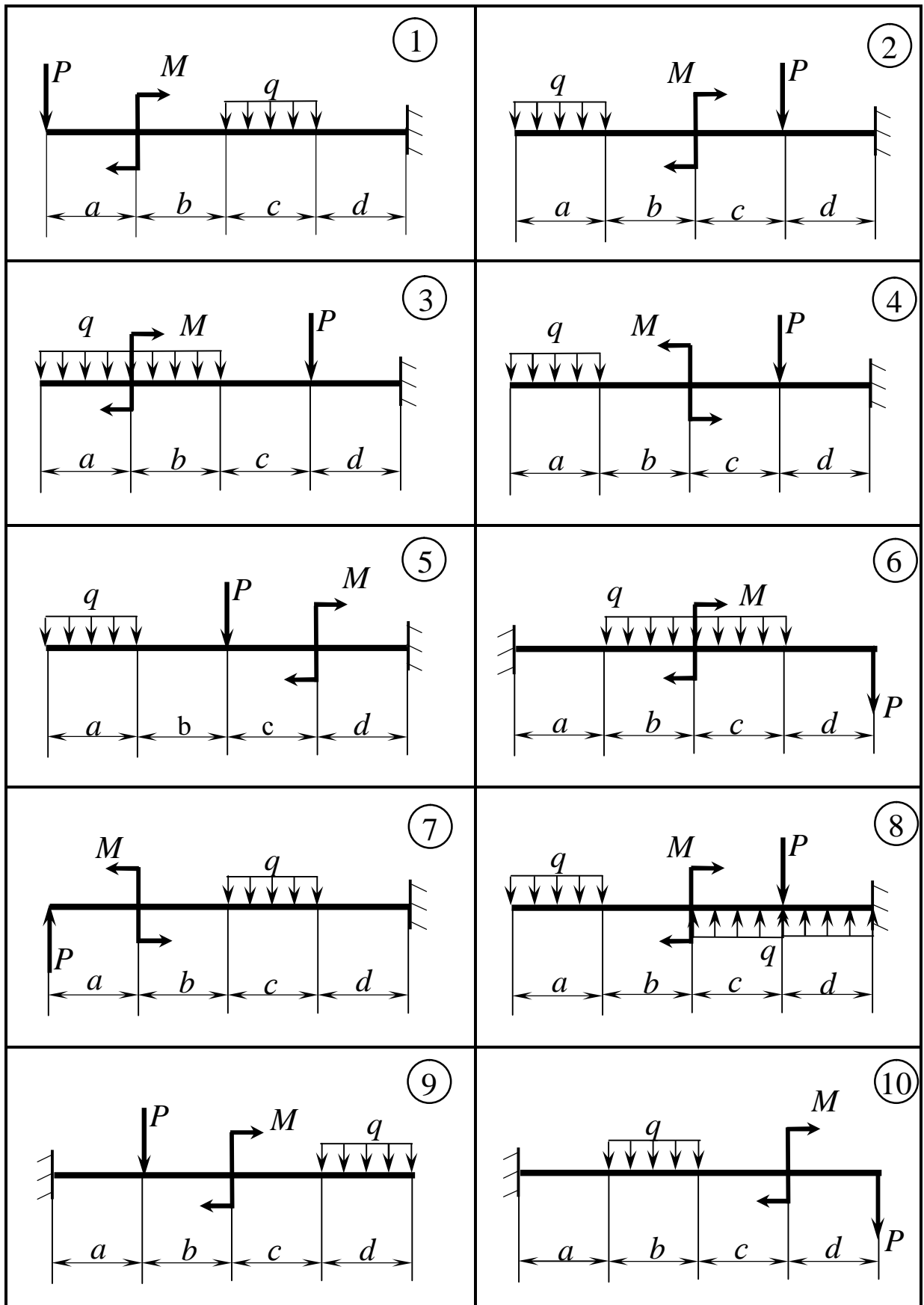


Рисунок 2.1

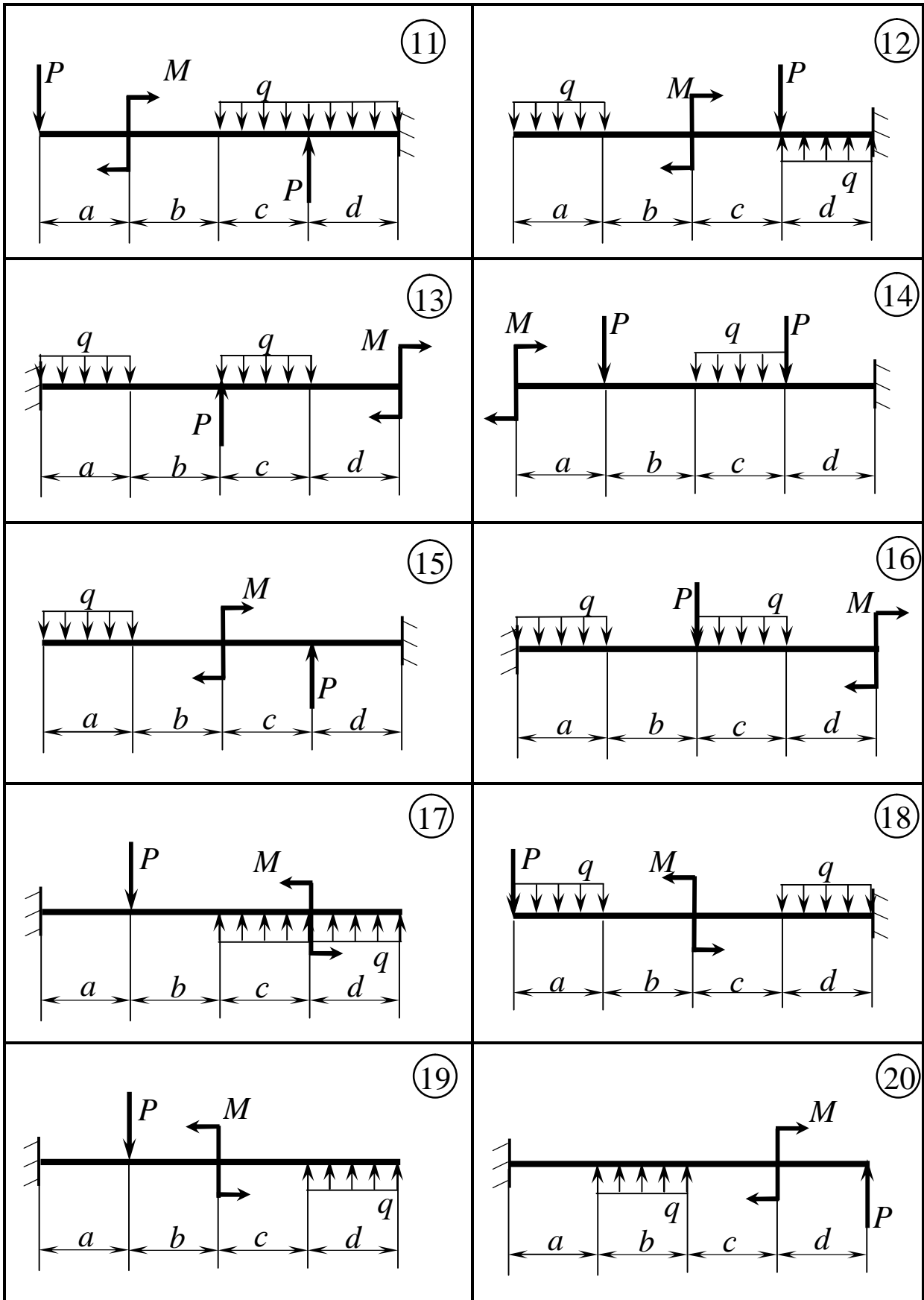


Рисунок 2.1, аркуш 2

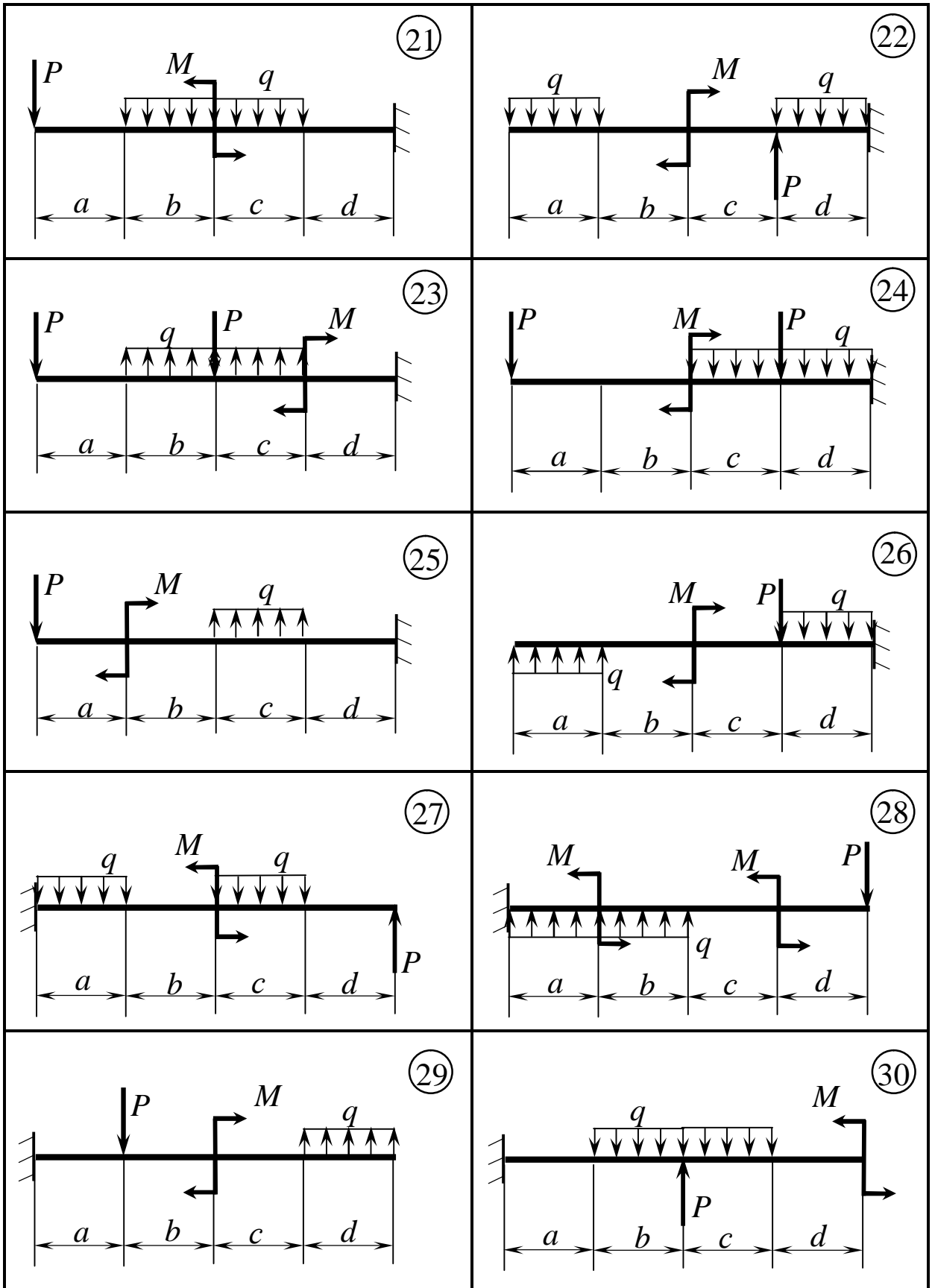


Рисунок 2.1, аркуш 3

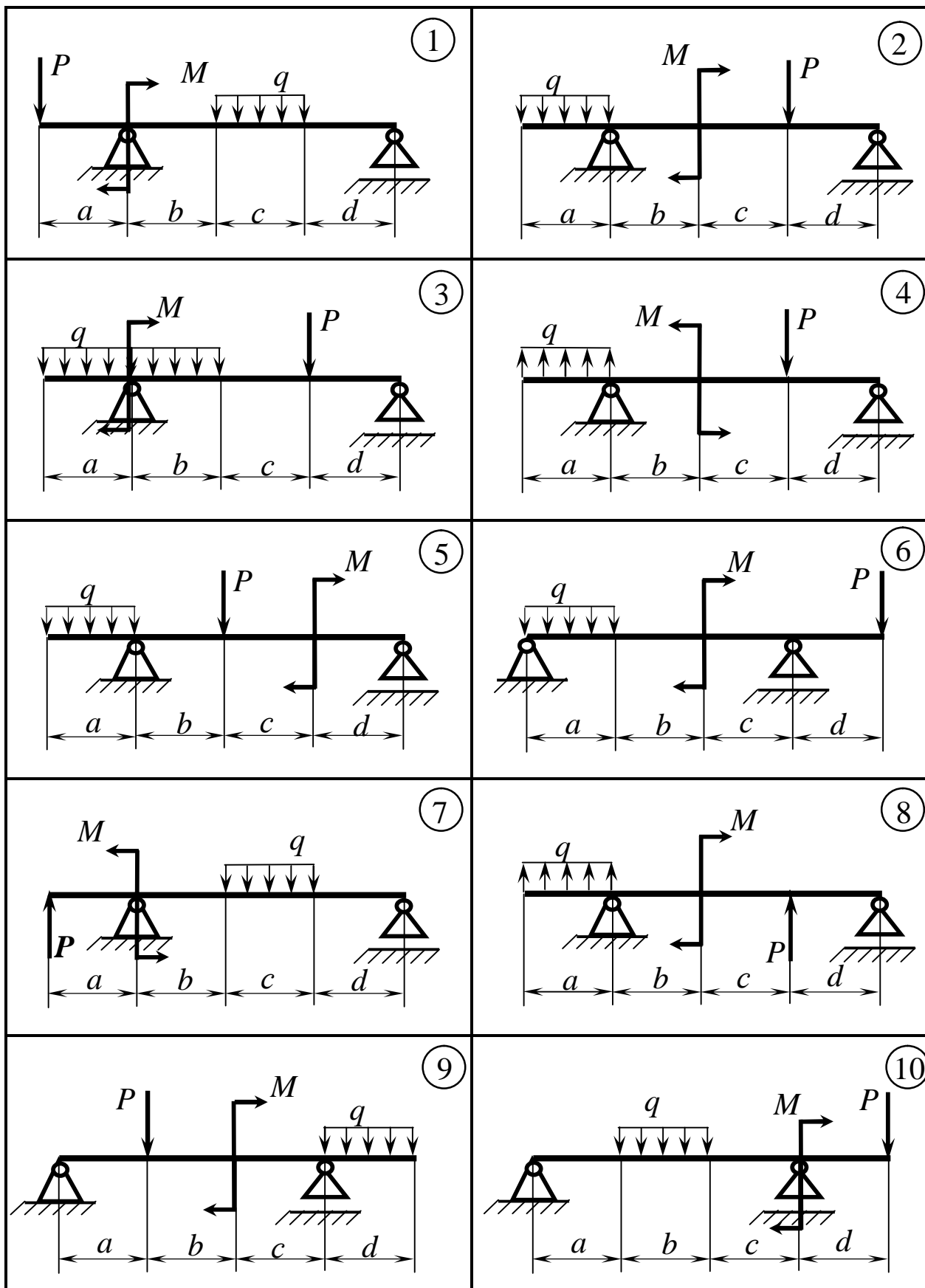


Рисунок 2.2

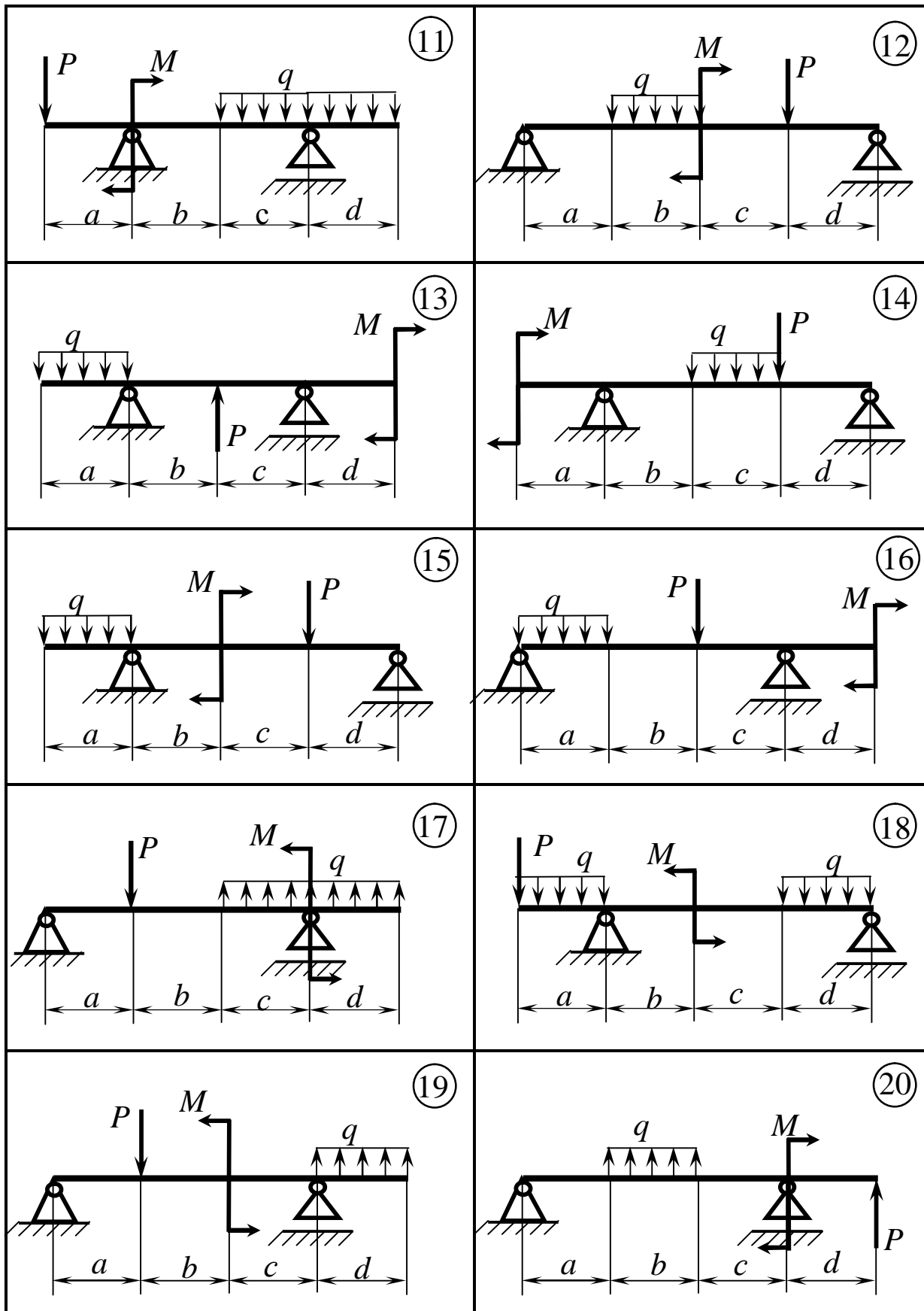


Рисунок 2.2, аркуш 2

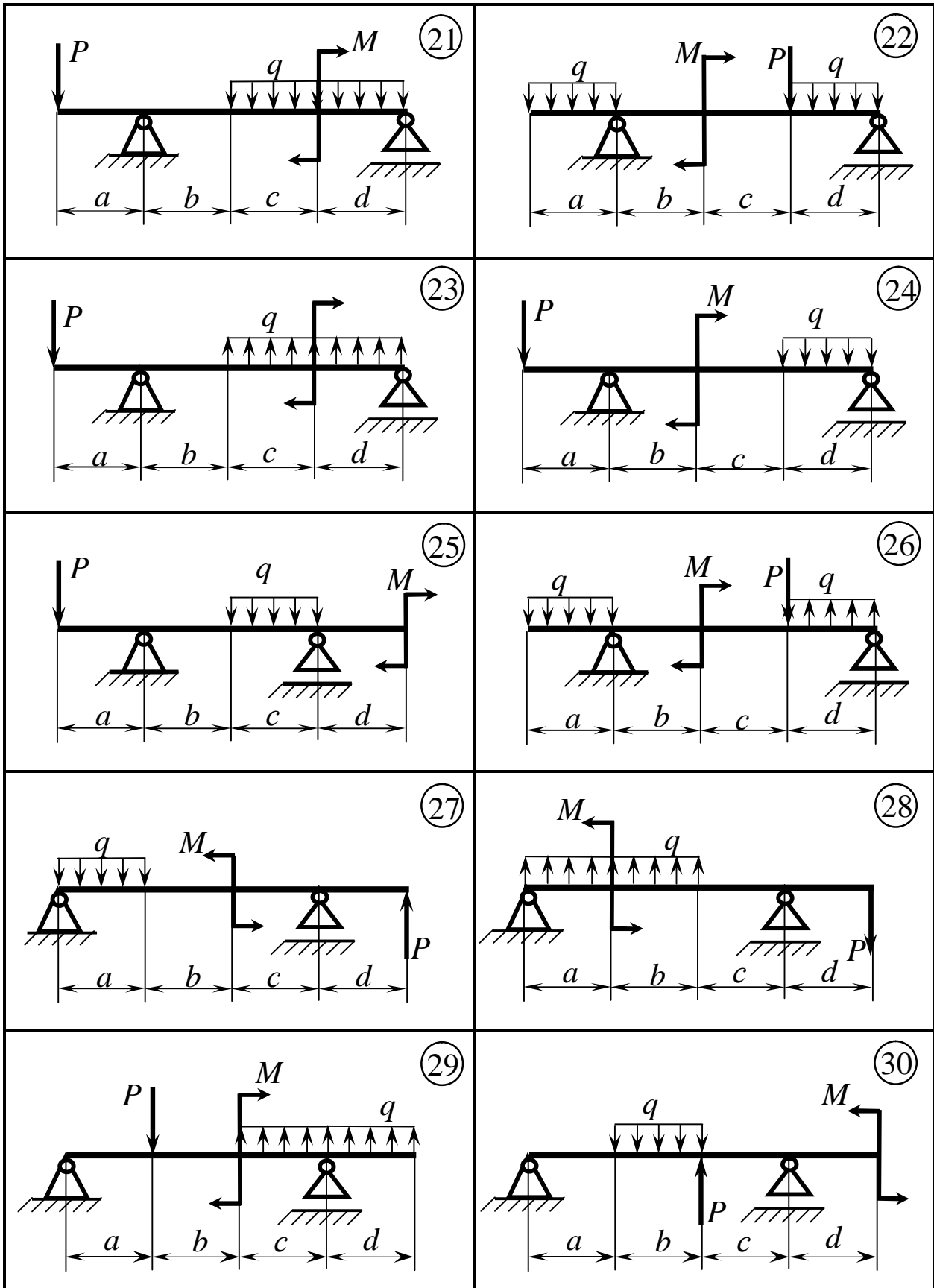


Рисунок 2.2, аркуш 3

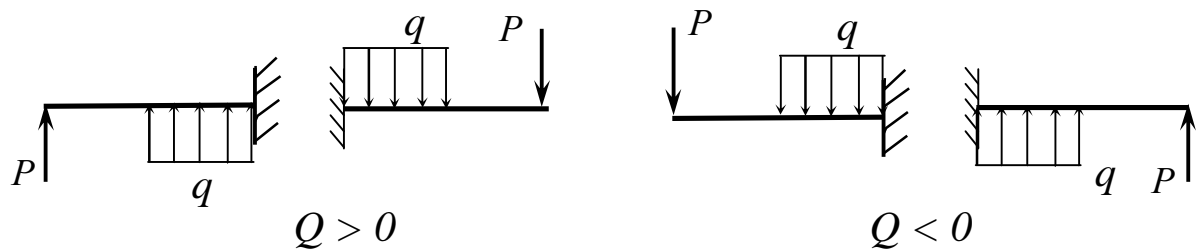


Рисунок 2.3

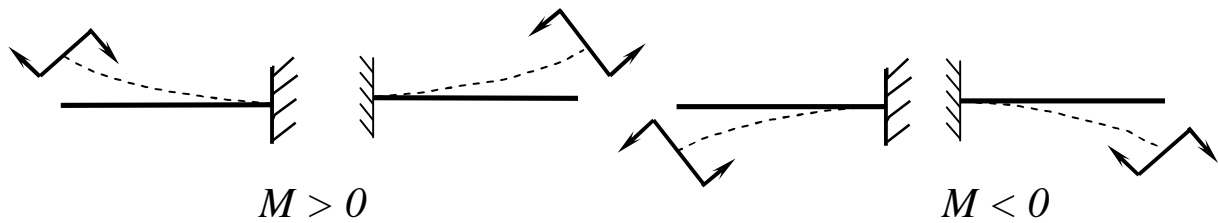


Рисунок 2.4

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, щодо центра ваги цього перерізу.

Встановимо такі правила знаків для Q і M в балках:

Поперечна сила Q у перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки (рис. 2.3).

Згинальний момент M у перерізі вважається додатнім, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 2.4).

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*.

2.1.2 Правила побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри Q окреслюються прямими, паралельними базі, а епюри M в загальному випадку – похилими прямими.

2 На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M – квадратичною параболою. Оскільки епюру M будуюмо на стиснутих волокнах, то випуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q .

3 У перерізі, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри, тобто епюра M досягає екстремального значення.

Якщо, “рухаючись” зліва направо, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{max}$, а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{min}$.

Координату z перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулою:

$$z = \frac{Q_l}{q} \quad \text{або} \quad z = \frac{Q_{np}}{q},$$

де Q_l та Q_{np} – значення поперечної сили відповідно з лівого або з правого краю ділянки.

4 На ділянках, де $Q > 0$, момент зростає, де $Q < 0$, момент зменшується.

5 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені сили:

а) на епюрі Q будуть “стрибки” на значення прикладених сил з урахуванням їх знаків (якщо будувати епюру, “рухаючись” зліва направо, то напрямок “стрибка” буде співпадати з напрямком вектора сили);

б) на епюрі M будуть злами, причому вістря зламу спрямоване проти дії сили.

6 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть “стрибки” на значення цих моментів (на епюрі Q змін не буде). Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. Лінії епюри до стрибка і за ним – паралельні. Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент – сила спричиняє злам і порушує паралельність.

7 Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту. Якщо ж у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них $M = 0$, що має місце найчастіше.

8 Епюра Q є діаграмою, похідною від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M .

Епюра будується на базовій лінії (або на базі), яка співпадає з віссю стрижня і на якій значення всіх внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Додатні ординати будемо відкладати уверх від базової лінії, а від’ємні – униз.

Найзручніше будувати епюри Q і M за характерними Перерізами.

Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Характерні перерізи проводять на нескінченно малій відстані від сил, моментів, тощо, і позначаються, як правило, цифрами.

Можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки).

2 Визначити характерні перерізи .

3 Обчислити значення Q у характерних перерізі, потім, “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

4 Обчислити значення M в характерних перерізі. Побудувати епюру M за цими значеннями.

Перевірка вірності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки стрибків і нахилів прямих на епюрі M .

2.1.3 Приклад розв’язання задачі 1 (схема без екстремуму)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.5, а).

Розв’язання. Будемо будувати епюру, “рухаючись” зліва направо. Позначимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.5, а) за правилами, які зазначені вище.

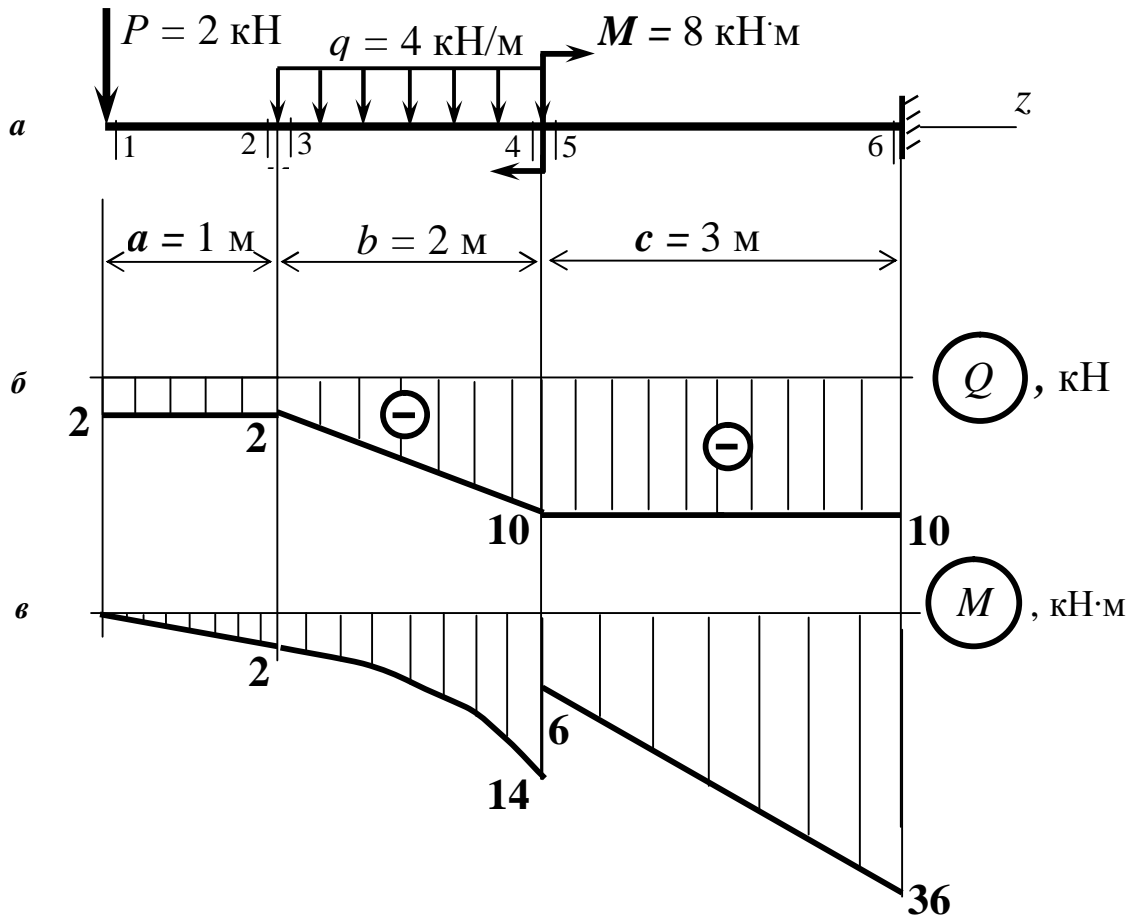
Визначимо поперечні сили в характерних перерізі:

$$Q_1 = -P = -2 \text{ кН}; \quad Q_2 = -P - qa = 2 - 4 \cdot 2 = -10 \text{ кН}; \\ Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_2 = -10 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням

масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 1...2 та 5...6 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) еюра Q окреслюються прямими, паралельними базі. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , еюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2).



*а - задана схема; б - еюра поперечних сил;
в - еюра згинальних моментів*

Рисунок 2.5 – Консольна балка

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізі:

$$M_1 = P \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -P \cdot a = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = P(a+b) - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = -2(1+2) - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = -14 + 8 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -P(a+b+c) - q \cdot b \left(\frac{b}{2} + c \right) + M = -2(1+2+3) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 3 \right) + 8 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Побудуємо епюру згинальних моментів M , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, в). Згідно з правилом 1, на ділянках 1...2 та 5...6, де розподільного навантаження немає, епюри M окреслюються похилими прямими. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра M обмежується квадратичною параболою, випуклість якої звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q , тобто вверх.

2.1.4 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.6, а).

Розв'язання. У цьому прикладі, як і в попередньому, балка закріплена тільки одним кінцем, тому будувати епюру краще з “вільного” кінця. При цьому реакції опори (защемлення) можна не знаходити, але ми їх знайдемо для перевірки побудови епюр:

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0: \quad -M - P(a+b) + q \cdot b \left(a + \frac{b}{2} \right) - M_A = 0;$$

Знаходимо:

$$M_A = -M - P(a+b) + qb \left(a + \frac{b}{2} \right) = -6 - 2(3+2) + 4 \cdot 2 \left(3 + \frac{2}{2} \right) = 16 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum P_{ky} = 0: \quad -R_A + q \cdot b - P = 0.$$

Знаходимо R_A : $R_A = 42 - 2 = 6 \text{ кН}$.

Означимо на балці характерні перерізи.

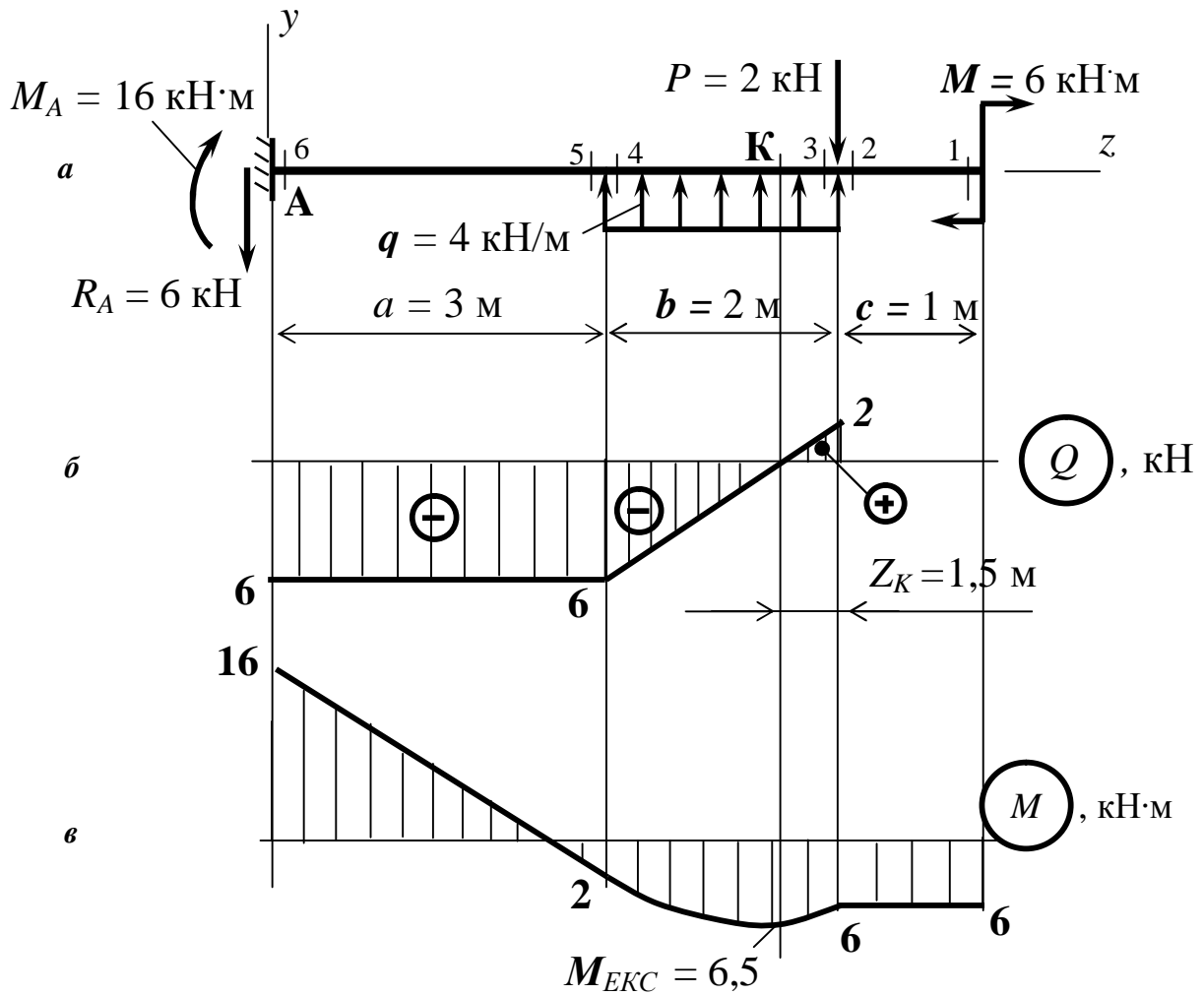
Для побудови епюри Q визначимо поперечні сили в характерних перерізі, “рухаючись” справа наліво.

У перерізі 1 та 2 немає ніякої поперечної сили, тому

$$Q_1 = Q_2 = 0.$$

У перерізі 3 з'являється сила $P = 2 \text{ кН}$, яка прагне повернути відсічену частину балки за рухом годинникової стрілки, тому

$$Q_3 = P = 2 \text{ кН}.$$



*а - задана схема; б - еюра поперечних сил;
в- еюра згинальних моментів
Рисунок 2.6 – Консольна балка*

На ділянці 3...4 розподілене навантаження q прагне повернути відсічену частину балки проти ходу годинникової стрілки, тому поперечна сила буде зменшуватися:

$$Q_4 = P - q \cdot 2 = 2 - 4 \cdot 2 = 6 \text{ кН.}$$

На ділянці 5...6 ніякі зовнішні зусилля не з'являються, тому

$$Q_5 = Q_6 = Q_4 = 6 \text{ кН.}$$

Побудуємо еюру поперечних сил Q (див. рис. 2.6, б).

Для цього відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 1...2 та 5...6 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2), причому ця пряма перетинає базову лінію. А оскільки, згідно з правилом 3, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle-\rangle\rangle$ на $\langle\langle+\rangle\rangle$, то $M_{ЕКСТР} = M_{\min}$.

Визначимо координату z перерізу K , де $Q = 0$, за формулою:

$$z = \frac{Q_{np}}{q} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ м.}$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізі.

У перерізі 1 зосереджений момент M загинає балку вниз, тому

$$M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

На ділянці 1...2 немає ніяких зовнішніх зусиль крім моменту, тому

$$M_2 = M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 крім моменту з'являються також розподілене навантаження та сила, але вони діють на нескінченно малому відрізку довжини, тому

$$M_3 = M_2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 4-й переріз крім моменту M діють сила P , яка загинає балку униз, та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку уверх, тому

$$M_4 = -M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = -6 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на 6-й переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо

$$M_6 = -M - P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 = -6 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (див. рис. 2.6, в). При цьому треба мати на увазі, що на ділянках 1...2 та 5...6 добути точки треба з'єднувати прямими лініями, а на ділянці 3...4 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто униз. Як ми зазначали раніше, у перерізі K момент має найменше значення:

$$M_{EKCTP} = M_{\min} = -M - Pz_K + q \frac{z_K^2}{2} = -6 - 2 \cdot 0,5 + 4 \frac{0,5^2}{2} = -6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Зробимо перевірку побудови епюр, для чого будемо “рухатись” зліва направо. У цьому випадку “стрибки” на епюрі поперечних сил співпадають з напрямком зовнішніх сил.

Зліва від перерізу 6 розташована сила $R_A = 6$ кН, яка направлена униз, тому на епюрі Q (див. рис. 2.6, б) має місто “стрибок” униз на величину

$$Q_6 = -R_A = -6 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_4 = Q_6 = -6 \text{ кН}.$$

На ділянці 4...3 розподілене навантаження q прагне повернути відсічену частину балки (відносно перерізу 4) за ходом годинникової стрілки, тому поперечна сила буде зростати і у перерізі 3 досягне величини

$$Q_3 = -R_A + q \cdot 2 = -6 + 4 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

При переході з перерізу 3 до перерізу 2 буде стрибок униз на величину сили P і досягне нуля. Тому $Q_2 = Q_1 = 0$. Епюра Q побудована вірно.

Перевіряємо побудову епюри M . Зліва від перерізу 6 розташовано реактивний момент $M_A = 16$ кН·м, який загинає балку догори, тому на епюрі M (див. рис. 2.6, б) має місце “стрибок” уверх на величину $M_6 = 16$ кН·м.

У перерізах 5 і 4 момент має величину

$$M_5 = M_4 = M_A - R_A \cdot 3 = 16 - 6 \cdot 3 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На ділянці 4...3 епюра згинальних моментів окреслена квадратичною параболою, а у перерізі K , де $Q = 0$ значення M має мінімальну величину, тому що Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$.

У перерізах 3 і 2 момент має величину

$$M_3 = M_2 = M_A - R_A \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

У перерізі 1:

$$M_1 = M_A - R_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 2 - P \cdot 1 = 16 - 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

тобто дорівнює величині зовнішнього моменту $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Таким чином, ми бачимо, що епюра M також побудована вірно.

2.1.5 Приклад розв'язання задачі 2.2а (схема без екстремуму)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки (рис. 2.7, а).

Розв'язання. Перш за все, знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kz} = 0; \quad H_A = 0.$$

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -M - P \cdot a - q(b+c) \left(a + \frac{b+c}{2} \right) + R_B \cdot (a+b) = 0;$$

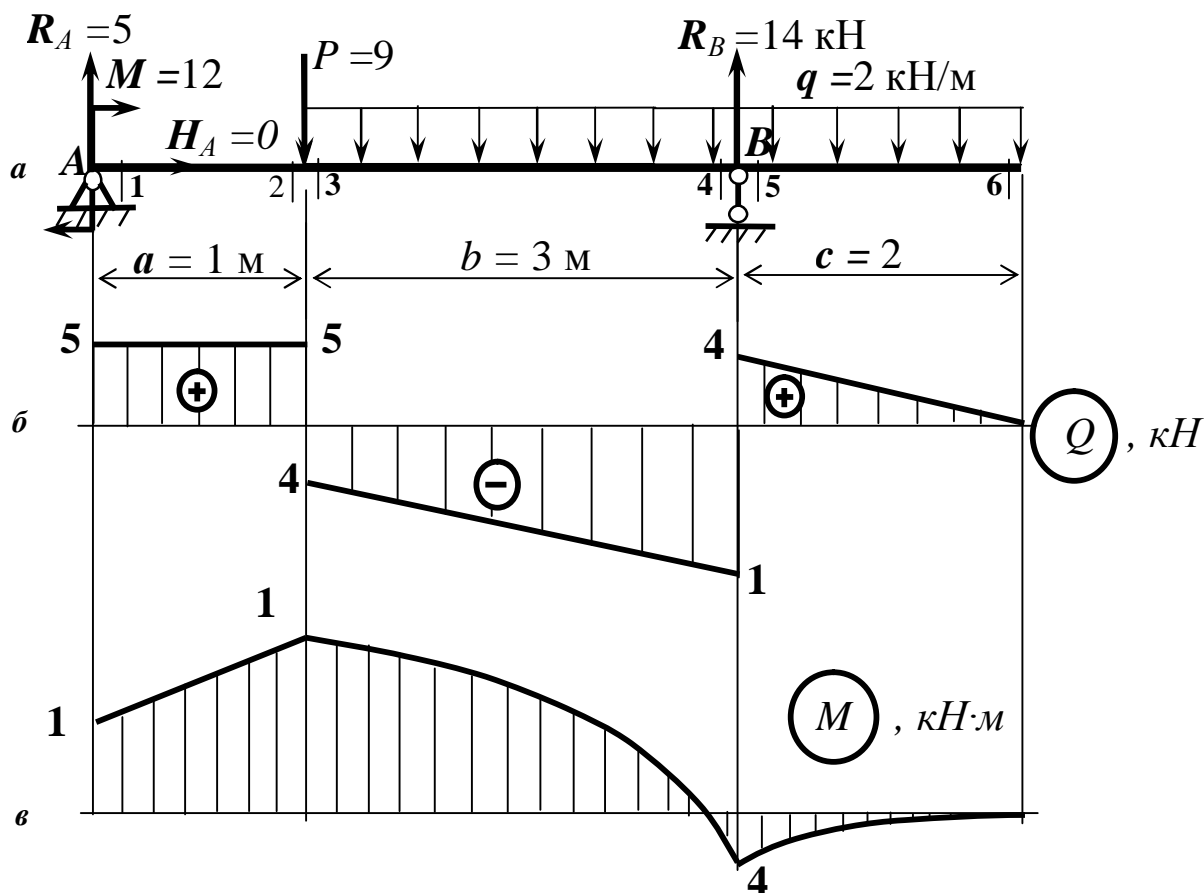
звідки
$$R_B = \frac{1}{1+3} \left(12 + 9 \cdot 1 + 2(3+2) \left(1 + \frac{3+2}{2} \right) \right) = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0: \quad -M - R_A(a+b) + P \cdot b + q \frac{b^2}{2} - q \frac{c^2}{2} = 0;$$

звідки
$$R_A = \frac{1}{1+3} \left(-12 + 9 \cdot 3 + 2 \frac{3^2}{2} - 2 \frac{2^2}{2} \right) = 5 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot (b+c) + R_B = 5 - 9 - 2 \cdot (3+2) + 14 = 19 - 19 = 0.$$



*a - задана схема; б - епюра поперечних сил;
в - епюра згинальних моментів
Рисунок 2.7 – Двохопорна балка до задачі 2.2, а*

Визначимо значення Q у характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 5 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = 5 - 9 = -4 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 - q \cdot b = -4 - 2 \cdot 3 = -10 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + R_B = -10 + 14 = 4 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot c = 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.7, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо “рухатись” з правого боку на лівий.

На ділянці 6...5 розподілене навантаження приводить до зростання епюри Q від значення $Q_6 = 0$ до значення $Q_5 = q \cdot 2 = 4$ кН.

Відносно перерізу 3 реакція $R_B = 14$ кН повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз на величину 14 кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини

$$Q_3 = q \cdot 5 - R_B = 2 \cdot 5 - 14 = -4 \text{ кН.}$$

При переході від перерізу 3 до перерізу 2 має місце "стрибок" уверх на величину сили $P = 9$ кН. Тому

$$Q_2 = Q_3 + P = -4 + 9 = 5 \text{ кН.}$$

На ділянці 2...1 змін не буде, тому

$$Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН.}$$

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M + R_A \cdot a = 12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M + R_A \cdot (a+b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = 12 + 5 \cdot (1+3) - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = -q \frac{c^2}{2} = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Оскільки значення моменту в перерізі 5 ліворуч і праворуч співпадають, то можна вважати, що епюра M побудована вірно. За визначеними даними побудуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 2.7, в).

2.1.6 Приклад розв'язання задачі 2.2б (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки (рис. 2.8, а).

Розв'язання. Визначимо опорні реакції балки (рис. 2.8, а).

Оскільки на балку діють тільки вертикальні сили, то горизонтальна реакція відсутня: $H_B = 0$.

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; q \cdot 1 \cdot 0,5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + M - P \cdot 5 + R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{6}(15 \cdot 6 - 21 + 8 \cdot 5 \cdot 2,5 - 8 \cdot 1 \cdot 0,5) = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0; -R_A \cdot 6 + P \cdot 1 + M + q \cdot 6 \cdot 4 = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{6}(15 \cdot 1 + 21 + 8 \cdot 6 \cdot 4) = 38 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot 6 + R_B = 63 - 63 = 0.$$

Визначимо значення Q в характерних перерізі балки (див. рис. 2.8, а):

$$Q_1 = 0; Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 + R_A = -8 + 38 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_5 = R_A - q \cdot 2,5 = 38 - 8 \cdot 2,5 = 18 \text{ кН};$$

$$Q_6 = R_A - q \cdot 6 = 38 - 8 \cdot 6 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 - P = -10 - 15 = -25 \text{ кН}.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.8, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

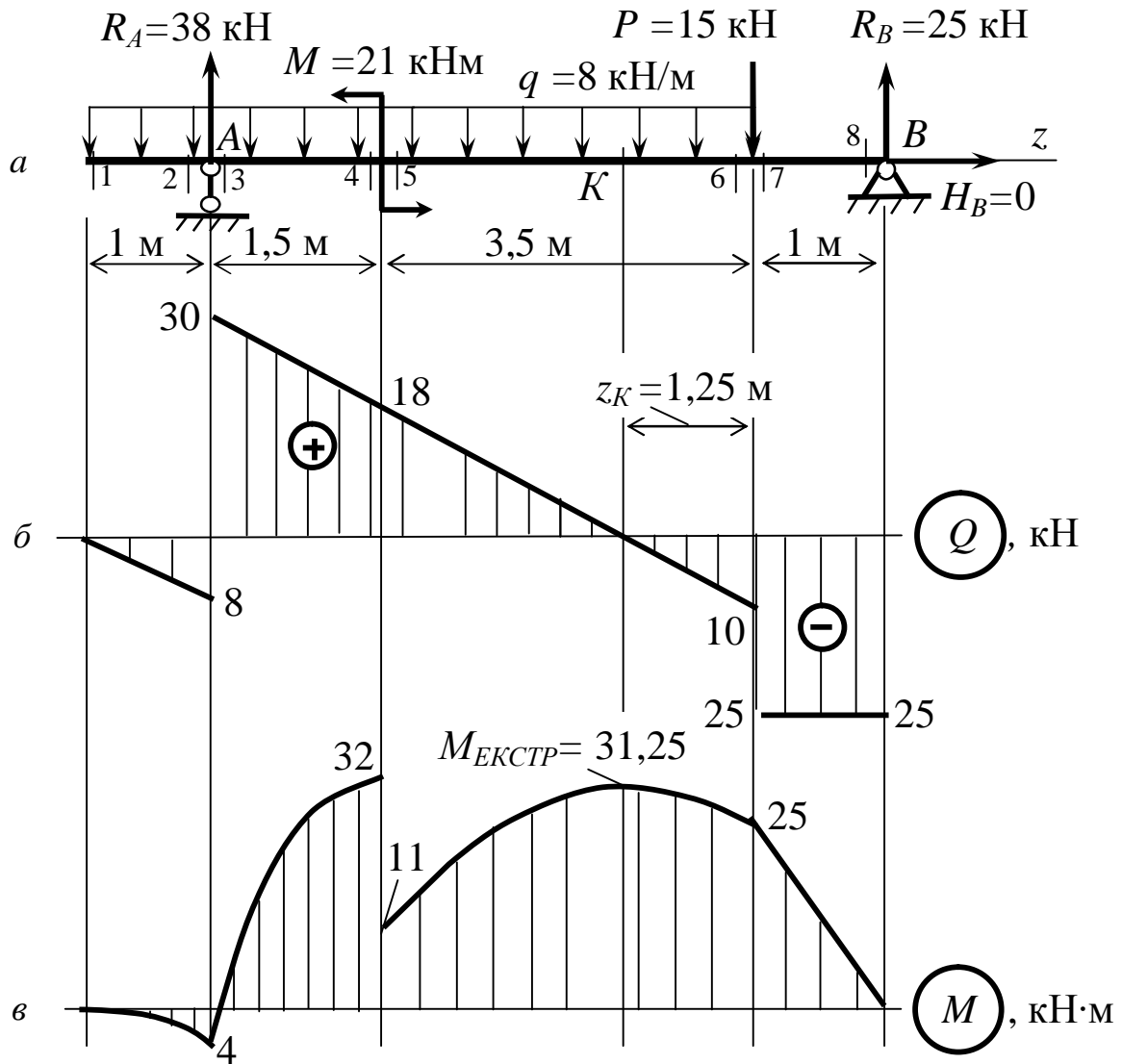
Оскільки ми будували епюру Q , “рухаючись” зліва направо, то напрямок “стрибків” на епюрі співпадає з напрямком сил.

На ділянці 1...2 розподілене навантаження приводить до поступового зниження значень поперечних сил Q від значення $Q_1 = 0$ до значення

$$Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \text{ кН}.$$

У перерізі 3 реакція $R_A = 38$ кН забезпечує “стрибок” уверх до величини $Q_3 = 30$ кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження поперечна сила поступово зменшується до величини $Q_6 = -10$ кН.



*a - задана схема; б - епюра поперечних сил;
в - епюра згинальних моментів
Рисунок 2.8 – Двохопорна балка до задачі 2.2, б*

У перерізі 7 сила $P = 15$ кН забезпечує “стрибок” униз до величини $Q_7 = -25$ кН і далі поперечна сила не змінюється $Q_8 = Q_7 = -25$ кН.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо “рухатись” справа наліво.

У перерізі 8 реакція $R_B = 25$ кН намагається повернути балку проти ход годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” униз до $Q_8 = -25$ кН і далі без змін до перерізу 7.

У перерізі 6 з’являється сила $P = 15$ кН, яка намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” уверх до значення $Q_6 = -10$ кН.

На ділянці 6...3 розподілене навантаження приводить до зростання значень поперечних сил Q від значення $Q_6 = -10$ кН до значення $Q_3 = Q_6 + q \cdot 5 = 30$ кН. При цьому наявність згинального моменту M на епюрі Q не позначається.

Відносно перерізу 2 реакція $R_A = 38$ кН повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз до величини $Q_2 = -8$ кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини $Q_1 = Q_2 + q \cdot 1 = 0$.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -8 \cdot 1 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 1,5 - q \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 38 \cdot 1,5 - 8 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 - M = 32 - 21 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = R_A \cdot 5 - q \cdot 6 \cdot 3 - M = 38 \cdot 5 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - 21 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 5...6 у перерізі K , де $Q = 0$, на епюрі M має бути максимум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{\text{MAX}}$:

$$z_K = \frac{Q_6}{q} = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{\text{max}} &= R_B(1 + z_K) - P \cdot z_K - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = \\ &= 25 \cdot 2,25 - 15 \cdot 1,25 - 8 \cdot 1,25 \cdot 0,625 = 31,25 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Останню частину епюрі M побудуємо з правого кінця:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot 1 = 25 \cdot 1 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $M_6 = M_7$, то епюра M побудована вірно.

За цими даними будуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 2.8, в).

2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двохопорна рама (задача 2.4)

Для заданої рами побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів.

Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.9 та 2.10.

2.2.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.3 та 2.4

Рамами називають системи, які складаються з прямолінійних стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розміщені стрижні рам називають *стояками*, горизонтальні – *ригелями*. Жорсткість вузлів виключає взаємний поворот скріплених стрижнів, тобто у вузлових точках кути між осями з'єднаних стержнів залишаються незмінними.

Вісь рами є ломаною лінією, а кожний прямолінійний елемент рами можна розглянути як балку. Тому, щоб побудувати яку-небудь епюру для рами, треба побудувати її для кожної окремої балки, що входить до складу рами.

На відміну від звичайних балок у перерізі стрижнів рами, крім згинальних моментів M і поперечних сил Q , як правило, виникають ще поздовжні зусилля N . Отже для рам доводиться будувати епюри N , Q та M , значення яких можна знайти за наступними правилами.

Поздовжня сила N дорівнює сумі проєкцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проєкцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, відносно центра ваги цього перерізу.

Будемо використовувати такі *правила знаків* для N , Q й M , які є однаковими для балок та рам.

Поздовжня сила N вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стрижня.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається повернути переріз, який розглядаємо, за напрямком руху годинникової стрілки.

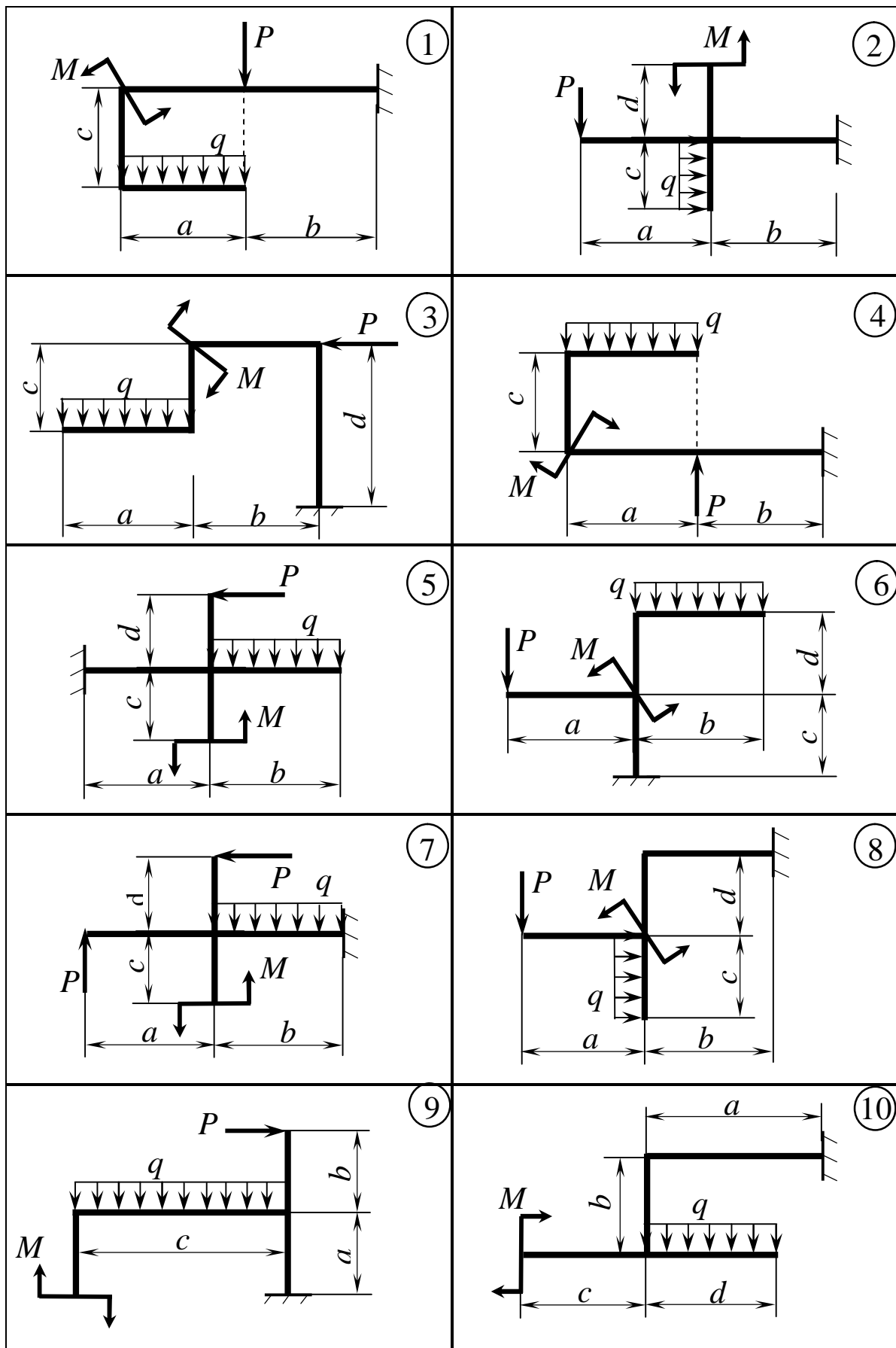


Рисунок 2.9

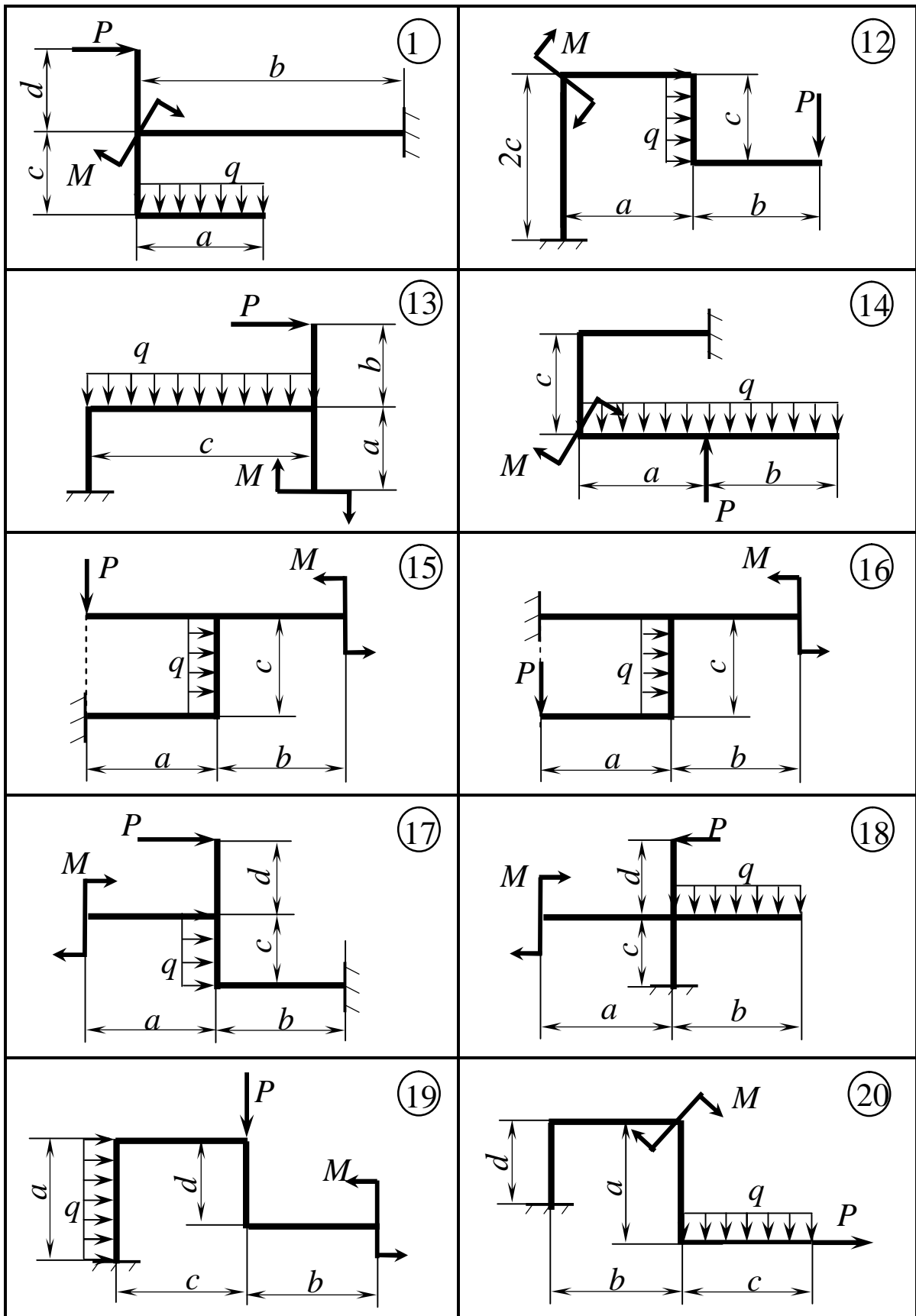


Рисунок 2.9, аркуш 2

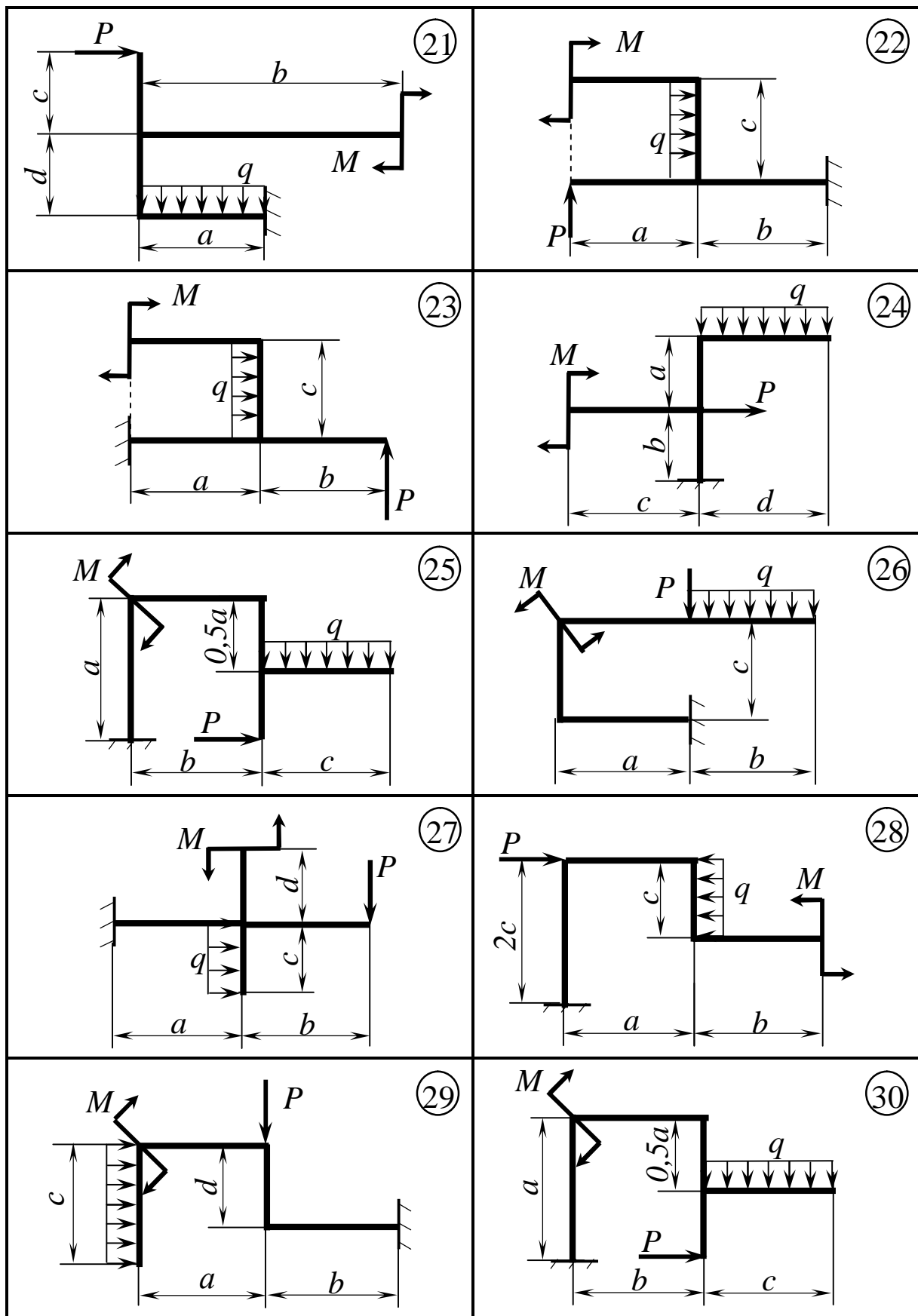


Рисунок 2.9, аркуш 3

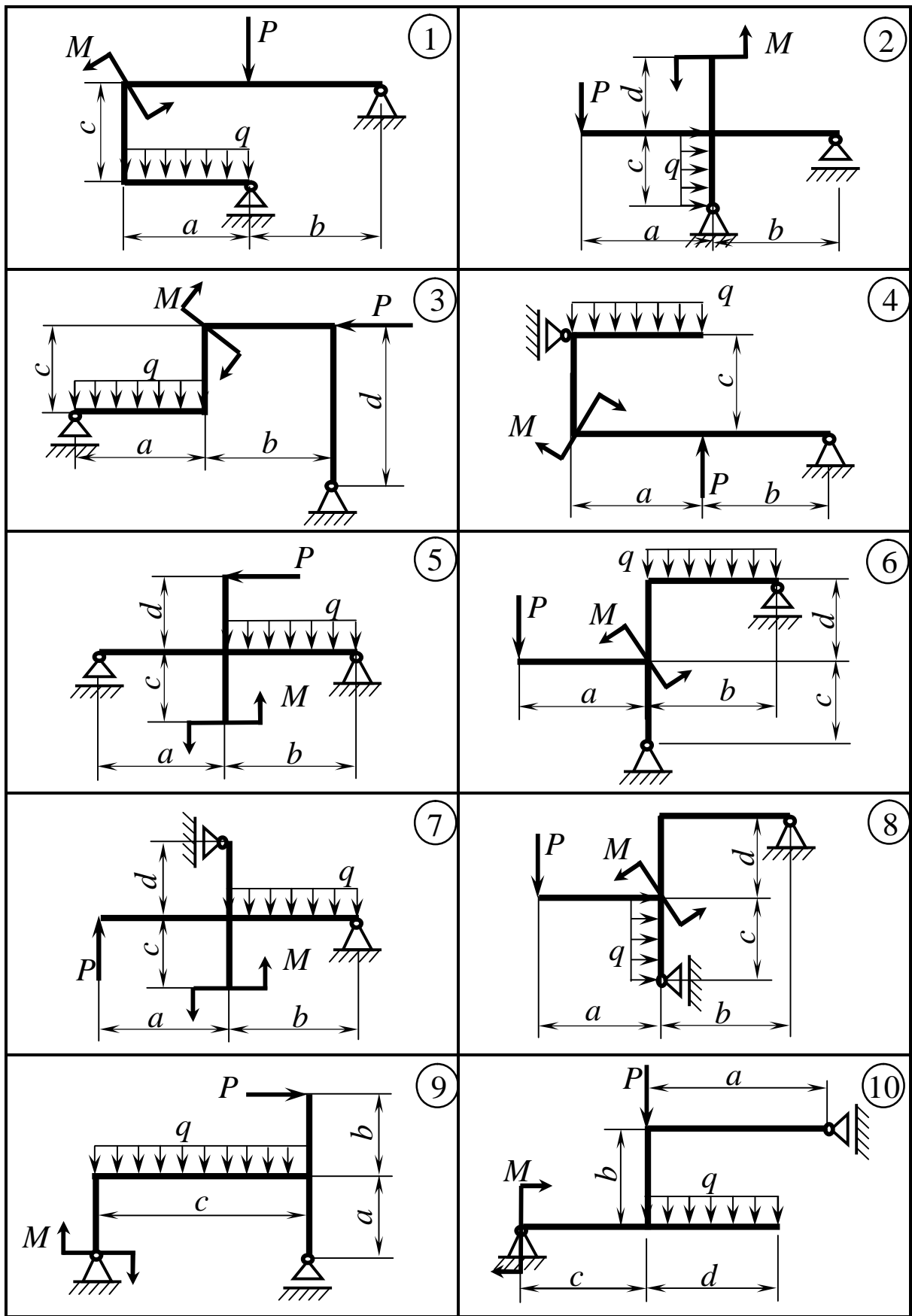


Рисунок 2.10

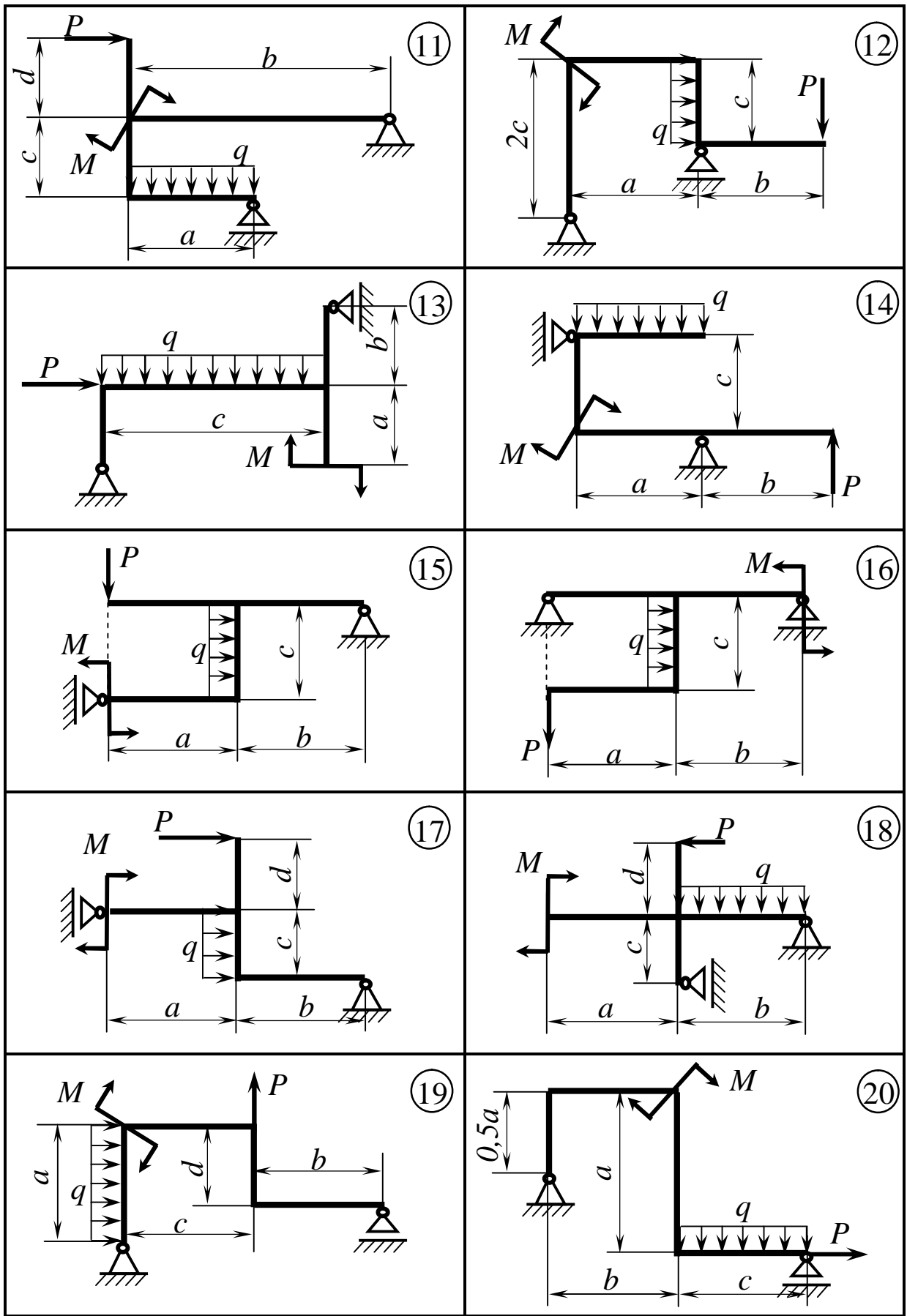


Рисунок 2.10, аркуш 2

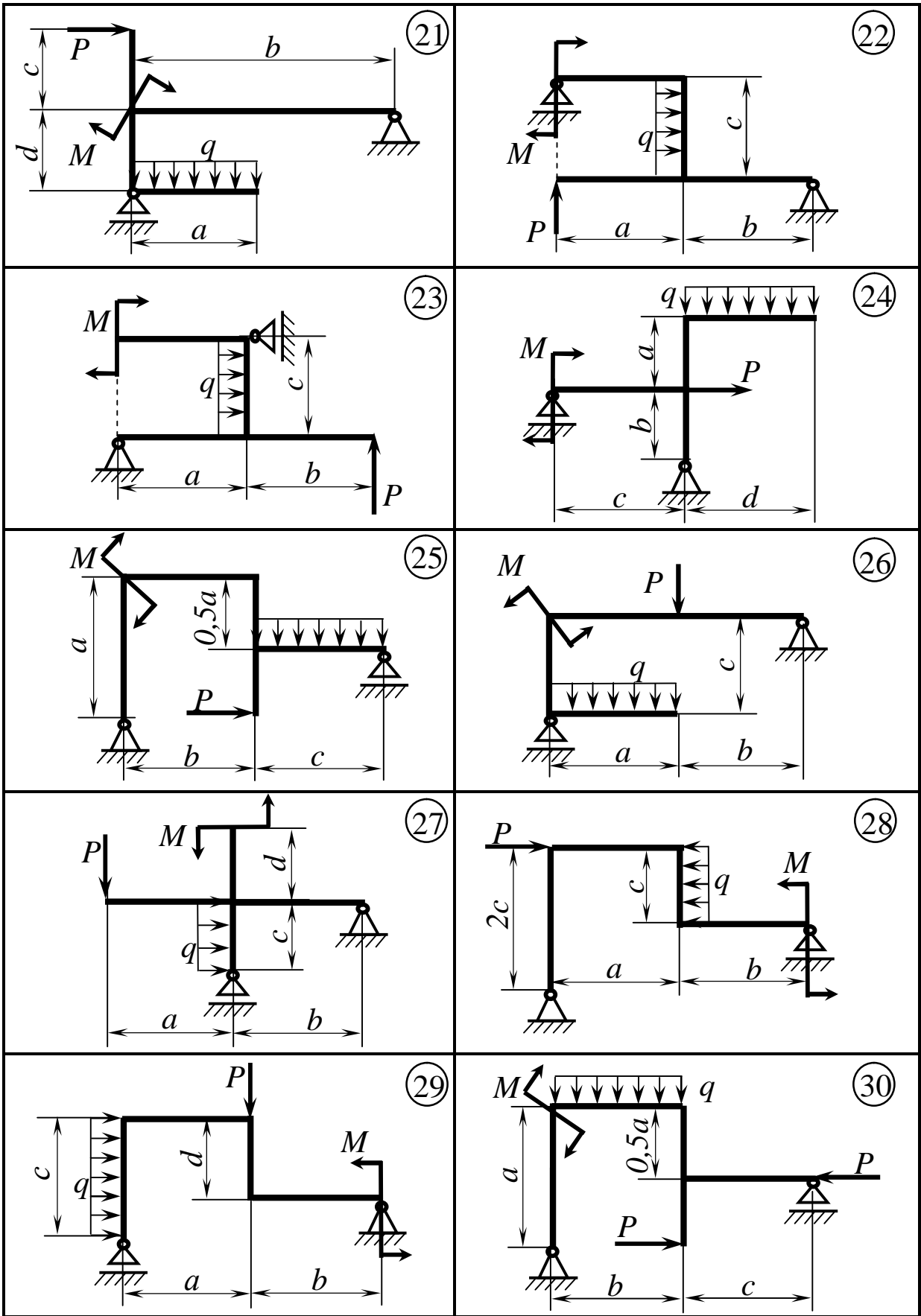


Рисунок 2.10, аркуш 3

При побудові епюр на балках прийняте таке правило знаків щодо згинального моменту: “згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки”.

За цим правилом еюра згинальних моментів будується на верхніх волокнах, якщо згинальний момент додатний (рис. 2.11, а), або на нижніх – якщо згинальний момент від’ємний (рис. 2.11, б).

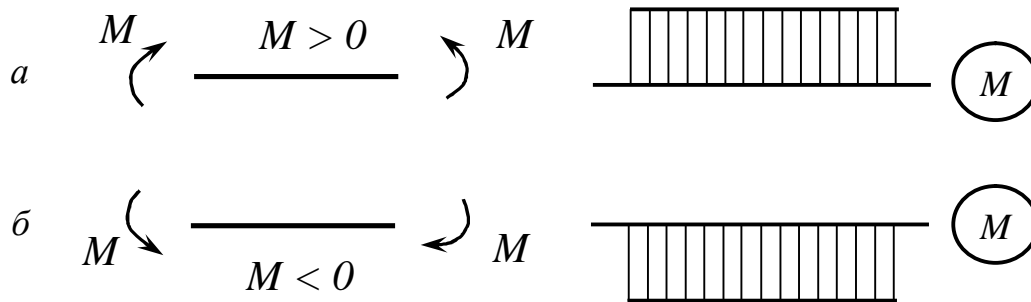


Рисунок 2.11

Таким чином, загальне правило побудови епюри згинальних моментів M для балок та рам буде виглядати так: епюру згинальних моментів будують на **стиснутих** волокнах. Це правило може бути записано інакше: еюра згинальних моментів будується у тому напрямку, куди зовнішні сила чи момент загинають ділянку стрижня, яку розглядаємо.

Вирази для $M(z)$, $Q(z)$ записують дуже рідко – здебільшого для тих ділянок, де діють розподілені навантаження. Найчастіше просто обчислюють значення N , Q та M у характерних перерізах (на межах ділянок та в екстремальних точках), а потім проводять лінії епюр, зважаючи на їхні властивості, про які йшлося в методичних вказівках для виконання задач 1 та 2.

Ординати епюр, як і завжди, будемо відкладати *перпендикулярно* до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами. Якщо рама має жорстке закріплення, то епюри N , Q та M можна будувати, не визначаючи реакції опор і “йдучи” з вільного кінця рами.

2.2.2 Приклад розв’язання задачі 2.3

Для заданої рами (рис. 2.12, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Будемо будувати епюри, “рухаючись” з вільного кінця рами. Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.12, а) за правилами, записаними вище.

Визначимо поздовжні сили N у характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил у перерізі 1 та 2 немає, отже,

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому сила розподіленого навантаження q проєктується на вісь цієї ділянки і викликає поздовжню силу, яка розтягає ділянку

$$N_3 = N_4 = q \cdot a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН.}$$

На перерізі 5 та 6 діє сила $P = 2 \text{ кН}$, яка розміщена горизонтально і стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -8 \text{ кН.}$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї, стискуючи, діє сила розподіленого навантаження

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової осі епюри, яка має контур рами (рис. 2.12, б). З'єднаємо знайдені точки прямими лініями, враховуючи правила, наведені вище.

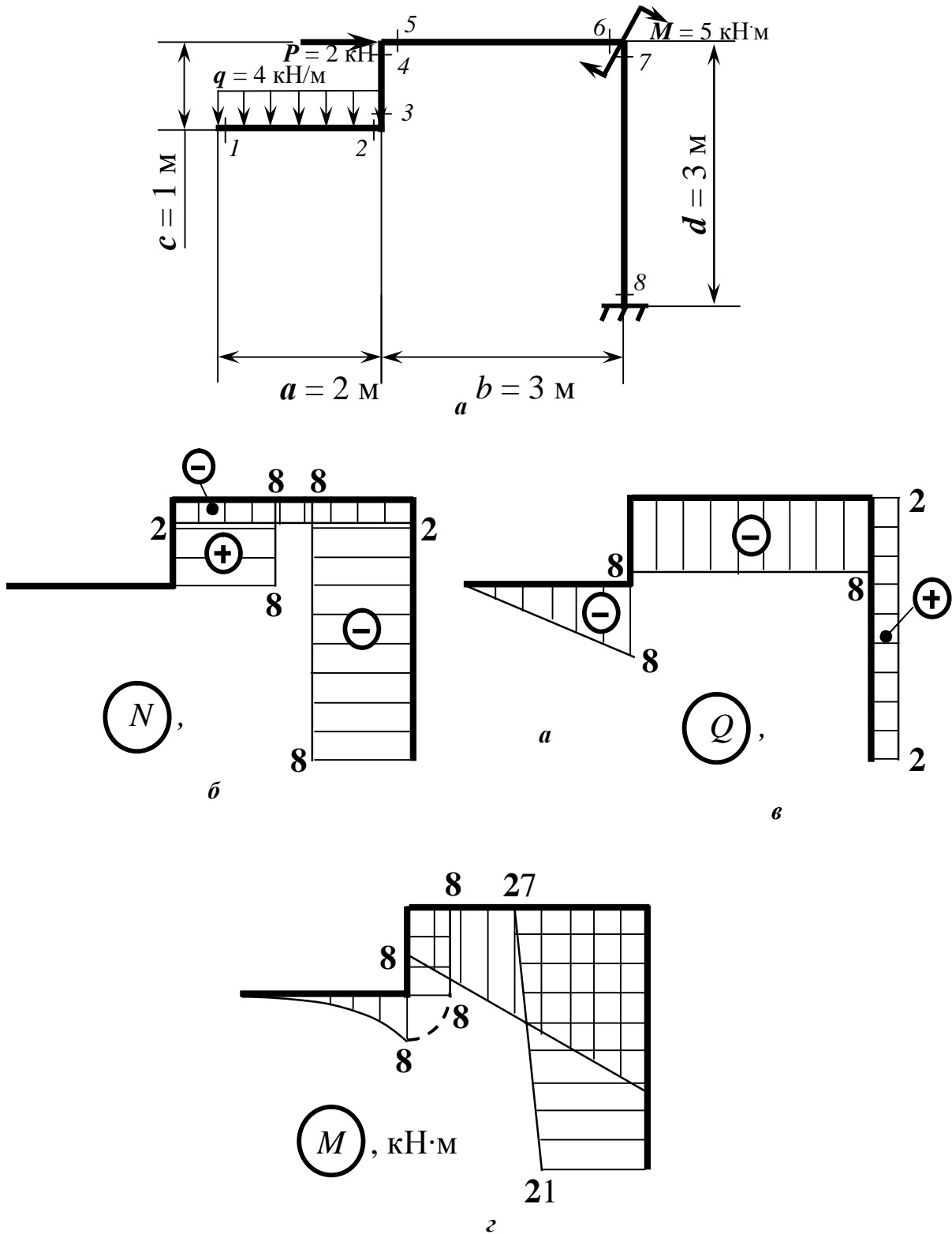
Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізі.

У перерізі 1 поперечною силою є розподілене навантаження, яке діє на нескінченно малому відрізьку, тому

$$Q_1 = q \cdot 0 = 0.$$

У перерізі 2 розподілене навантаження намагається повернути ділянку 1...2 проти ходу годинникової стрілки і поперечна сила досягає величини

$$Q_2 = -qa = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$



a – задана схема, *б* - епюра поздовжніх сил,
в - епюра поперечних сил, *г* - епюра згинальних
 моментів

Рисунк 2.12 – Консольна рама до задачі 2.3

На ділянці 3...4, яка розташована вертикально, немає жодної сили, яка б проектувалась на перпендикуляр до осі стрижня, тому

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

У перерізах 5 та 6 поперечною є сила розподіленого навантаження, яка намагається повернути ділянку 5...6 проти ходу годинникової стрілки:

$$Q_5 = Q_6 = Q_2 = -qa = -8 \text{ кН.}$$

У перерізах 7 та 8 поперечною є сила $P = 2$ кН, яка намагається повернути ділянку 7...8 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_7 = Q_8 = P = 2 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.12, в). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2).

На ділянках 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M у характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки розподільне навантаження діє на нескінченно малому відрізку

$$M_1 = 0.$$

На 2-й Переріз діє розподільне навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку вниз, тому момент, як і в балках, позначимо знаком “мінус”:

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

У перерізі 3 діє той же момент, що і у перерізі 2, але він загинає ділянку 3...4 вправо. Будемо позначати його тим же знаком:

$$M_3 = M_2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На ділянці 3...4 немає ніяких зовнішніх зусиль, тому

$$M_4 = M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

У перерізі 5 діє той же момент, що і у перерізі 2, 3 та 4, який також загинає балку униз, тому

$$M_5 = M_4 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 6 згинальний момент дорівнює:

$$M_6 = -q \cdot 2 \cdot 4 = -4 \cdot 2 \cdot 4 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 крім згинального моменту M_6 , який загинає вертикальну ділянку вліво, з'являються також зовнішній зосереджений момент M , але він діє в протилежному напрямку, тому

$$M_7 = M_6 + M = -32 + 5 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 8-й Переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо:

$$M = -q \cdot 2 \cdot 4 + M + P \cdot 3 = -4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 3 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.12, г). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх. А на всіх інших ділянках добуті ординати треба з'єднувати прямими лініями.

Епюри згинальних моментів на всіх ділянках будемо будувати на стиснутих волокнах, або у тому напрямку, куди сили та момент загинають стрижні. Так на ділянках 1...2 та 5...6 стрижні загинаються униз, на ділянці 3...4 розподілене навантаження загинає вертикальний стрижень праворуч, а на ділянці 7...8 сумісна дія зовнішніх факторів (q , P , M) загинає вертикальний стрижень ліворуч (див. рис. 2.12, г).

2.2.3 Приклад розв'язання задачі 2.4

Для заданої рами (рис. 2.13, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з котрих має по одній реакції.

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції. Для цього використаємо точки перетинань ліній дій реакцій (див. рис. 2.13, а):

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -q \cdot 3,5 \cdot 1,75 - M + P \cdot 1 + R_5 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_5 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 1,75 + 6,5 - 4 \cdot 1}{4,5} = 4,64 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot 2,75 - M + P \cdot 1 - R_1 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_1 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 2,75 - 6,5 + 4 \cdot 1}{4,5} = 5,86 \text{ кН};$$

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_3 - P = 0; \quad R_3 = P = 4 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_1 - q \cdot 3,5 + R_5 = 0;$$

$$5,86 - 3 \cdot 3,5 + 4,64 = 10,5 - 10,5 = 0.$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.13, а) так, щоб будувати епюру, "рухаючись" до вузла С.

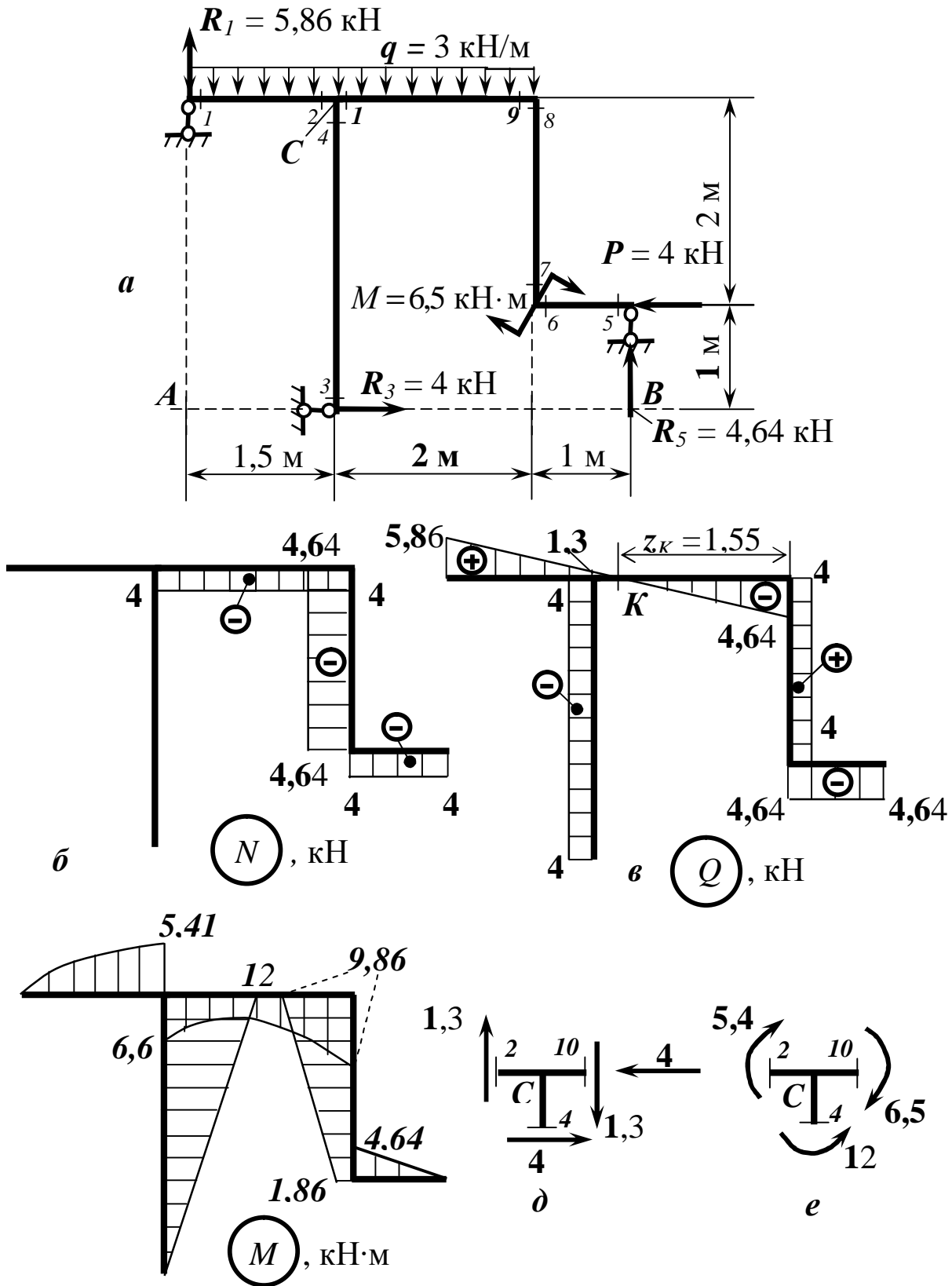
Визначимо поздовжні сили N в характерних перерізі.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил в перерізі 1 та 2 немає, отже:

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому поздовжні сили повинні діяти також вертикально, але їх немає:

$$N_3 = N_4 = 0.$$



2
 а – задана схема, б - епюра поздовжніх сил, в - епюра поперечних сил, г - епюра згинальних моментів, д - вузол С трьохопорної рами під дією сил, е - вузол С трьохопорної рами під дією моментів

Рисунок 2.13 – Трьохопорна рама

На перерізи 5 та 6 діє сила $P = 4$ кН, яка розміщена горизонтально і стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -4 \text{ кН.}$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї, стискуючи, діє реакція $R_5 = 4,64$ кН, тому

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

На ділянку 9...10 також діє горизонтально розміщена сила $P = 4$ кН, яка її стискає, тому

$$N_9 = N_{10} = -P = -4 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.13, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила.

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізах.

У перерізі 1 діє реакція $R_1 = 5,86$ кН, яка намагається повернути відрізок рами за ходом годинникової стрілки, тобто має позначку “плюс”, тому

$$Q_1 = R_1 = 5,86 \text{ кН.}$$

У перерізі 2 завдяки розподіленому навантаженню поперечна сила зменшується до величини

$$Q_2 = R_1 - q \cdot 1,5 = 5,86 - 3 \cdot 1,5 = 1,36 \text{ кН.}$$

У перерізі 3 та 4 поперечною силою є реакція $R_3 = 4$ кН, яка намагається повернути ділянку 3...4 проти ходу годинникової стрілки, тому

$$Q_3 = Q_4 = -R_3 = -4 \text{ кН.}$$

На ділянці 5...6, яка розташована горизонтально, поперечною силою є реакція $R_5 = 4,64$ кН, яка намагається повернути цю ділянку проти ходу годинникової стрілки, тому

$$Q_5 = Q_6 = -R_5 = -4,64 \text{ кН.}$$

У перерізі 7 та 8 поперечною силою є сила $P = 4$ кН, яка намагається повернути ділянку 5...6 за ходом годинникової стрілки:

$$Q_7 = Q_8 = P = 4 \text{ кН.}$$

На переріз 9 діє реакція $R_5 = 4,64$ кН, яка намагається повернути відрізок рами проти ходу годинникової стрілки, тобто має позначку “мінус”, тому

$$Q_9 = -R_5 = -4,64 \text{ кН.}$$

У перерізі 10 ми маємо реакцію R_5 та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке намагається повернути ділянку 9...10 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_{10} = -R_5 + q \cdot 2 = 4,64 - 3 \cdot 2 = 1,36 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q (рис. 2.13, в), для чого відкладемо знайдені результати у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила. На ділянках 1...2 та 9...10, де діє розподілене навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2). На інших ділянках розподіленого навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M в характерних перерізі.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_1 та розподілене навантаження діють на нескінченно малому відрізку:

$$M_1 = 0.$$

На 2-й Переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає частину рами униз, тому означимо момент від неї, як і в балках, позначкою “мінус”, а момент від реакції R_1 нехай буде додатний:

$$M_2 = R_1 \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,86 \cdot 1,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,41 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_3 діє на нескінченно малому відрізку, тому $M_3 = 0$, а в 4-му перерізі

$$M_4 = R_3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 5 та 6 будемо розмірковувати аналогічно попередньому:

$$M_5 = 0; \quad M_6 = R_5 \cdot 1 = 4,64 \cdot 1 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 діє той же момент, що і у перерізі 6, який загинає вертикальний стрижень вправо (будемо позначати його позначкою “плюс”), а також зовнішній момент M , який загинає вертикальний стрижень в протилежному напрямку:

$$M_7 = M_6 - M = 4,64 - 6,5 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При обчислюванні згинального моменту у перерізі 8 треба враховувати всі зусилля, які діють нижче та праворуч даного перерізу, тобто силу P , реакцію R_5 та момент M :

$$M_8 = R_5 \cdot 1 - P \cdot 2 - M = 4,64 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 6,5 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 9 діє той же момент, що і у перерізі 8, але він загинає дану частину рами униз. Будемо означати його тією ж позначкою:

$$M_9 = M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На переріз 10 крім сили P , реакції R_5 та моменту M діє також розподілене навантаження, тому знаходимо

$$M_{10} = R_5 \cdot 3 - P \cdot 2 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 4,64 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -6,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 9...10 у перерізі K , де $Q = 0$, на епюрі M має бути екстремум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{EKCTP}$:

$$z_K = \frac{Q_9}{q} = \frac{4,64}{3} = 1,55 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{EKCTP} &= R_5(1 + z_K) - P \cdot 2 - M - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = \\ &= 4,64 \cdot 2,55 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = -6,27 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.13, г).

При цьому треба мати на увазі, що епюру згинальних моментів треба будувати на *стиснутих волокнах* або у напрямку, куди сила чи момент загинає ділянку стрижня.

Так на ділянці 1...2 розподілене навантаження q загинає стрижень униз (домовимось позначати цей момент позначкою “мінус”), а реакція R_1 – уверх (позначимо момент від R_1 позначкою “плюс”). Оскільки після підрахування момент $M_2 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (тобто має позначку “плюс”), то будемо відкладати епюру M уверх. При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх (див. рис. 2.13).

На ділянці 3...4 реакція R_3 загинає стрижень вправо, тому епюру M будемо будувати на стиснутих волокнах, тобто праворуч (див. рис. 2.13, г). Значення моментів $M_3 = 0$ та $M_4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ з’єднаємо прямою лінією.

На ділянці 5...6 реакція R_5 загинає стрижень уверх, тому епюру M будуємо на верхніх (стиснутих) волокнах (див. рис. 2.13, г). Значення моментів $M_5 = 0$ та $M_6 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}$ з’єднаємо також прямою лінією.

Частина вертикального стрижня нижче перерізу 7 моментом від дії реакції R_5 загинається праворуч (позначимо момент від R_5 позначкою “плюс”).

Але зовнішній момент M загинає частину стрижня, яку розглядаємо, ліворуч (тобто з позначкою “мінус”).

Після підрахування маємо $M_7 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Таким чином, ми повинні відкласти знайдене значення ліворуч (див. рис. 2.13, г).

У перерізі 8 ми маємо $M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$, тому його також відкладаємо ліворуч вертикально від розміщеної базової лінії.

Ділянка 9...10 зовнішніми силами загинається униз, що підтверджується позначками “мінус” в моментах M_9 та M_{10} . Тому відкладаємо епюру униз (див. рис. 2.13, г). А оскільки на ділянці 9...10 діє розподілене навантаження q , то епюра згинального моменту повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх.

Зробимо перевірку побудови епюри M , для чого розглянемо рівновагу вузлу C (див. рис. 2.13) під дією поздовжніх та поперечних сил, а також моментів.

Виріжмо вузол C (рис. 2.13, д).

Згідно з епюрою M (див. рис. 2.13, г), у перерізі 2 згинальний момент дорівнює $M_2 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і загинає Переріз 2 уверх, тобто момент M_2 діє за ходом годинникової стрілки (див. рис. 2.13, д). Згинальний момент у перерізі 10 загинає Переріз, який ми розглядаємо, униз, тобто момент $M_{10} = 6,58 \text{ кН} \cdot \text{м}$ треба направити також за ходом годинникової стрілки (див. рис. 2.13, д). У перерізі 4 згинальний момент $M_4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ загинає ділянку вертикального стрижня праворуч (див. рис. 2.13, г), тому момент M_4 діє проти ходу годинникової стрілки (див. рис. 2.13, д).

Сума цих моментів дорівнює:

$$M_2 + M_4 + M_{10} = 5,415 - 12 + 6,58 = -0,005 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

що співпадає з похибкою розрахунку.

Таким чином, можна вважати, що епюра згинальних моментів побудована вірно.

3 РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1 Симетричний складний переріз

Для складного перерізу визначити положення центра ваги, величини головних центральних моментів інерції.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.1 і 3.2, і рисунку 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Швелер	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33
Двотавр	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кутик	80x50x5	90x56x8	100x63x10	140x90x10	160x100x12	180x110x12	100x63x7	140x90x8	160x100x14	180x110x12
Смуга $h \times b \text{ см}^2$	24x1,2	28x1,4	26x1,2	30x1,5	28x1,4	32x1,2	34x1,5	36x1,2	40x0,8	34x1,2

3.2 Методичні вказівки до виконання задачі 3.1

Для заданого перерізу вибрати систему осей, відносно яких визначити координати центрів ваги фігур, які до нього входять.

1 За формулами визначити положення центра ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad (3.1)$$

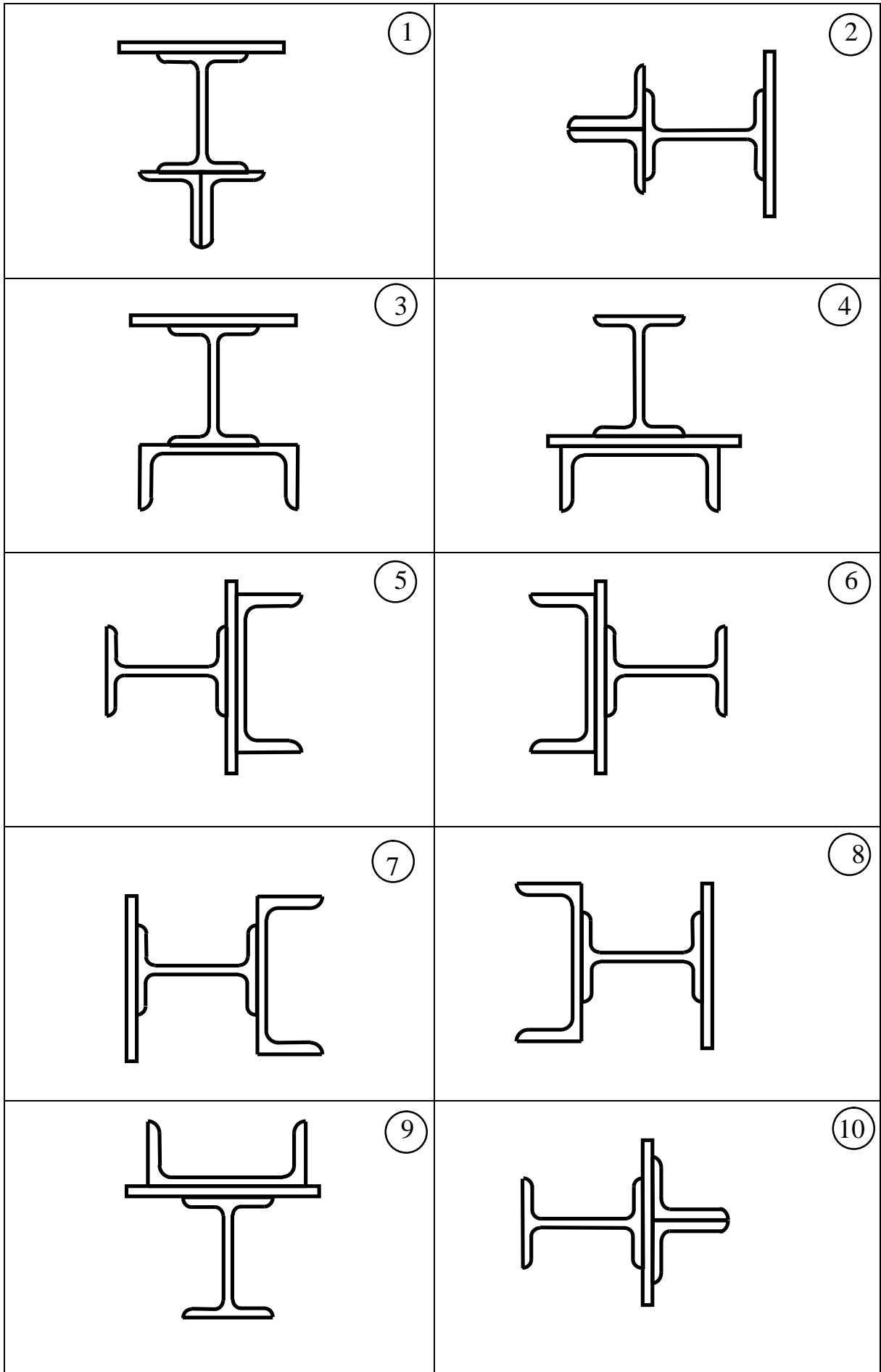


Рисунок 3.1

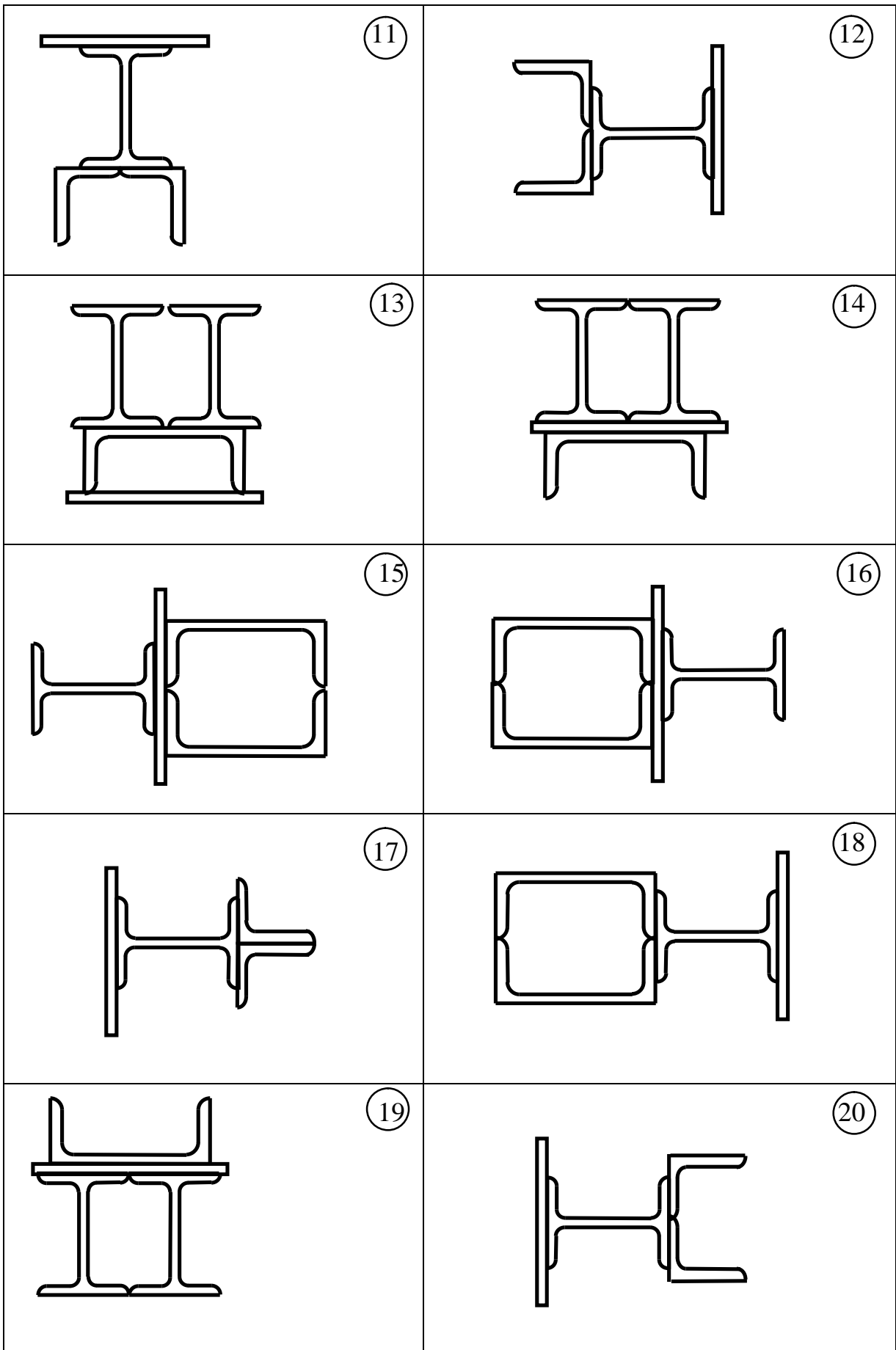


Рисунок 3.1, аркуш 2

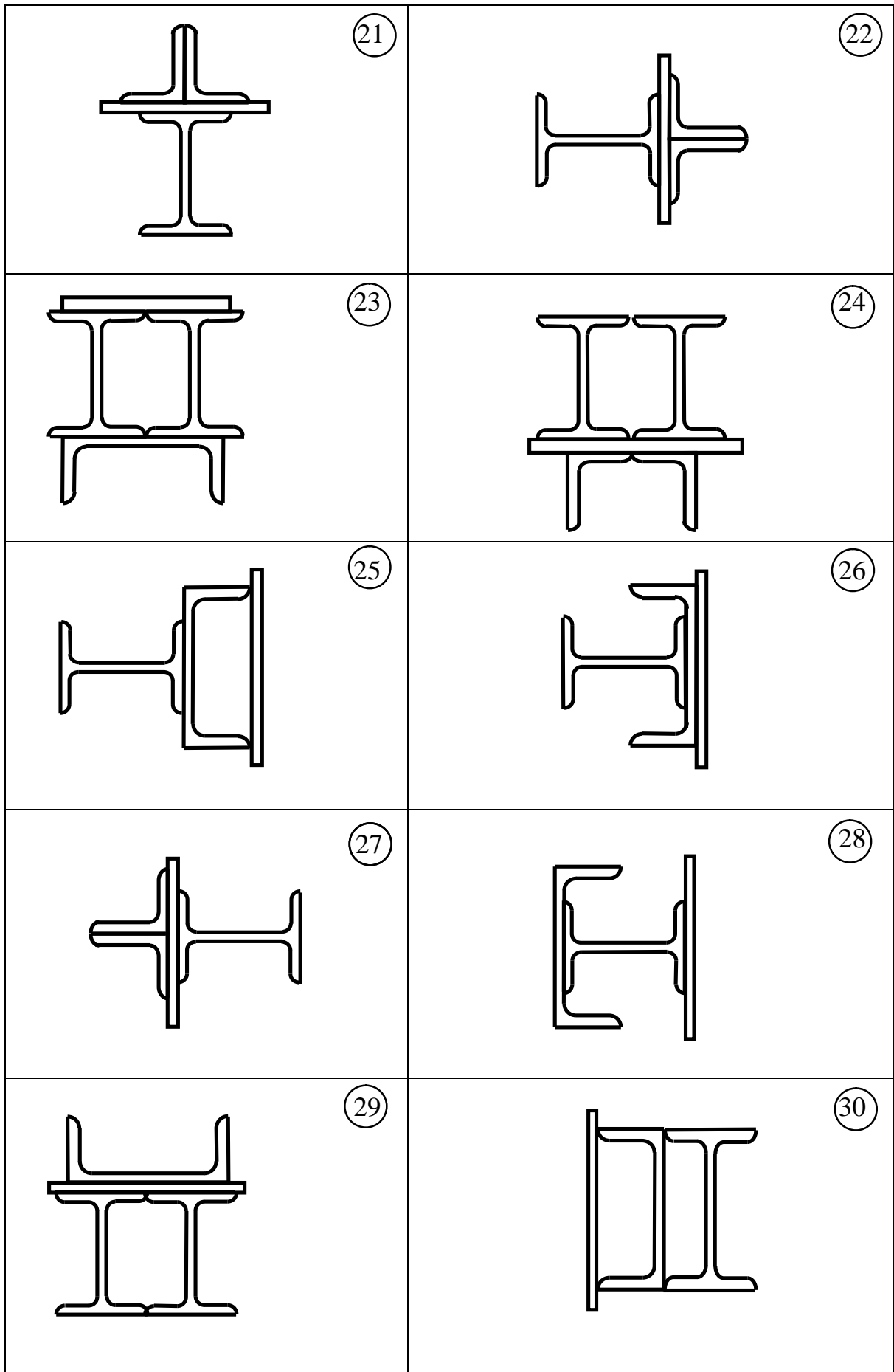


Рисунок 3.3, аркуш 3

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу;

x_{ci}, y_{ci} – координати центрів ваги i -тої фігури у початковій системі осей;

F_i - площа поперечного перерізу i -ої фігури; n - число фігур.

2 За знайденими координатами x_c, y_c нанести положення центра ваги складної фігури.

3 Через центр ваги складної фігури провести центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям фігур.

4 Визначаються осьові моменти інерції всієї фігури щодо центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i), \quad (3.2)$$

де J_{x_c}, J_{y_c} – осьові моменти інерції фігур, щодо власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власною центральною віссю x_{ci} i -ої фігури;

b_i – відстань між центральною віссю y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_{ci} i -ої фігури.

Для стандартних профілів типу швелера, двотавра, кутика осьові моменти інерції слід брати з таблиць сортаменту, для смуги - визначати за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12},$$

де b - сторона прямокутника, яка паралельна осі x ; h – його висота.

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу означаються $J_U = J_{x_c}, J_V = J_{y_c}$.

3.1.2 Приклад розв'язання задачі 1

Для перерізу, показаного на рисунку 3.2, необхідно визначити положення головних центральних осей і моменти інерції відносно них.

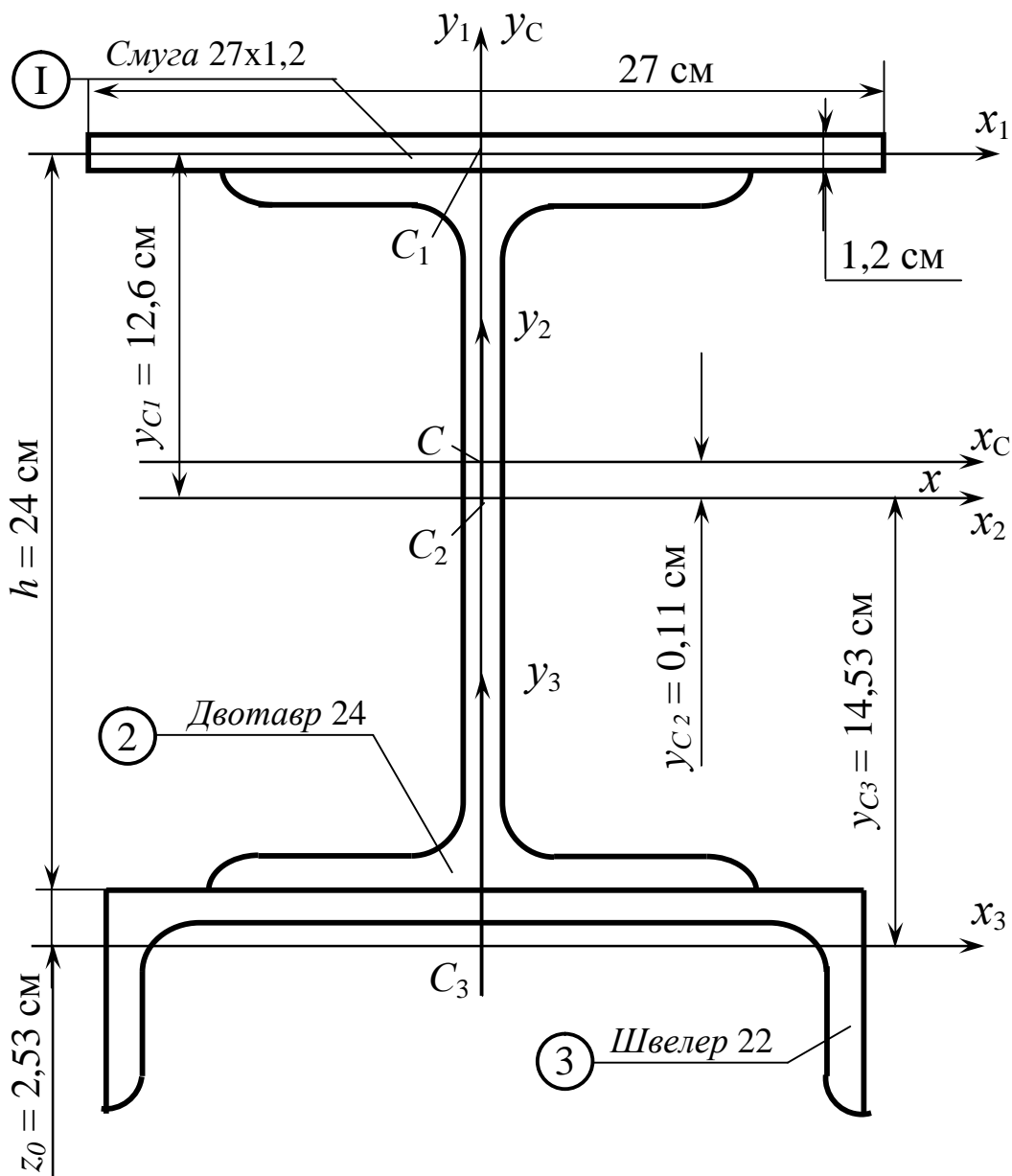


Рисунок 3.2 – Вид симетричного поперечного перерізу

Розв'язання. Перш за все, виписуємо геометричні характеристики прокатних профілів, які приводяться в підручниках і збірках з опору матеріалів (наприклад, [4]).

Двотавр 24: $h = 24$ см; $b = 11,5$ см; $d = 0,56$ см; $t = 0,95$ см;
 $F = 34,8$ см²; $J_x = 3460$ см⁴; $J_y = 198$ см⁴.

Швелер 22: $h = 22 \text{ см}$; $b = 8,2 \text{ см}$; $d = 0,54 \text{ см}$; $t = 0,95 \text{ см}$; $z_0 = 2,21 \text{ см}$;
 $F = 26,7 \text{ см}^2$; $I_x = 151 \text{ см}^4$; $I_y = 2110 \text{ см}^4$.

Тут моменти J_x і J_y поміняли місцями, оскільки швелер розташований горизонтально, а не вертикально, як в довіднику.

Для смуги геометричні характеристики обчислюємо як для прямокутника:

$$F = b \cdot d = 271,2 = 32,4 \text{ см}^2,$$

$$J_x = \frac{27 \cdot 1,2^3}{12} = 3,888 \text{ см}^4 \approx 4 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{1,2 \cdot 27^3}{12} = 1970 \text{ см}^4.$$

Переріз виконуємо в масштабі (див. рис. 3.2).

Вибираємо систему координат. За початкові приймемо осі x_2 і y_2 , тобто в центрі ваги двотавра.

Оскільки переріз симетричний щодо осі y_2 , то центр ваги шукаємо тільки по висоті перерізу, тобто координату y_C , яку визначаємо за формулою:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_{c1} F_1 + y_{c2} F_2 + y_{c3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{12,6 \cdot 32,4 - 14,2 \cdot 126,7}{32,4 + 34,8 + 26,7} = 0,11 \text{ см}.$$

де $y_{c1} = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1,2}{2} = 12,6 \text{ см}$; $y_{c2} = 0$;

$$y_{c3} = \left(-\frac{h}{2} - z_0 \right) = \left(-\frac{24}{2} - 2,21 \right) = -14,21 \text{ см}.$$

На відстані $y_C = 0,11 \text{ см}$ від осі x_2 проводимо головну центральну вісь x_C .

Тепер визначаємо моменти інерції J_{x_C} , J_{y_C} :

$$J_{x_C} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + (y_{ci} - y_C)^2 F_i) = 4 + (12,6 - 0,11)^2 \cdot 32,4 +$$

$$+ 3460 + 0,11^2 \cdot 34,8 + 151 + (14,21 + 0,11)^2 \cdot 26,7 = 8550 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + (x_{ci} - x_C)^2 F_i).$$

Оскільки центри ваги всіх трьох фігур знаходяться на осі y_c , то $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тому

$$J_{y_c} = J_{y_{c1}} + J_{y_{c2}} + J_{y_{c3}} = 1970 + 198 + 2120 = 4288 \text{ см}^4.$$

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} = 14422 \text{ см}^4, J_V = J_{y_c} = 4288 \text{ см}^4.$$

3.2 Несиметричний складний переріз

Для складного перерізу, використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

Вхідні дані вибрати із таблиць 3.1, 3.2 і рисунку 3.3.

3.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 2

Можна рекомендувати такий порядок визначення положення головних центральних осей та значень головних центральних моментів інерції складного поперечного перерізу, що складається з простих фігур, характеристики яких легко одержати.

1 Зобразити переріз у масштабі з вказівками основних розмірів фігур. Розміри прокатних профілів, положення їх центрів ваги взяти із сортаменту. Кожну фігуру позначити своїм номером.

2 Нанести на рисунок центральні осі кожної фігури за номерами, відповідними номерам фігур.

3 Вибрати початкові осі, відносно яких знайти координати центру ваги складної фігури за формулами (3.1). За початкові осі можна вибрати центральні осі однієї з фігур. Тоді координати її центра ваги будуть дорівнювати нулю. Координати x_i, y_i підставляти до формул (3.1), зважаючи на їх знаки відносно початкових осей.

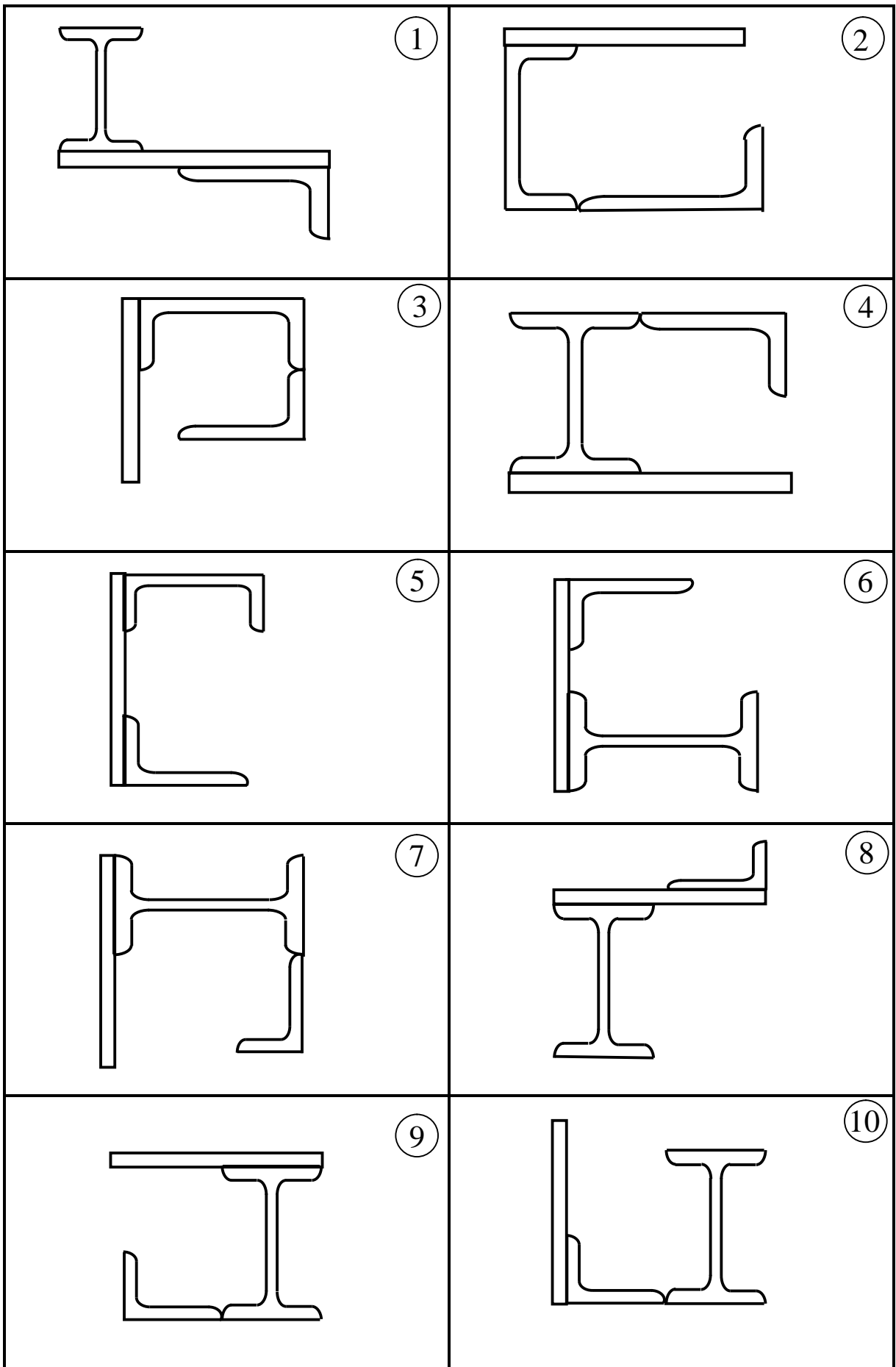


Рисунок 3.3

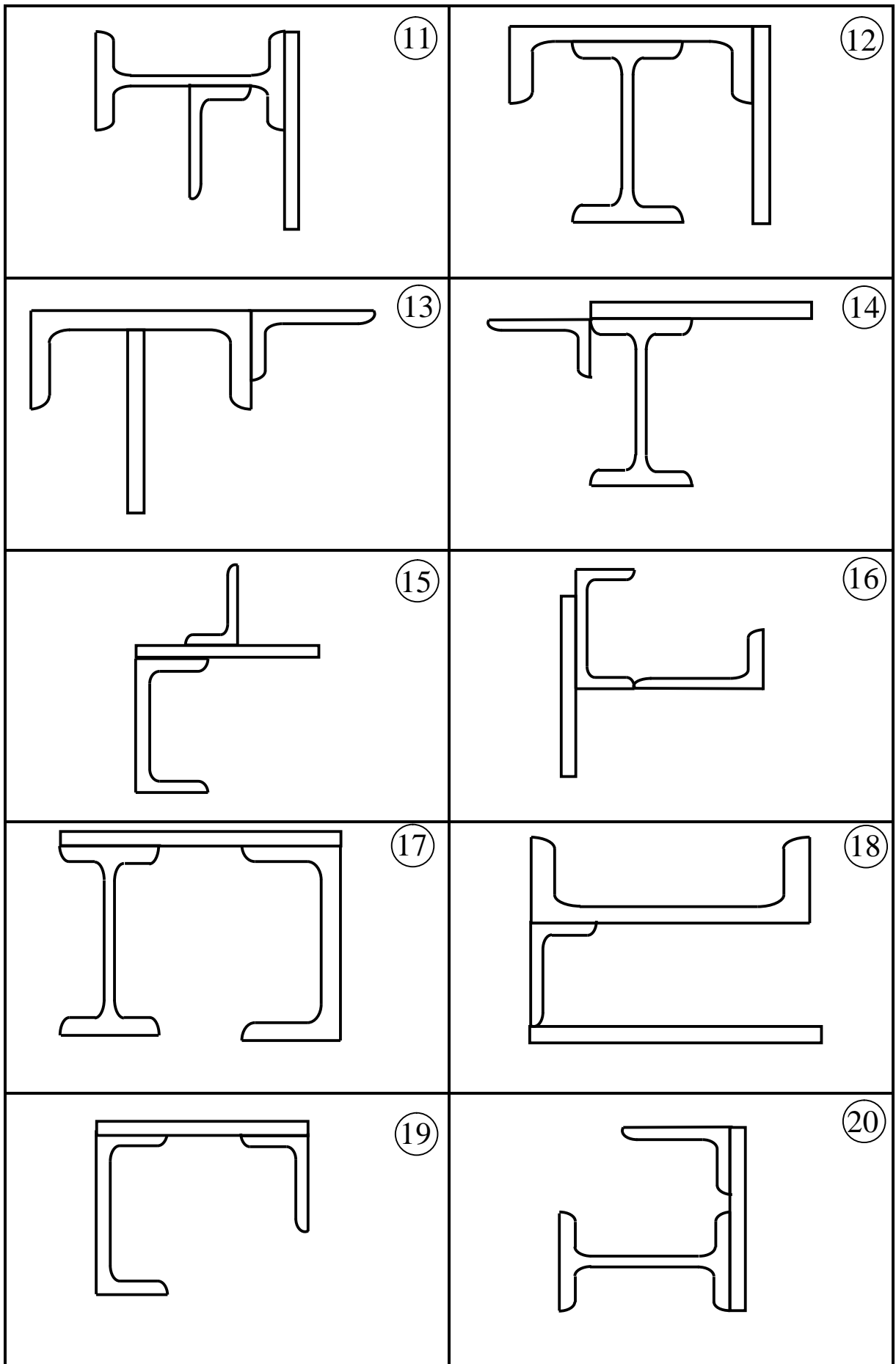


Рисунок 3.3, аркуш 2

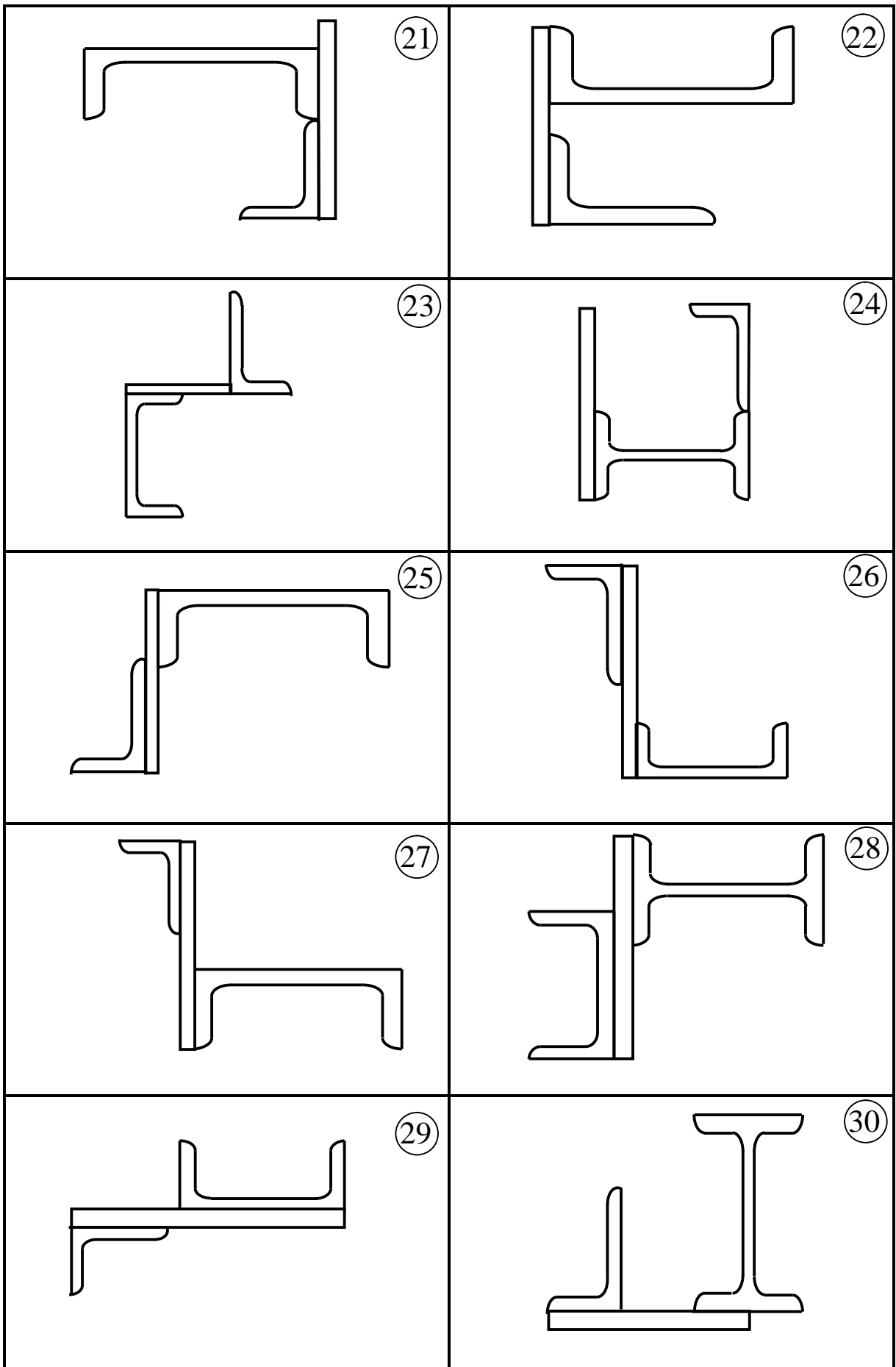


Рисунок 3.3, аркуш 3

4 Провести через центр ваги перерізу осі x_c, y_c , які паралельні тим центральним осям окремих фігур, відносно яких моменти інерції відомі (власні осі), відносно них взяти моменти інерції.

5 Визначити осьові (за формулами 3.2) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей x_c, y_c складного перерізу, користуючись правилом переходу до паралельних осей.

Відцентровий момент визначаємо за формулою:

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{x_{c_i} y_{c_i}} + a_i b_i F_i \right), \quad (3.3)$$

де $J_{x_{c_i} y_{c_i}}$ – відцентровий момент інерції i -тої фігури відносно власних осей, паралельних центральним x_c, y_c перерізу.

При визначенні відцентрового моменту інерції $J_{x_c y_c}$ значення a_i та b_i підставляють, зважаючи на їх знаки за відношенням до осей x_c, y_c . Для фігур, у яких є хоч одна вісь симетрії (наприклад, прямокутник, круг, двотавр, швелер), відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$.

Визначимо відцентровий момент інерції кутика (рис. 3.4), який не дорівнює нулю:

$$J_{xy} = \frac{J_y - J_x}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (3.4)$$

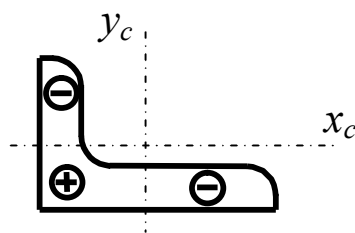


Рисунок 3.4

Згідно з визначенням

$$J_{xy} = \int_F xy dF, \quad (3.5)$$

відцентровий момент інерції площі кутика у другому і четвертому квадрантах від'ємний, тому J_{xy}^L має від'ємний знак.

6 Визначити положення головних центральних осей U, V :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}. \quad (3.6)$$

7 Відкласти кут α_0 від осі x_c проти ходу годинникової стрілки, якщо він додатний, і за ходом годинникової стрілки, якщо від'ємний.

8 Визначити моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \quad (3.7)$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \quad (3.8)$$

причому, верхні знаки беремо при $J_x > J_y$, а нижні – при $J_x < J_y$.

Початкові дані та результати розрахунку можна занести до таблиці 3.3

Таблиця 3.3

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур F_i	Моменти інерції складових фігур, см^4			a_i см	b_i см	α , град
		x_i	y_i		J_{x_i}	J_{y_i}	$J_{x_i y_i}$			
I										
II										
III										

9 Можна виконати перевірки, які контролюють правильність арифметичних обчислень:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V; \quad (3.9)$$

$$J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos \alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin \alpha_0 = 0. \quad (3.10)$$

Результати розрахунку бажано занести до таблиці 3.3.

3.2.2 Приклад розв'язання задачі 3.2

Для перерізу, який складається зі швелера 30, нерівнобокого кутика 250 x 160 x 16 і смуги 36 x 1,6 см² (див. рис. 3.5), використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

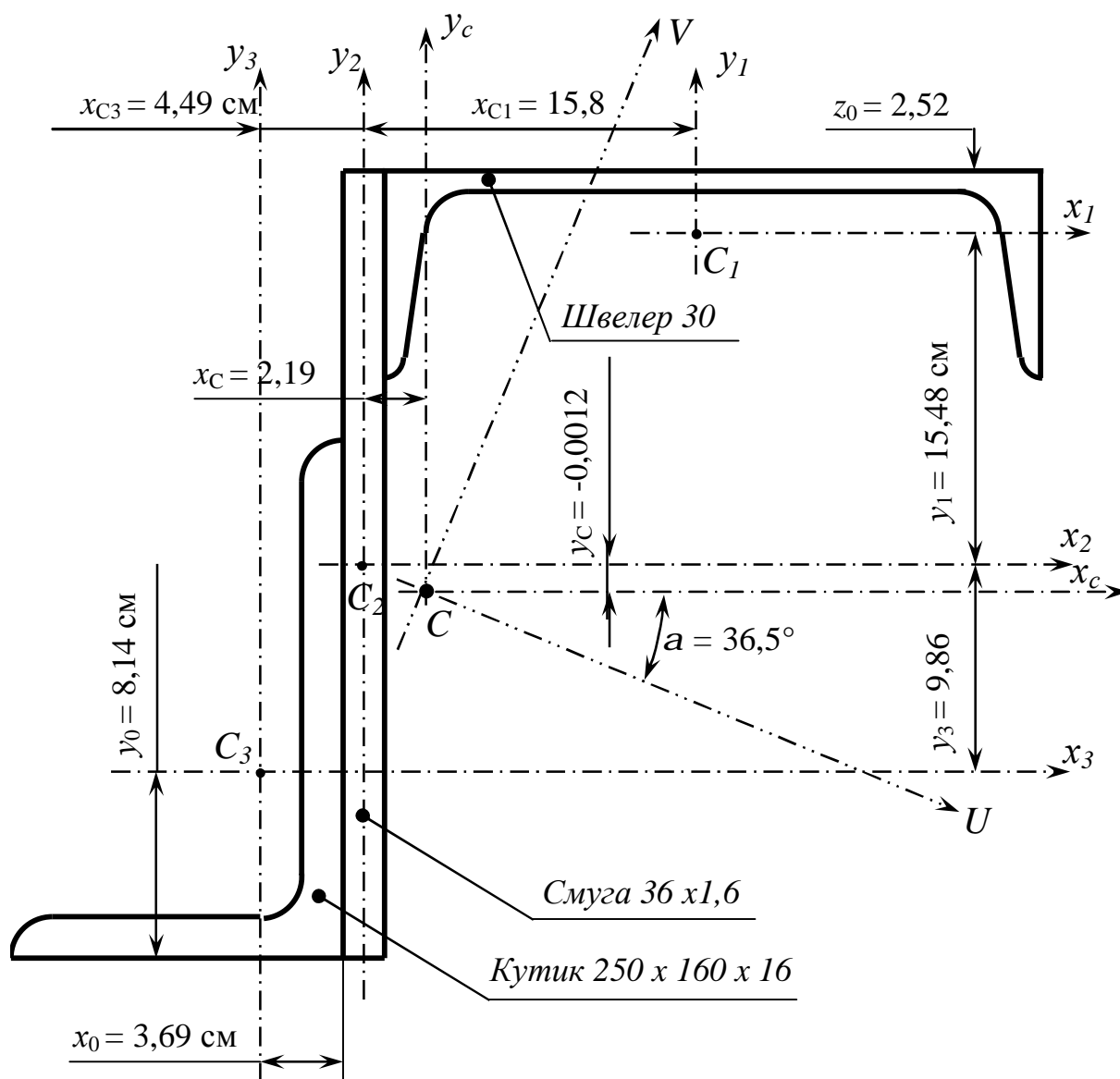


Рисунок 3.5 – Вид несиметричного складного поперечного перерізу

Розв'язання. Із сортаменту виписуємо необхідні геометричні характеристики прокатних профілів.

Швелер 30: $h = 30$ см, $b = 10$ см, $F = 40,5$ см², $J_X = 5810$ см⁴, $J_Y = 327$ см⁴, $z_0 = 2,52$ см.

Куттик 250 x 160 x 16: $B = 25$ см, $b = 16$ см, $x_0 = 3,69$ см, $y_0 = 8,14$ см, $F = 63,6$ см², $J_X = 4091$ см⁴, $J_Y = 1333$ см⁴, $tg\alpha = 0,408$.

1 Для смуги 36 x 1,6 обчислюємо геометричні характеристики за формулами для прямокутника:

$$F = bh = 36 \cdot 1,6 = 57,6 \text{ см}^2,$$
$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 36^3}{12} = 6221 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{36 \cdot 1,6^3}{12} = 2,3 \text{ см}^4.$$

2 Вибираємо початок координат у центрі ваги смуги C_2 .

3 Визначаємо координати центрів ваги кожної фігури у вибраній системі координат:

$$x_{C_1} = \frac{30}{2} + \frac{1,6}{2} = 15,8 \text{ см}; \quad y_{C_1} = \frac{36}{2} - 2,52 = 15,48 \text{ см};$$
$$x_{C_2} = 0; \quad y_{C_2} = 0$$

(оскільки початок координат вибрано в центрі ваги фігури 2);

$$x_{C_3} = -3,69 - \frac{1,6}{2} = -4,49 \text{ см}; \quad y_{C_3} = -\left(\frac{36}{2} - 8,14\right) = -9,86 \text{ см}.$$

4 Підставляємо знайдені координати в формули (3.1) і визначаємо центр ваги всієї фігури:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{15,8 \cdot 40,5 - 4,49 \cdot 63,6}{40,5 + 57,6 + 63,6} = 2,19 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{15,48 \cdot 40,5 - 9,86 \cdot 63,6}{40,5 + 57,6 + 63,6} = -0,0012 \text{ см}.$$

5 У системі координат $x_2 y_2$ відкладаємо відрізки $x_c = 2,19$ см та $y_c = 0,0012$ см. Точка перетину осей x_c і y_c є центром ваги перерізу.

6 Визначаємо осьові (3.2) і відцентровий (3.3) моменти інерції відносно центральних осей x_c і y_c :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + (y_{ci} - y_c)^2 F_i) =$$

$$327 + [15,48 - (-0,0012)]^2 \cdot 40,5 + 6221 + [0 -$$

$$-(-0,0012)]^2 \cdot 52,6 + 4091 + [-9,86 -$$

$$-(-0,0012)]^2 \cdot 63,6 = 26520 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + (x_{ci} - x_c)^2 F_i) = 5810 +$$

$$+(15,8 - 2,19)^2 \cdot 40,5 + 12,3 + (0 - 2,19)^2 \cdot 52,6 + 1333 +$$

$$+(-4,49 - 2,19)^2 \cdot 63,6 = 17771 \text{ см}^4.$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + a_i b_i F_i) = \sum_{i=1}^n [I_{x_i y_i} + (X_i - X_c)(Y_i - Y_c)] F_i =$$

$$= 0 + (15,8 - 2,19)[15,48 - (-0,0012)] \cdot 40,5 + (0 - 2,19)(0 - 2,19) \cdot 57,6 +$$

$$+ 1350 + (-4,49 - 2,19)[-9,86 - (-0,0012)] \cdot 63,6 = 14067 \text{ см}^4.$$

Тут відцентровий момент інерції кутика визначався (за модулем) за формулою:

$$J_{x_3 y_3} = (J_{x_3} - J_{\min}) \sin \alpha = (4091 - 781) \cdot 0,408 = 1350 \text{ см}^4.$$

Знак відцентрового моменту інерції $J_{x_3 y_3}$ у даному випадку додатний, оскільки більша частина площі кутика в системі осей $x_3 y_3$ розташована в першому та третьому квадрантах, де координати x та y обидві додатні або від'ємні, а їх добуток додатний.

7 Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 14067}{26520 - 17771} = -3,216.$$

Звідки $2\alpha_0 = -73^\circ$, а $\alpha_0 = -36,5^\circ$.

На рисунку 3.6 під цим кутом проводимо вісь U (оскільки кут α_0 від'ємний, то по відношенню до осі x_c його відкладаємо за рухом годинникової стрілки).

8 Визначаємо головні центральні моменти інерції за формулами (3.7) і (3.8)

$$\begin{aligned}
 J_U &= J_{x_c} \cos^2 a_0 + J_{y_c} \sin^2 a_0 - J_{x_c y_c} \sin 2a_0 = \\
 &= 26520 \cos^2(-36,5) + 17771 \sin^2(-36,5) - 14067 \sin(-2 \cdot 36,5) = \\
 &= 26520 \cdot 0,805^2 + 17771 \cdot 0,59^2 - 14067 \cdot (-0,956) = 36820 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_V &= J_{x_c} \sin^2 a_0 + J_{y_c} \cos^2 a_0 + J_{x_c y_c} \sin 2a_0 = \\
 &= 26520 \sin^2(-36,5) + 17771 \cos^2(-36,5) - 14067 \sin(-2 \cdot 36,5) = \\
 &= 26520 \cdot 0,59^2 + 17771 \cdot 0,805^2 - 14067 \cdot (-0,956) = 7300 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

9 Одержані значення заносимо до таблиці 3.4




10 Аналізуємо одержані результати:

всі осьові моменти інерції ($J_{x_c}, J_{y_c}, J_u, J_v$) повинні бути додатними; $7300 + 36820 = 26520 + 17771$, тобто $44120 \approx 44291$, що становить похибку

$$\frac{44291 - 44120}{44120} \cdot 100\% = 0,39\%$$

(допустима похибка повинна бути не більшою від 2%).

Таблиця 3.4

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур F_i	Моменти інерції складових фігур, см^4			a_i , см	b_i , см
		x_i	y_i		J_{xi}	J_{yi}	J_{xiyi}		
I	1 	15,8	15,48	40,5	327	5810	0	15,4812	13,61
II	2 	0	0	57,6	6221	12,3	0	0,0012	-2,19
III	3 	-4,49	-9,86	63,6	4091	1350	1350	-9,86	-6,68

4 СКЛАДНИЙ ОПР

4.1 Повна перевірка міцності балки

Підібрати розміри перерізу сталевोї двотаврової балки і зробити повну її перевірку на міцність за IV теорією міцності. Визначити прогини балки у 3- 4 місцях і показати форму її зігнутої осі.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.1 та 4.2 і рисунку 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sigma]$, МПа	150	160	170	220	140	180	200	120	210	190
M , кН·м	20	50	80	30	40	65	35	55	45	70
P , кН	30	40	60	70	20	35	65	25	45	55
q , кН/м	12	10	14	20	16	22	18	15	18	24

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,1
b , м	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
c , м	1,6	1,4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

4.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.1

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

- 1 Визначаються опорні реакції балки.
- 2 Будується епюра поперечних сил Q та згинальних моментів M .
- 3 З аналізу епюри згинальних моментів визначається максимальний згинальний момент M_{max} .

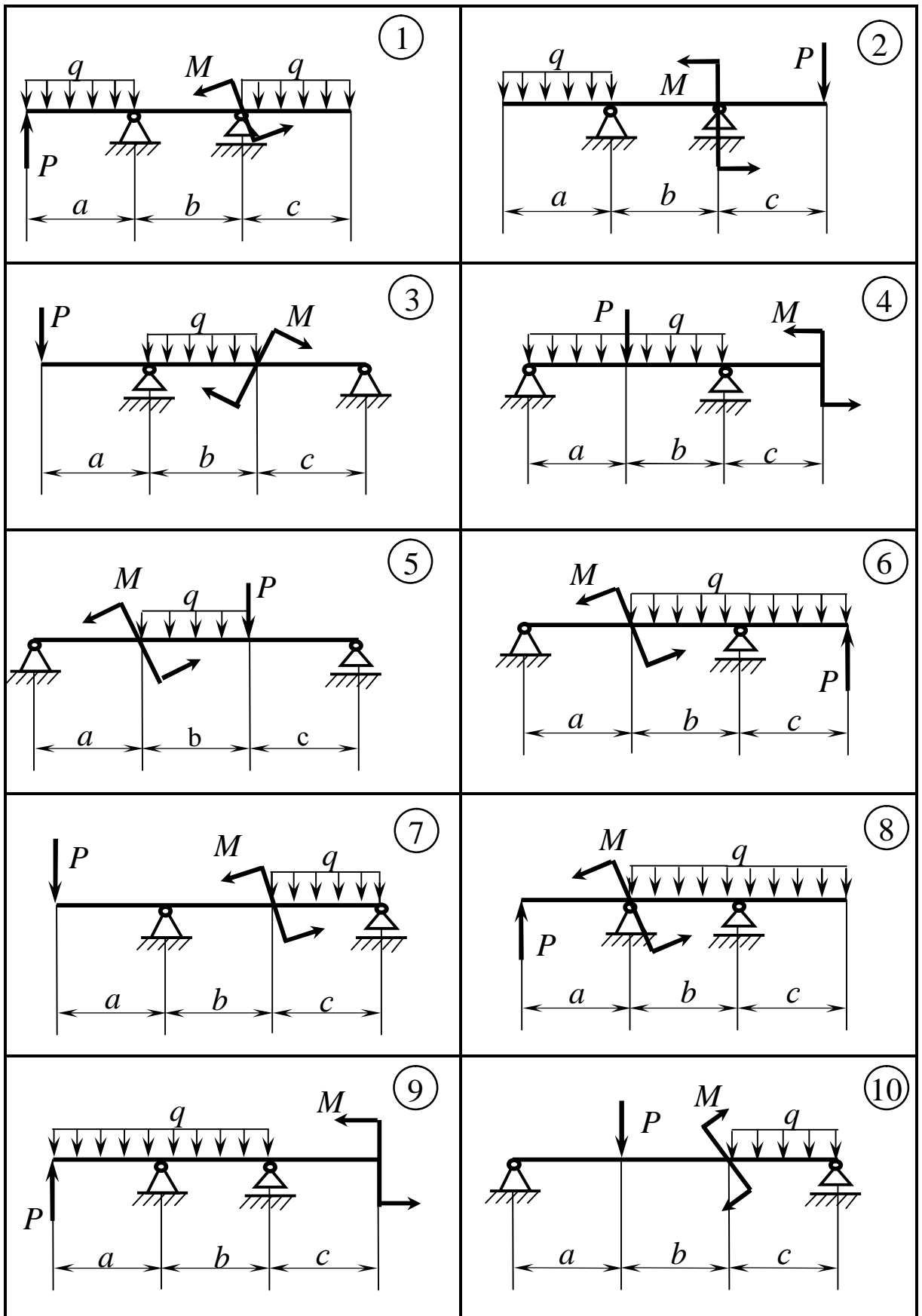


Рисунок 4.1

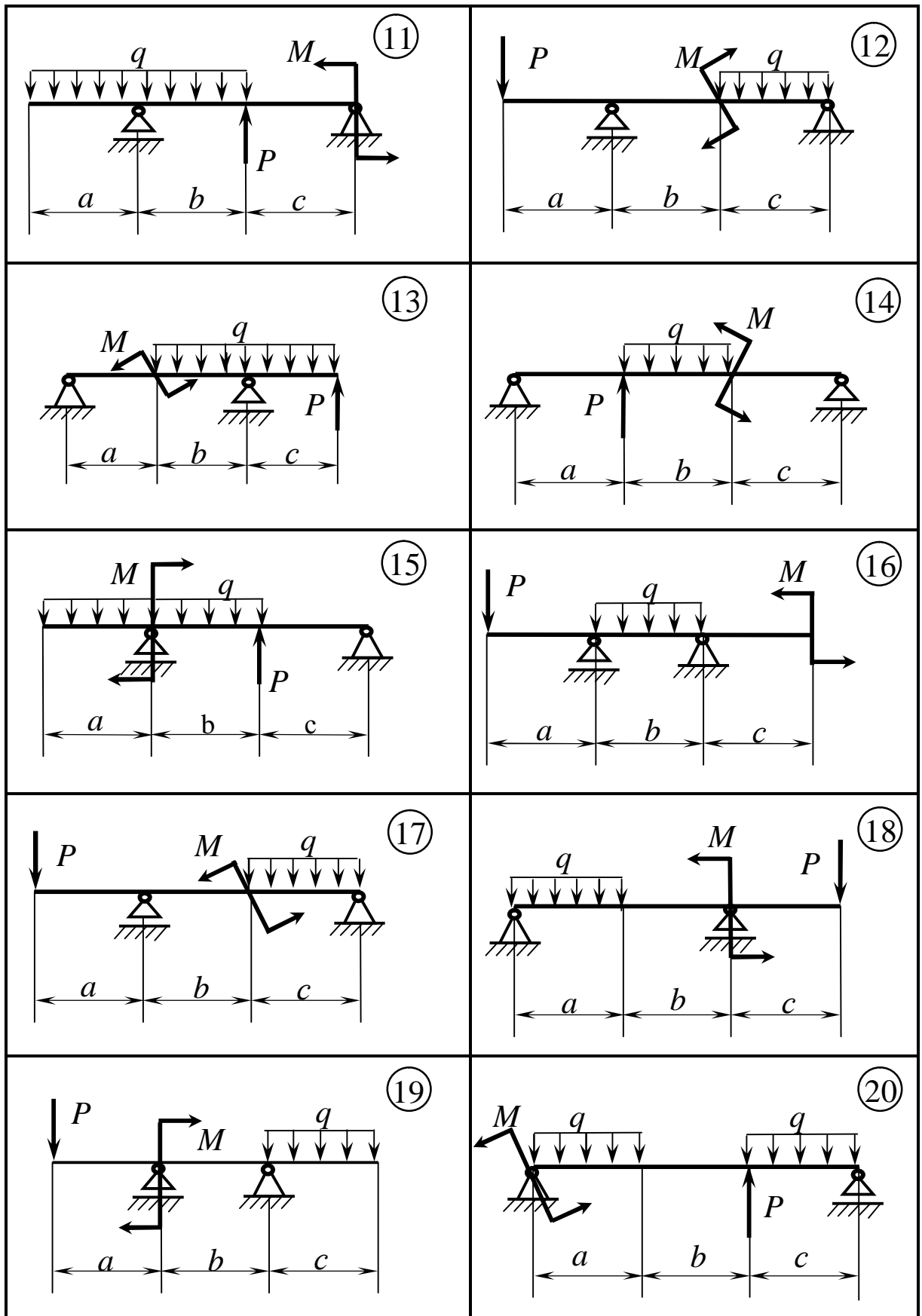


Рисунок 4.1, аркуш 2

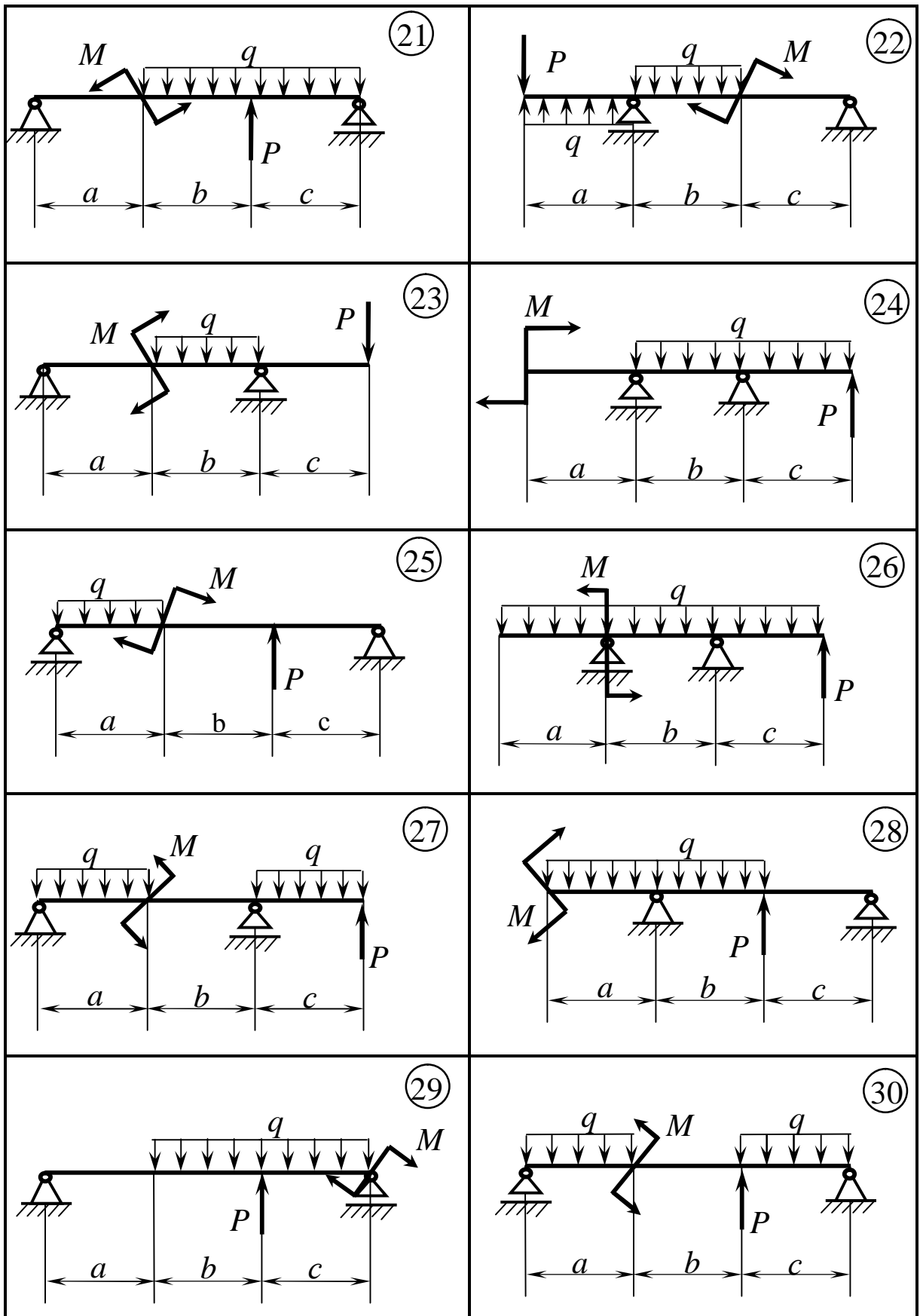


Рисунок 4.1, аркуш 3

4 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу W_x :

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [s]. \quad (4.1)$$

5 З сортаменту вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, також його основні характеристики.

6 Перевіряється міцність за нормальними напруженнями відповідно до умови (4.1).

7 З аналізу епюри поперечних сил визначається максимальна поперечна сила Q_{max} .

8 Перевіряється міцність за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$t_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} \leq [t], \quad (4.3)$$

де S_x – статичний момент половини площини перерізу вибраного профілю відносно осі X ;

d – ширина перерізу на осі X (рис. 4.2);

I_x – момент інерції перерізу відносно осі X ;

$$[t] = 0,6[s]. \quad (4.4)$$

9 Перевіряється міцність за еквівалентними напруженнями відносно до умови:

$$s_{екв}^{max} \leq [s], \quad (4.5)$$

де $s_{екв}^{max}$ – найбільше зі значень еквівалентних напружень у точках K (див. рис. 4.2) тих перерізів балки, у яких: $M = M_{max}$ і $Q \neq 0$; $Q = Q_{max}$ і $M \neq 0$; M і Q хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках K зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$s_K^{екв} = \sqrt{s_K^2 + 3t_K^2}; \quad (4.8)$$

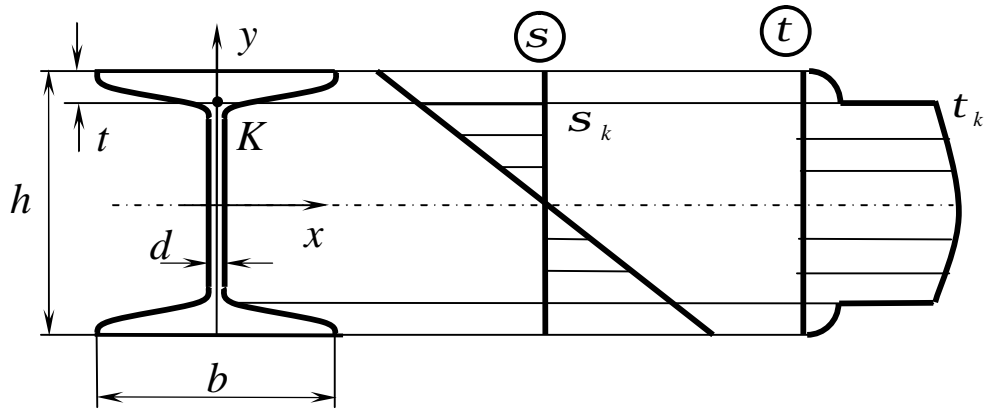


Рисунок 4.2 – Епюри нормальних (S) та дотичних (t) напружень у поперечних перерізах балки

$$s_k = \frac{M}{I_x} \cdot Y_k; \quad (4.7)$$

$$t_k = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot I_x}, \quad (4.8)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

Y_k – відстань точки K до осі X (див. рис. 4.2):

$$Y_k = \frac{h}{2} - t; \quad (4.9)$$

S_x^* – статичний момент відносно осі X частини перерізу, яка розташована вище точки K :

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t \cdot (h - t). \quad (4.10)$$

Підрахунок $S_k^{екв}$ у найбільш навантаженому (небезпечному) перерізі супроводжується рисунком, на якому проставляються конкретні значення розмірів перерізу та підраховані величини S_k і t_k .

10 Записується універсальне рівняння пружної лінії балки, при цьому початок координатної системи (z , y) розташовується в центрі ваги крайнього лівого перерізу балки:

$$Y = Y_0 + q_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{(z-a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^m P_i \cdot \frac{(z-b_i)^3}{2} + \sum_{i=1}^l q_i \cdot \frac{(z-c_i)^4}{2} - \sum_{i=1}^l q_i \cdot \frac{(z-d_i)^4}{2} \right], \quad (4.11)$$

де Y - прогин балки на відстань z від початку координат;

Y_0 - прогин у крайньому лівому перерізі;

q_0 - кут повороту крайнього лівого перерізу;

$a_i; b_i$ - відстань від початку координат до перерізу, у якому прикладені відповідно зовнішній момент M_i та зовнішня сила P_i ;

$c_i; d_i$ - відстань від початку координат до перерізу, де відповідно починається та закінчується ділянка з розподіленим навантаженням інтенсивності q_i ;

$n; m; l$ - відповідно кількість зовнішніх моментів і сил та ділянок з розподіленими навантаженнями.

Треба зауважити, що величини M_i, P_i, q_i входять у рівняння (4.11) зі своїми знаками.

Моменти M_i вважаються додатними, якщо вони спрямовані за ходом годинникової стрілки, а сили P_i та інтенсивності розподілених навантажень q_i – коли їх напрям співпадає з додатним напрямом осі Y (див. рис. 4.2).

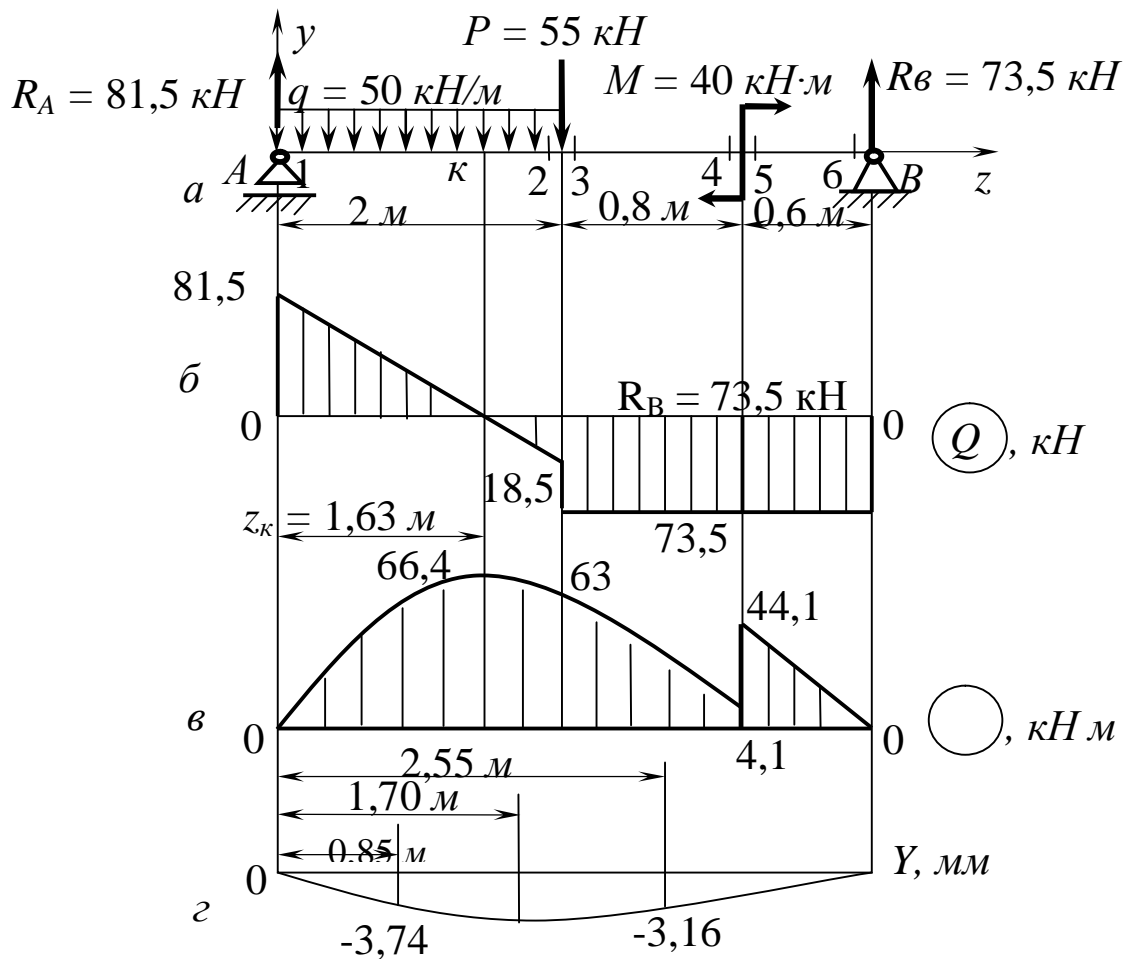
Величини Y_0 та q_0 визначаються з граничних умов, якими для балки з шарнірними опорами є відсутність прогинів у місцях розташування шарнірів.

11 Підставляючи в рівняння (4.11) координати z трьох – чотирьох перерізів, підраховують відповідні прогини балки. При цьому в рівнянні (4.11) залишають тільки ті силові фактори, які прикладені лівіше кожного з перерізів.

12 Відповідно до підрахунку прогинів схематично будують форму пружної лінії балки, зважаючи на її зв'язок з епюрою згинальних моментів: на ділянках, де стиснуті верхні волокна, пружна лінія увігнута, а де стиснуті нижні – випукла.

4.1.2 Приклад розв'язання задачі 4.1

Схема балки та її навантаження зображені на рисунку 4.3. Розрахунки виконуємо відповідно до $[S] = 150 \text{ МПа}$.



a – схема балки; *б* – епюра поперечних сил; *в* - епюра згинальних моментів;
г – пружна лінія балки

Рисунок 4.3 – Схема балки і основні графічні побудови

Із умов рівноваги визначимо опорні реакції балки (див. рис. 4.3, а):

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3,4} = 73,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M - R_A \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 40}{3,4} = 81,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_Y = 0; R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0;$$
$$81,5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73,5 = 0; 155 - 155 = 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

2 Визначимо величини поперечних сил Q та згинальних моментів M у характерних перерізах балки і побудуємо відповідні епюри (рис. 4.3, б; 4.3, в):

$$Q_1 = R_A = 81,5 \text{ кН}; \quad Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 81,5 - 50 \cdot 2 = -18,5 \text{ кН};$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 81,5 - 50 \cdot 2 - 55 = -73,5 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 = -73,5 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 = -73,5 \text{ кН}; \quad Q_6 = Q_5 = -73,5 \text{ кН}.$$

На ділянці 1-2 епюра Q змінює знак. Визначимо відстань Z_k до перерізу, де $Q = 0$ і де на епюрі M буде екстремум:

$$Z_k = \frac{Q_1}{q} = \frac{81,5}{50} = 1,63 \text{ м};$$

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 81,5 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = R_B \cdot 0,6 - M = 73,5 \cdot 0,6 - 40 = 4,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = R_B \cdot 0,6 = 73,5 \cdot 0,6 = 44,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6 = 0;$$

$$M_k = R_A \cdot 1,63 - 50 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 На епюрі згинальних моментів знаходимо максимальний за модулем згинальний момент: $M_{max} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4 З умови міцності за нормальними напруженнями знаходимо необхідний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{66,4 \cdot 10^3}{150} = 443 \text{ см}^3.$$

5 У сортаменті знаходимо потрібний номер двотавра. Вибираємо двотавр 30, у якого: $W_x = 472 \text{ см}^3$; $h = 300 \text{ мм}$; $b = 135 \text{ мм}$; $d = 6,5 \text{ мм}$; $t = 10,2 \text{ мм}$; $I_x = 7080 \text{ см}^4$; $S_x = 268 \text{ см}^3$.

6 Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$s_{max} \geq \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{66,4 \cdot 10^6}{472 \cdot 10^3} = 141 \text{ МПа} < [s].$$

Ця умова міцності є забезпеченою.

7 На епюрі поперечних сил знаходимо максимальну за модулем поперечну силу: $Q_{max} = 81,5 \text{ кН}$.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$t_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} = \frac{81,5 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 41,5 \text{ МПа};$$

$$[t] = 0,6 \cdot [s] = 0,6 \cdot 150 = 90 \text{ МПа}; \quad t_{max} < [t].$$

Таким чином, і ця умова міцності є забезпеченою.

9 Аналізуючи епюри Q та M , бачимо, що найбільш небезпечним з точки зору еквівалентних напружень є переріз 3, в якому величини Q і M хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі: $Q_3 = 73,5 \text{ кН}$; $M_3 = 63 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Тому максимальні еквівалентні напруження в балці будуть мати місце в точці K (де поєднуються полиця і ребро двотавра) саме цього перерізу (рис. 4.4):

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{s_k^2 + 3t_k^2};$$

$$s_k = \frac{M_3}{I_x} \cdot Y_k = \frac{M_3}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{63 \cdot 10^6}{7080 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{300}{2} - 10,2 \right) = 123 \text{ МПа};$$

$$t_{\hat{e}} = \frac{|Q_3| \cdot S_x^*}{d \cdot I_x} = \frac{|Q_3| \cdot 0,5 \cdot b \cdot t(h-t)}{d \cdot I_x} =$$

$$= \frac{73,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 135 \cdot 10,2 \cdot (300 - 10,2)}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 31,9 \text{ МПа};$$

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{123^2 + 3 \cdot 31,9^2} = 135 \text{ МПа} < [s].$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями також забезпечено.

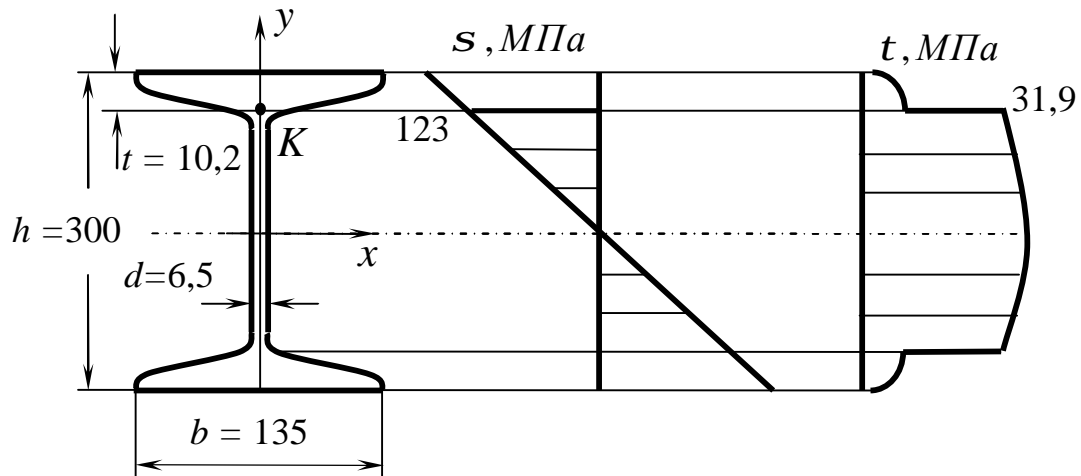


Рисунок 4.4 – Схема до визначення еквівалентних напружень в небезпечному перерізі балки

10 Запишемо універсальне рівняння пружної лінії балки:

$$Y = Y_0 + q_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{R_A}{6} \cdot (z-0)^3 + \frac{q}{24} \cdot (z-0)^4 + \right. \\ \left. + \frac{P}{6} \cdot (z-2)^3 - \frac{q}{24} \cdot (z-2)^4 + \frac{M}{2} \cdot (z-2,8)^2 \right].$$

Підставляємо в це рівняння граничні умови: $z = 0, y = 0$; $z = 3,4 \text{ м}, y = 0$, також: $R_A = 81,5 \text{ кН}$; $q = -50 \text{ кН/м}$; $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $P = -55 \text{ кН}$. Маємо:

$$O = Y_0;$$

$$O = O + q_0 \cdot 3,4 + \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{81,5}{6} \cdot 3,4^3 - \frac{50}{24} \cdot 3,4^4 - \right. \\ \left. - \frac{55}{6} \cdot 1,4^3 + \frac{50}{24} \cdot 1,4^4 + \frac{40}{2} \cdot 0,6^2 \right];$$

$$q_0 = - \frac{245,53 \cdot 10^{12}}{3,4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = -0,005 \text{ рад}.$$

11 За допомогою універсального рівняння пружної лінії визначимо величини прогинів балки в декількох її перерізах, а саме:

$$z = 0,85\text{ м}; \quad y = 0 + q_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{R_A}{6} \cdot 0,85^3 + \frac{q}{24} \cdot 0,85^4 \right] =$$

$$= 0 - 0,005 \cdot 0,85 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} \times$$

$$\times \left[\frac{81,5}{6} \cdot 0,85^3 - \frac{50}{24} \cdot 0,85^4 \right] \cdot 10^{12} = -3,74 \text{ мм};$$

$$z = 1,70\text{ м}; \quad y = 0 + q_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{R_A}{6} \cdot 1,7^3 + \frac{q}{24} \cdot 1,7^4 \right] =$$

$$= 0 - 0,005 \cdot 1,7 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} \times$$

$$\times \left[\frac{81,5}{6} \cdot 1,7^3 - \frac{50}{24} \cdot 1,7^4 \right] \cdot 10^{12} = -5,02 \text{ мм};$$

$$z = 2,55\text{ м}; \quad y = 0 + q_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{R_A}{6} \cdot 2,55^3 + \frac{q}{24} \cdot 2,55^4 + \frac{P}{6} \cdot (2,55 - 2)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q}{24} \cdot (2,55 - 2)^4 \right] = 0 - 0,005 \cdot 2,55 \cdot 10^3 + \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{81,5}{6} \cdot 2,55^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{50}{24} \cdot 2,55^4 + \frac{55}{6} \cdot 0,55^3 - \frac{50}{24} \cdot 0,55^4 \right] \cdot 10^{12} = -3,16 \text{ мм}.$$

12 За результатами розрахунків прогинів балки зображуємо вид її пружної лінії (рис. 4.3, г).

4.2 Складне згинання

Для заданої балки, що перебуває в умовах складного згинання, визначити найбільші за модулем нормальні напруження та побудувати епюру нормальних напружень в небезпечному перерізі.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.3 та 4.4 і рисунку 4.5

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q , кН/м	34	24	32	36	30	40	28	20	26	32
P , кН	10	8	12	14	10	10	12	8	12	6
M , кН·м	25	24	22	20	18	16	10	18	12	10

Таблиця 4.4 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, м$	1,3	0,7	0,8	1,2	0,9	1,1	1,4	1,9	1,0	0,7
$b, м$	1,9	2,0	1,6	1,8	2,3	2,5	1,8	2,5	2,2	2,1
$c, м$	1,4	2,0	2,3	0,7	0,9	1,7	2,1	1,4	2,0	2,5
Номер двотавра	20	30	27	22	24	22	24	20	27	30
Номер швелера	33	27	36	30	33	24	30	27	36	24
Розміри кутика, мм	200x125x1 ₂	125x80x10	180x110x1 ₂	140x90x10	125x80x12	160x100x9	140x90x8	180x110x1 ₀	160x100x1 ₂	200x125x1 ₁
Розміри смуги, мм	800x20	320x10	220x18	280x14	250x16	200x18	280x12	250x14	320x11	220x16

4.2.1 Методичні вказівки до задачі 4.2

Розв'язання задачі відбувається у такій послідовності:

1 Зображується схема балки з навантаженням у вертикальній площині й визначаються її вертикальні (паралельні осі y) реакції.

2 Будуються епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x .

3 Зображується схема балки з навантаженням у горизонтальній площині і визначаються її горизонтальні (паралельні осі x) реакції.

4 Будуються епюри поперечних сил Q_x і згинальних моментів M_y .

5 Аналізуються епюри згинальних моментів і визначається найбільше навантажений (небезпечний) переріз балки. Якщо M_x та M_y мають найбільші значення в одному і тому ж перерізі, то саме цей переріз і є небезпечним. Коли ж найбільші значення M_x та M_y належать різним перерізам, то обидва ці перерізи беруться до уваги як потенційно небезпечні, тобто такі, по яким слід вести паралельні розрахунки.

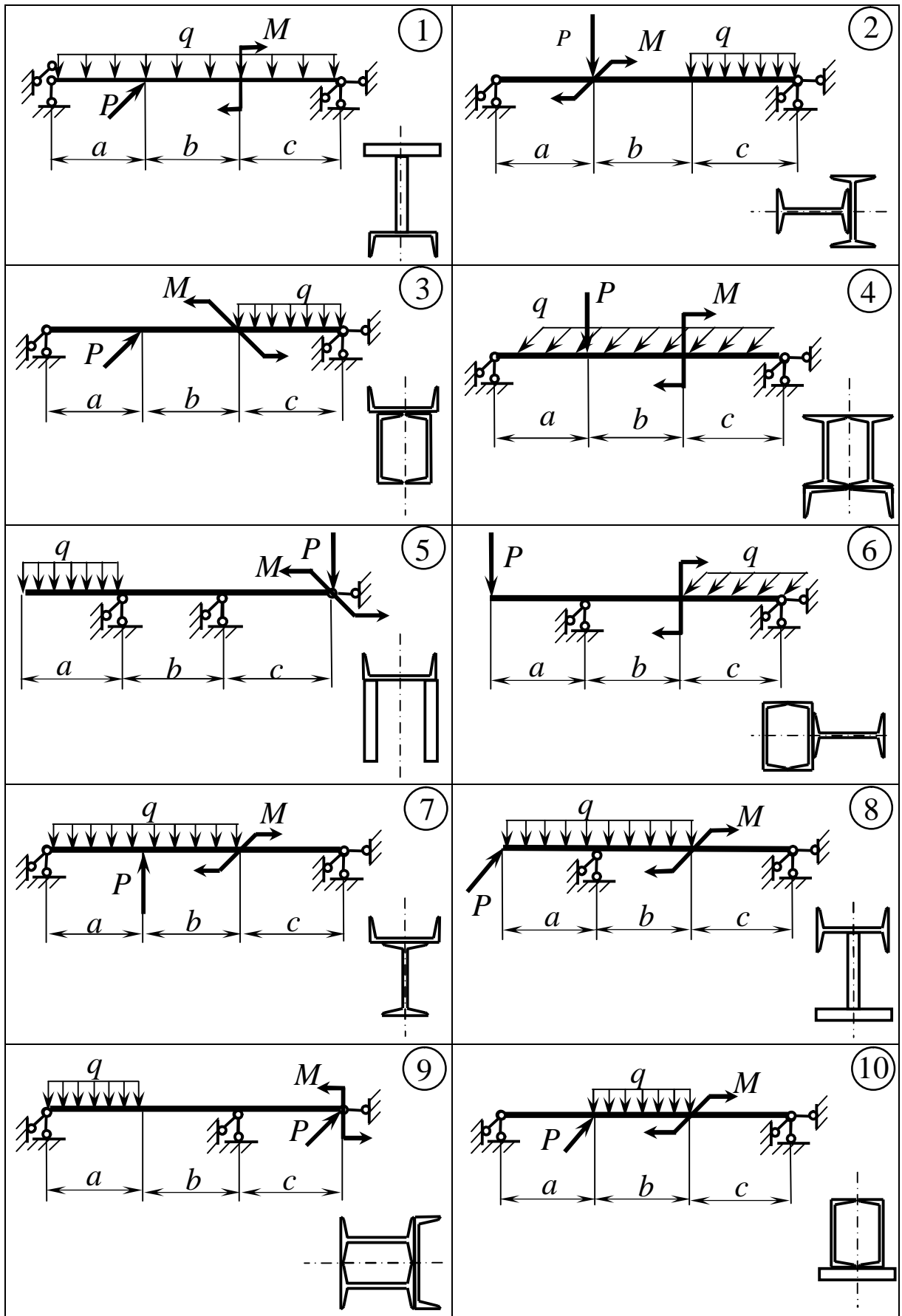


Рисунок 4.5

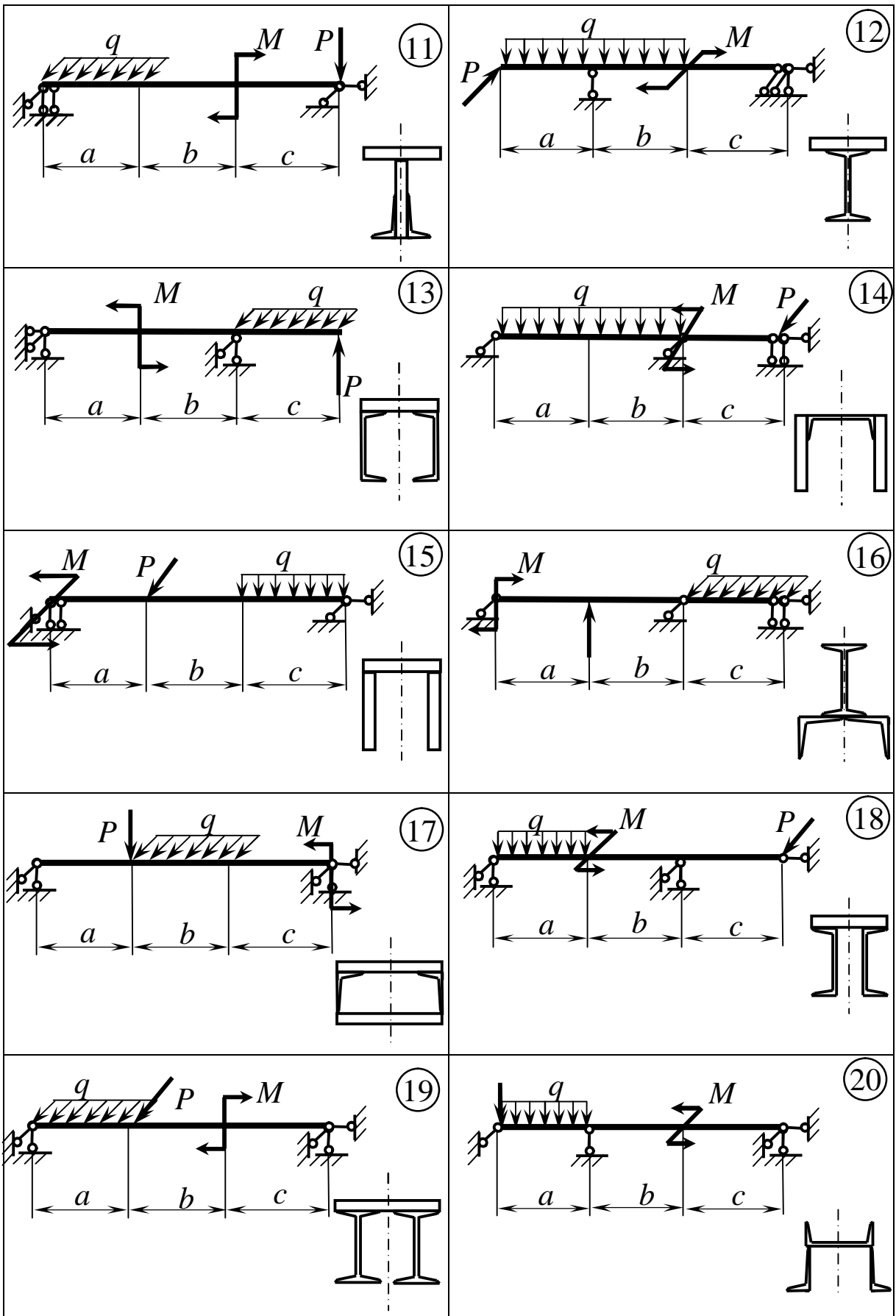


Рисунок 4.5, аркуш 2

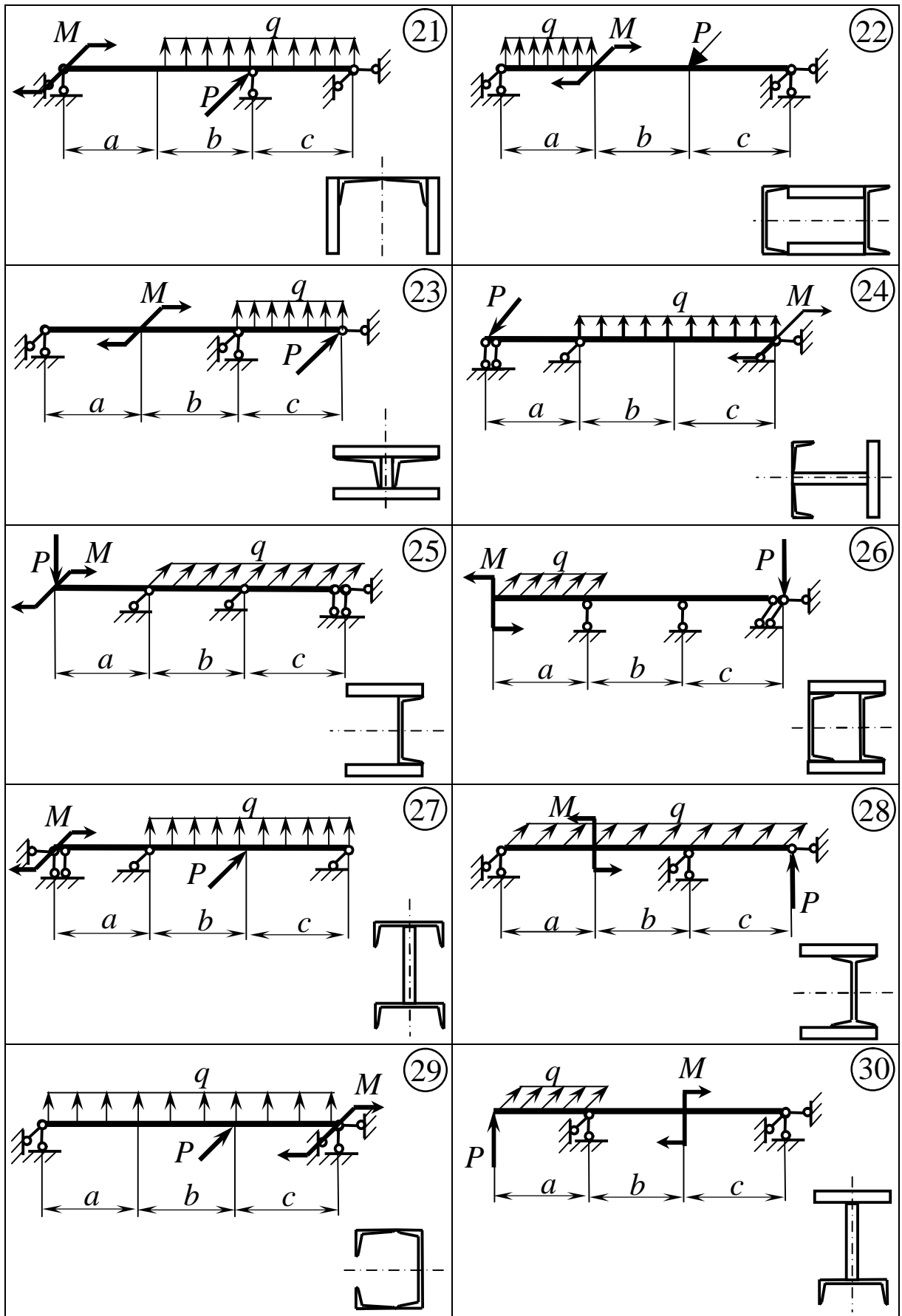


Рисунок 4.5, аркуш 3

Крім зазначених до числа потенційно небезпечних треба включати і такі перерізи (їх може бути декілька), у яких значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

6 Переріз зображується в певному масштабі і визначається положення його центра ваги.

7 Підраховуються моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей – I_x та I_y .

8 Визначається кут нахилу нейтральної лінії до осі x в кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$\operatorname{tg} b = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}, \quad (4.12)$$

де M_y і M_x враховуються зі своїми знаками: кожен з них вважається додатним, якщо спричиняє розтягнення волокон балки в частині перерізу, що належить до першого квадранту координатної площини S_{xy} .

9 У кожному з потенційно небезпечних перерізів зображується нейтральна лінія і визначаються координати найбільш віддалених від неї точок у розтягненій (X_A, Y_A) та стиснутій і (X_B, Y_B) зонах. При зображенні нейтральної лінії кут b , якщо він додатний, слід відкладати від осі x в напрямі, протилежному ходу годинникової стрілки, а якщо він від'ємний – у зворотному напрямі. Вірність побудови нейтральної лінії можна перевірити, зважаючи на знаки напружень від M_x і M_y у кожному з квадрантів: вона проходить через ті з них, у яких знаки напружень від M_x і M_y протилежні.

10 Визначаються найбільші розтягуючі (S_{max}^+) і найбільші стискаючі (S_{max}^-) напруження в кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$S_{max}^+ = S_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A, \quad (4.13)$$

$$S_{max}^- = S_B = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B. \quad (4.14)$$

Тут, як і раніше, величини M_x і M_y беруться з урахуванням їхніх знаків.

11 Шляхом порівняння (за модулем) напружень у точках A і B усіх потенційно небезпечних перерізів остаточно визначаються небезпечний переріз і найбільше напруження в балці.

12 Будуються епюри напружень у небезпечному перерізі балки. Спочатку проводиться база (нульова лінія) епюри перпендикулярно до нейтральної лінії. Після цього з точок A і B перерізу паралельно до нейтральної лінії проводяться прямі до перерізу з базою і від неї уздовж цих прямих відкладаються відрізки, що дорівнюють у певному масштабі величинам S_A і S_B . Оскільки зазначені напруження мають протилежні знаки, відповідно до них відрізки відкладаються по різні боки від бази. Кінці відрізків з'єднуються прямою, яка в разі вірної побудови повинна перерізати базу саме в тій точці, що й нейтральна лінія.

4.2.2 Приклад розв'язання задачі 4.2

Вихідні дані прикладу наведені на рисунках 4.6, а і 4.6, б.

1 Зобразимо схему балки з навантаженням у вертикальній площині (рис. 4.6, в) і визначимо її вертикальні реакції.

$$\sum M_D = 0; \quad R_E^Y \cdot 3 - q \cdot 1,6 \cdot 2,2 = 0, \quad R_E^Y = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 2,2}{3} = 35,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; \quad -R_D^Y \cdot 3 - q \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 0, \quad R_D^Y = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 0,8}{3} = 12,8 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_D^Y + R_E^Y - q \cdot 1,6 = 12,8 + 35,2 - 30 \cdot 1,6 = 48 - 48 = 0.$$

Реакції знайдені вірно.

2 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у вертикальній площині і будуємо епюри Q_y та M_x (рис. 4.6, г; 4.6, д).

$$Q_1^Y = R_D^Y = 12,8 \text{ кН}; \quad Q_2^Y = Q_1^Y = 12,8 \text{ кН}; \quad Q_3^Y = Q_2^Y = 12,8 \text{ кН};$$

$$Q_4^Y = Q_3^Y - q \cdot 1,6 = 12,8 - 30 \cdot 1,6 = 35,2 \text{ кН}.$$

Оскільки епюра Q_y перерізає базу, визначимо положення точки цього перерізу:

$$z_k = \frac{Q_4}{q} = \frac{35,2}{30} = 1,17 \text{ м.}$$

$$M_1^x = 0; M_2^x = R_D^y \cdot 1,4 = 12,8 \cdot 1,4 = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^x = M_2^x = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_4^x = 0;$$

$$M_k^x = R_E^y \cdot 1,17 - q \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = 35,2 \cdot 1,17 - 30 \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = 20,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Зобразимо схему балки з навантаженням у горизонтальній площині (рис. 4.6, е) і визначимо її горизонтальні реакції.

$$\sum M_D = 0; P \cdot 1,4 + M - R_E^x \cdot 3 = 0, \quad R_E^x = \frac{25 \cdot 1,4 + 20}{3} = 18,3 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0; R_D^x \cdot 3 - P \cdot 1,6 + M = 0, \quad R_D^x = \frac{25 \cdot 1,6 - 20}{3} = 6,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_x = -R_D^x - R_E^x + P = -6,7 - 18,3 + 25 = -25 + 25 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

4 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній площині і будуємо епюри Q_x та M_y (рис. 4.6, ж і 4.6, з):

$$Q_1^x = -R_D^x = -6,7 \text{ кН}; Q_2^x = Q_1^y = -6,7 \text{ кН};$$

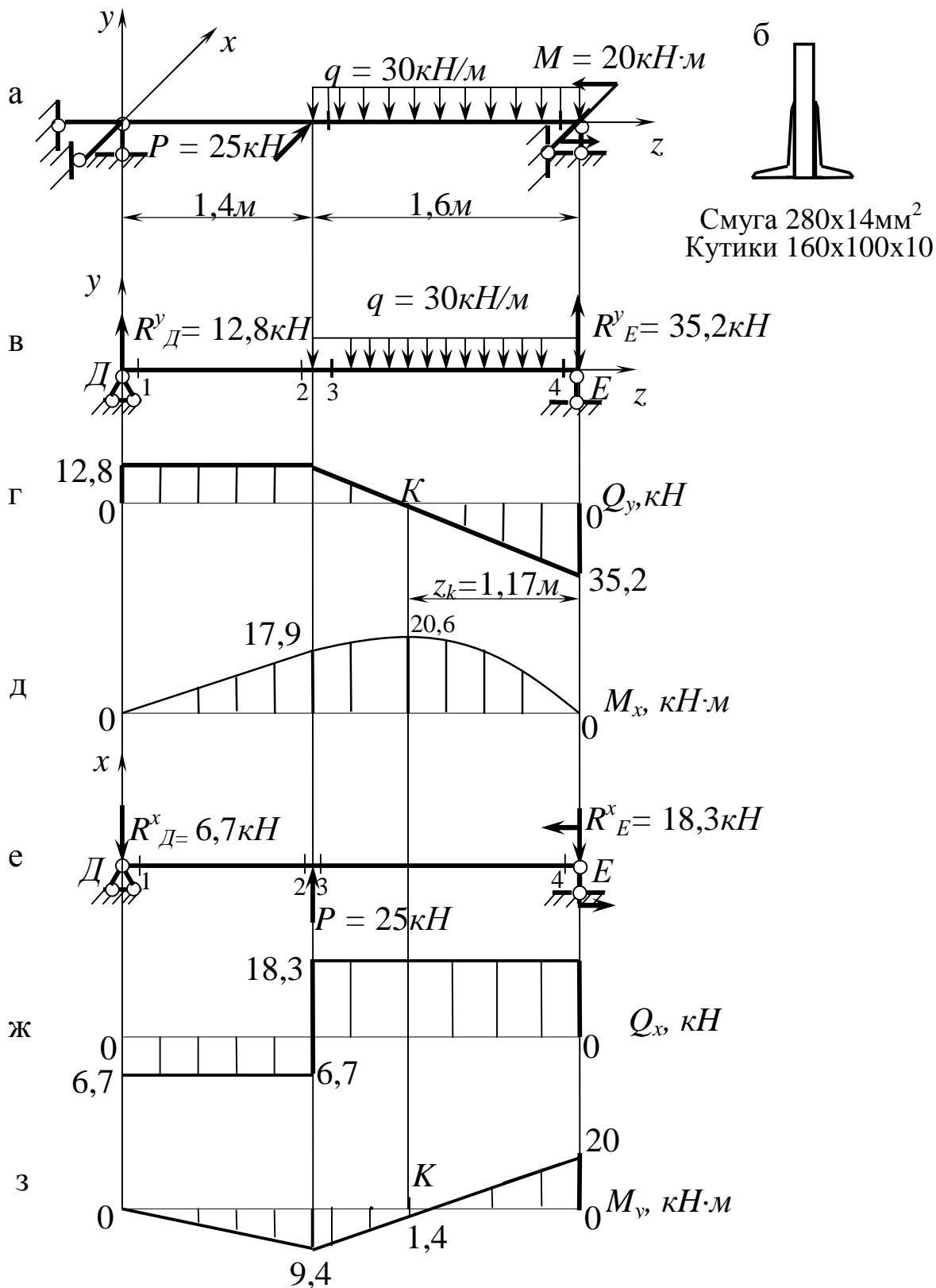
$$Q_3^x = Q_4^x = Q_2^x + P = -6,7 + 25 = 18,3 \text{ кН}.$$

$$M_1^y = 0; M_2^y = M_3^y = -R_D^x \cdot 1,4 = -6,7 \cdot 1,4 = -9,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^y = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_k^y = M - R_E^x \cdot z_k = 20 - 18,3 \cdot 1,17 = -1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Аналізуємо епюри M_x і M_y , визначаємо потенційно небезпечні перерізи балки. Таких перерізів три: переріз K , у якому M_x максимальний, переріз 4, у якому M_y максимальний, також переріз 2 (або 3), у якому значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Надамо величинам M_x та M_y у зазначених перерізах позначку «плюс» або «мінус» відповідно до пункту 8.



а ,б - відповідно схема балки і вид її перерізу; в, е – навантаження балки; г, ж – епюри поперечних сил; д, з – епюри згинальних моментів

Рисунок 4.6 – Графічні побудови до прикладу виконання задачі 4.2

У перерізі K згинальний момент M_x стискає волокна у верхній частині перерізу (яка лежить вище від осі Cx), а розтягує у нижній, тому вважаємо його від'ємним.

Згинальний момент M_y у цьому перерізі стискає волокна у лівій (лівіше від осі Cy) частині перерізу, а розтягує у правій, тому будемо вважати його додатним. Таким чином, у перерізі K :

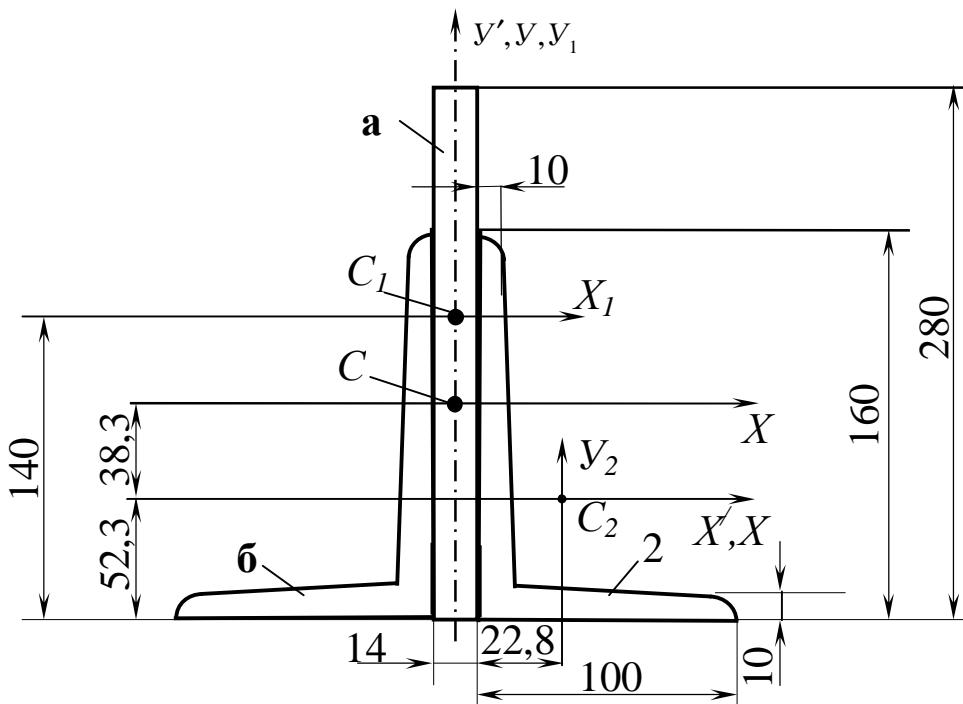
$$M_x = -20,6 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_y = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогічно в перерізі 4 маємо: $M_x = 0$; $M_y = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, у перерізі 2 (або 3): $M_x = -17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 9,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

б Зображуємо в масштабі переріз балки (рис. 4.7) і визначаємо положення його центра ваги. Необхідні дані беремо з сортаменту.

$X'_c = 0$, тому що переріз симетричний;

$$Y'_c = \frac{Y'_1 \cdot F_1 + 2 \cdot Y'_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2} = \frac{87,7 \cdot 3920}{3920 + 2 \cdot 2530} = 28,3 \text{ мм}.$$



a - смуга $280 \times 14 \text{ мм}^2$; b - кутики $160 \times 100 \times 10$

Рисунок 4.7 - Схема до визначення центра ваги перерізу та його головних моментів інерції

$$Y'_1 = 140 - 52,3 = 87,7 \text{ мм} ; \quad Y'_2 = 0;$$

$$F_1 = 280 \times 14 = 3920 \text{ мм}^2; \quad F_2 = 25,3 \text{ см}^2 = 2530 \text{ мм}^2.$$

7 Визначаємо головні моменти інерції перерізу:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + F_1 (Y'_1 - Y'_c)^2 + 2 \left[I_{x2} + F_2 (Y'_c - Y'_2)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 14 \cdot 280^3 + 3920 \cdot (87,7 - 38,3)^2 + \\ &+ 2 \cdot \left[667 \cdot 10^4 + 2530 \cdot (38,3 - 0)^2 \right] = 5594 \cdot 10^4 \text{ мм}^4; \\ I_y &= I_{y1} + 2 \left[I_{y2} + F_2 (X'_2)^2 \right] = \frac{1}{12} \cdot 280 \cdot 14^2 + \\ &+ 2 \cdot \left[204 \cdot 10^4 + 2530 \cdot \left(22,8 + \frac{14}{2} \right)^2 \right] = 864 \cdot 10^4 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

8 Визначимо положення нейтральної лінії (н. л.) та найбільше навантаження точок в зонах розтягнення (т. *A*) і стискання (т. *B*) кожного з потенційно небезпечних перерізів (рис. 4.8).

Переріз 2:

$$tqb = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{9,4}{(-17,9)} \cdot \frac{5594}{864} = 3,400; \quad b = +73,61^\circ.$$

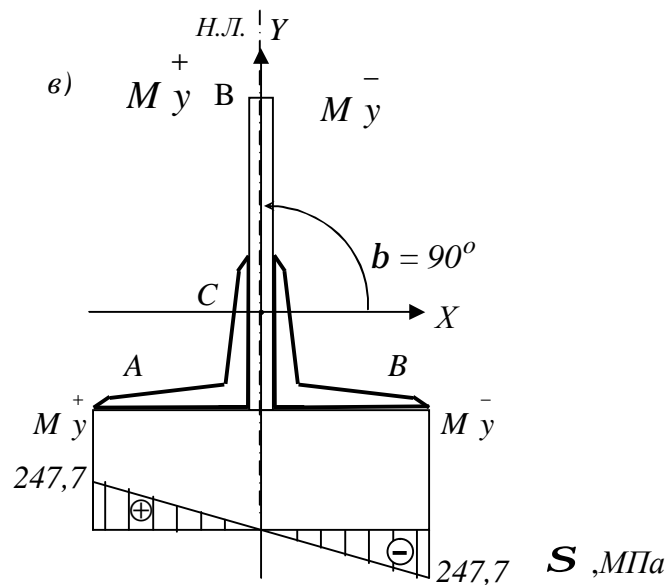
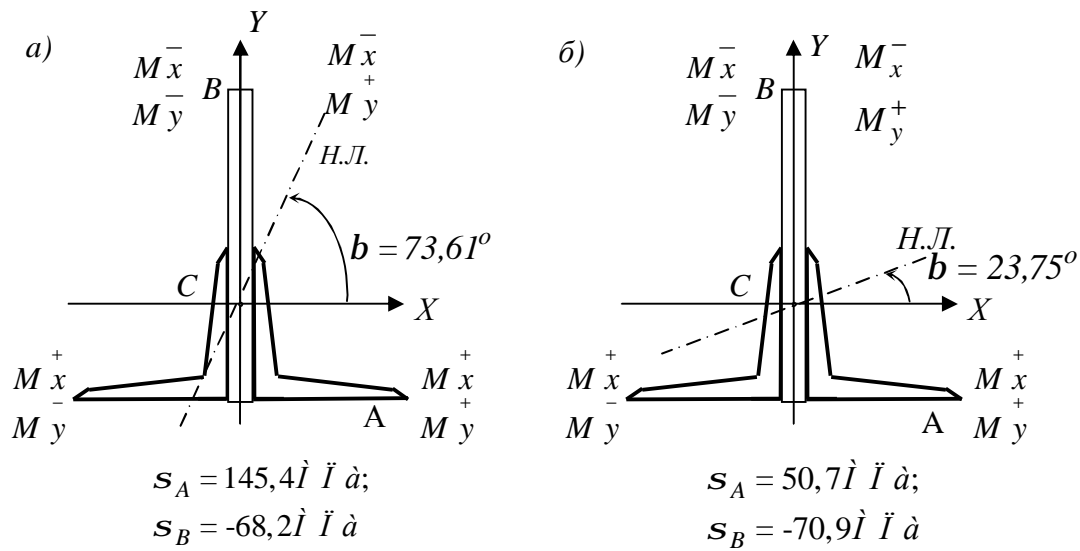
Переріз *K*:

$$tqb = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{14}{(-20,6)} \cdot \frac{5594}{864} = 0,440; \quad b = +23,75^\circ.$$

Переріз 4:

$$tqb = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{(-20)}{0} \cdot \frac{5594}{864} = +\infty; \quad b = +90^\circ.$$

9 Визначимо координати точок *A* та *B* у кожному з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 4.7, 4.8).



а – переріз 2; б – переріз К; в – переріз 4.

Рисунок 4.8 - Схема до визначення напружень в потенційно небезпечних перерізах балки

Переріз 2:

$$X_A = 107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = -7 \text{ мм}; Y_B = 189,4 \text{ мм}.$$

Переріз *K*:

$$X_A = \frac{14}{2} + 100 = 107 \text{ мм};$$

$$Y_A = -(52,3 + 38,3) = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = -\frac{14}{2} = -7 \text{ мм};$$

$$Y_B = 280 - (52,3 + 38,3) = 189,4 \text{ мм}.$$

Переріз 4:

$$X_A = -107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = 107 \text{ мм}; Y_B = -90,6 \text{ мм}.$$

10 Визначимо напруження в точках *A* та *B* кожного з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 4.8).

Переріз 2:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \\ &+ \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 145,4 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \\ &+ \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -68,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Переріз *K*:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \\ &+ \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 50,7 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \\ &+ \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -70,9 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

Переріз 4:

$$S_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = 0 + \frac{(-20) \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-107) = 247,7 \text{ МПа};$$

$$S_B = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = 0 + \frac{(-20) \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = -247,7 \text{ МПа}.$$

11 Аналізуючи величини визначених напружень, бачимо, що найбільш навантаженим (тобто небезпечним) є переріз 4. Саме в ньому діють найбільші напруження у балці: $|S_{max}| = 247,7 \text{ МПа}$.

12 Будуємо епюру напружень у небезпечному перерізі (рис. 4.8, в).

4.3 Позацентрове стискання

Визначити максимально допустиму позацентрово прикладену до стрижня стискуючу силу. Координати точки прикладення сили (P) - X'_P та Y'_P . Допустиме напруження $[S] = 120 \text{ МПа}$. Побудувати також епюру напружень у перерізі стрижня від максимально допустимої сили.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.5 та 4.6 і рисунку 4.9

Таблиця 4.5 – Вихідні дані до задачі 4.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X'_P , см	1,0	-1,2	1,4	-1,6	-1,8	1,6	-1,4	1,2	1,0	-1,8
a , см	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	5,5	5,0	4,5	4,0	6,0
c , см	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5
Номер двотавра	10	12	14	16	18	10	12	14	16	18
Розміри смуги, мм	140 x 12	160 x 14	180 x 16	200 x 18	220 x 20	140 x 20	160 x 18	180 x 14	200 x 16	220 x 12

Таблиця 4.6 – Вихідні дані до задачі 4.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_P , см	2,8	2,4	2,2	2,0	1,8	-1,8	-2,0	-2,2	-2,4	-2,8
b , см	5,0	6,0	7,0	8,0	4,0	5,5	4,5	6,5	7,5	8,5
d , см	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
Номер швелера	18	16	14	12	10	18	16	14	12	10
Розміри кутика, мм	100 x 63x8	50 x 32 x 4	63 x 40 x 6	75 x 50 x 8	80 x 60 x 6	100 x 63 x 10	50 x 32 x 3	63 x 40 x 4	75 x 50 x 7	80 x 60 x 7

4.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.3

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Зображується в певному масштабі переріз стрижня і визначається положення його центра ваги.

2 Визначаються моменти інерції перерізу відносно його головних центральних осей I_x та I_y .

3 Визначаються координати точки P прикладення стискуючої сили в системі головних центральних осей:

$$X_P = X'_P - X'_C; \quad (4.15)$$

$$Y_P = Y'_P - Y'_C, \quad (4.16)$$

де X'_P та Y'_P - координати зазначеної точки в системі координат, що зображена на заданій схемі перерізу (див. рис. 4.9);

X'_C та Y'_C - координати центра ваги перерізу в цій системі координат.

4 На схемі перерізу зображується його нейтральна лінія (на якій напруження відсутні) і визначаються координати найбільш віддаленої від неї точки (A) - X_A та Y_A .

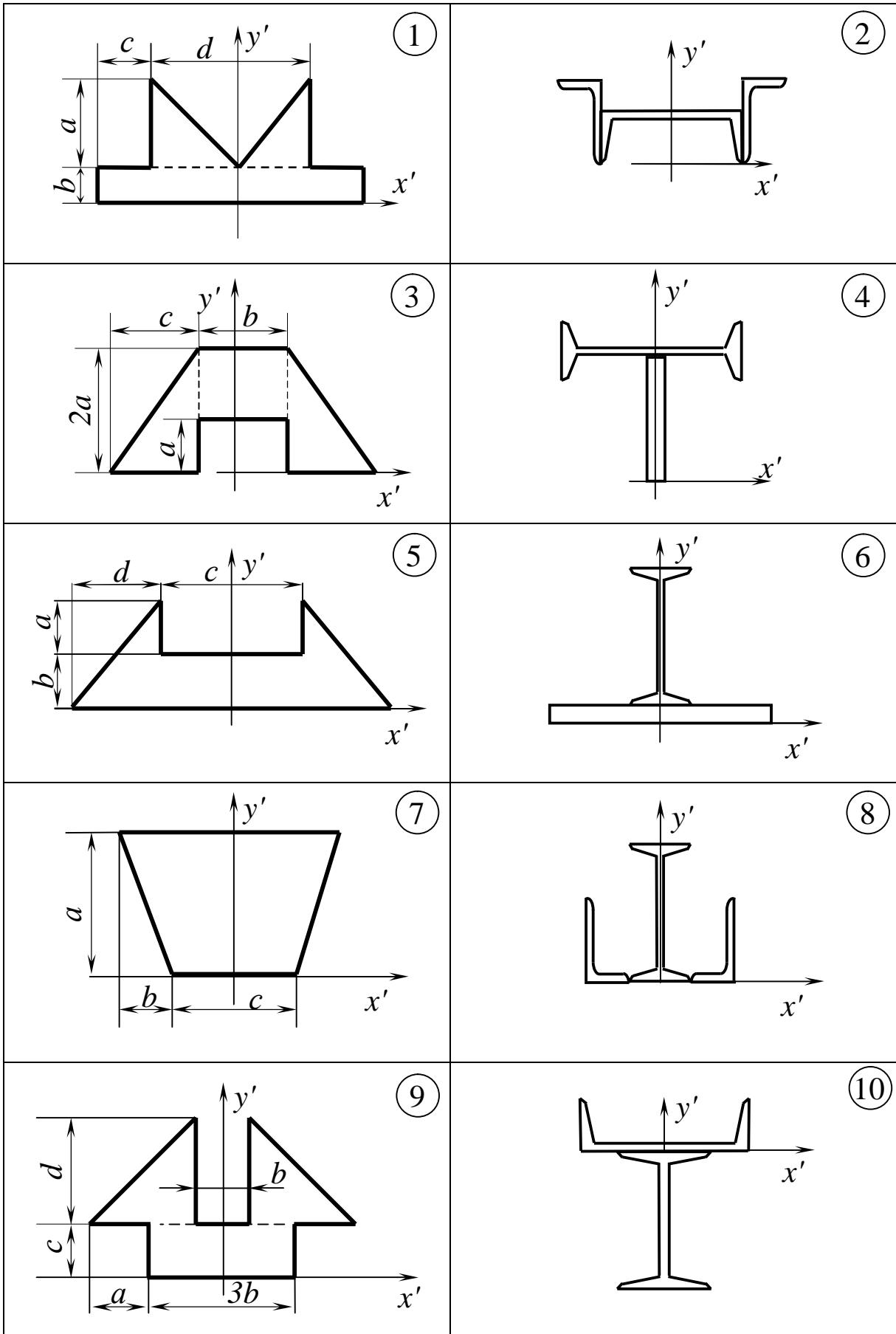


Рисунок 4.9

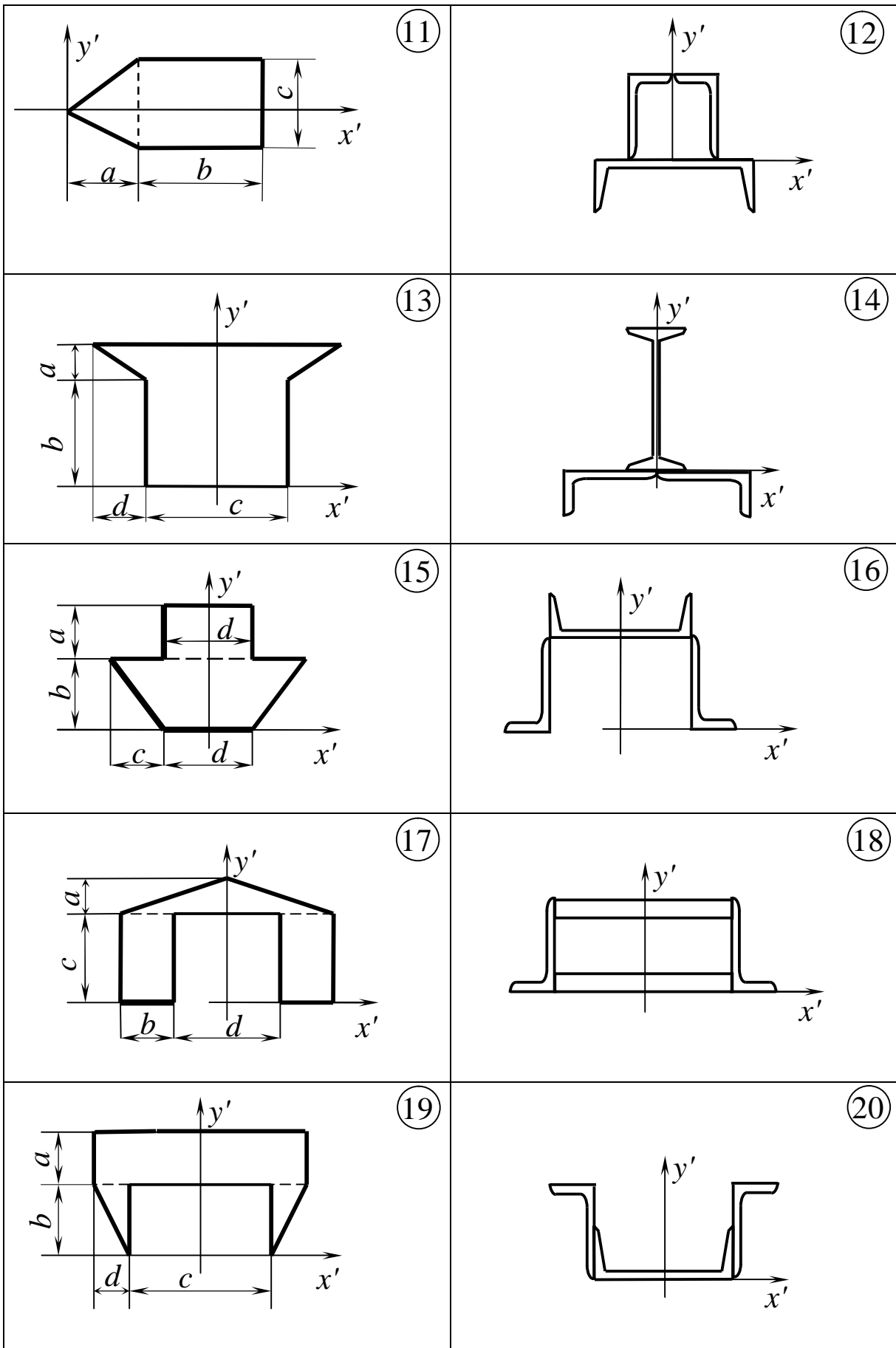


Рисунок 4.9, аркуш 2

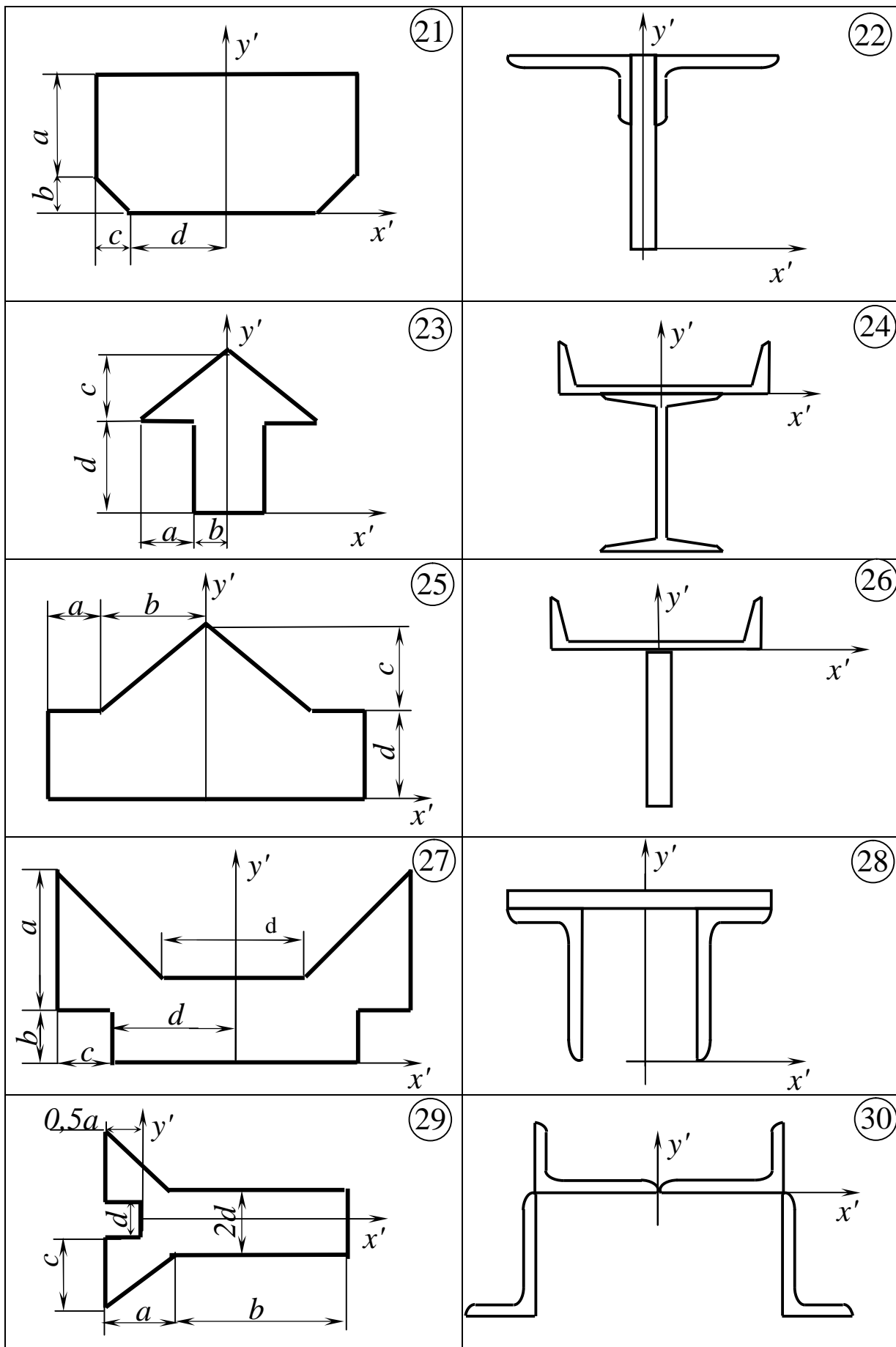


Рисунок 4.9, аркуш 3

Для побудови нейтральної лінії визначаються координати точок її перерізу з осями X та Y :

$$X = 0; \quad Y = -I_x / F \cdot Y_P; \quad (4.17)$$

$$Y = 0; \quad X = -I_y / F \cdot X_P, \quad (4.18)$$

де F – площа перерізу стрижня.

5 Визначається модуль максимально допустимої стискуючої сили:

$$P_{max} = \frac{[s]}{\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{I_x}}. \quad (4.19)$$

6 Для побудови напружень у перерізі стрижня визначаються координати другої особливої його точки (B) - X_B та Y_B . Якщо нейтральна лінія перерізає переріз, це найбільш віддалена від неї точка по інший бік від точки A . Коли ж нейтральна лінія проходить поза межами перерізу, точка B – це найближча до неї точка.

7 Підраховуються напруження в точках A і B перерізу від дії стискуючої сили P_{max} :

$$s_A = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{I_x} \right) \quad (4.20)$$

$$s_B = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_B}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_B}{I_x} \right) \quad (4.21)$$

8 Будується епюра напружень у перерізі стрижня. Для цього поза межами перерізу проводиться база епюр під прямим кутом до нейтральної лінії. До перерізу з базою проводяться лінії з точок A і B паралельно нейтральній лінії. Від бази уздовж цих ліній відкладаються у певному масштабі і з урахуванням знаків величини s_A та s_B , після цього кінці відповідних відрізків з'єднуються прямою лінією.

4.3.2 Приклад розв'язання задачі 3

Схема перерізу стрижня зображена на рисунку 4.10, координати точки Р прикладення стискувальної сили: $X'_P = 1\text{см}$, $Y'_P = 2\text{см}$.

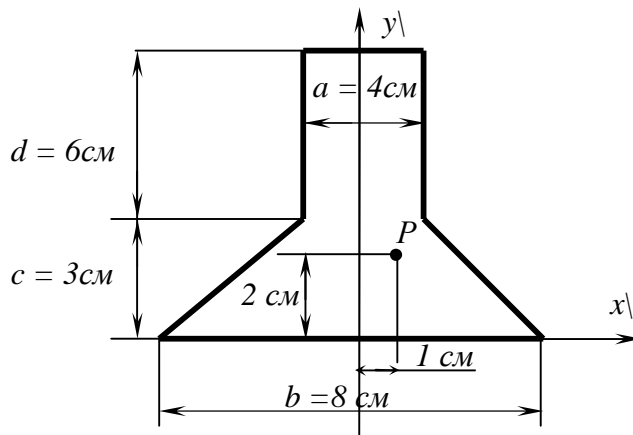


Рисунок 4.10 – Схема перерізу

1 Визначаємо положення центра ваги перерізу (рис. 4.11):

$X'_C = 0$ (тому що вісь Y' є віссю симетрії перерізу);

$$Y'_C = \frac{Y'_1 \cdot F_1 + 2Y'_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2},$$

де $Y'_1 = 0,5 \cdot 9 = 4,5\text{см}$ - координата центра ваги прямокутника (точки C_1);

$F_1 = 4 \cdot 9 = 36\text{см}^2$ - площа прямокутника;

$Y'_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1\text{см}$ - координата центра ваги трикутника (точки C_2);

$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3\text{см}^2$ - площа кожного з двох трикутників;

$$Y'_C = \frac{4,5 \cdot 36 + 2 \cdot 1 \cdot 3}{36 + 2 \cdot 3} = \frac{168}{42} = 4\text{см}.$$

2 Визначаємо головні моменти інерції перерізу (див. рис. 4.11.):

$$I_x = I_{x1} + F_1 \cdot (Y_1' - Y_C')^2 + 2 \cdot \left[I_{x2} + F_2 \cdot (Y_C' - Y_2')^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 9^3 + 36 \cdot (4,5 - 4)^2 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot (4 - 1)^2 \right] = 309 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y1} + 2 \cdot \left[I_{y2} + F_2 \cdot (X_2')^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 4^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot (-2,67)^2 \right] = 92 \text{ см}^4.$$

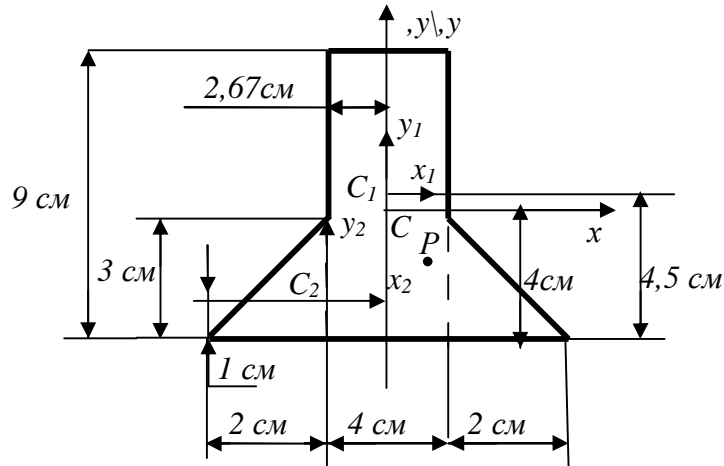


Рисунок 4.11 – Схема до визначення центра ваги перерізу та його головних моментів інерції

3 Визначаємо координати точки P прикладення стискуючої сили в системі головних центральних осей перерізу – X , Y :

$$X_P = X_P' - X_C' = 1 - 0 = 1 \text{ см};$$

$$Y_P = Y_P' - Y_C' = 2 - 4 = -2 \text{ см}.$$

4 Визначаємо координати точок O_1 і O_2 перерізу осей X та Y з нейтральною лінією (н.л) і зображуємо її на схемі перерізу (рис. 4.12):

$$X = 0; \quad Y = -\frac{I_x}{F \cdot Y_P} = -\frac{309}{42 \cdot (-2)} = 3,69 \text{ см};$$

$$Y = 0; \quad X = -\frac{I_y}{F \cdot X_P} = -\frac{92}{42 \cdot 1} = -2,19 \text{ см}.$$

Тут $F = 36 + 2 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2$ - площа всього перерізу.

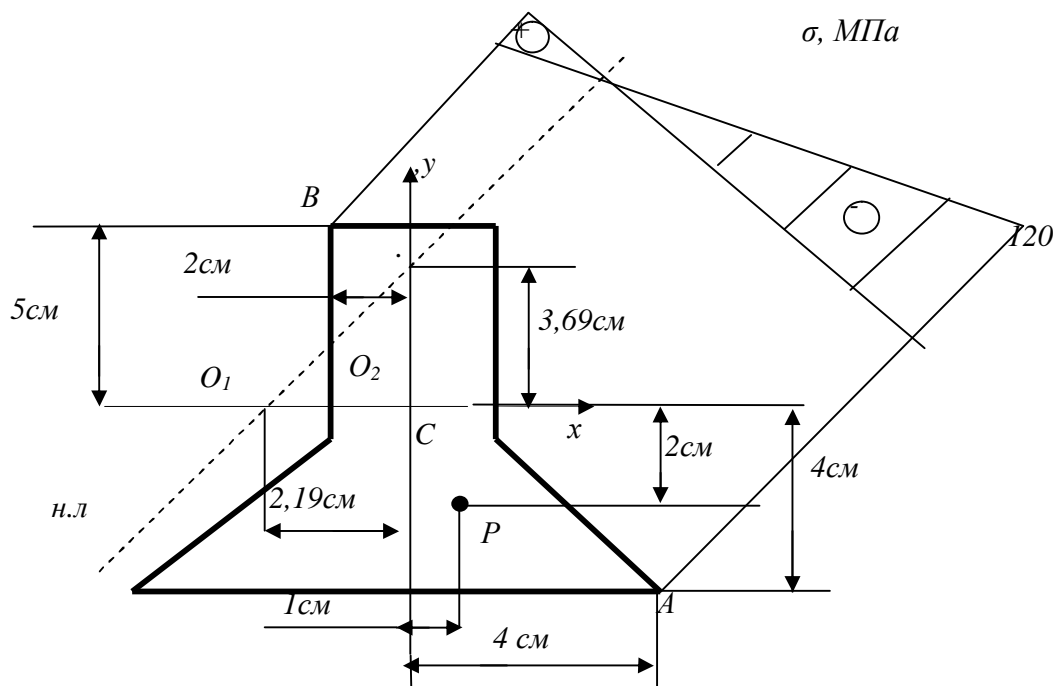


Рисунок 4.12 – Положення нейтральної лінії (н. л.) та еюра напружень у перерізі стрижня

З наведеного рисунку бачимо, що координати найбільш віддаленої від нейтральної лінії точки (A) дорівнюють: $X_A = 4 \text{ см}$; $Y_A = -4 \text{ см}$.

5 Визначаємо модуль максимально допустимої стискуючої сили:

$$P_{max} = \frac{[s]}{\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{I_x}} = \frac{120}{\frac{1}{42 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^2}{92 \cdot 10^4} + \frac{(-2) \cdot (-4) \cdot 10^2}{309 \cdot 10^4}} =$$

$$= \frac{120 \cdot 10^2}{\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309}} = 128786 \text{ Н} = 128,786 \text{ кН}.$$

6 Визначаємо координати точки B (див. рис. 4.12), яка є найбільш віддаленою від нейтральної лінії у зоні розтягання:

$$X_B = -2 \text{ см}, Y_B = 5 \text{ см}.$$

7 Підраховуємо напруження в точках A і B від дії стискуючої сили

P_{max} :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{I_x} \right) = \\ &= -128786 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309} \right) = -120 \text{ МПа}. \\ \sigma_B &= -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_B}{I_y} + \frac{Y_P \cdot Y_B}{I_x} \right) = \\ &= -128786 \cdot \left(\frac{1}{42 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot (-2) \cdot 10^2}{92 \cdot 10^4} \right) + \frac{(-2) \cdot 5 \cdot 10^2}{309 \cdot 10^4} = 39 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

8 За результатами розрахунків будуємо епюру напружень у перерізі стрижня (див. рис. 4.12).

4.4 Згинання з крученням

Виходячи з третьої теорії міцності, визначити діаметр проміжного вала редуктора, схема якого зображена на рисунку 4.13. Потужність, що передається валом, - W , частота обертання вала - n , діаметри зубчатих колес - d_1 , та d_2 , опора вала, що сприймає осьове навантаження, - A . Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0,324P_i$; $S_i = 0,4P_i$. Допустиме напруження $[s] = 80 \text{ МПа}$. Перевірити міцність вала, враховуючи повздовжню силу.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.7 та 4.8 і рисунку 4.13

Таблиця 4.7 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W , кВт	10	35	20	45	15	25	50	30	55	40
d_1 , м	0,5	0,9	0,6	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8
d_2 , м	0,4	0,6	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,4	0,6

Таблиця 4.8 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n , об/хв	100	350	200	450	300	150	500	250	400	350
a , м	0,7	0,5	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,5
b , м	0,5	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,7	0,6
c , м	0,3	0,5	0,7	0,5	0,6	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7

4.4.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.4

Розв'язання задачі здійснюється в такій послідовності:

1 Визначаються крутний момент та сила, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot W}{p \cdot n}; \quad (4.22)$$

$$P_i = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_i}; \quad (4.23)$$

$$T_i = 0,324 P_i, \quad (4.24)$$

$$S_i = 0,4 P_i. \quad (4.25)$$

2 Усі зазначені сили прикладаються безпосередньо до вала з додаванням відповідних моментів, які виникають, коли лінія дії сили не перерізає осі вала.

3 Визначаються опорні реакції вала у вертикальній площині та будується еюра згинальних моментів M_x .

4 Визначаються опорні реакції вала у горизонтальній площині та будується еюра згинальних моментів M_y .

5 Будується еюра крутних моментів – $M_{кр}$.

6 Визначаються величини приведених моментів у характерних перерізах вала:

$$M_{пр} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} \quad (4.26)$$

і будується їх еюра.

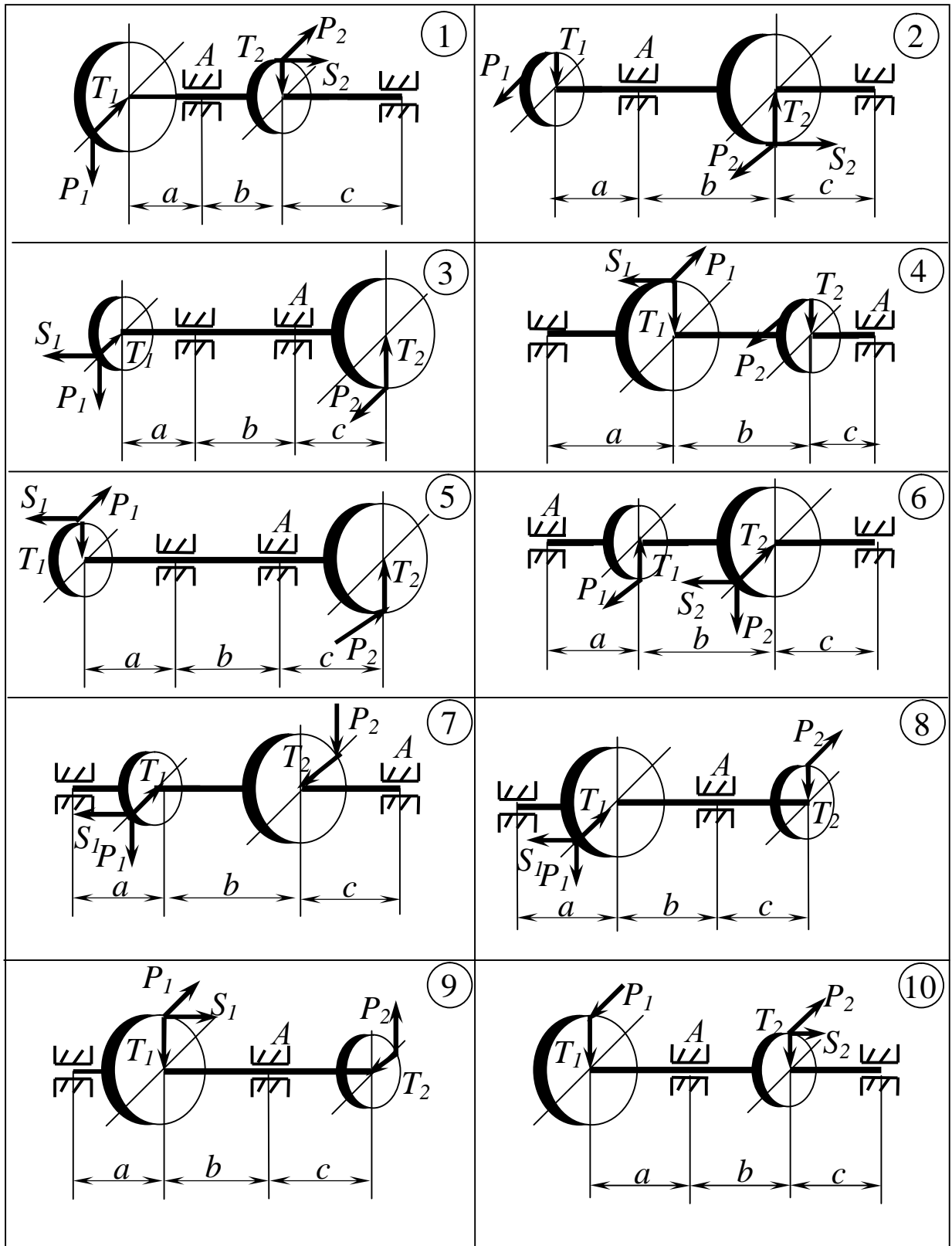


Рисунок 4.13

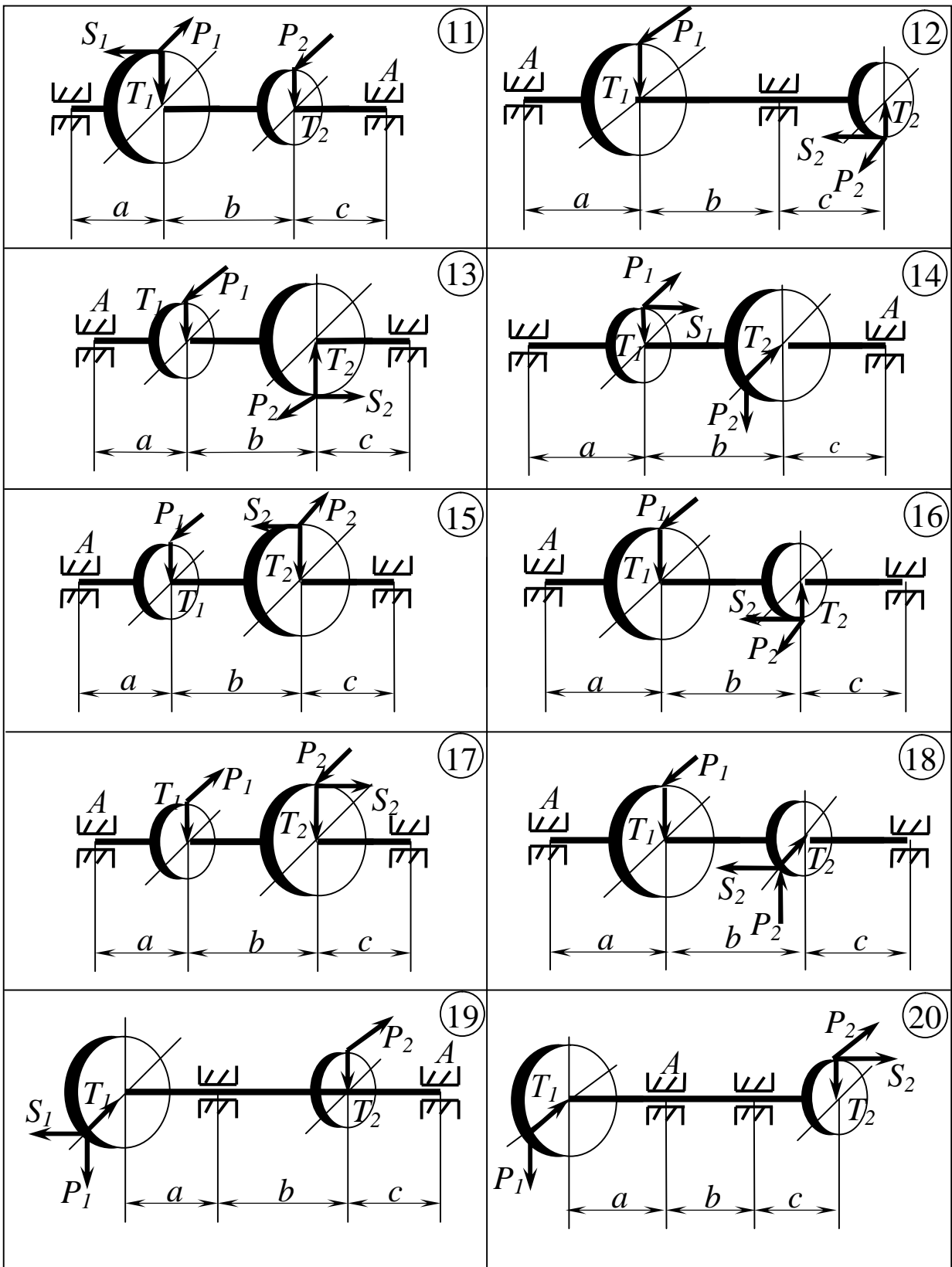


Рисунок 4.13, аркуш 2

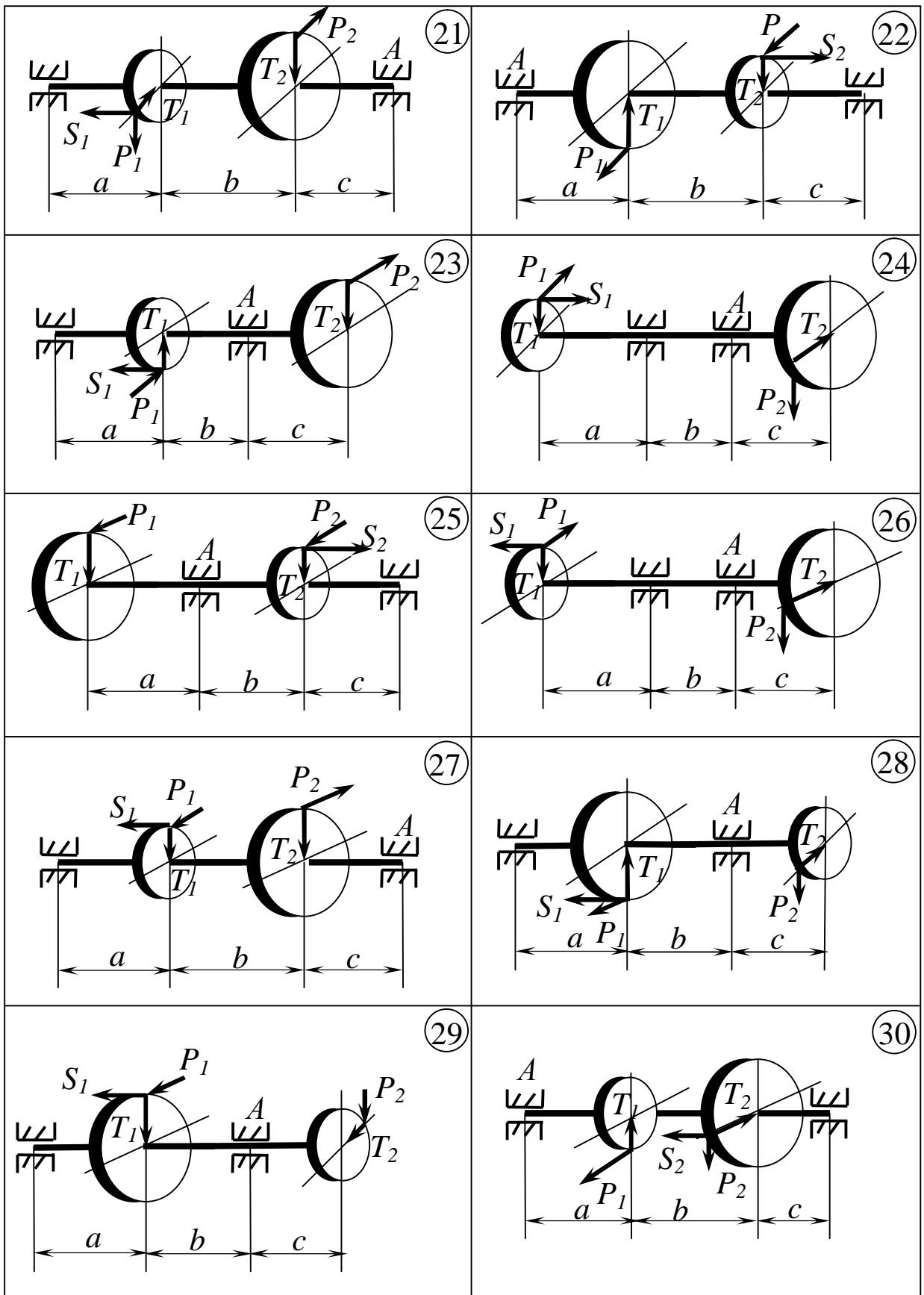


Рисунок 4.13, аркуш 3

7 За епюрою наведених моментів визначається найбільше їх значення – M_{np}^{max} .

8 Визначається необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{\rho \cdot n}}. \quad (4.27)$$

Остаточне значення d береться з нормального ряду (ГОСТ 6636-69).

9 Будується еюра повздовжніх сил – N .

10 У небезпечному перерізі вала (там, де $M_{np} = M_{np}^{max}$) визначаються найбільші нормальні та дотичні напруження:

$$s_{max} = \frac{4 \cdot |N|}{\rho \cdot d^2} + \frac{32 \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{\rho \cdot d^3}; \quad (4.28)$$

$$t_{max} = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\rho \cdot d^3}, \quad (4.29)$$

і перевіряється міцність вала:

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{s_{max}^2 + 4 \cdot t_{max}^2} \leq [s] \quad (4.30)$$

4.4.2 Приклад розв'язання задачі 4.4

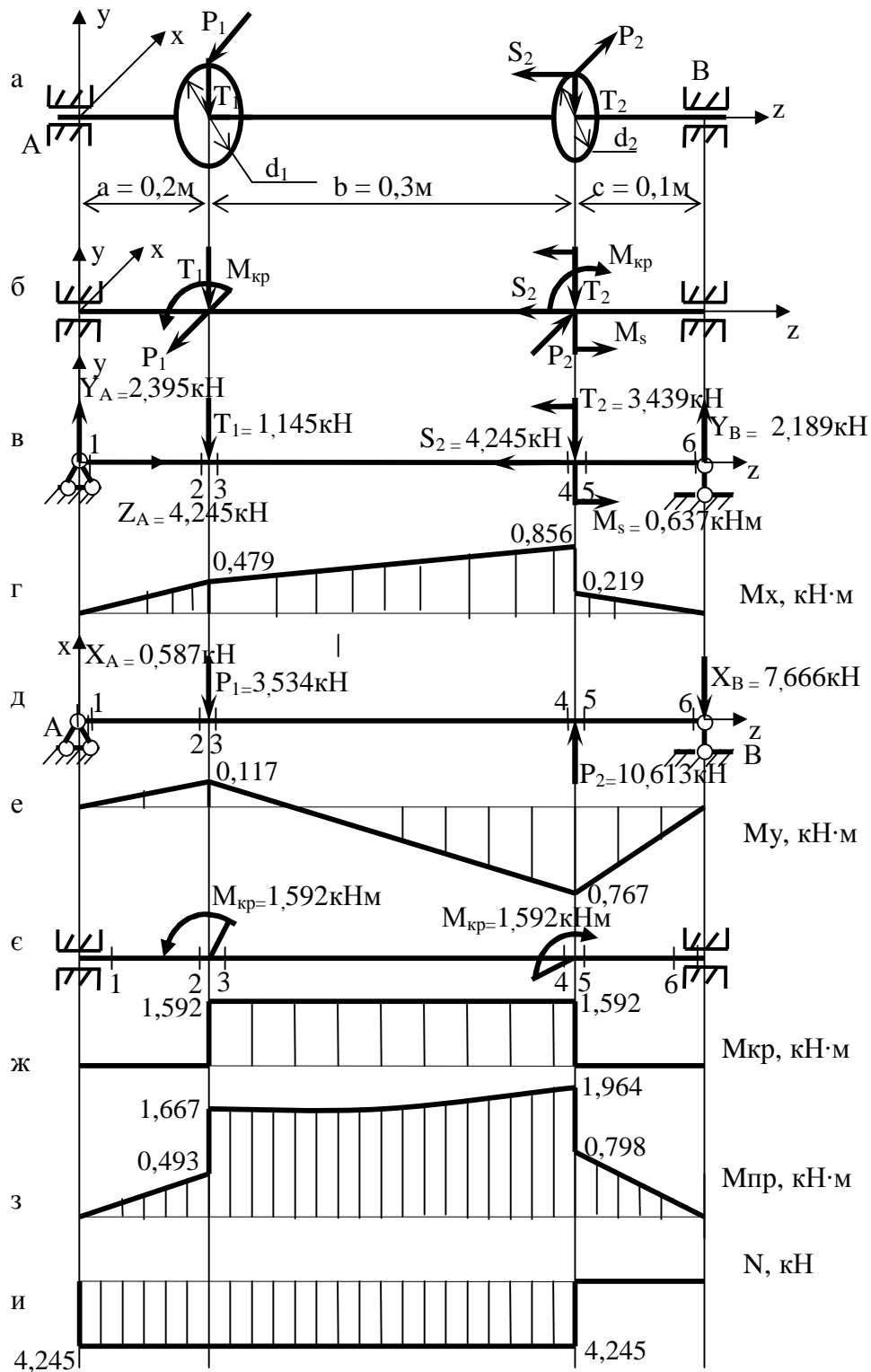
Схема вала зображена на рисунку 4.14, а. Розрахунки виконаємо відповідно до таких вихідних даних: $a = 0,2$ м; $b = 0,3$ м; $c = 0,1$ м; $d_1 = 0,9$ м; $d_2 = 0,3$ м; $W = 75$ кВт; $n = 450$ об/хв.; $[s] = 80$ МПа.

1 Визначимо крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot W}{\rho \cdot n} = \frac{30 \cdot 75}{3,14 \cdot 450} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_1} = \frac{2 \cdot 1,592}{0,9} = 3,534 \text{ кН};$$

$$T_1 = 0,324 \cdot P_1 = 0,324 \cdot 3,534 = 1,145 \text{ кН};$$



а - схема вала; б – приведення сил до осі вала; в – навантаження вала у вертикальній площині; г – еюра M_x ; д – навантаження вала у горизонтальній площині; е – еюра M_y ; є, ж – схема дії крутних моментів і еюра $M_{кр}$; з – еюра $M_{пр}$; и – еюра N

Рисунок 4.14 – Графічні побудови до прикладу розв’язання задачі 4.4

$$P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_2} = \frac{2 \cdot 1,592}{0,3} = 10,613 \text{ кН};$$

$$T_2 = 0,324 \cdot P_2 = 0,324 \cdot 10,613 = 3,439 \text{ кН};$$

$$S_2 = 0,4 \cdot P_2 = 0,4 \cdot 10,613 = 4,245 \text{ кН}.$$

2 Прикладаємо усі зазначені сили безпосередньо до осі вала (див. рис. 4.14, б).

Зважаючи на те, що сили P_1 та P_2 не перерізають осі вала, до них додають добутки $P_1 \cdot \frac{d_1}{2}$ та $P_2 \cdot \frac{d_2}{2}$, які дорівнюють крутному моменту – $M_{кр}$. З тієї ж причини до сили S_2 додається згинальний момент

$$M_s = S_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 4,245 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,637 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Визначаємо опорні реакції вала у вертикальній площині (див. рис. 4.14, в) та будуємо епюру згинальних моментів M_x (див. рис. 4.14, г):

$$\sum M_A = 0: Y_B \cdot 0,6 + M_s - T_1 \cdot 0,2 - T_2 \cdot 0,5 = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{0,6} \cdot (-M_s + T_1 \cdot 0,2 + T_2 \cdot 0,5) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (-0,635 + 1,145 \cdot 0,2 + 3,439 \cdot 0,5) = 2,189 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -Y_A \cdot 0,6 + M_s + T_1 \cdot 0,4 + T_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{0,6} \cdot (T_1 \cdot 0,4 + M_s + T_2 \cdot 0,1) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (1,145 \cdot 0,4 + 0,635 + 3,439 \cdot 0,1) = 2,395 \text{ кН};$$

$$\sum P_Z = 0: Z_A - S_2 = 0; Z_A = S_2 = 4,245 \text{ кН}.$$

$$M_1^x = 0; M_2^x = Y_A \cdot 0,2 = 2,395 \cdot 0,2 = 0,479 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^x = M_2^x = 0,479 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^x = Y_A \cdot 0,5 - T_1 \cdot 0,3 = 2,395 \cdot 0,5 - 1,145 \cdot 0,3 = 0,856 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^x = M_4^x - M_s = 0,856 - 0,637 = 0,219 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_6^x = 0.$$

4 Визначаємо опорні реакції вала у горизонтальній площині (див. рис. 4.14, д) та будуємо епюру згинальних моментів M_y (рис. 4.14, е):

$$\sum M_A = 0: -P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5 - X_B \cdot 0,6 = 0;$$

$$X_B = \frac{1}{0,6} \cdot (-P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (-3,534 \cdot 0,2 + 10,613 \cdot 0,5) = 7,666 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -X_A \cdot 0,6 + P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$X_A = \frac{1}{0,6} \cdot (P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (3,534 \cdot 0,4 - 10,613 \cdot 0,1) = 0,587 \text{ кН}.$$

$$M_1^y = 0; \quad M_2^y = M_3^y = X_A \cdot 0,2 = 0,587 \cdot 0,2 = 0,117 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^y = M_5^y = X_A \cdot 0,5 - P_1 \cdot 0,3 = 0,587 \cdot 0,5 - 3,534 \cdot 0,3 = 0,767 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^y = 0.$$

5 Прикладаємо крутні моменти до вала (див. рис. 4.14, е) та будуємо епюру крутних моментів – $M_{кр}$ (рис. 4.14, ж):

$$M_1^{кр} = 0; \quad M_2^{кр} = 0; \quad M_3^{кр} = M_{кр} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{кр} = M_{кр} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5^{кр} = 0; \quad M_6^{кр} = 0.$$

6 Визначаємо величини приведених моментів у характерних перерізах балки і будуємо епюру M_{np} (рис. 4.14, з):

$$M_1^{np} = \sqrt{(M_1^x)^2 + (M_1^y)^2 + (M_1^{кр})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0;$$

$$M_2^{np} = \sqrt{(M_2^x)^2 + (M_2^y)^2 + (M_2^{кр})^2} =$$

$$= \sqrt{0,479^2 + 0,117^2 + 0^2} = 0,493 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{np} = \sqrt{(M_3^x)^2 + (M_3^y)^2 + (M_3^{кр})^2} =$$

$$= \sqrt{0,479^2 + 0,117^2 + 1,592^2} = 1,667 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned}
M_4^{np} &= \sqrt{(M_4^x)^2 + (M_4^y)^2 + (M_4^{kp})^2} = \\
&= \sqrt{0,856^2 + 0,767^2 + 1,592^2} = 1,964 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
M_5^{np} &= \sqrt{(M_5^x)^2 + (M_5^y)^2 + (M_5^{kp})^2} = \\
&= \sqrt{0,219^2 + 0,767^2 + 0^2} = 0,798 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
M_6^{np} &= \sqrt{(M_6^x)^2 + (M_6^y)^2 + (M_6^{kp})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0.
\end{aligned}$$

7 Аналізуючи епюру M_{np} , бачимо, що небезпечним є переріз 4, в якому $M_{np} = M_{np}^{max} = 1,964 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

8 Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{\rho \cdot [s]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,964 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 63 \text{ мм}.$$

Зважаючи на те, що розмір 63 мм є в нормальному ряду, приймаємо $d = 63 \text{ мм}$.

9 Будуємо епюру повздовжніх сил – N (рис. 4.14, и):

$$\begin{aligned}
N_1 = N_2 = N_3 = N_4 &= -Z_A = -4,245 \text{ кН}; \\
N_5 &= -Z_A + S_2 = -4,245 + 4,245 = 0; \quad N_6 = N_7 = 0.
\end{aligned}$$

10 Визначаємо найбільші нормальні та дотичні напруження в небезпечному перерізі вала і перевіряємо його міцність:

$$\begin{aligned}
s_{max} &= \frac{4 \cdot |N_A|}{\rho \cdot d^2} + \frac{32 \cdot \sqrt{(M_4^x)^2 + (M_4^y)^2}}{\rho \cdot d^3} = \\
&= \frac{4 \cdot 4,245 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 63^2} + \frac{32 \cdot \sqrt{(0,856 \cdot 10^6)^2 + (0,767 \cdot 10^6)^2}}{3,14 \cdot 63^3} = 48,206 \text{ МПа}; \\
t_{max} &= \frac{16 \cdot M_4^{kp}}{\rho \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 1,592 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 63^3} = 32,442 \text{ МПа}; \\
s_{екв}^{max} &= \sqrt{s_{max}^2 + 4 \cdot t_{max}^2} = \sqrt{48,206^2 + 4 \cdot 32,442^2} = 80,832 \text{ МПа} > [s].
\end{aligned}$$

Умова міцності не виконується, тому остаточно приймаємо наступне значення діаметру з нормального ряду: $d = 71$ мм.

Цього разу умова міцності виконується:

$$s_{max} = \frac{4 \cdot 4,245 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 71^2} + \frac{32 \cdot \sqrt{(0,856 \cdot 10^6)^2 + (0,767 \cdot 10^6)^2}}{3,14 \cdot 71^3} = 33,800 \text{ МПа};$$

$$t_{max} = \frac{16 \cdot 1,592 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 71^3} = 22,655 \text{ МПа};$$

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{33,800^2 + 4 \cdot 22,655^2} = 56,528 \text{ МПа} < [s].$$

5 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

5.1 Один раз статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки (рис. 5.1.) побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин перерізу і кут повороту перерізу А. Дані узяти з табл. 5.1 і 5.2 [S] = 160 МПа.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a , м	2,6	2,4	2,5	2,2	3,0	2,6	2,4	1,8	2,6	2,0
b , м	4,2	3,4	4,0	3,6	4,5	3,0	3,5	2,5	3,2	4,4
c , м	1,2	1,0	0,8	0,9	1,3	1,1	0,9	0,8	1,0	1,4

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q , кН/м	20	30	22	32	24	34	26	36	28	40
P , кН	35	42	38	58	40	56	45	54	50	52
M , кНм	60	25	65	35	48	30	56	32	40	62

5.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.1

Для розрахунку нерозрізних балок застосувати метод сил в наступному порядку:

- 1 Встановити ступінь статичної невизначуваності S .
- 2 Вибрати основну систему шляхом урізання шарнірів в місцях проміжних опор або заміни защемлення шарнірно-нерухомою опорою.
- 3 Побудувати еквівалентну систему, для чого до основної системи прикласти зовнішні навантаження і невідомі зусилля (моменти в місцях врізаних шарнірів).
- 4 Скласти систему канонічних рівнянь.

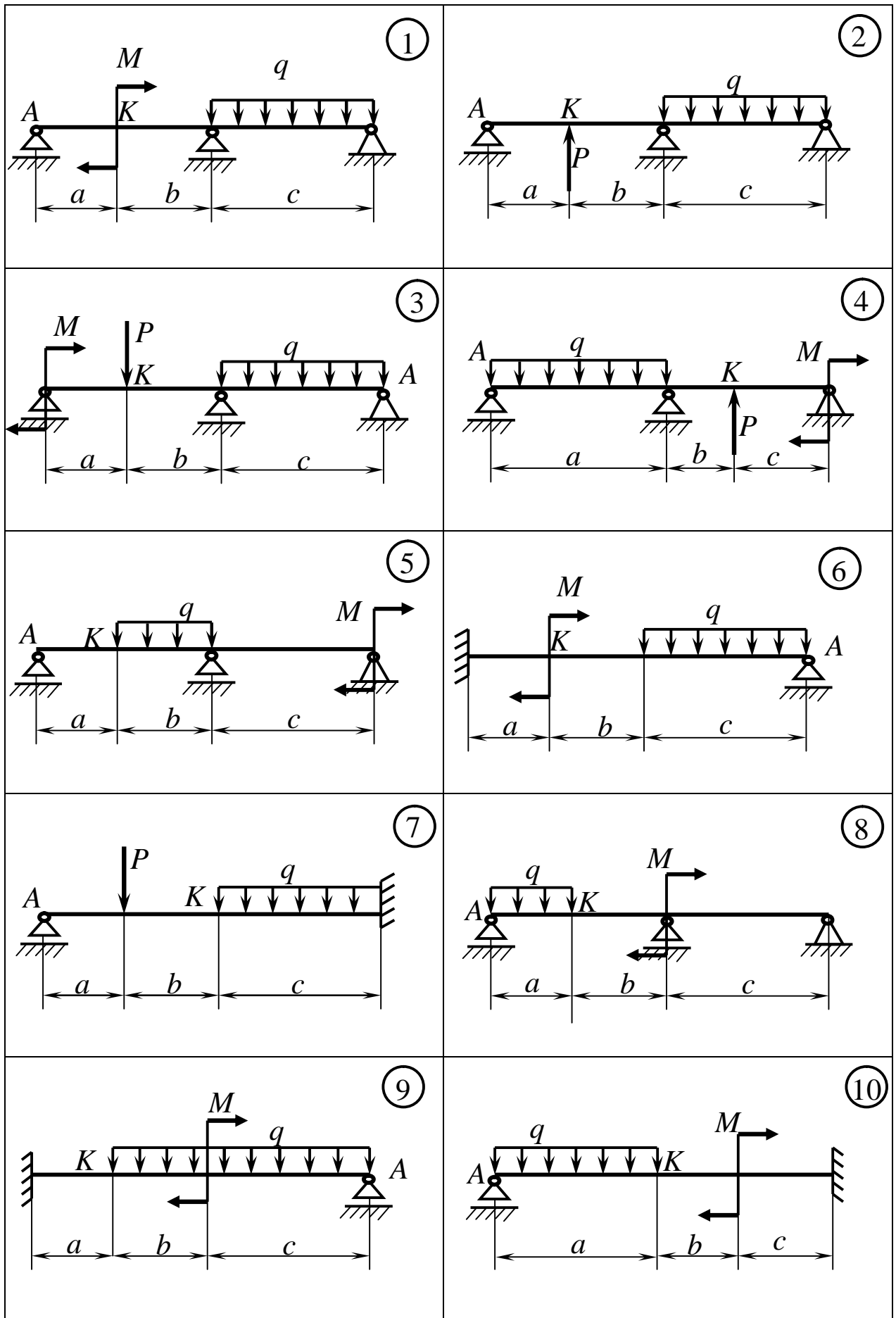


Рисунок 5.1

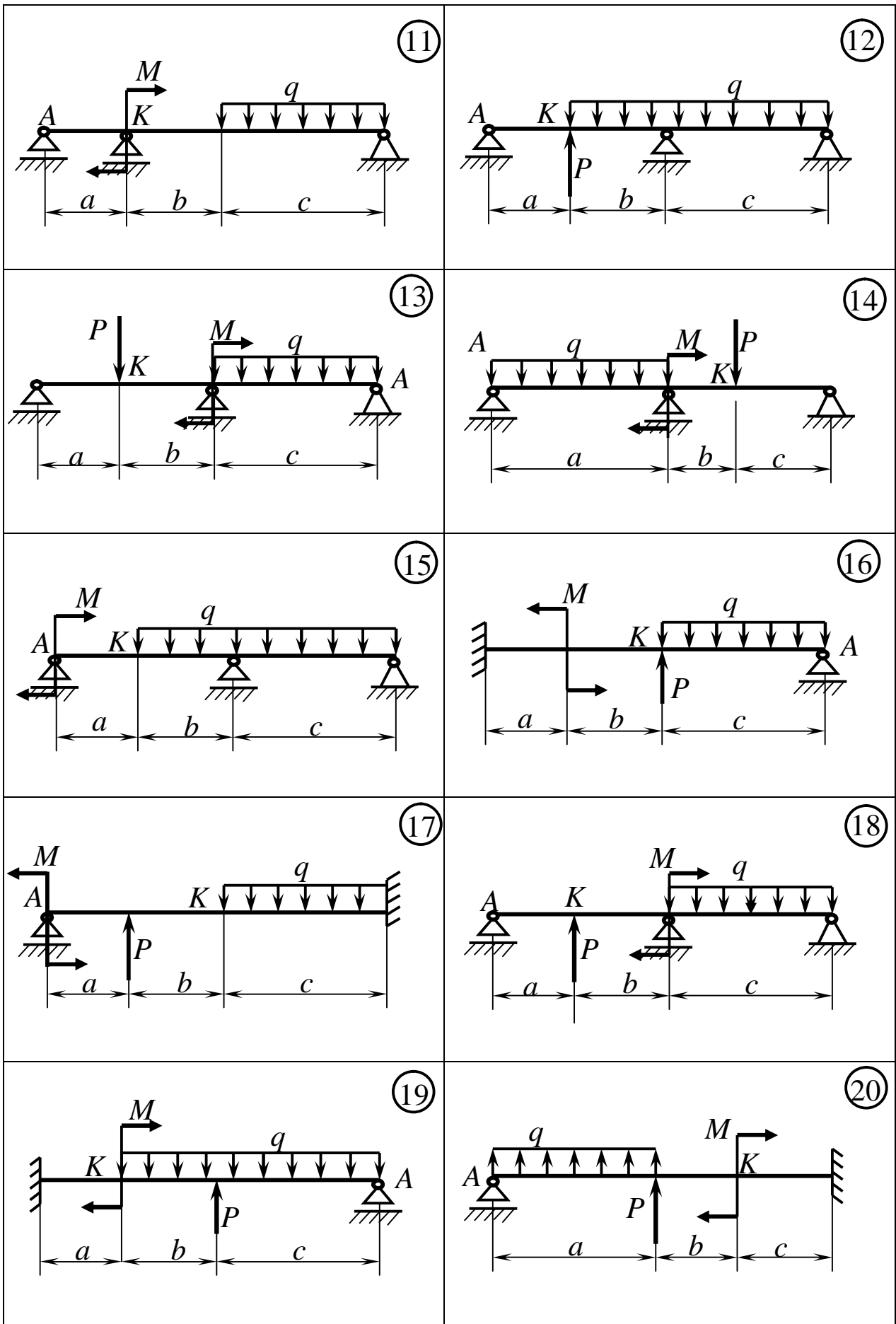


Рисунок 5.2, аркуш 2

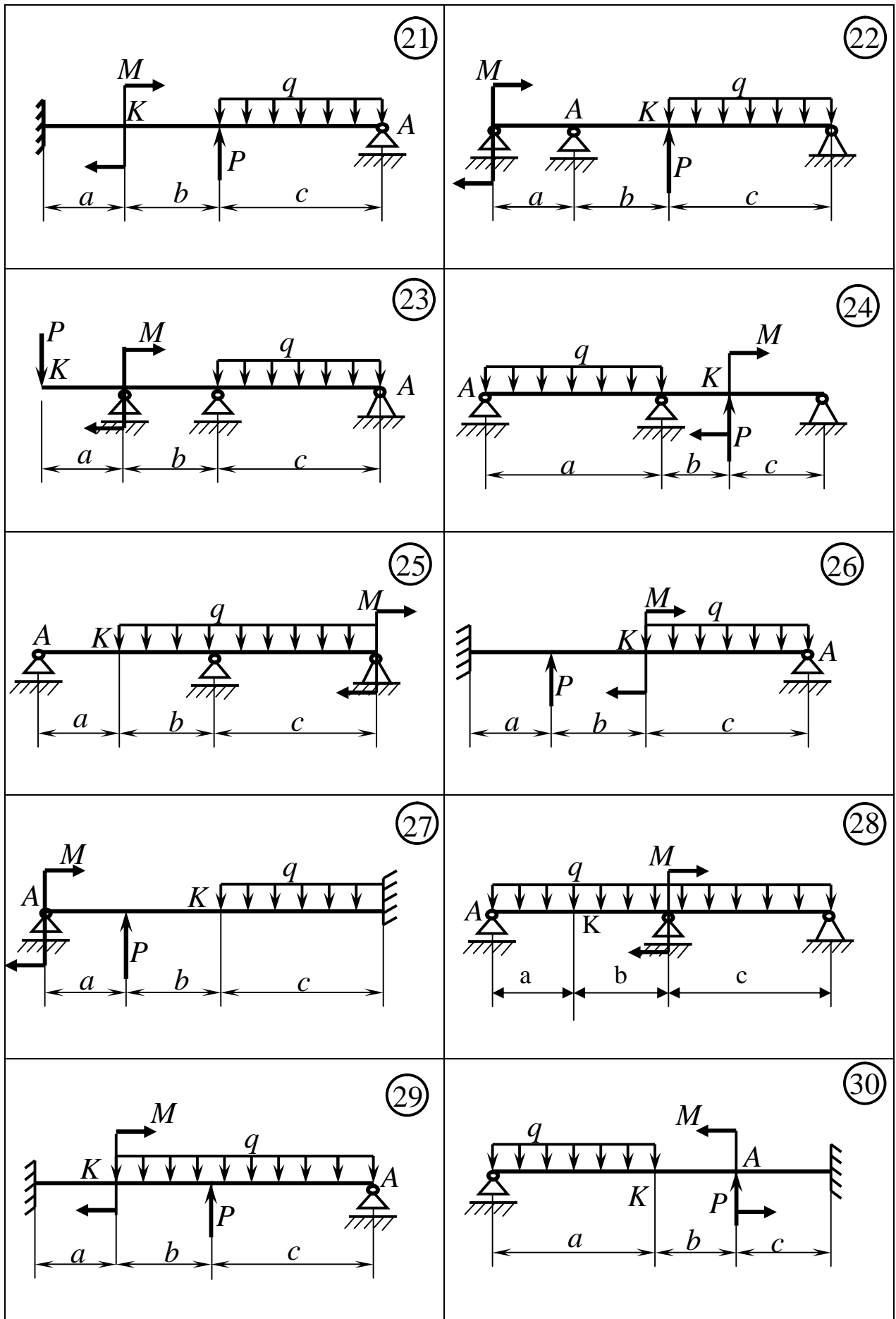


Рисунок 5.3, аркуш 3

5 Побудувати епюри згинальних моментів окремо від зовнішніх навантажень і від одиничних моментів, прикладених в місцях постановки шарнірів.

6 Шляхом “перемножування” епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени.

При цьому зручно користуватися загальною формулою, одержаною при “перемножуванні” параболічної і прямолінійної трапецій (рис. 5.2).

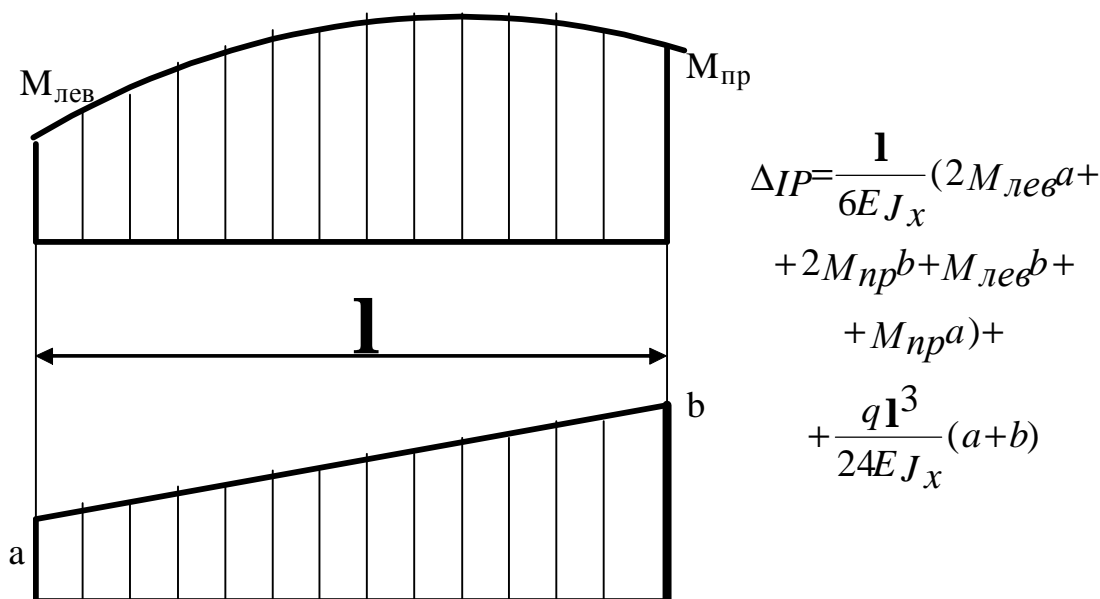


Рисунок 5.2

7 Вирішити систему рівнянь і визначити невідомі моменти. До кожної окремої балки прикласти задане навантаження, обчислені опорні моменти і побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.

8 По найбільшому згинаючому моменту з умови міцності на вигин визначити момент опору і з таблиць сортаменту підібрати двотавр.

9 Використовуючи один із способів “перемножування” епюр, визначити прогин і кут повороту у вказаних перерізах.

5.1.2 Приклад розв’язання задачі 5.1

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеню статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій чотири (див. рис. 5.3, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана задача один раз статично невизначувана.

2 Для нерозрізної балки як основну систему краще вибрати таку ж балку, але з врізаним шарніром на проміжній опорі (рис. 5.3, б). До основної системи прикладаємо задане навантаження і моменти X_1 – одержуємо еквівалентну систему (рис. 5.3, в).

3 Врізавши шарнір на проміжній опорі, одержали дві незалежні балки. До них прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 5.3, г), визначаємо реакції опор і будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 5.3, д).

4 Знімаємо задане навантаження, до ненавантаженої системи прикладаємо моменти $X_1 = 1$ і від них будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.3, е).

5 Складаємо канонічне рівняння

$$d_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

6 Коефіцієнти рівняння δ_{11} і Δ_{1p} визначаємо методом Морю шляхом “перемножування” відповідних епюр. “Перемноживши” M_1 на M_1 , одержимо δ_{11} .

$$d_{11} = \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{5}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_x}.$$

Помноживши M_1 на M_p , одержимо Δ_{1p} .

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = & + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 1 \cdot 35) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 18 \cdot 1) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 18 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0,6 + 0) = \frac{98,2}{EJ_x}. \end{aligned}$$

7 Підставляємо коефіцієнти в канонічне рівняння, з рішення якого знаходимо X_1 :

$$\frac{3}{EJ_x} X_1 + \frac{98,2}{EJ_x} = 0, \text{ звідки } X_1 = -\frac{98,2}{3} = -32,7 \text{ kH} \cdot \text{м}.$$

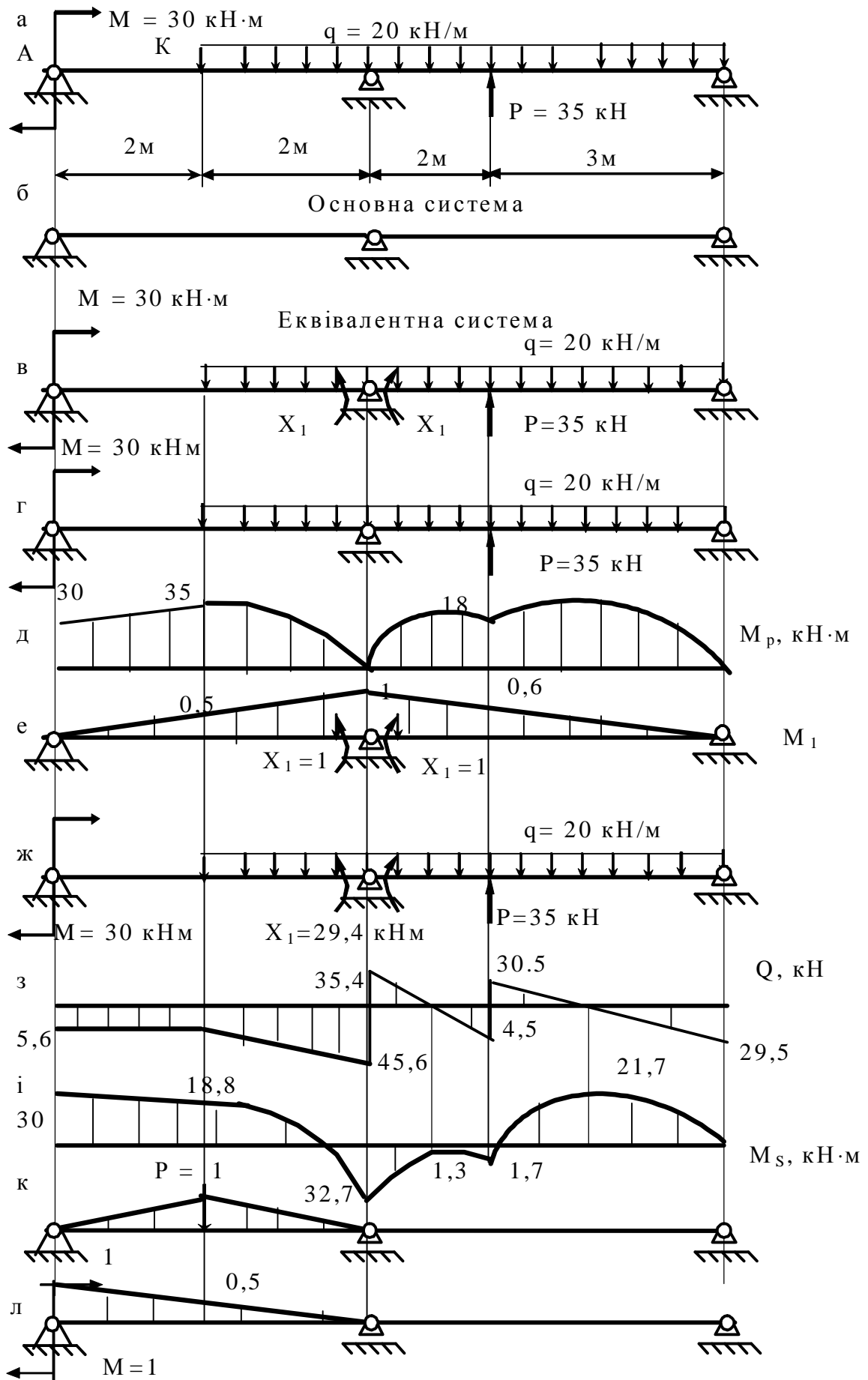


Рисунок 5.3

8 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис. 5.3, ж). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 5.3, з) і згинальних моментів (рис. 5.3, і).

9 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюри M_s на M_1 повинен вийти нуль.

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} = & \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 18,8 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 18,8 \cdot 0,5 - 2 \cdot 1 \cdot 32,7 - \\ & 0,5 \cdot 32,7 + 18,8 \cdot 1) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 1 \cdot 32,7 - 2 \cdot 0,6 \cdot 1,7 - \\ & - 32,7 \cdot 0,6 - 1 \cdot 1,7) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 0,6 \cdot 1,7) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,6 + 0) = \frac{(-57,8 + 58)}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Похибка складає:

$$\frac{(-57,8 + 58)}{EJ_x} \cdot 100\% = 0,35\%.$$

10 З епюри згинальних моментів (див. рис.5.3, і) знаходимо небезпечний переріз, $M_{\max} = 32,7$ кНм.

З умови міцності

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_o} \leq [\sigma]; \\ W_o &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{32,7 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 204,4 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

За таблицею сортаменту підбираємо двотавр №22, $W_x = 232 \text{ см}^3$, $J_x = 2550 \text{ см}^4$.

11 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис.5.3, д), яку “перемножуємо” на епюру M_s (див. рис.5.3, і).

$$y_A = \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 1 \cdot 18,8 + 1 \cdot 30] + \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 18,8 \cdot 1 - 32,7 \cdot 1] + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) = \frac{34,2}{EJ_x} = \frac{34,2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 6,71 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,71 \text{ мм}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що точка К переміщається по напрямку одиничної сили, тобто вниз.

12 Визначення кута повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис.5.3, л), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис. 5.3, і)

$$q_A = \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 30 + 18,8 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 + 18,8 \cdot 1] + \frac{2}{6EJ_x} [2 \cdot 18,8 \cdot 0,5 - 32,7 \cdot 1] + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 0) = \frac{32,8}{EJ_x} = \frac{32,8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 6,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз А повертається у напрямі одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

5.2 Один раз статично невизначувана балка

Для сталеві рами, представленої на рис. 5.4, необхідно розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів, підібрати номер двотавра і визначити кут повороту перерізу. Дані узяті з табл. 5.1 і 5.2 [s] = 180 МПа.

5.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.2

План розв'язання задачі 5.2 такий же, як і для задачі 5.1. Вибір основної системи здійснюється шляхом відкидання “зайвих” зв'язків, решта етапів розв'язання аналогічна таким задачі 5.1.

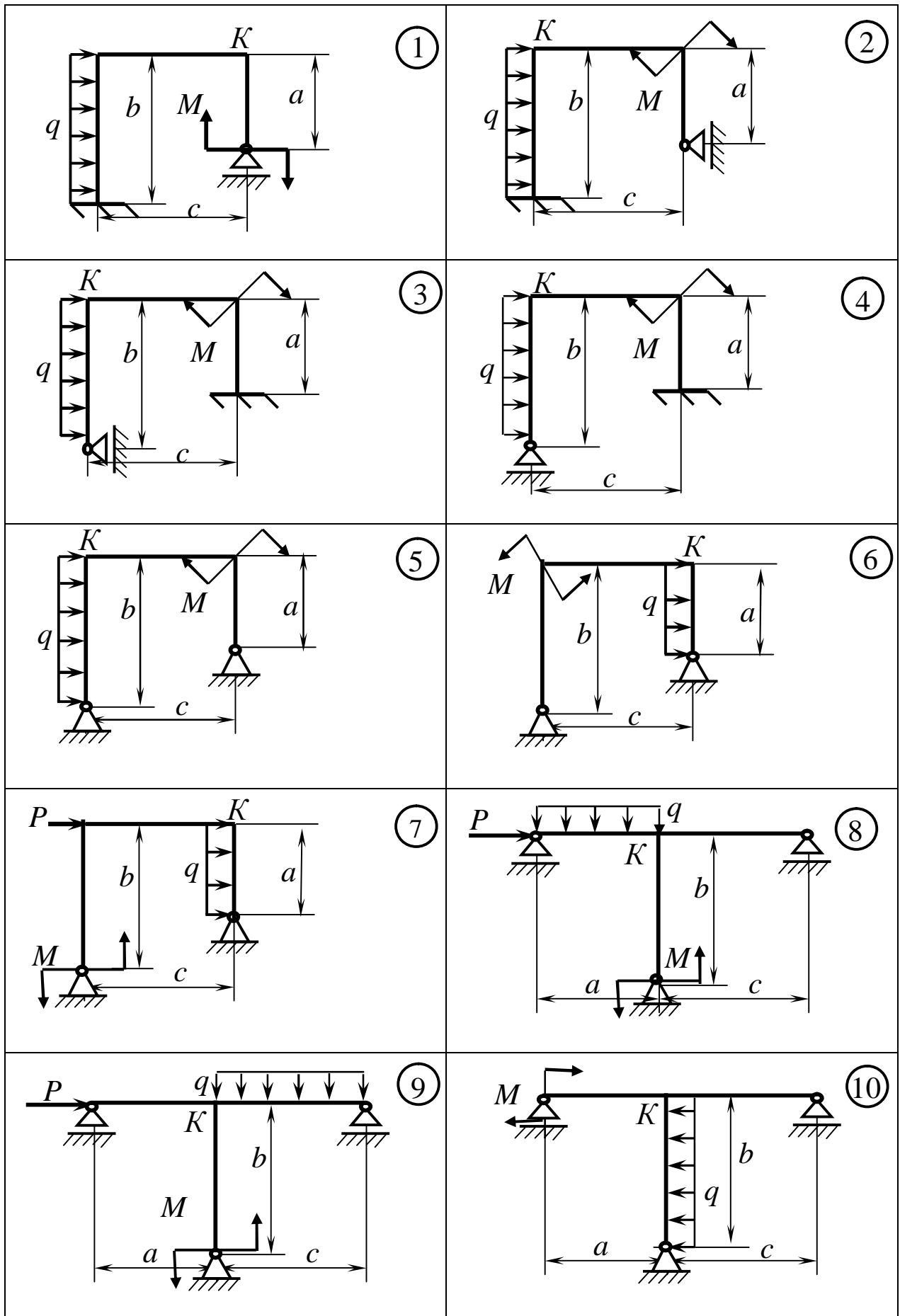


Рисунок 5.4

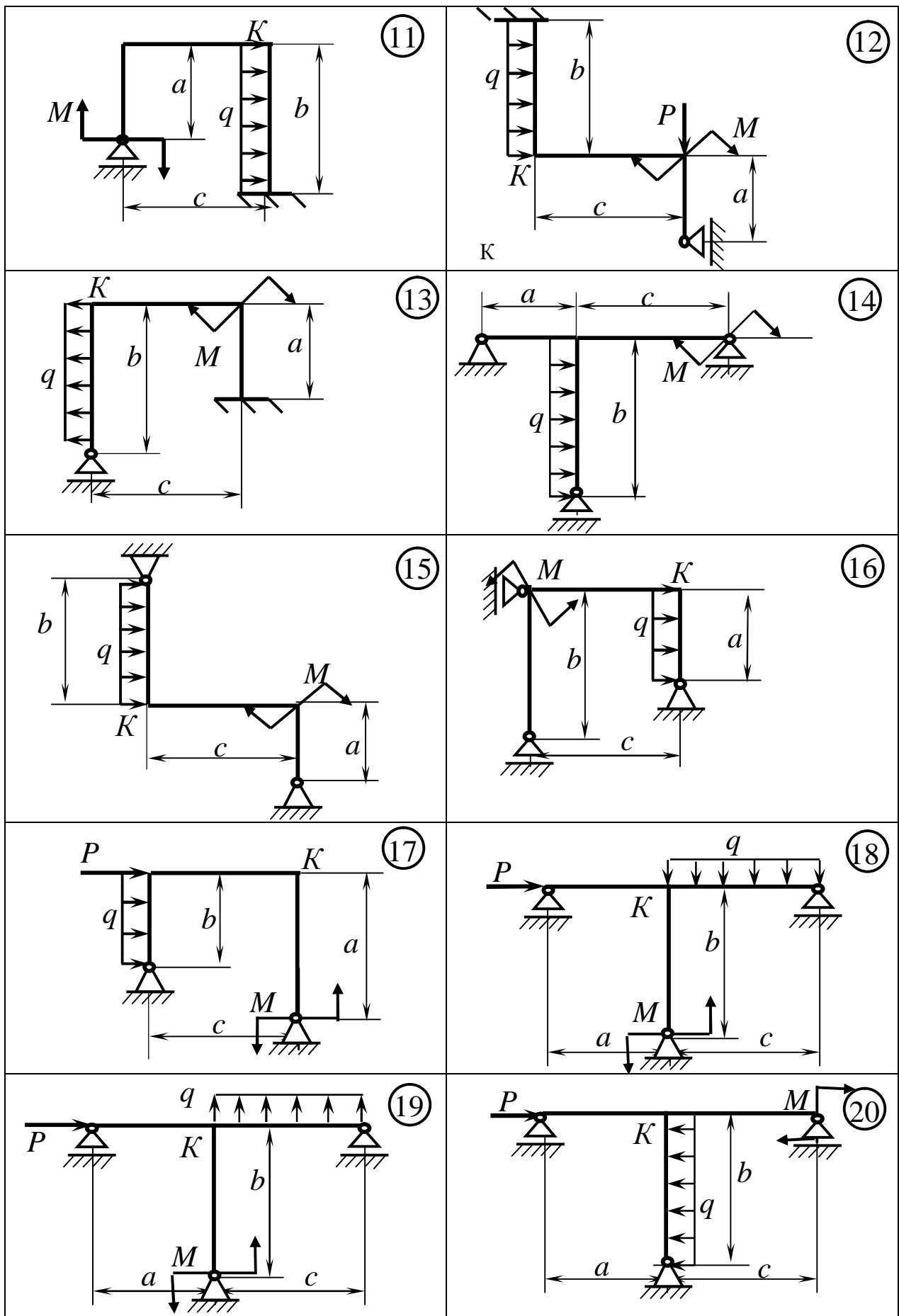


Рисунок 5.4, аркуш 2

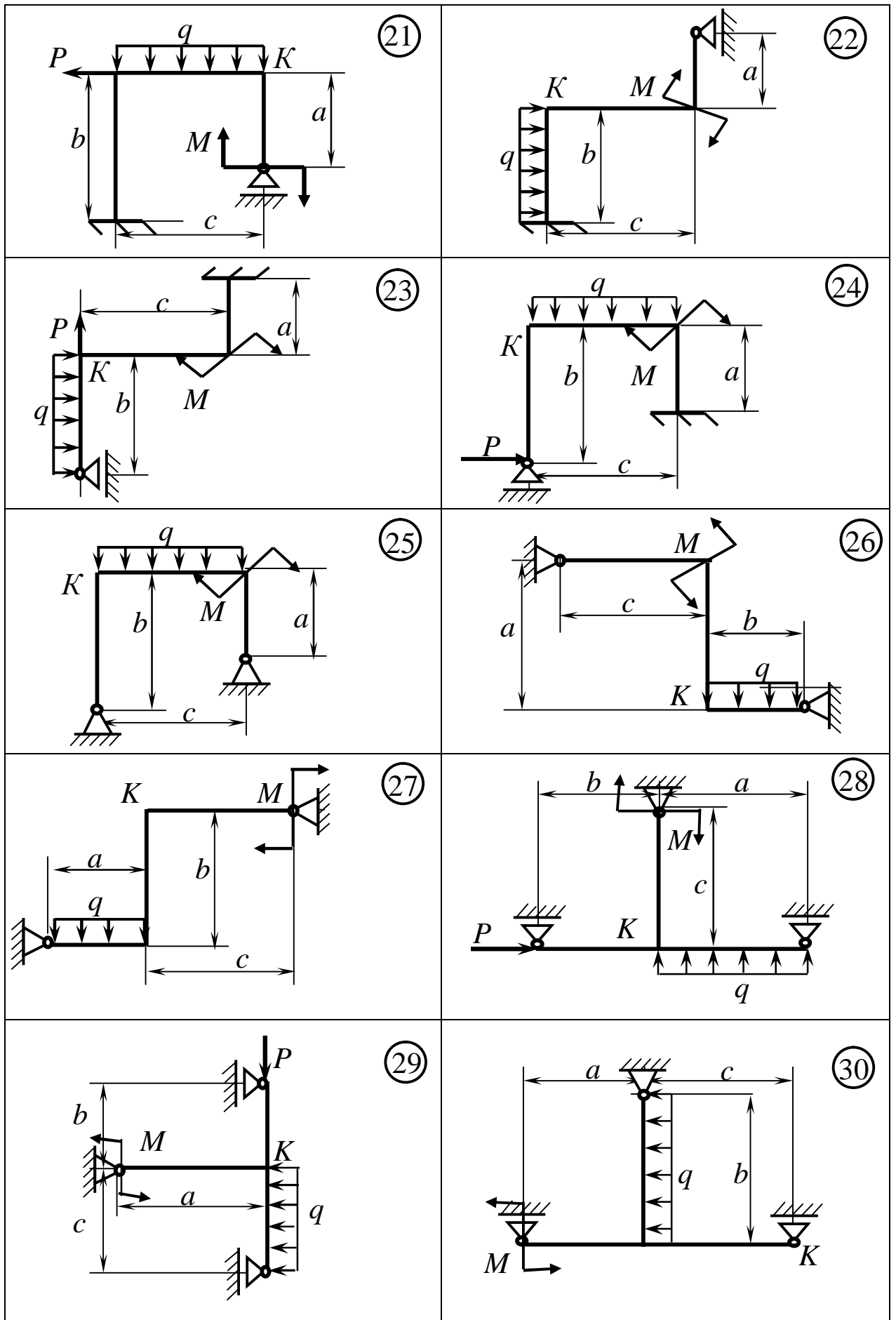


Рисунок 5.4, аркуш 3

5.2.2 Приклад розв'язання задачі 5.2

1 Аналізуємо задану систему (рис. 5.5, а). У ній невідомих реакцій чотири, а рівнянь рівноваги можна скласти тільки три. Значить, дана система один раз статично невизначувана. Відкинувши один зв'язок, одержуємо основну систему (рис. 5.5, б). До основної системи прикладаємо задане навантаження і зусилля у напрямі “зайвого” зв'язку, одержуємо еквівалентну систему (рис. 5.5, в).

2 Складаємо канонічне рівняння

$$d_{11}X_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

3 Для визначення коефіцієнтів канонічного рівняння будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 5.5, г і д) і одиничної «зайвої» невідомої (рис. 5.5, е).

4 Знаходимо коефіцієнти канонічного рівняння:

$$d_{11} = \frac{1,5}{6EJ_x} [2 \cdot 1,5 \cdot 1,5] + \frac{5}{6EJ_x} [2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - 1,5 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 1,5] + \frac{2,5}{6EJ_x} (2 \cdot 2,5 \cdot 2,5) = \frac{14,3}{EJ_x} ;$$

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{6EJ_x} [-2 \cdot 0,1 \cdot 24 + 24 \cdot 1,5] + \frac{3}{6EJ_x} [-2 \cdot 24 \cdot 0,1 - 2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 24 \cdot 2,5 - 15 \cdot 0,1] + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x} (-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x} [-2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5] = \frac{136,4}{EJ_x}.$$

5. Підставляємо коефіцієнти в канонічне рівняння і визначений момент X_1 :

$$\frac{14,3}{EJ_x} X_1 - \frac{136,4}{EJ_x} = 0, \quad X_1 = \frac{136,4}{14,3} = 9,56 \text{ кН}.$$

6. До основної системи прикладаємо задане навантаження і знайдену невідому X_1 (рис. 5.6, а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри N, Q, M_s (рис. 5.6, б, в, г).

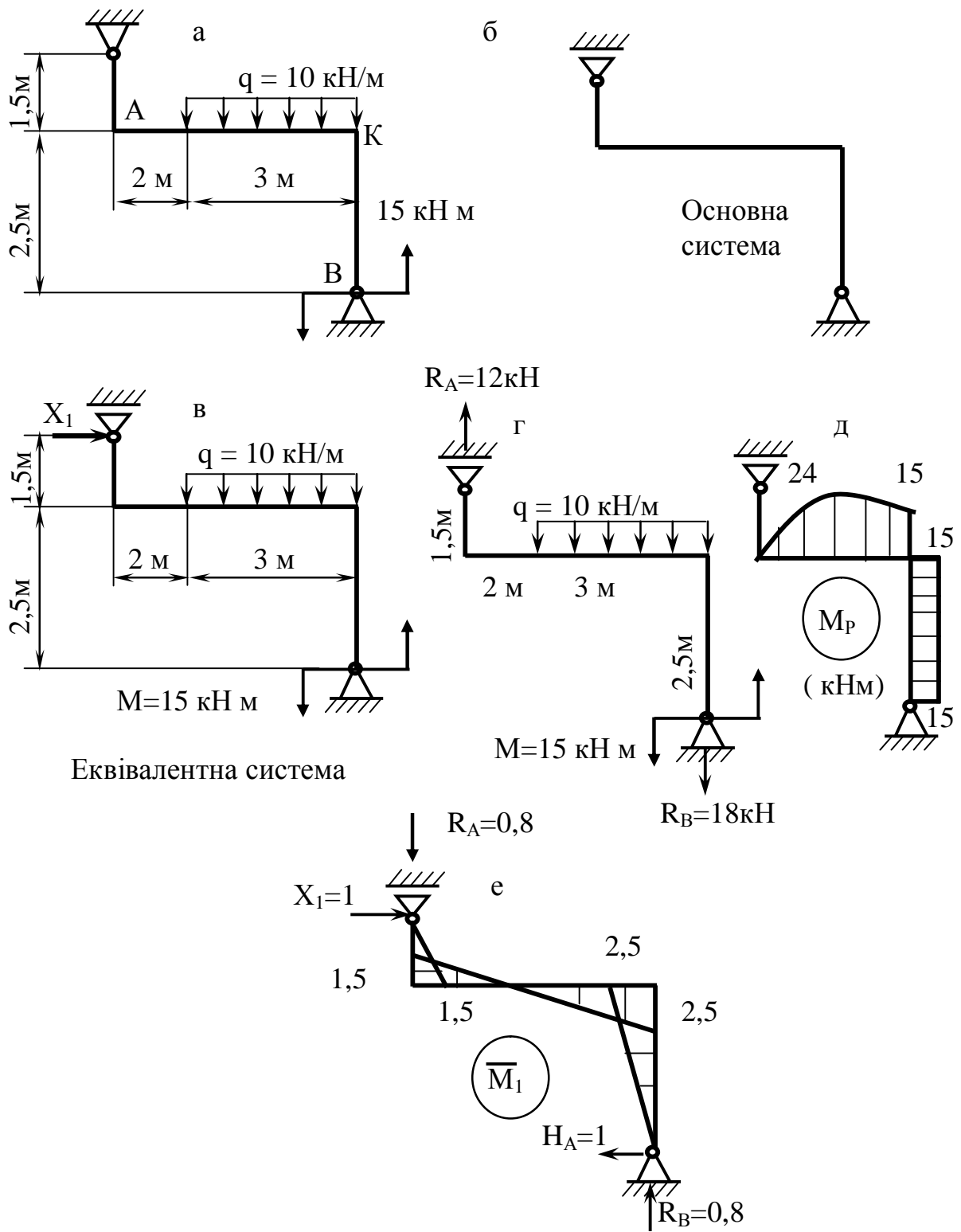


Рисунок 5.5

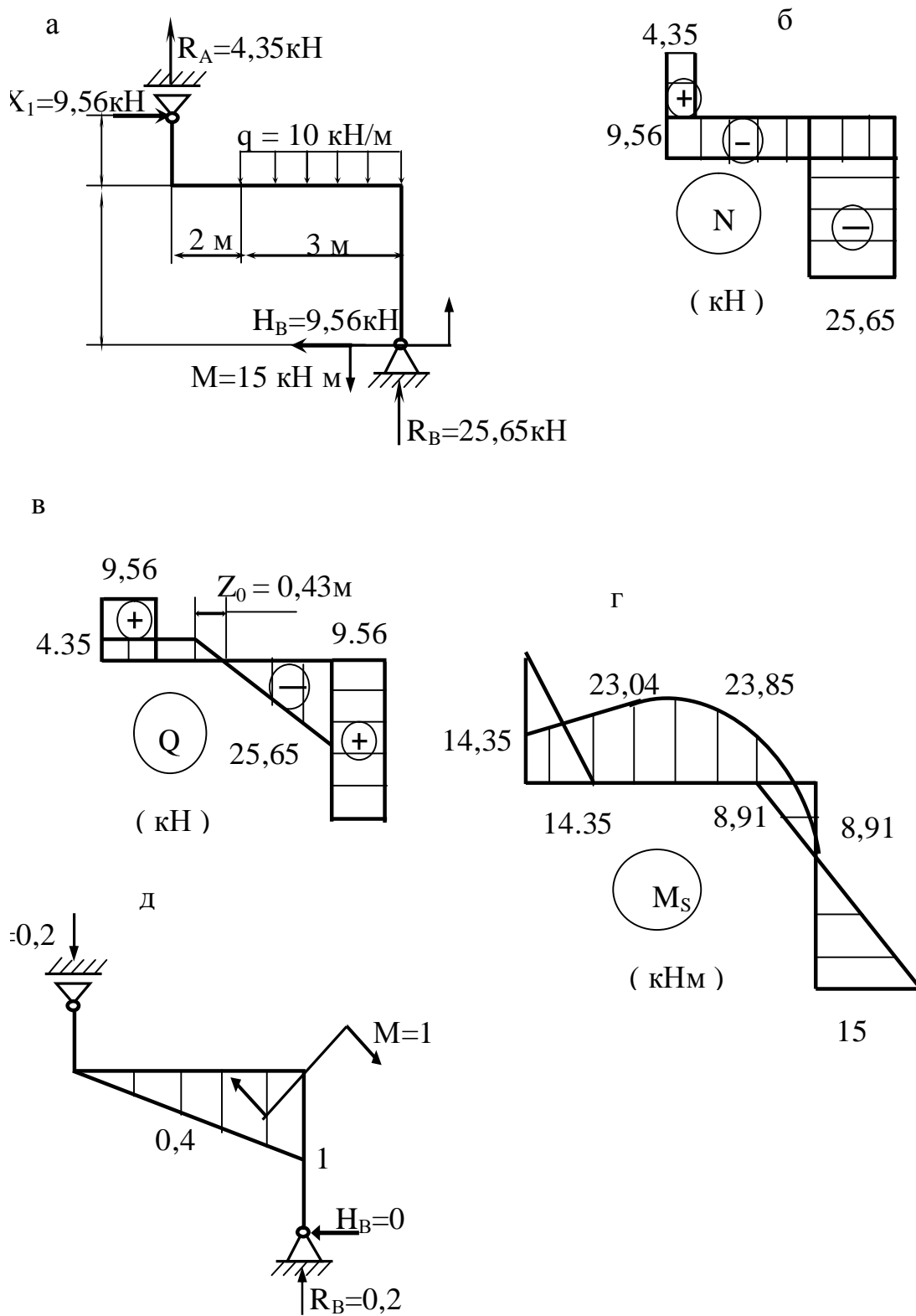


Рисунок 5.6

7 Виконуємо деформаційну перевірку. Для цього перемножуємо епюри M_s (див. рис. 5.6, г) і M_1 (див. рис. 5.5, е). Цим самим визначаємо переміщення в заданій системі (див. рис. 5.5, а) у точці А в

горизонтальному напрямі. Воно повинно дорівнювати нулю, оскільки в заданій системі є зв'язок, що перешкоджає переміщенню.

При визначенні похибки необхідно обчислити всі додатні та від'ємні величини окремо, а потім різницю розділити на меншу з величин за модулем та помножити на 100%.

$$\begin{aligned} \Delta_{1S} = & \frac{1,5}{6EJ_x} (2 \cdot 14,35 \cdot 1,5) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1,5 \cdot 14,35 - 2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 - 14,35 \cdot 0,1 + \\ & + 23,04 \cdot 1,5) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 + 2 \cdot 8,91 \cdot 2,5 - 23,04 \cdot 2,5 + 0,1 \cdot 8,91) + \\ & + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x} (-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x} (2 \cdot 8,91 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = \frac{1}{EJ_x} (77,2 - \\ & - 77,84) = -\frac{0,64}{EJ_x} . \end{aligned}$$

Нев'язка $\Delta = \frac{0,64}{77,2} \cdot 100\% \approx 0,8\% .$

8 За епюрою $M_{зг}$ (див. рис. 5.6, г) знаходимо найбільший згинаючий момент, $M_{\max} = 23,85$ кНм.

9. З умови міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

знаходимо необхідний момент опору двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{23,85 \cdot 10^{-3}}{180} \cdot 10^6 = 131,4 \text{ см}^3 .$$

З таблиці сортаменту [4, с. 99] обираємо двотавр №18, $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

10 Визначаємо кут повороту перерізу К. Для цього до основної системи у вузлі К прикладаємо одиничний момент. Від нього визначаємо реакції опор, будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.6, д), яку помножуємо на епюру M_s (див. рис. 5.6, г):

$$\begin{aligned}
 q_A &= \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 - 14,35 \cdot 0,4) + \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 0,4 \cdot 23,04 + \\
 &+ 2 \cdot 1 \cdot 8,91 - 23,04 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8,91) + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(-0,4 - 1) = -\frac{35}{EJ_x} = \\
 &= -\frac{35 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -0,0136 \text{ рад} .
 \end{aligned}$$

Кут одержали з «мінусом», це означає що переріз К повертається у бік протилежну одиничному моменту, тобто проти годинникової стрілки.

5.3 Двічі статично невизначувана рама

Розкрити статичну невизначуваність рами, побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити кут повороту вузла К. Виконати деформаційну перевірку.

Відносна похибка не повинна бути більшою за $[\delta] = 2 \%$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.3 та 5.4 і рисунку 5.7.

Таблиця 5.3 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1	1,2	0,8	2	2,2	1,2	1,6	1	1,8	1,4
$b, \text{ м}$	2	1,6	1,4	2,4	1,4	1,8	2	1,4	1,2	2,2
$c, \text{ м}$	2,5	2	1,8	0,8	0,8	2,2	2,4	2,2	2,4	0,8
$d, \text{ м}$	2,2	0,8	1	1,2	1,8	0,8	1	0,8	0,8	1,8

Таблиця 5.4 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P, \text{ кН}$	10	14	18	20	16	22	20	22	14	18
$M, \text{ кНм}$	16	8	10	12	10	8	8	10	12	8
$q, \text{ кН/м}$	8	10	6	8	6	10	10	6	10	10

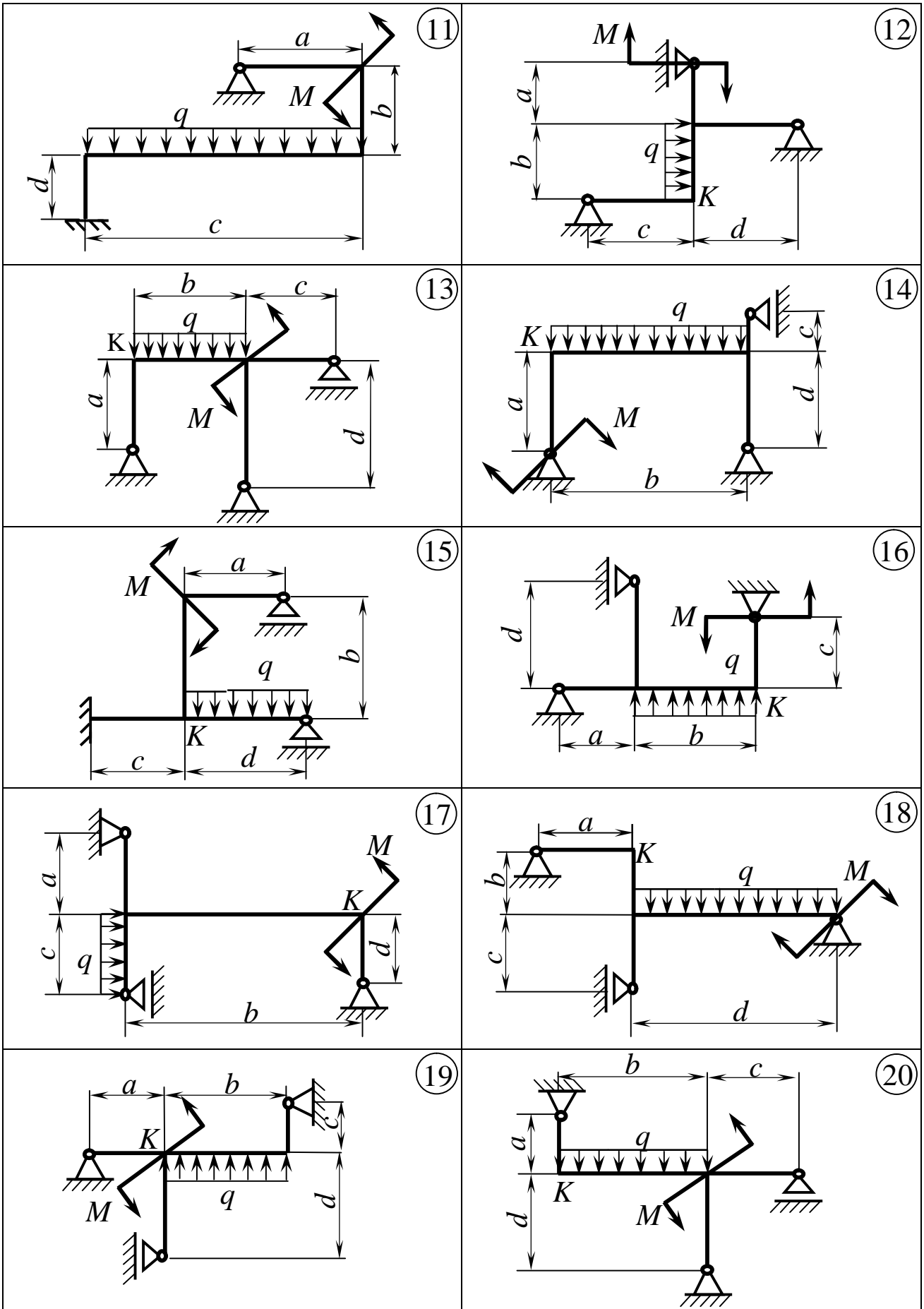


Рисунок 5.7, аркуш 2

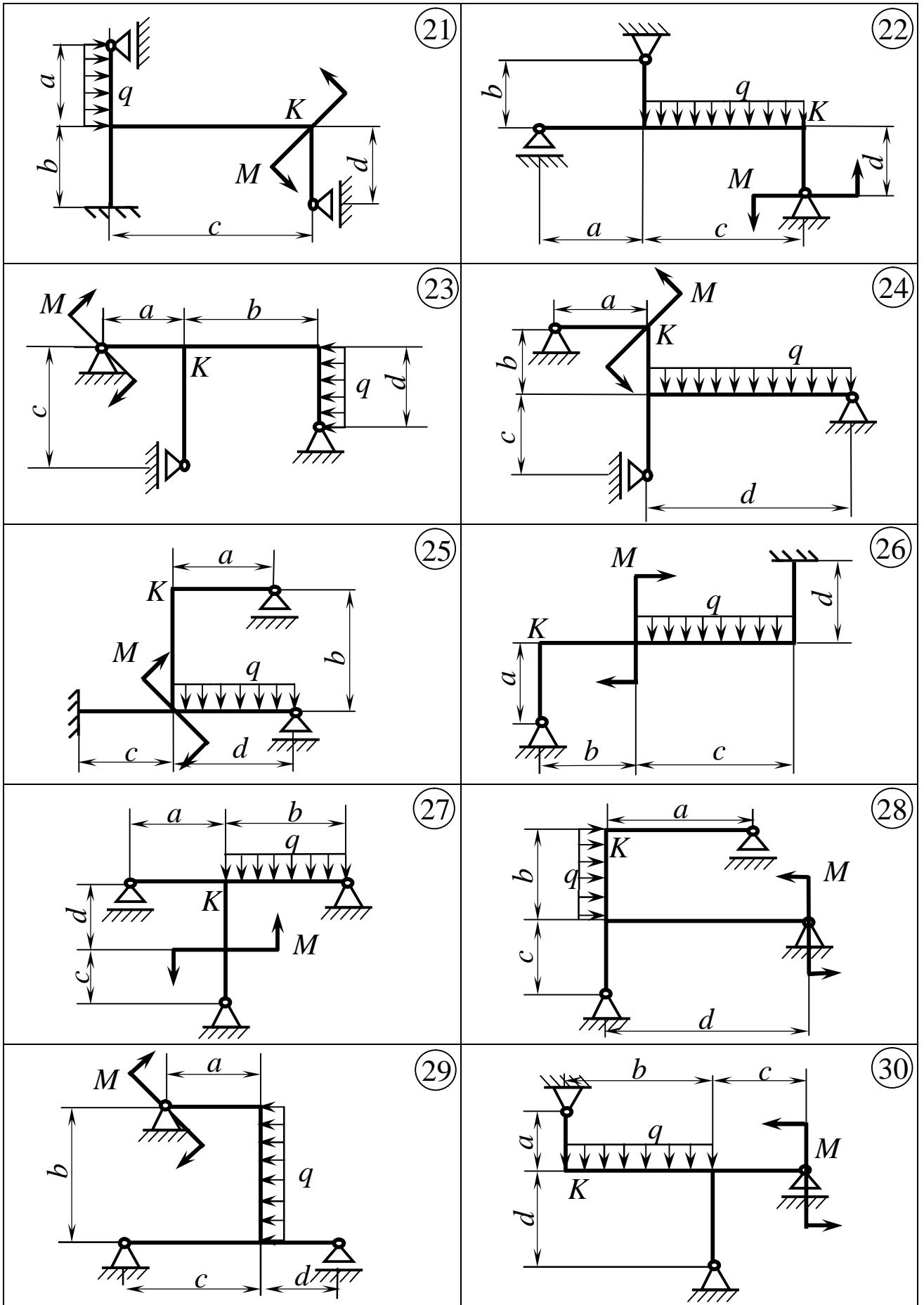


Рисунок 5.7, аркуш 3

5.3.1 Методичні вказівки до виконання задач 5.3 - 5.5

Статично невизначуваними системами називаються системи, у яких кількість зв'язків перевищує кількість рівнянь рівноваги.

Для розв'язання статично невизначуваних систем методом сил, у якому в якості невідомих виступають зусилля, необхідно:

1 Звільнити балку або раму від зв'язків, замінивши їх реакціями.

2 Провести аналіз або визначити ступінь статичної невизначуваності системи

$$S = n_R - n_U,$$

де S - ступінь статичної невизначуваності;

n_R - кількість невідомих зв'язків;

n_U - кількість можливих рівнянь рівноваги.

3 Вибрати основну систему шляхом відкидання “зайвих” зв'язків. Рекомендується основну систему вибирати якнайближче до вихідного, тобто відкидати ті зв'язки, без яких жорсткість системи зменшується не занадто сильно. Основна система повинна бути статично визначна і не повинна бути механізмом, тобто кількість зв'язків повинна дорівнювати кількості рівнянь рівноваги. При виборі основної системи необхідно тільки відкидати зв'язки і нічого не додавати або змінювати. Це єдине місце, де є можливість обирати, однак від вибору основної системи залежить кількість і якість обчислень.

4 Утворити еквівалентну систему, приклавши до основної системи усі відомі навантаження і реакції відкинутих зв'язків.

5 Скласти систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{aligned}d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + \dots + d_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + \dots + d_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\d_{n1}X_1 + d_{n2}X_2 + \dots + d_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0;\end{aligned}$$

Кількість рівнянь у системі повинна відповідати ступеню статичної невизначуваності задачі, а кількість додатків на одиницю більше. Кожен з додатків у рівнянні є переміщенням від відомих або невідомих навантажень у напрямку відкинутого зв'язку, при цьому переміщення від

невдомих навантажень представлено як добуток переміщення від одиничного навантаження і невідомого навантаження.

6 Завантажити основну систему тільки зовнішніми навантаженнями, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів M_P («вантажну епюру»).

7 Завантажити основну систему тільки одним одиничним навантаженням у перерізі і напрямку першого відкинутого зв'язку, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів \bar{M}_1 («одиничну епюру»).

8 Пункт 7 повторити стільки разів, скільки неведомих реакцій.

9 Розбити балку або раму на ділянки (рис. 5.8). У межах ділянки функції M_P та \bar{M}_1 повинні визначатися однозначно, тобто однією формулою.

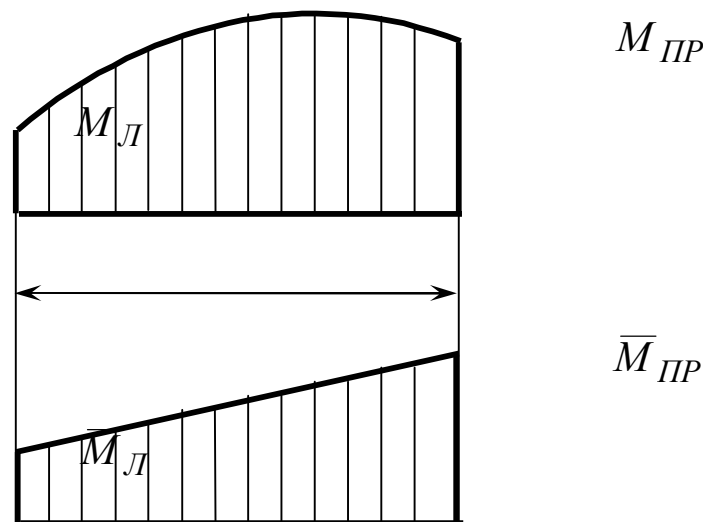


Рисунок 5.8

10 Обчислити коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь шляхом обчислення інтеграла Мора:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n \int M_P \bar{M}_1 dz.$$

При цьому зручно скористатися «формулою кінцевих ординат», отриманою при перемноженні параболічної і прямолінійної трапецій:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{1}_i}{6} (2M_{Л} \bar{M}_{Л} + 2M_{ПР} \bar{M}_{ПР} + M_{Л} \bar{M}_{ПР} + M_{ПР} \bar{M}_{Л}) + \frac{q \mathbf{1}_i^3}{24} (\bar{M}_{Л} + \bar{M}_{ПР}) \right], \quad (5.1)$$

де Δ_{1P} – переміщення від відомих навантажень в напрямку одиночного навантаження;

$\mathbf{1}$ - довжина ділянки;

$M_{Л}, M_{ПР}$ – величини згинальних моментів на кінцях ділянок на епюрі від зовнішніх навантажень («вантажна епюра»);

$\bar{M}_{Л}, \bar{M}_{ПР}$ – величини згинальних моментів на кінцях ділянок на епюрі від одиночного навантаження.

Добуток ординат в основній частині формули буде додатним, якщо вони розташовані по один бік від бази і від'ємним – по різні. Знак ординат в додатковій частині формули буде позитивним, якщо їх напрямок співпадає з напрямком випуклості епюрі від зовнішніх навантажень, і від'ємним – якщо їх напрямок протилежний напрямку випуклості епюрі від зовнішніх навантажень.

11 Підставити обчислені значення в систему канонічних рівнянь і, розв'язуючи її, визначити реакції відкинутих зв'язків. На епюрі згинальних моментів максимальні значення моментів, як правило, зменшуються, а мінімальні збільшуються в порівнянні зі згинальними моментами на основній системі, навантаженій тільки відомими навантаженнями, тобто моменти по довжині стрижневої системи перерозподіляються більш рівномірно.

12 Виконати деформаційну перевірку, тобто визначити переміщення еквівалентної системи в напрямку відкинутого зв'язку. Для цього треба епюрі згинальних моментів еквівалентної системи “помножити” по черзі на епюрі згинальних моментів від одиночного навантаження. Визначити абсолютну похибку як різницю позитивних та негативних складових частин, визначити відносну похибку, поділивши абсолютну похибку на меншу складову частину, і порівняти її з допустимою.

13 З основної умови міцності при плоскому згинанні визначити необхідний момент опору перерізу, за яким визначити необхідні розміри перерізу.

14 Для визначення лінійного або кутового переміщення довільного перерізу треба в цьому перерізі прикласти до основної системи одиничну силу для визначення лінійного і одиничного моменту для визначення кутового переміщення, визначити опорні реакції, побудувати епюри згинальних моментів M_1 та “помножити” її на епюру згинальних моментів для еквівалентної системи.

5.3.2 Приклад виконання задачі 5.3

Розкрити статичну невизначуваність рами (рис. 5.9, а), побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Визначити кут повороту вузла K . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за $[\delta] = 2 \%$.

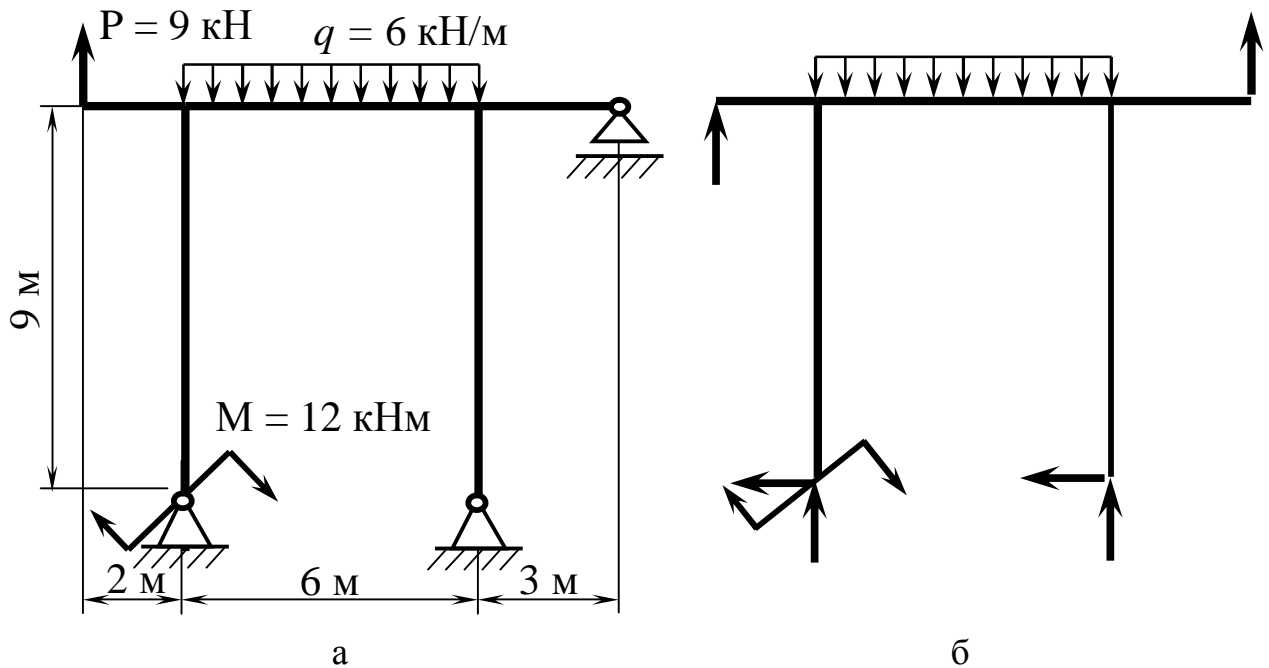


Рисунок 5.9 – Статично невизначувана рама до задачі 5.3

- 1 Відкидаємо зв'язки, замінивши їх реакціями (рис. 5.9, б).
- 2 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Таким чином, задача двічі статично невизначувана.

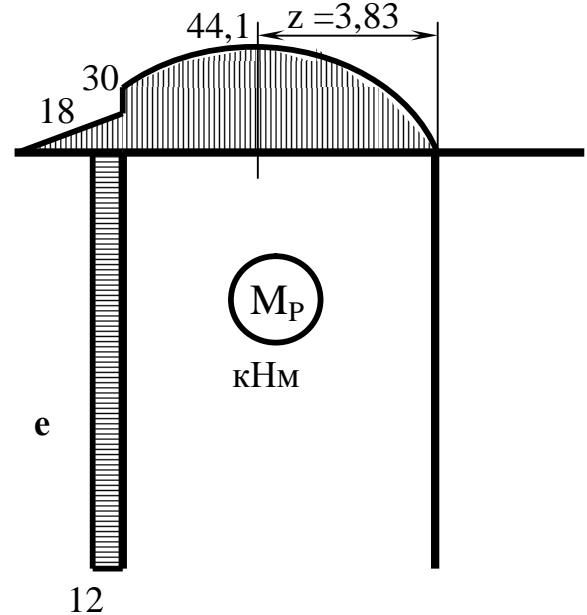
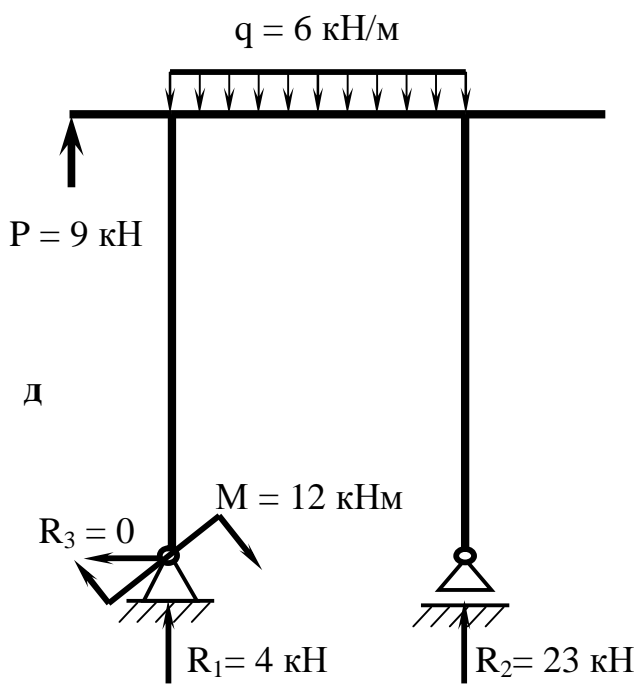
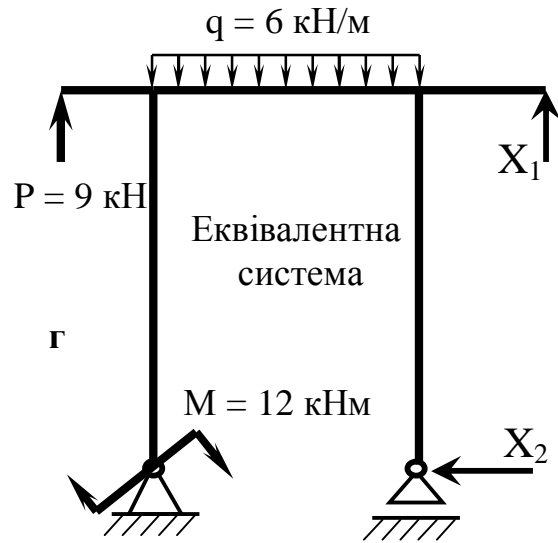
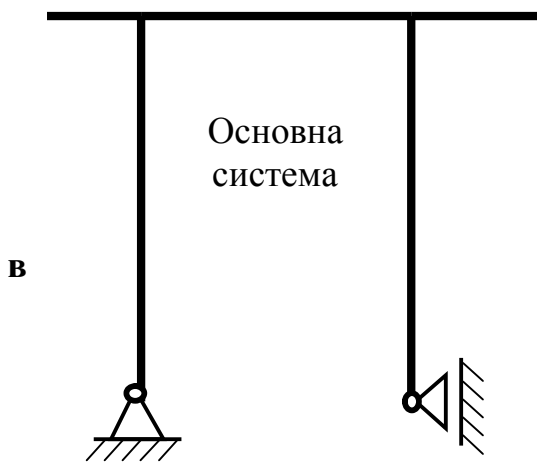
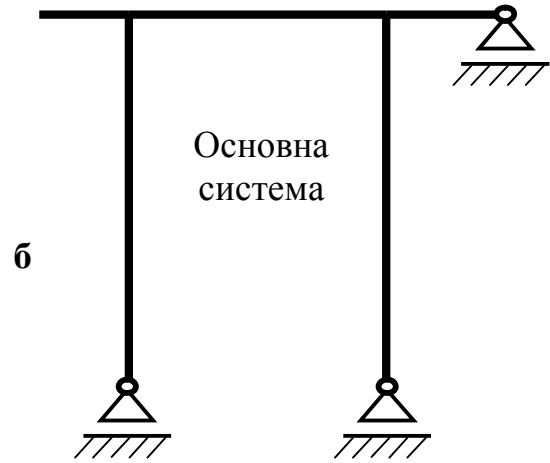
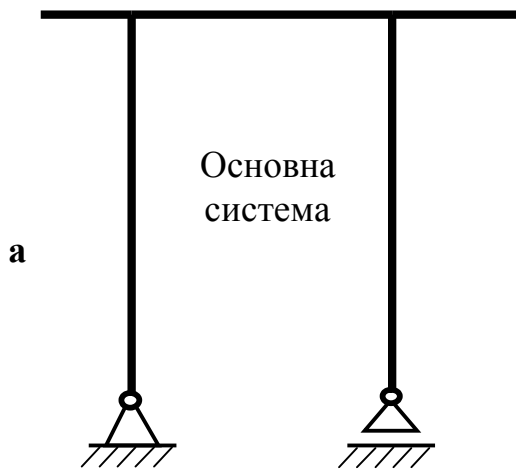


Рисунок 5.10

3 Вибираємо основну систему, виконавши вимоги до основної системи, тобто основна система повинна бути статично визначувана і не повинна бути механізмом (рис. 5.10, а).

Схеми, які представлені на рис. 5.10, б та 5.10, в не можна приймати як основні системи, тому що у першій системі всі реакції паралельні до вертикальної осі і будь-яке навантаження в горизонтальному напрямку буде переміщати систему в цьому напрямку, а у другій системі всі реакції перерізаються в одній точці і будь-яке навантаження, що не проходить через цю точку, буде обертати систему навколо цієї точки.

4 Утворимо еквівалентну систему. Для цього прикладемо до основної системи усі відомі навантаження і реакції відкинутих зв'язків X_1 та X_2 (рис. 5.10, г).

5 Складемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{aligned}d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}$$

6 Прикладемо до основної системи тільки відомі навантаження (рис. 5.10, д) та складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0, R_2 \cdot 6 - M - q \cdot 6^2/2 - P \cdot 2 &= 0, \\ \sum M_B = 0, R_1 \cdot 6 - M - q \cdot 6^2/2 - P \cdot 8 &= 0, \\ \sum P_x &= 0.\end{aligned}$$

Знаходимо опорні реакції:

$$\begin{aligned}R_3 &= 0, \\ R_2 &= (12 + 6 \cdot 6^2/2 + 9 \cdot 2)/6 = 23 \text{ кН}, \\ R_1 &= (-12 + 6 \cdot 6^2/2 + 9 \cdot 8)/6 = 4 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевіряємо:

$$\sum P_y = 0, \quad R_2 - q \cdot 6 + P \cdot 2 + R_1 = 23 - 6 \cdot 6 + 9 + 4 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів M_P (рис. 5.10, е):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8 = M_7 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = P \cdot 2 + M = 9 \cdot 2 + 12 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = P \cdot 8 + M + R_1 \cdot 6 - q \cdot 6^2 / 2 = 9 \cdot 8 + 12 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$M_6 = M_5 = 0; \quad M_{10} = M_9 = 0;$$

$$z = Q_4 / q = 23 / 6 = 3,83 \text{ м};$$

$$M_z = P_2 z - q z^2 / 2 = 23 \cdot 3,83 - 6 \cdot 3,83^2 / 2 = 44,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7 Прикладемо до основної системи тільки одне одиничне навантаження $X_1 = 1$ (рис. 5.11, а) в перерізі і напрямку 1-го відкинутого зв'язку та складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 6 + 1 \cdot 9 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum P_x = 0.$$

Знаходимо опорні реакції:

$$R_3 = 0; \quad R_2 = -1 \cdot 9 / 6 = -1,5; \quad R_1 = 1 \cdot 3 / 6 = 0,5.$$

Перевіряємо:

$$\sum P_y = 0; \quad R_2 + 1 + R_1 = -1,5 + 5 + 0,5 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів M_1 (див. рис. 5.11, а):

$$M_1 = M_2 = 0; \quad M_8 = M_7 = 0; \quad M_4 = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ м};$$

$$M_6 = 0; \quad M_5 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ м}; \quad M_{10} = M_9 = 0.$$

8 Прикладемо до основної системи тільки одне одиничне навантаження $X_2 = 1$ (рис. 5.11, б) в перерізі й напрямку 2-го відкинутого зв'язку та складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad R_1 = 0; \quad \sum P_x = 0; \quad R_3 - 1 = 0.$$

Знаходимо опорні реакції:

$$R_2 = 0; \quad R_1 = 0; \quad R_3 = 1.$$

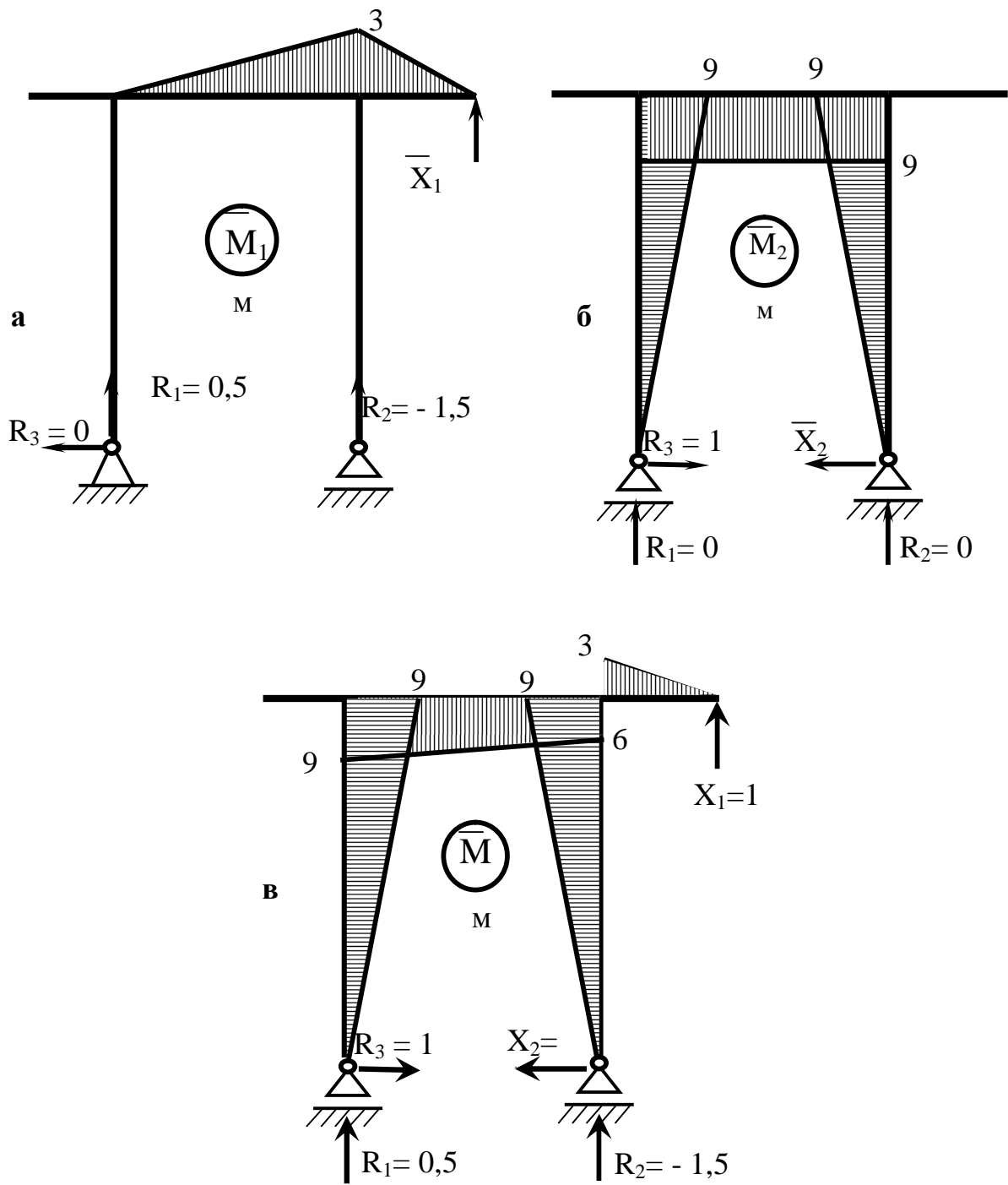


Рисунок 5.11

Перевіряємо:

$$\sum P_y = 0; \quad R_2 + R_1 = 0.$$

Будуємо епюри згинальних моментів M_2 (див. рис. 5.11, б):

$$M_1 = M_2 = 0; \quad M_8 = 0; \quad M_7 = M_3 = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м};$$

$$M_6 = M_5 = 0; \quad M_{10} = M_9 = M_4 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м}.$$

9 Визначаємо вантажні та одиничні коефіцієнти системи канонічних рівнянь, обчисливши інтеграл Мора за допомогою «формули кінцевих ординат»:

$$\Delta_{1P} = \left[(6/6)(3 \cdot 30) + 6 \cdot 6^3 (0+3)/24 \right] / EI_x = 252 / EI_x;$$

$$\Delta_{2P} = \left[(6/6)(-2 \cdot 9 \cdot 30 - 30 \cdot 9) - 6 \cdot 6^3 (9+9)/24 + \right. \\ \left. (9/6)(-2 \cdot 9 \cdot 12 - 9 \cdot 12) \right] / EI_x = -1865 / EI_x;$$

$$d_{11} = \left[(6/6)(2 \cdot 3 \cdot 3) + (3/6)(2 \cdot 3 \cdot 3) \right] / EI_x = 27 / EI_x;$$

$$d_{22} = \left[(6/6)(2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9) + (9/6)(2 \cdot 9 \cdot 9) + \right. \\ \left. + (9/6)(2 \cdot 9 \cdot 9) \right] / EI_x = 972 / EI_x;$$

$$d_{12} = d_{21} = \left[(6/6)(-2 \cdot 3 \cdot 9 - 9 \cdot 3) \right] / EI_x = -81 / EI_x.$$

10 Для перевірки вірності визначення вантажних та одиничних коефіцієнтів прикладемо до основної системи одиничні навантаження $X_1 = 1$ та $X_2 = 1$ в перерізах й напрямках 1-го й 2-го відкинутих зв'язків (рис. 5.10, в) та складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 6 + 1 \cdot 9 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum P_x = R_3 - 1 = 0.$$

Знаходимо опорні реакції:

$$R_3 = 1;$$

$$R_2 = -1 \cdot 9 / 6 = -1,5;$$

$$R_1 = 1 \cdot 3 / 6 = 0,5.$$

Перевіряємо:

$$\sum P_y = 0; \quad R_2 + 1 + R_1 = -1,5 + 1 + 0,5 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів M_Σ (див. рис. 5.5, в):

$$M_1 = M_2 = 0; \quad M_8 = 0; \quad M_7 = M_3 = -1 \cdot 9 = -9 \text{ м};$$

$$M_4 = 0,5 \cdot 6 - 1 \cdot 9 = -6 \text{ м}; \quad M_{10} = 0; \quad M_9 = -1 \cdot 9 = -9 \text{ м};$$

$$M_6 = 0; \quad M_5 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ м}.$$

Епюру згинальних моментів $M_{\Sigma\Sigma}$ можна було б отримати шляхом алгебраїчного складання ординат епюр M_1 та M_2 .

Визначаємо $\Delta_{\Sigma P}$, $\delta_{\Sigma\Sigma}$, обчисливши інтеграл Мора за допомогою «формули кінцевих ординат»:

$$\Delta_{\Sigma P} = \left[(6/6)(-2 \cdot 9 \cdot 30 - 30 \cdot 6) - 6 \cdot 6^3 (9 + 6)/24 + \right. \\ \left. + (9/6)(-2 \cdot 9 \cdot 12 - 9 \cdot 12) \right] / EI_x = -1287 \cdot 2016 / EI_x;$$

$$d_{\Sigma\Sigma} = \left[(6/6)(2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 9 \cdot 6) + (9/6)(2 \cdot 9 \cdot 9) + \right. \\ \left. + (9/6)(2 \cdot 9 \cdot 9) + (3/6)(2 \cdot 3 \cdot 3) \right] / EI_x = 837 / EI_x;$$

Виконаємо перевірку:

$$d_{\Sigma\Sigma} = d_{11} + 2d_{12} + d_{22}; \quad 837 = 27 - 2 \cdot 81 + 972; \quad 837 = 837;$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P}; \quad -2016 = 252 - 2268; \quad -2016 = -2016.$$

Таким чином, вантажні та одиничні коефіцієнти знайдені вірно.

11 Підставляємо знайдені значення вантажних та одиничних коефіцієнтів в систему канонічних рівнянь:

$$27 \cdot X_1 - 81 \cdot X_2 + 252 = 0;$$

$$-81 \cdot X_1 + 972 X_2 - 2268 = 0.$$

Вирішуючи систему, знаходимо реакції відкинутих зв'язків:

$$X_1 = -3,111 \text{ кН}; \quad X_2 = 2,074 \text{ кН}.$$

Перевіряємо розв'язання системи:

$$27 \cdot (-3,111) - 81 \cdot 2,074 + 252 = -83,997 - 167,994 + 252 = 0,009 \approx 0.$$

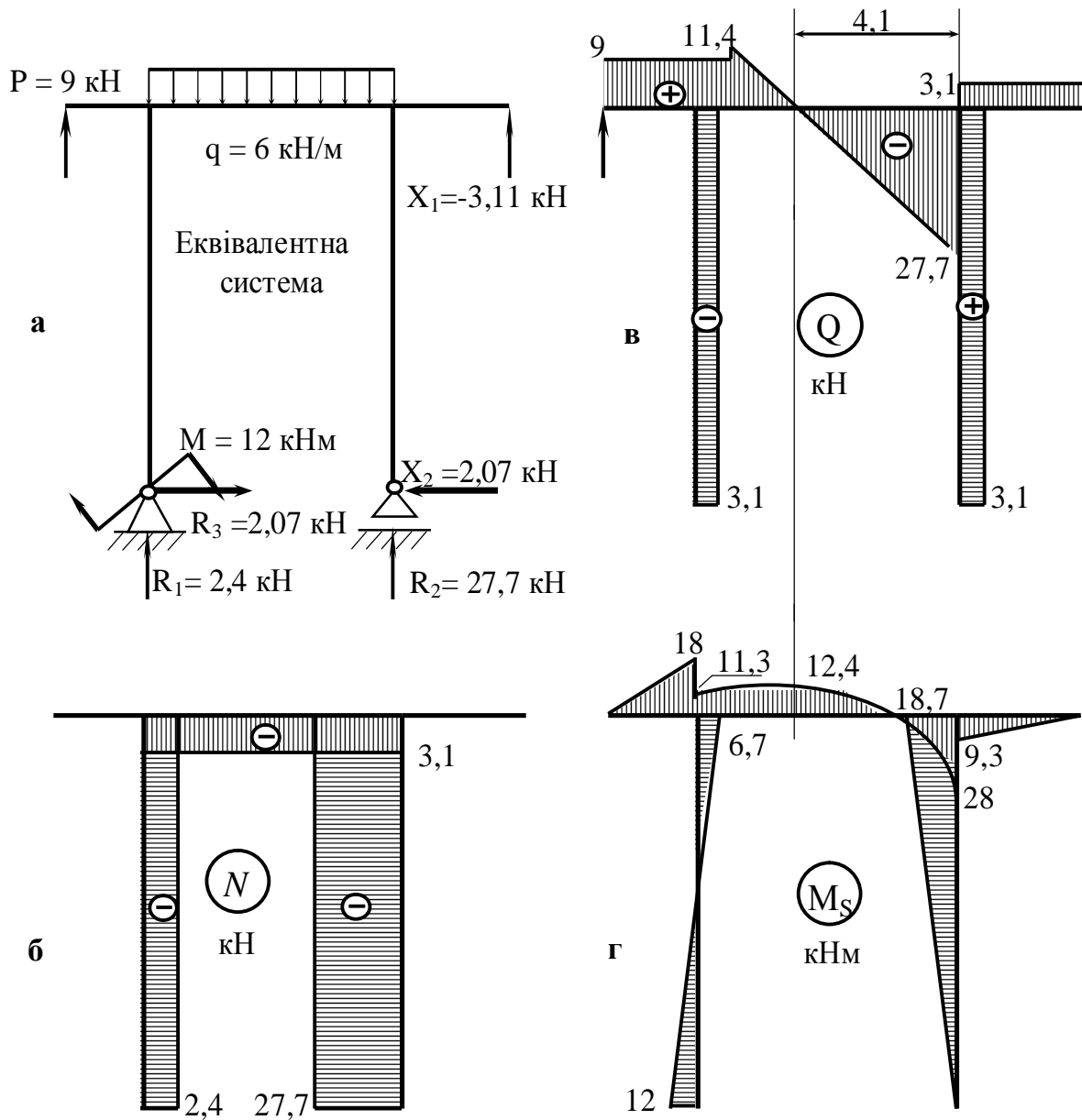


Рисунок 5.12

12 Підставимо отримані значення реакції відкинутих зв'язків до еквівалентної системи (рис. 5.12, а), складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 6 - M - q \cdot 6^2 / 2 - P \cdot 2 + X_1 \cdot 9 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_1 \cdot 6 + M - q \cdot 6^2 / 2 + P \cdot 8 - X_1 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum P_x = 0; \quad R_3 - X_2 = 0.$$

Знаходимо опорні реакції:

$$R_3 = X_2 = 3,11 \text{ кН};$$

$$R_2 = (12 + 6 \cdot 6^2/2 + 9 \cdot 2 - (-3,11) \cdot 9)/6 = 27,665 \text{ кН};$$

$$R_2 = (-12 + 6 \cdot 6^2/2 - 9 \cdot 8 + (-3,11) \cdot 3)/6 = 2,445 \text{ кН}.$$

Перевіряємо:

$$\sum P_y = 0; \quad R_2 - q \cdot 6 + P \cdot 2 + R_1 + X_1 = 27,665 - 66 + 9 + 2,445 - 3,11 = 0.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 5.12, б):

$$N_1 = N_2 = 0; \quad N_3 = N_4 = -R_3 = -2,074 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_6 = 0; \quad N_8 = N_7 = -R_1 = -2,445 \text{ кН};$$

$$N_{10} = N_9 = -R_2 = 27,665 \text{ кН};$$

Будуємо епюру поперечних сил Q (рис. 5.12, в):

$$Q_1 = Q_2 = P = 9 \text{ кН}; \quad Q_3 = R_1 + P = 2,445 + 9 = 11,445 \text{ кН};$$

$$Q_4 = R_1 + P - q \cdot 6 = 2,445 + 9 - 6 \cdot 6 = -24,555 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6 = -X_1 = 3,11 \text{ кН}; \quad Q_8 = Q_7 = -R_3 = 2,074 \text{ кН};$$

$$Q_{10} = Q_9 = X_2 = 2,074 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів M_S (рис. 5.12, г):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = M - R_3 \cdot 9 = 12 - 2,074 \cdot 9 = -6,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = P \cdot 2 + M - R_3 \cdot 9 = 9 \cdot 2 + 12 - 2,074 \cdot 9 = 11,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = X_1 \cdot 3 = -3,11 \cdot 3 = -9,33 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6 = 0;$$

$$M_5 = X_1 \cdot 3 - X_2 \cdot 9 = -3,11 \cdot 3 - 2,074 \cdot 9 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{10} = 0; \quad M_9 = -X_2 \cdot 9 = -2,074 \cdot 9 = -18,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = Q_4/q = (27,665 - 3,11)/6 = 4,09 \text{ м};$$

$$M_z = P_2 \cdot z - q \cdot z^2/2 + X_1(z + 3) - X_2 \cdot 9 =$$

$$= 27,665 \cdot 4,09 - 6 \cdot 4,09^2/2 - 3,11 \cdot 7,09 - 3,11 \cdot 9 = 12,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Кожне з отриманих значень можна перевірити за формулою:

$$M_e = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2.$$

Наприклад:

$$M_3 = 30 + 2,074(-9) + 0(-3,111) = 11,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При перегляді епюр згинальних моментів основної та еквівалентних систем видно, що найбільший згинальний момент на еквівалентній системі (28 кНм) менший за найбільший згинальний момент на основній системі з тільки відомими навантаженням (44,1 кНм). У перерізі 5 на консолі та перерізі 8, у якому діє згинальний момент, значення не змінились і це буде незалежно від вибору основної системи.

13 Виконаємо деформаційну перевірку, тобто визначимо переміщення еквівалентної системи в напрямку відкинутих зв'язків. Для цього “перемножимо” епюри згинальних моментів $M_{екв}$ по черзі на епюри згинальних моментів M_1 та M_2 :

$$\begin{aligned} \Delta_{1E} &= \left[(6/6)(-2 \cdot 3 \cdot 28 + 3 \cdot 11,3) + 6 \cdot 6^3 (0 + 3) / 24 + \right. \\ &+ \left. (3/6)(-2 \cdot 3 \cdot 9,3) \right] / EI_x = (-168 + 33,9 + 162 - 27,9) / EI_x = 0; \\ \Delta_{2E} &= \left[(6/6)(-2 \cdot 9 \cdot 11,3 + 2 \cdot 9 \cdot 28 - 11,3 \cdot 9 + 28 \cdot 9) - \right. \\ &- 6 \cdot 6^3 (9 + 9) / 24 + (9/6)(2 \cdot 6,7 \cdot 9 - 9 \cdot 12) + (9/6)2 \cdot 18,7 \cdot 9 \left. \right] / EI_x = \\ &= (-203,4 + 504 - 101,7 + 252 - 972 + 180,9 - 162 + 504,9) / EI_x = \\ &= (-1439,1 + 1443,8) / EI_x = 4,7 / EI_x. \end{aligned}$$

Внаслідок множення повинні вийти числа, близькі до нуля, тобто різниця позитивних і негативних додатків відносно меншої складової не повинна бути більшою за допустиму.

Похибка складає: для $\delta_{1E} \quad \Delta = 0$,

$$\text{для } \delta_{2E} \quad \Delta = (4,7/1439,1)100 = 0,33 < 2\%.$$

14 З основної умови міцності при плоскому вигині

$$s_{max} = M_{max} / W_x \leq [s]$$

визначимо потрібний момент опору перерізу:

$$W_x \geq M_{max} / [s] = 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 / 160 = 175 \text{ см}^3,$$

за яким визначимо необхідні розміри перерізу. Для заданої задачі згідно з ГОСТ8239-89 приймаємо двотавр 20 ($W_x = 184 \text{ см}^3$, $I_x = 1840 \text{ см}^4$).

Для визначення кута повороту вузла К прикладемо до основної системи в цьому перерізі одиничний момент $X_3 = 1$, визначимо опорні реакції:

$$R_1 = R_2 = \frac{X_3}{a} = \frac{1}{6} = 0,167;$$

$$\Sigma P_x = 0; \quad R_3 = 0$$

та побудуємо одиничну епюру згинальних моментів M_3 (рис. 5.13):

$$\Sigma P_x = 0; \quad R_3 = 0;$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0; \quad M_4 = 1.$$

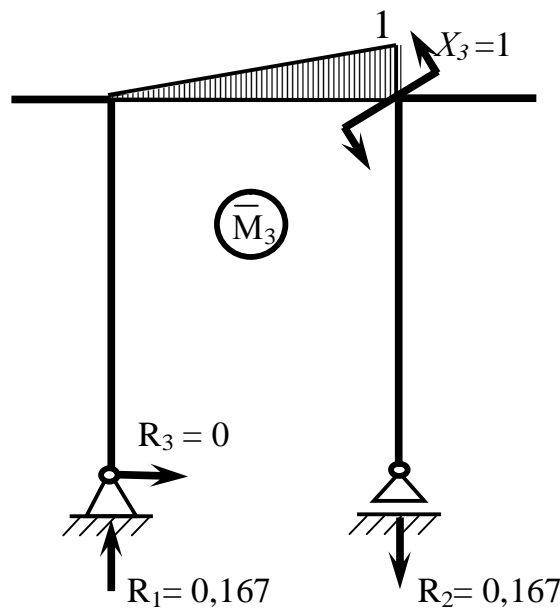


Рисунок 5.13

Визначимо необхідне кутове переміщення, “перемноживши” епюру згинальних моментів M_S на одиничну епюру M_3 :

$$q_K = \Delta_{3S} = \left[(6/6)(-2 \cdot 1 \cdot 28 + 1 \cdot 11,3) + 6 \cdot 9^3(0+1)/24 \right] / EI_x =$$

$$= 137,55 / EI_x = 137,55 \cdot 10^{-3} / (2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}) = 0,00374 \text{ рад.}$$

Оскільки $q_K > 0$, то переріз К повертається проти ходу годинникової стрілки.

5.4 Двічі статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки (табл. 5.3, 5.4, рис. 5.14) розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин у точці К и кут повороту перерізу А.

5.4.1. Приклад розв'язання задачі 1

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеню статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій п'ять (див. рис. 5.15, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана задача двічі статично невизначувана.

2 Для нерозрізної балки як основну систему краще вибрати таку ж балку, але з врізаними шарнірами на проміжних опорах (рис. 5.15, б).

3 Врізавши шарнір на проміжних опорах, одержали три незалежні балки. До них прикладаємо зовнішнє навантаження (рис. 5.15, б), визначаємо реакції опор і будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 5.15, в).

4 Знімаємо задане навантаження, до ненавантаженої системи прикладаємо моменти $X_1 = 1$ і від них будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.15, г). Аналогічним чином отримуємо епюру від згинальних моментів $X_2 = 1$ (рис. 5.15, д).

5 Складаємо канонічні рівняння:

$$\begin{cases} d_{11} X_1 + d_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ d_{21} X_1 + d_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

6 Коефіцієнти рівняння δ_{11} і Δ_{1P} визначаємо методом Мору шляхом перемножування відповідних епюр

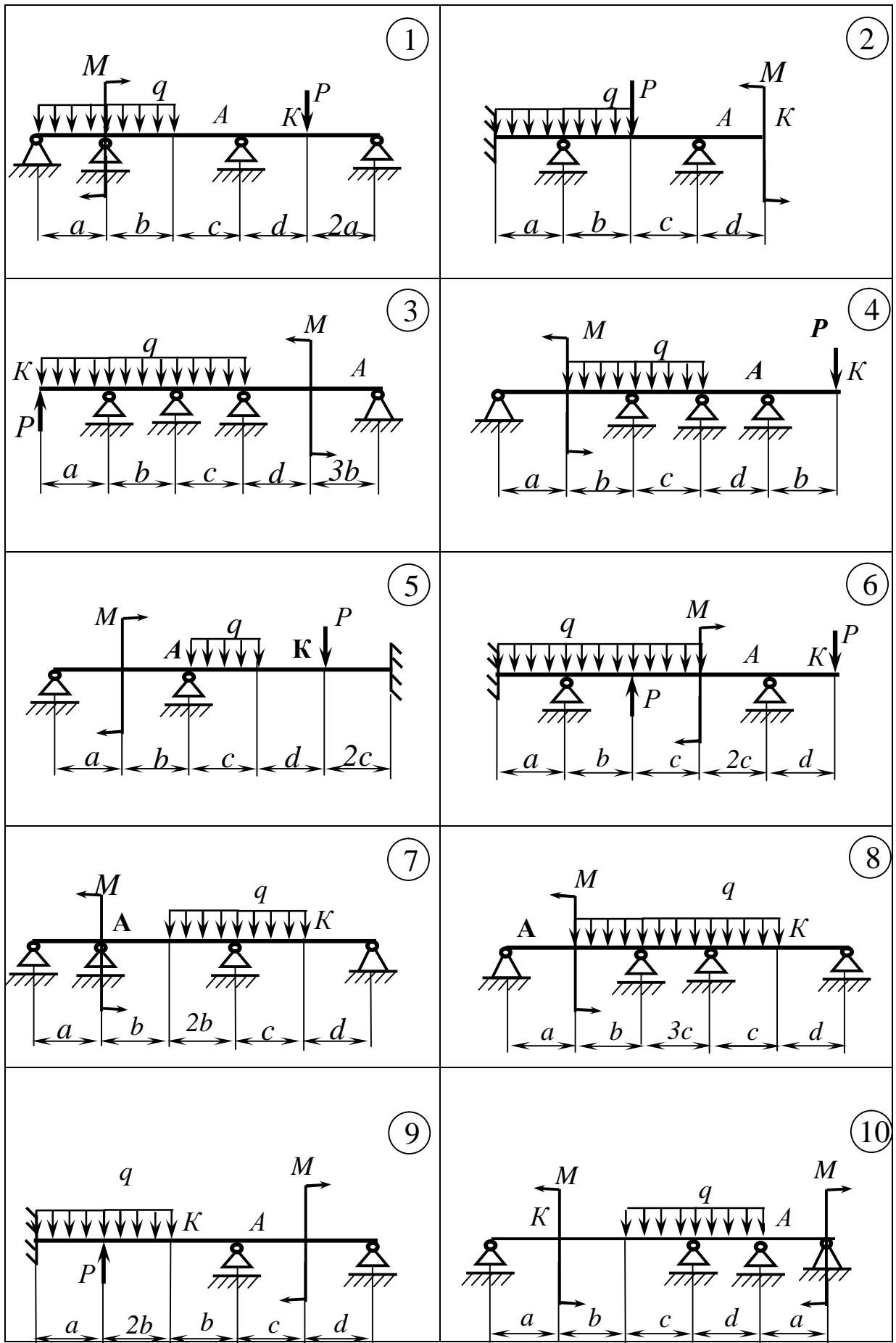


Рисунок 5.14

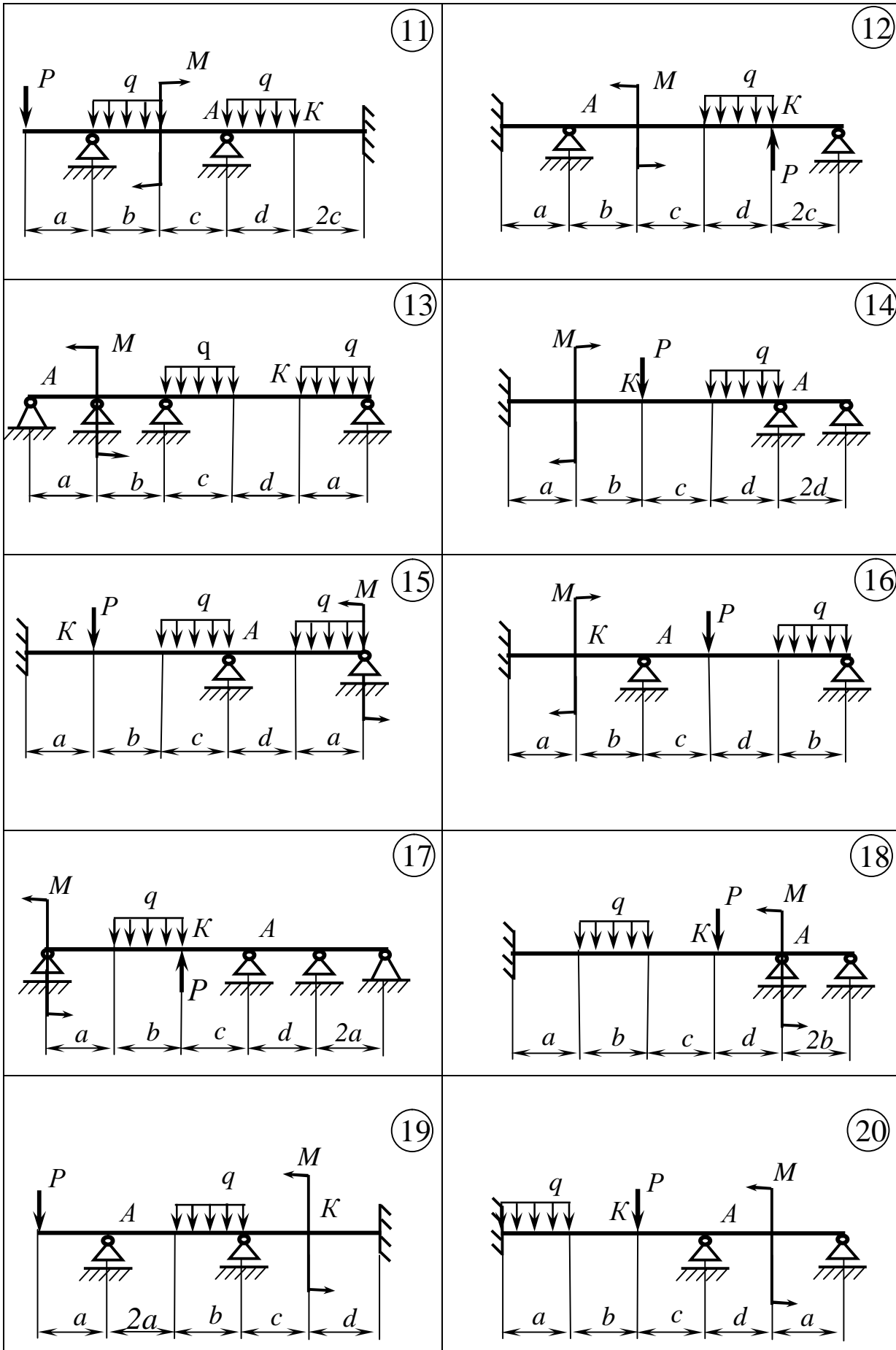


Рисунок 5.14, аркуш 2

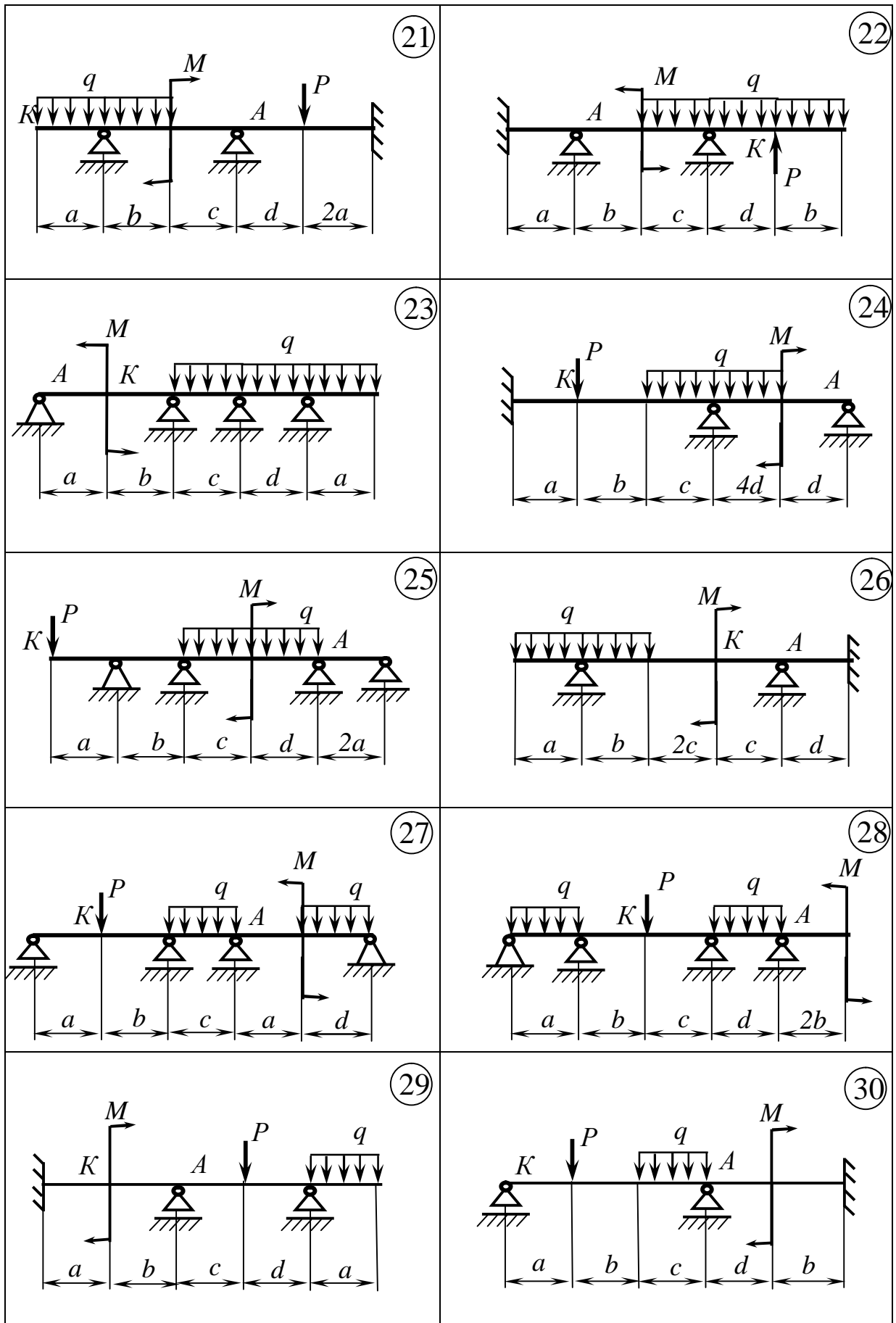


Рисунок 5.14, аркуш 3

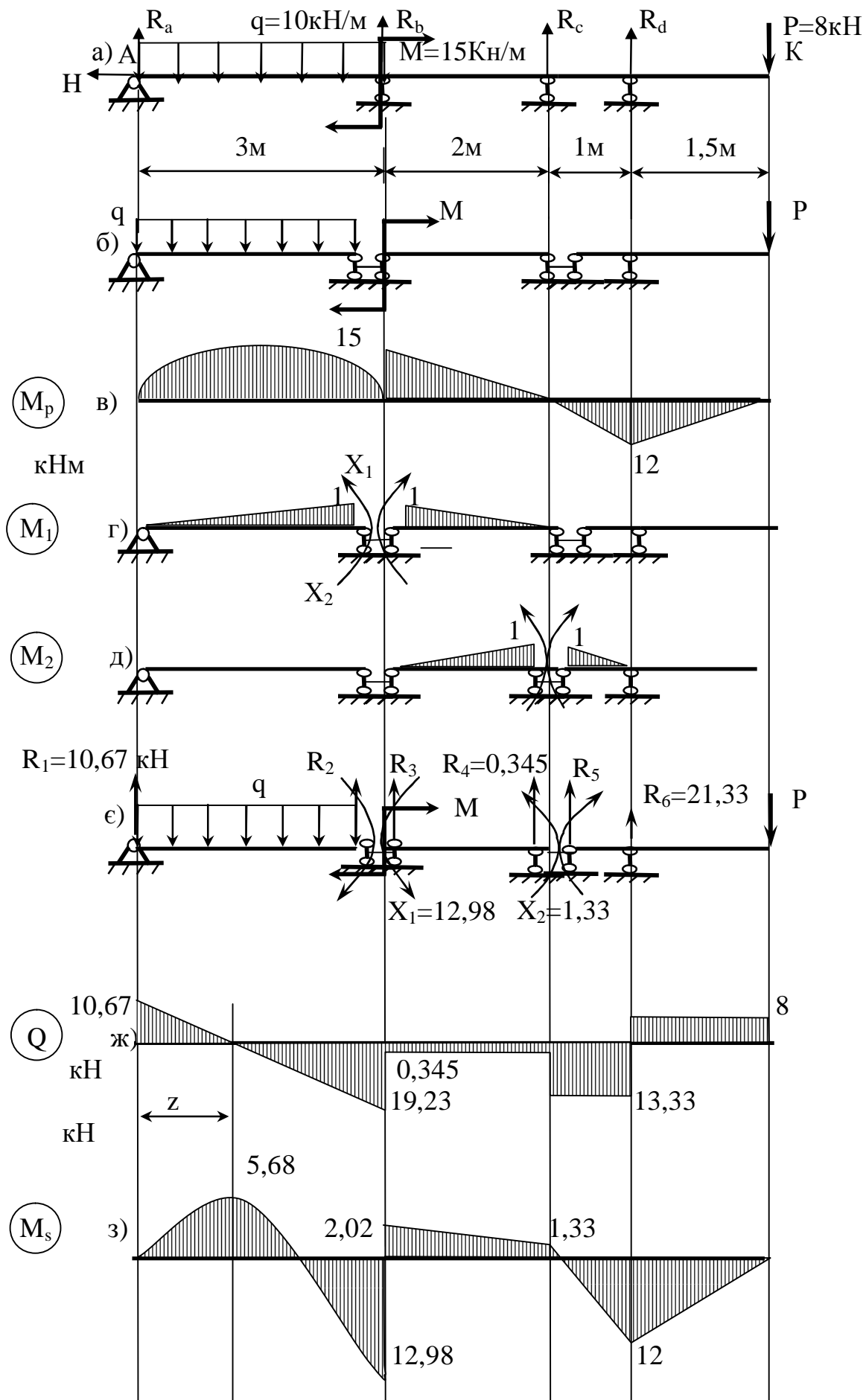


Рисунок 5.15

$$d_1 EI_x = \frac{3}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) = 1,67;$$

$$\Delta_{1p} = EI_x = \frac{2}{6}(2 \cdot 15 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24}(0 + 1) = 21,25;$$

$$d_{22} EI = \frac{2}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{6}(2 \cdot 1 \cdot 1) = 1;$$

$$\Delta_{2p} EI_x = \frac{2}{6}(15 \cdot 1) + \frac{1}{6}((-12) \cdot 1) = 3;$$

$$d_{12} EI_x = \frac{2}{6}(1 \cdot 1) = 0,33.$$

7 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1, X_2 :

$$\left. \begin{aligned} 1,67x_1 + 0,33x_2 + 21,35 &= 0; \\ 0,33x_1 + 1x_2 + 3 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -5,01x_1 - x_2 - 63,75 &= 0; \\ 0,33x_1 + x_2 + 3 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$-4,68x_1 - 60,75 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{60,75}{4,68} = -12,98 \text{ кНм};$$

$$0,33(-12,98) + x_2 + 3 = 0;$$

$$x_2 = 1,33 \text{ кНм}.$$

8 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис. 5.15, є). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 5.15, ж) і згинальних моментів (рис. 5.15, є).

9 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при помноженні епюр M_s на M_1 та M_s на M_2 повинен вийти нуль.

$$\Delta_{1s} EI_x = \frac{3}{6}(2 \cdot (-12,98) \cdot 1) + \frac{2}{6}(2 \cdot 2,02 \cdot 1 + 1,33 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{10 \cdot 3^3}{24}(0 + 1) = 0,03;$$

$$d = \frac{0,03}{1,76 + 11,25} \cdot 100 \% = 0,23 \%;$$

$$\Delta_{2s} EI_x = \frac{2}{6}(2 \cdot 1,33 \cdot 1 + 2,02 \cdot 1) + \frac{1}{6}(2 \cdot 1,33 \cdot 1 - 12 \cdot 1) =$$

$$= 1,56 - 1,56 = 0.$$

10 З епюри згинальних моментів (див. рис. 5.15, є) знаходимо небезпечний переріз:

$$M_{\max} = 12,98 \text{ кНм.}$$

З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_o} \leq [\sigma];$$

$$W_o \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,98 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 81,125 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту підбираємо двотавр №14, $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, $J_x = 572 \text{ см}^4$.

11 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.16, а), яку помножимо на епюру M_s (див. рис. 5.15, з).

$$y_K = \frac{1}{6EJ_x} [2 \cdot (-12) \cdot 1,5 + 1,33 \cdot 1,5] + \frac{1,5}{6EJ_x} [2 \cdot (-12) \cdot 1,5] =$$

$$= \frac{-14,67}{EJ_x} = \frac{-14,67 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -1,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,8 \text{ мм}.$$

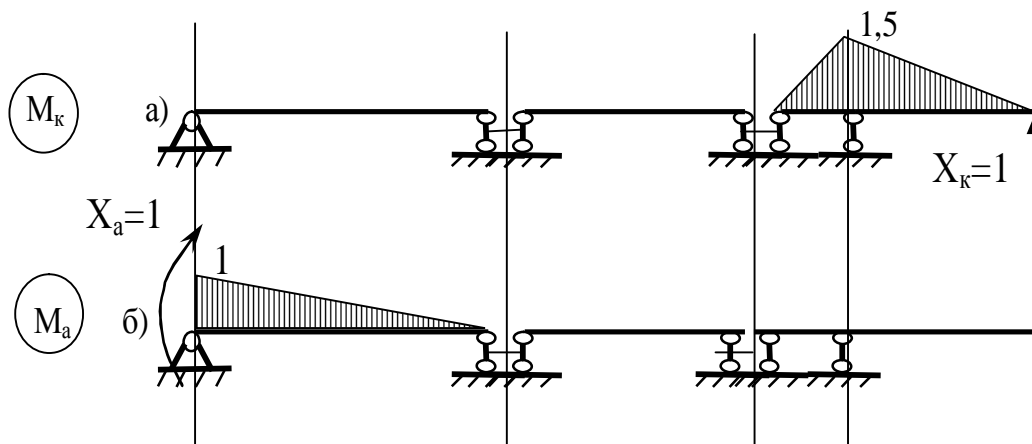


Рисунок 5.16

Знак «мінус» вказує на те, що точка К переміщається по напрямку, який протилежний напрямку одиничної сили, тобто вниз.

12 Визначення кута повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будуюмо епюру згинальних моментів (рис. 5.16, б), яку помножуємо на епюру M_s (див. рис. 5.15, з)

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{3}{6EJ_X} [-12,98 \cdot 1] + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X} (1 + 0) = \frac{4,76}{EJ_X} = \\ &= \frac{4,76 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 4,16 \cdot 10^{-4} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз А повертається у напрямі одиничного моменту, тобто за рухом годинникової стрілки.

5.5 Тричі статичноневизначувана балка

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин перерізу K та кут повороту перерізу A . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за $[\delta] = 2\%$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.5 та 5.6 і рисунку 5.17.

Таблиця 5.5 – Вихідні дані до задачі 5.5

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6	1,3	1,1	2,8
b , м	2,9	2,7	2,5	2,1	1,9	1,7	1,6	1,2	1,2	1,2
c , м	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,6	2,8	1,4
d , м	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	2,0	1,4	2,2

Таблиця 5.6 – Вихідні дані до задачі 5.5

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P , кН	6	8	4	6	8	4	6	8	4	6
q , кН/м	10	12	14	12	14	10	12	10	14	10
M , кН·м	8	6	10	4	6	6	8	10	8	12

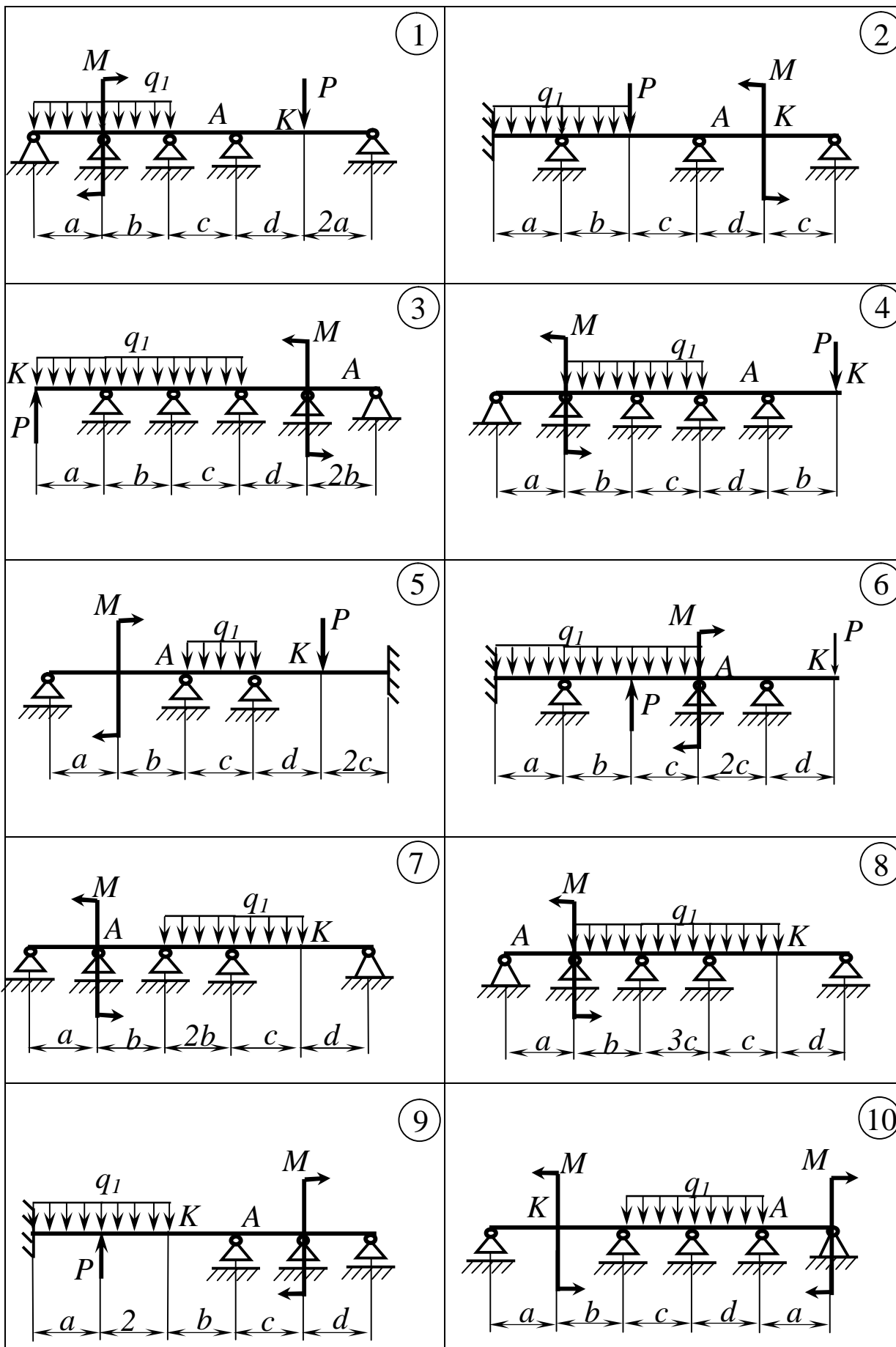


Рисунок 5.17

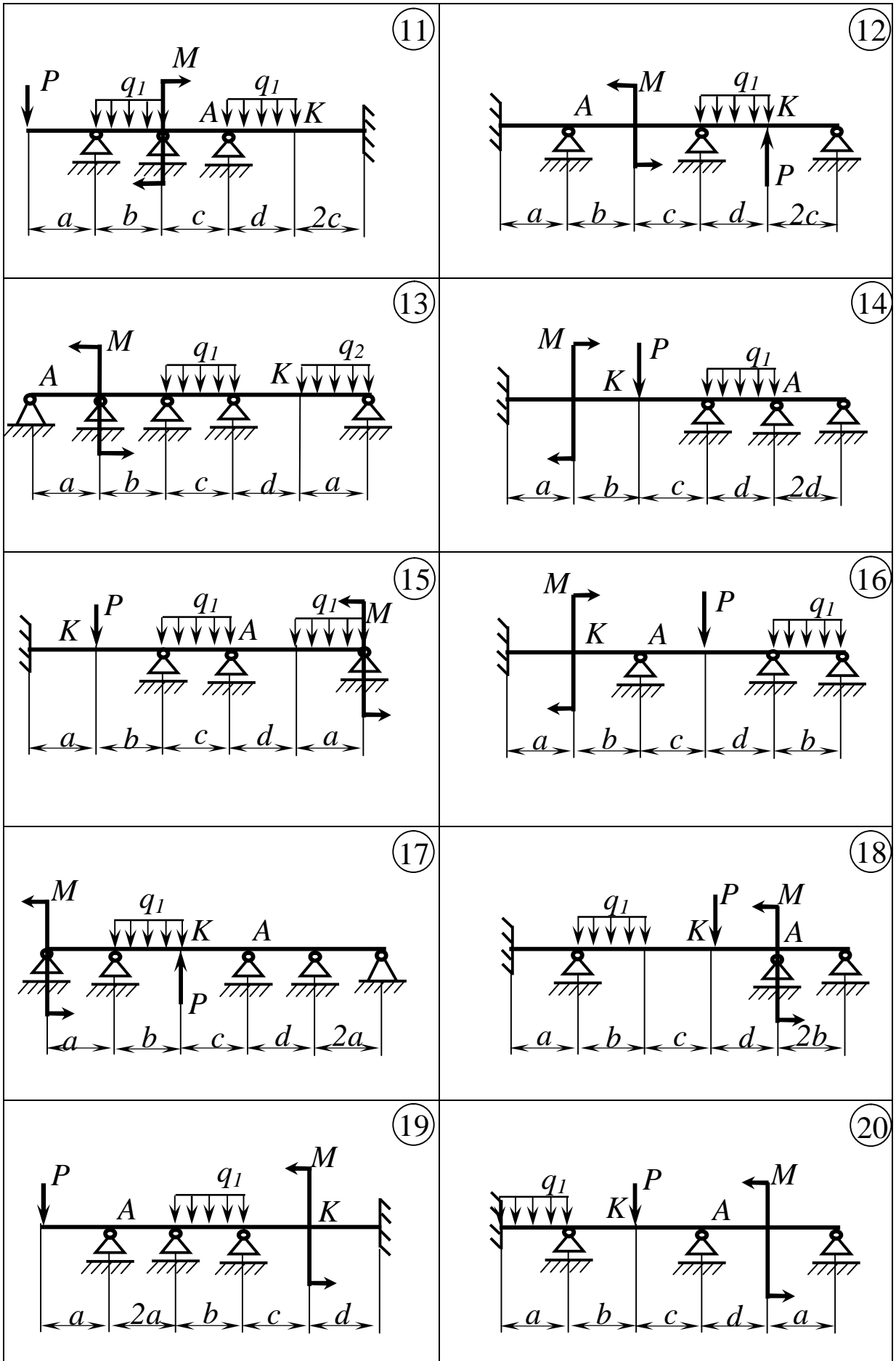


Рисунок 5.17, аркуш 2

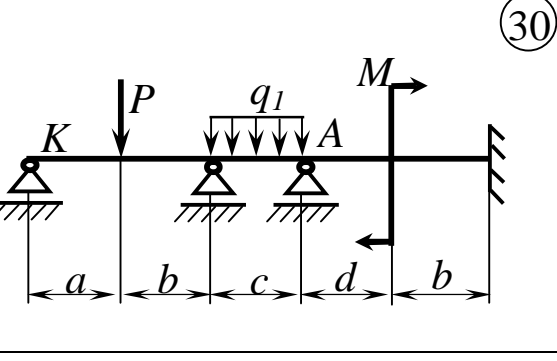
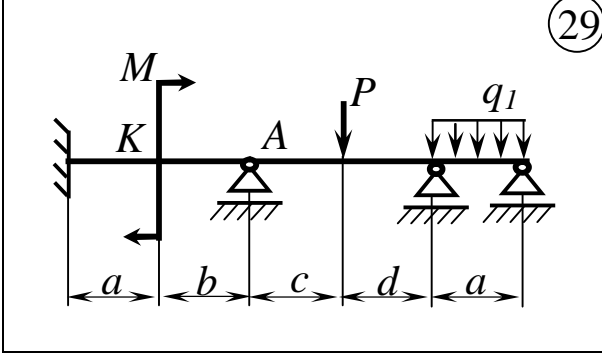
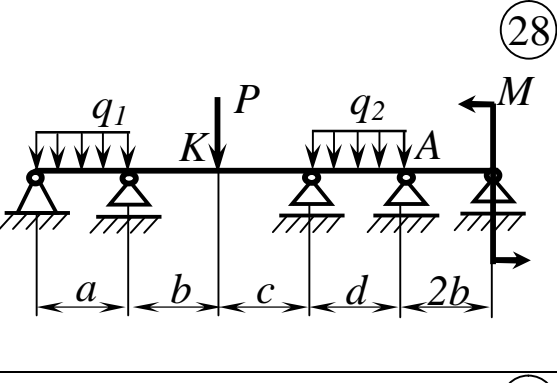
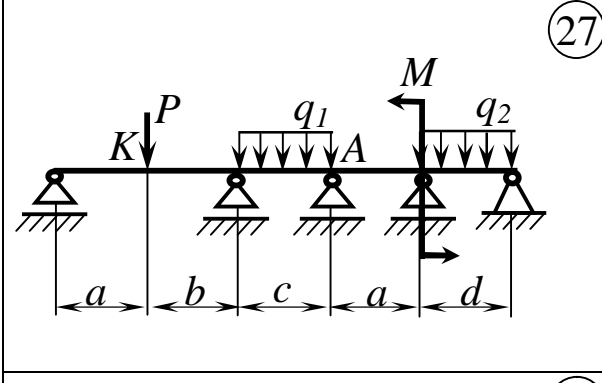
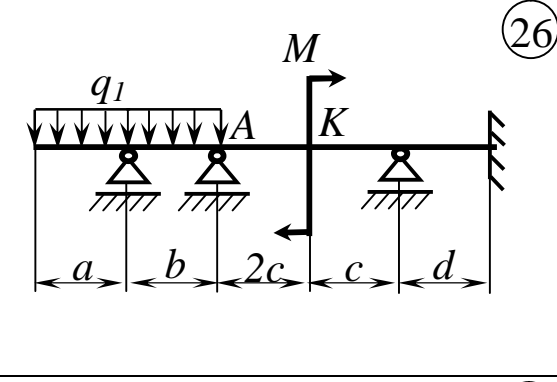
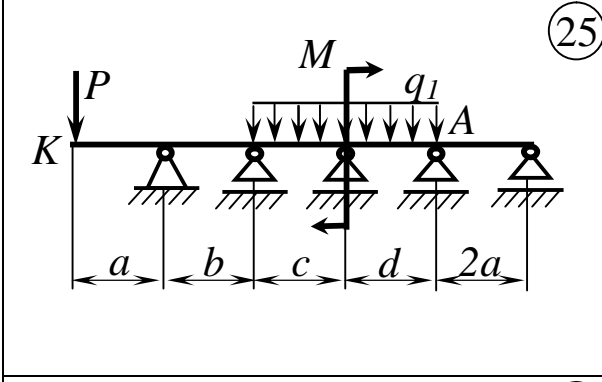
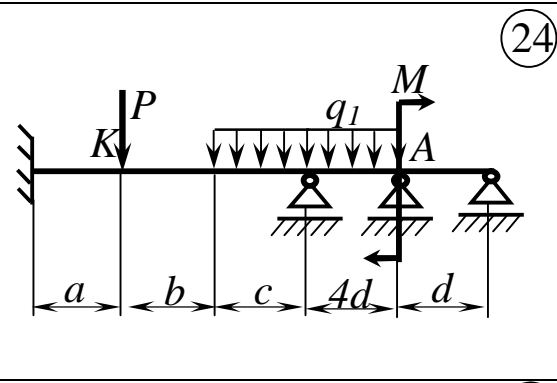
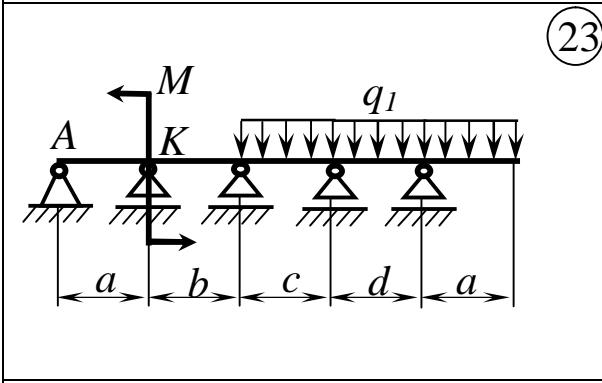
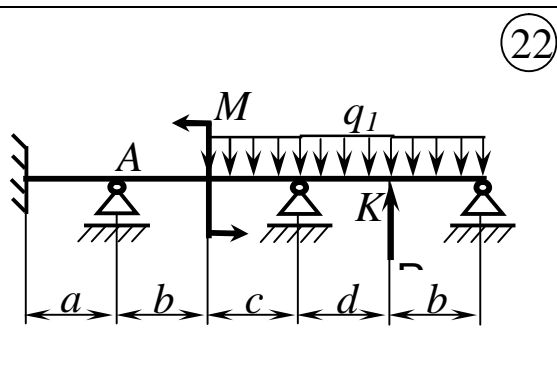
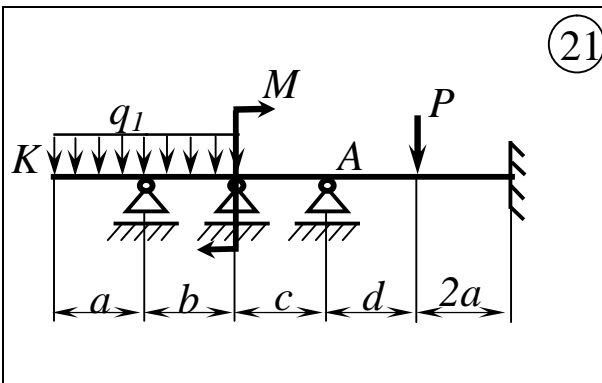


Рисунок 5.17, аркуш 3

5.5.1 Приклад розв'язання задачі 5.5

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність (рис 5.18, а), побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити прогин перерізу K та кут повороту перерізу A . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за $[\delta] = 2 \%$.

2 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі:

$$S = 6 - 3 = 3.$$

Задача тричі статично невизначувана.

3 Вибираємо основну систему, виконавши вимоги до основної системи. Для нерозрізних балок найбільш оптимальною буде система, у якій жорстке закріплення (затиснення) замінено нерухомим шарніром, а на проміжних опорах врізані шарніри (див. рис. 5.18, б). Врізання шарніру між перерізами 8 і 9 буде помилкою, бо це крайня опора. Обрана таким чином основна система розіб'є складну балку на ряд простих балок, спростить побудову епюр згинальних моментів і скоротить обсяг обчислень, тому що в кожному рівнянні залишається не більше трьох невідомих. Для заданої задачі складна балка поділиться на три простих. Щоб не дуже навантажувати рисунки характерні перерізи показано на основній системі.

4 Утворимо еквівалентну систему. Для цього прикладемо до основної системи (див. рис. 5.18, в) всі відомі навантаження і реакції відкинутих зв'язків. При такому виборі основної системи реакціями відкинутих зв'язків будуть моменти, які прикладені до балок ліворуч та праворуч опори. Згинальний момент, що діє між перерізами 2 і 3 прикладемо тільки до балки 1-2.

5 Складемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{aligned}d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + d_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + d_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\d_{n1}X_1 + d_{n2}X_2 + d_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0.\end{aligned}$$

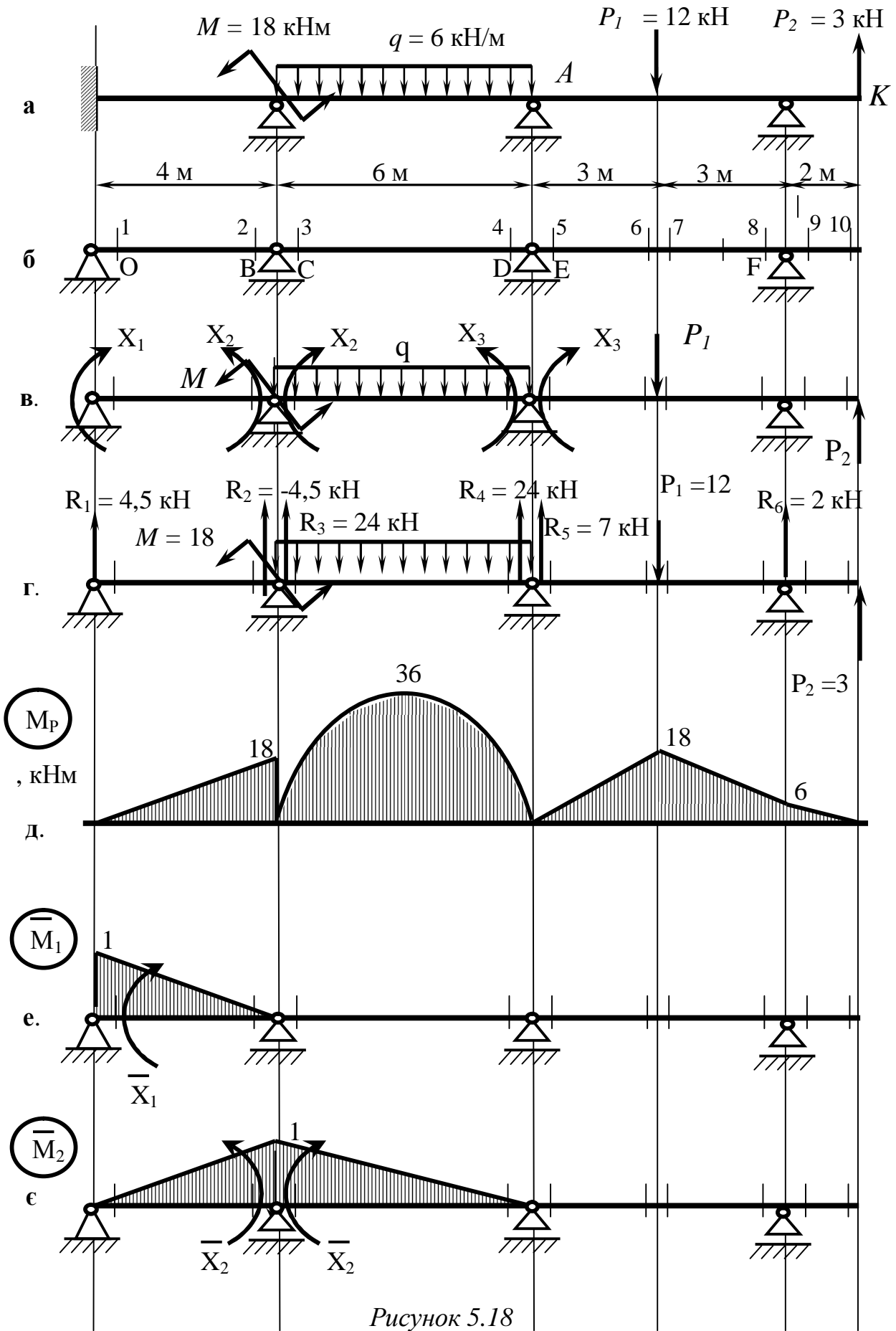


Рисунок 5.18

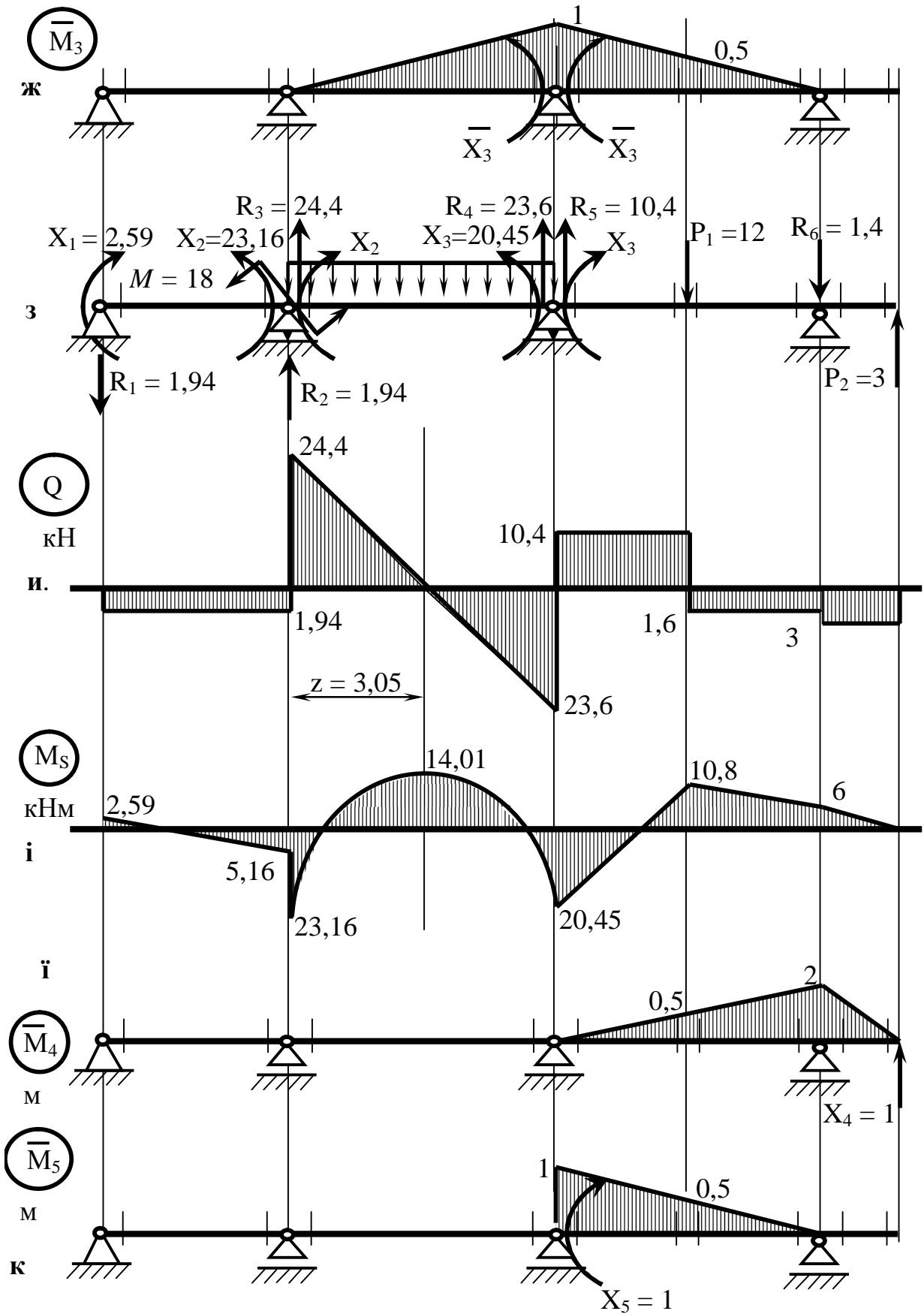


Рисунок 5.18, аркуш 2

При такому виборі основної системи фізичний зміст кожного рівняння – це взаємний кут повороту перерізів на проміжній опорі, що дорівнює нулю.

Прикладемо до основної системи тільки відомі навантаження (див. рис.5.18, г), знаходимо опорні реакції зокрема для кожної балки.

Балка 1-2:

$$\begin{aligned}\sum M_O = 0; \quad R_2 \cdot 4 + M = 0; \quad R_2 = M/4 = -18/4 = -4,5 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; \quad R_1 \cdot 4 - M = 0; \quad R_1 = M/4 = 18/4 = 4,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}\sum F_y = R_1 + R_2 = 4,5 - 4,5 = 0; \\ M_1 = 0; \quad M_2 = M = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Балка 3-4:

$$\begin{aligned}\sum M_D = 0; \quad R_3 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R_3 = q \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}; \\ \sum M_C = 0; \quad R_4 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R_4 = q \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}\sum F_y = R_3 + R_4 - q \cdot 6 = 24 + 24 - 8 \cdot 6 = 0; \\ M_3 = 0; \quad M_4 = 0.\end{aligned}$$

Балка 5-10:

$$\begin{aligned}\sum M_E = 0; \quad R_6 \cdot 6 - P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 8 = 0; \\ R_6 = (P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 8)/6 = (12 \cdot 3 - 3 \cdot 8)/6 = 2 \text{ кН}; \\ \sum M_F = 0; \quad R_5 \cdot 6 - P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 2 = 0; \\ R_5 = (P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 2)/6 = (12 \cdot 3 + 3 \cdot 2)/6 = 7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}\sum F_y = R_5 + R_6 - P_1 + P_2 = 7 + 2 - 12 + 3 = 0; \\ M_5 = 0; \quad M_6 = M_7 = R_5 \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{10} = 0; \quad M_9 = M_8 = P_2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

За допомогою знайдених реакцій опор побудуємо епюри згинальних моментів M_P (див. рис. 5.18, д).

6 Прикладемо до основної системи тільки одне одиничне навантаження в перерізі і напрямку 1-го відкинутого зв'язку і побудуємо епюри згинальних моментів X_1 (див. рис. 5.18, е).

У випадках, коли балка навантажена тільки моментами на опорах, епюри згинальних моментів можна побудувати без обчислення опорних реакцій:

$$M_2 = 0; \quad M_1 = 1;$$

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0.$$

7 Прикладемо до основної системи тільки одне одиничне навантаження в перерізі й напрямку 2-го відкинутого зв'язку і побудуємо епюри згинальних моментів X_2 (див. рис. 5.18, є):

$$M_2 = 0; \quad M_1 = M_3 = 1;$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0.$$

8 Прикладемо до основної системи тільки одне одиничне навантаження в перерізі й напрямку 3-го відкинутого зв'язку й побудуємо епюри згинальних моментів X_3 (див. рис. 5.18, ж):

$$\sum M_D = 0; \quad R_3 \cdot 6 - 1 = 0; \quad R_3 = 1/6 = 0,17 \text{ кН/м};$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_4 \cdot 6 + 1 = 0; \quad R_4 = -1/6 = -0,17 \text{ кН/м};$$

$$\sum M_E = 0; \quad R_6 \cdot 6 - 1 = 0; \quad R_6 = 1/6 = 0,17 \text{ кН/м};$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_5 \cdot 6 + 1 = 0; \quad R_5 = -1/6 = -0,17 \text{ кН/м};$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; \quad M_4 = M_5 = 1.$$

Моменти в перерізах 6, 7 можна визначити з подоби трикутників:

$$1/6 = M_6/3;$$

$$M_6 = M_7 = R_6 \cdot 3 = 0,17 \cdot 3 = 0,5;$$

$$M_8 = M_9 = M_{10} = 0.$$

9 Визначаємо коефіцієнти та вільні члени системи:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= [(4/6)(1 \cdot 18)]/EI_x = 12/EI_x ; \\ \Delta_{2P} &= [(4/6)(2 \cdot 1 \cdot 18) + 8 \cdot 6^3 (1+0)/24]/EI_x = 96/EI_x ; \\ \Delta_{3P} &= [8 \cdot 6^3 (1+0)/24 + (3/6)(20,521 + 21 \cdot 1) + \\ &+ (3/6)(20,521 + 6 \cdot 0,5)]/EI_x = 105/EI_x ; \\ d_{11} &= [(4/6)(2 \cdot 1 \cdot 1)]/EI_x = 1,33/EI_x ; \\ d_{22} &= [(4/6)(2 \cdot 1 \cdot 1) + (6/6)(2 \cdot 1 \cdot 1) +]/EI_x = 3,33/EI_x ; \\ d_{33} &= [(6/6)(2 \cdot 1 \cdot 1) + (6/6)(2 \cdot 1 \cdot 1) +]/EI_x = 4/EI_x ; \\ d_{12} = d_{21} &= [(4/6)(1 \cdot 1)]/EI_x = 0,67/EI_x ; \\ d_{23} = d_{32} &= [(6/6)(1 \cdot 1)]/EI_x = 1/EI_x ; \\ d_{13} = d_{31} &= 0.\end{aligned}$$

10 Підставляємо знайдені значення в систему:

$$\begin{aligned}1,33X_1 + 0,67X_2 + 12 &= 0; \\ 0,67X_1 + 3,33X_2 + X_3 + 96 &= 0; \\ X_2 + 4X_3 + 105 &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо реакції відкинутих зв'язків:

$$\begin{aligned}X_1 &= (-12 - 0,67X_2)/1,33; \quad X_3 = (-105 - X_2)/4; \\ 0,67 \cdot (-12 - 0,67X_2)/1,33 + 3,33 \cdot X_2 + (-105 - X_2)/4 + 96 &= 0; \\ X_2 &= -23,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_1 = 2,578 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_3 = -20,44 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Перевіряємо розв'язання системи:

$$1,33 \cdot 2,578 + 0,67 \cdot (-23,16) + 12 = 0.$$

11 Підставляємо отримані значення реакцій відкинутих зв'язків до еквівалентної системи (див. рис. 5.18, з) та знаходимо опорні реакції для кожної балки.

Балка 1-2:

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0; \quad R_2 \cdot 4 + M - X_1 + X_2 = 0; \\ R_2 &= (-M + X_1 - X_2)/4 = (-18 + 2,59 + 23,16)/4 = 1,94 \text{ кН}; \\ \sum M_B &= 0; \quad R_1 \cdot 4 + M - X_1 + X_2 = 0; \\ R_1 &= (-M + X_1 - X_2)/4 = (-18 + 2,59 + 23,16)/4 = 1,94 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = R_1 + R_2 = -1,94 + 1,94 = 0.$$

Балка 3-4:

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0; \quad R_3 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 + X_2 - X_3 = 0; \\ R_3 &= (q \cdot 3 \cdot 6 - X_2 + X_3)/6 = (863 + 23,16 - 20,45)/6 = 24,4 \text{ кН}; \\ \sum M_C &= 0; \quad R_4 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - X_2 + X_3 = 0; \\ R_4 &= (q \cdot 3 \cdot 6 + X_2 - X_3)/6 = (863 - 23,16 + 20,45)/6 = 23,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = R_3 + R_4 - q \cdot 6 = 24,4 + 23,6 - 86 = 0.$$

Балка 5-10:

$$\begin{aligned} \sum M_E &= 0; \quad R_6 \cdot 6 - P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 8 - X_3 = 0; \\ R_6 &= (P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 8 + X_3)/6 = (123 - 38 - 20,45)/6 = -1,4 \text{ кН}; \\ \sum M_F &= 0; \quad R_5 \cdot 6 - P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 2 - X_3 = 0; \\ R_5 &= (P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 2 + X_3)/6 = (123 + 32 + 20,45)/6 = 10,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = R_5 + R_6 - P_1 + P_2 = 10,4 - 1,4 - 12 + 3 = 0.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q (див. рис. 5.18, и):

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 = R_1 &= -1,94 \text{ кН}; \quad Q_3 = R_3 = 24,4 \text{ кН}; \\ Q_4 &= R_3 - q \cdot 6 = 24,4 - 8 \cdot 6 = 23,6 \text{ кН}; \\ Q_5 = Q_6 = R_5 &= 10,4 \text{ кН}; \\ Q_7 = Q_8 = R_5 - P_1 &= 10,4 - 12 = -1,6 \text{ кН}; \\ Q_{10} = Q_9 = -P_2 &= -3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Будуємо епюри згинальних моментів M_S (див. рис. 5.18, і):

$$\begin{aligned}
 M_1 &= X_1 = 2,59 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_2 &= M + X_2 = 18 - 23,16 = -5,16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_3 &= X_2 = -23,16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = X_3 = -20,45 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 z &= Q_3/q = 24,4/8 = 3,05 \text{ м}; \\
 M_z &= X_2 + R_3 z - q z^2/2 = -23,2 + 24,4 \cdot 3,05 - 8 \cdot 3,05^2/2 = 14,01 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_5 &= X_3 = -20,45 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_6 &= M_7 = X_3 + R_5 \cdot 3 = -20,45 + 10,43 = 10,8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{10} &= 0; \quad M_9 = M_8 = P_2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

При перегляді епюр згинальних моментів основної та еквівалентних систем видно, що найбільший згинальний момент на еквівалентній системі (23,5 кН·м) менший за найбільший згинальний момент на основній системі з відомими навантаженнями (36 кН·м). Епюри згинальних моментів від одиничних навантажень розташовані по один бік від осі. Тоді епюра згинальних моментів для еквівалентної системи повинна перерізати вісь.

10 Виконаємо деформаційну перевірку, тобто визначимо переміщення еквівалентної системи в напрямку відкинутих зв'язків (кут повороту в перерізі 1 та взаємний кут повороту в перерізах 2, 3 та 4, 5). Для цього перемножимо епюри згинальних моментів M_S по черзі з епюрами згинальних моментів $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$:

$$\begin{aligned}
 d_{1S} &= [(4/6)(2 \cdot 1 \cdot 2,59 - 1 \cdot 5,2)]/EI_x = 0,013/EI_x; \\
 d_{2S} &= [(4/6)(2 \cdot 1 \cdot 5,2 + 2,61) + (6/6)(-2 \cdot 1 \cdot 23,2 - 20,45 \cdot 1) + \\
 &+ 8 \cdot 6^3(1+0)/24]/EI_x = (-6,93 + 1,73 - 46,4 - 20,45 + 72)/EI_x = \\
 &= 0,05/EI_x; \\
 d_{3S} &= [(6/6)(-2 \cdot 1 \cdot 20,45 - 23,2 \cdot 1) + 8 \cdot 6^3(1+0)/24 + \\
 &+ (3/6)(2 \cdot 0,5 \cdot 10,8 - 2 \cdot 1 \cdot 20,45 + 10,8 \cdot 1 - 0,5 \cdot 20,45) + \\
 &+ (3/6)(2 \cdot 0,5 \cdot 10,8 + 6 \cdot 0,5)]/EI_x = (-40,9 - 23,2 + 72 + 5,4 - \\
 &- 20,45 + 5,4 - 5,11 + 5,4 + 1,5)/EI_x = 0,04/EI_x.
 \end{aligned}$$

Внаслідок перемножування повинні вийти числа, близькі до нуля, тобто сума позитивних і негативних додатків відносно суми позитивних складових не повинна бути більшою за допустиму.

Відносна похибка складає:

$$\text{для } \delta_{1S} \quad d = 0,013 \cdot 100 / 5,2 = 0,25 < 2\% ,$$

$$\text{для } \delta_{2S} \quad d = (0,05 / 73,73) 100 = 0,07 < 2\% ,$$

$$\text{для } \delta_{3S} \quad d = (0,04 / 79,7) 100 = 0,05 < 2\% .$$

12 З основної умови міцності при плоскому згинанні

$$s_{max} = M_{max} / W_x \leq [s]$$

визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq M_{max} / [s] = 26,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 / 160 = 165,6 \text{ см}^3 ,$$

за яким визначимо необхідні розміри перерізу. Для заданої задачі згідно з ГОСТ8239-89 приймаємо двотавр 20 ($W_x = 184 \text{ см}^3$, $I_x = 1840 \text{ см}^4$).

13 Для визначення прогину перерізу K прикладемо до основної системи в цьому перерізі одиничну силу $X_4 = 1$, визначимо опорні реакції і побудуємо епюри згинальних моментів \bar{M}_4 (рис. 5.18, і).

Балка 5-10:

$$\sum M_E = 0; \quad R_6 \cdot 6 + 18 = 0; \quad R_6 = -8/6 = -1,33;$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_5 \cdot 6 - 12 = 0; \quad R_5 = 2/6 = 0,33.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = R_5 + R_6 + P = 0,33 - 1,33 + 1 = 0;$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0; \quad M_5 = 0;$$

$$M_6 = M_7 = R_5 \cdot 3 = 0,33 \cdot 3 = 1 \text{ м};$$

$$M_{10} = 0; \quad M_9 = M_8 = X_4 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}.$$

Визначимо необхідне переміщення, “перемноживши” епюру згинальних моментів M_S з епюрою згинальних моментів \bar{M}_4 :

$$y_K = d_{4S} = [(3/6)(2 \cdot 1 \cdot 10,8 - 1 \cdot 20,45) + (3/6)(2 \cdot 1 \cdot 10,8 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 10,8 \cdot 2) + (2/6)(2 \cdot 2 \cdot 6)] / EI_x = 45,09 / EI_x = 45,09 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 0,012 \text{ м.}$$

14 Для визначення кута повороту перерізу A прикладемо до основної системи в цьому перерізі одиничний момент $X_5 = 1$, визначимо опорні реакції і побудуємо епюри згинальних моментів \bar{M}_5 (рис. 5.18, к). У цьому випадку момент прикладаємо тільки до однієї з балок (5-10).

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0; \quad R_6 \cdot 6 - 1 = 0; \quad R_6 = 1/6 = 0,17 \text{ кН/м}; \\ \sum M_F = 0; \quad R_5 \cdot 6 + 1 = 0; \quad R_5 = -1/6 = -0,17 \text{ кН/м}; \\ M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0; \quad M_5 = 1; \\ M_6 = M_7 = R_6 \cdot 3 = 0,17 \cdot 3 = 0,5; \quad M_{10} = M_9 = M_8 = 0. \end{aligned}$$

Визначимо необхідне кутове переміщення, “перемноживши” епюру згинальних моментів M_S з епюрою згинальних моментів \bar{M}_5 :

$$\begin{aligned} q_D = d_{5S} = [(3/6)(2 \cdot 0,5 \cdot 10,8 - 2 \cdot 1 \cdot 20,45 + 10,8 \cdot 1 - 0,5 \cdot 20,45) + \\ + (3/6)(2 \cdot 0,5 \cdot 10,8 + 6 \cdot 0,5)] / EI_x = 15,07 / EI_x = \\ = 15,07 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 0,004 \text{ рад.} \end{aligned}$$

6 СТІЙКІСТЬ І КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

6.1 Підбір стиснутої стійки

Для заданої стійки довжиною l , з умови стійкості, якщо $[s] = 160 \text{ МПа}$, підібрати розміри перерізу і раціонально розташувати його. Перевантаження перерізу не повинне перевищувати 5%, а недовантаження - 10%.

Вихідні дані вибрати із таблиць 6.1 та 6.2 і рисунку 6.1

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі 6.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P, \text{кН}$	500	550	600	650	700	450	400	350	600	500

Таблиця 6.2 – Вихідні дані до задачі 6.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$l, \text{м}$	4,0	3,5	3,0	5,0	2,5	5,5	4,0	4,5	5,0	3,5

6.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.1

1 Підбір перерізу здійснюється з умови стійкості:

$$s = \frac{P}{F} \leq j [s], \quad (6.1)$$

де P – навантаження, яке діє на стійку;

F – площа поперечного перерізу;

φ – коефіцієнт зниження основних допустимих напружень, який знаходиться в інтервалі від 0 до 1.

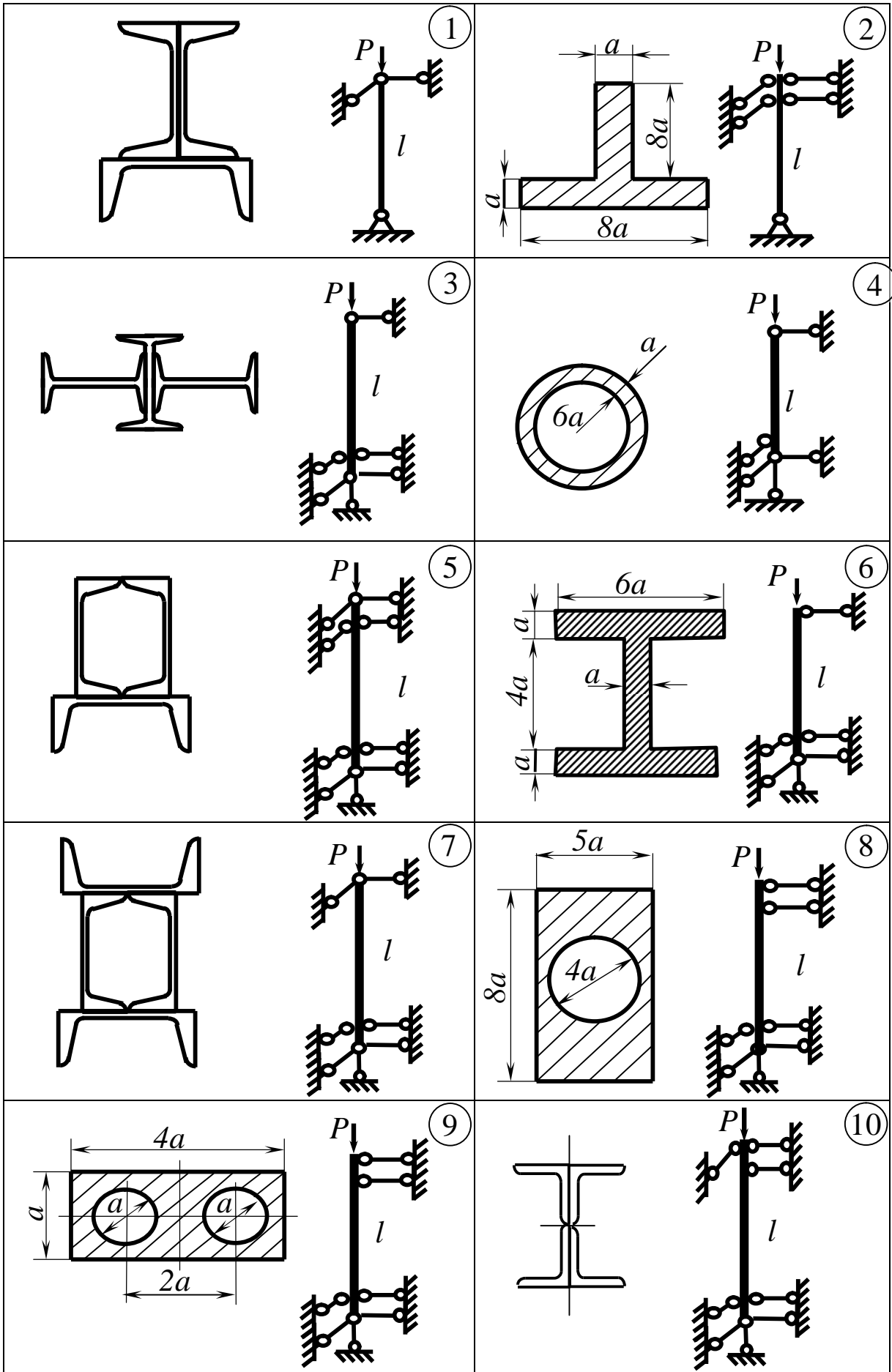


Рисунок 6.1

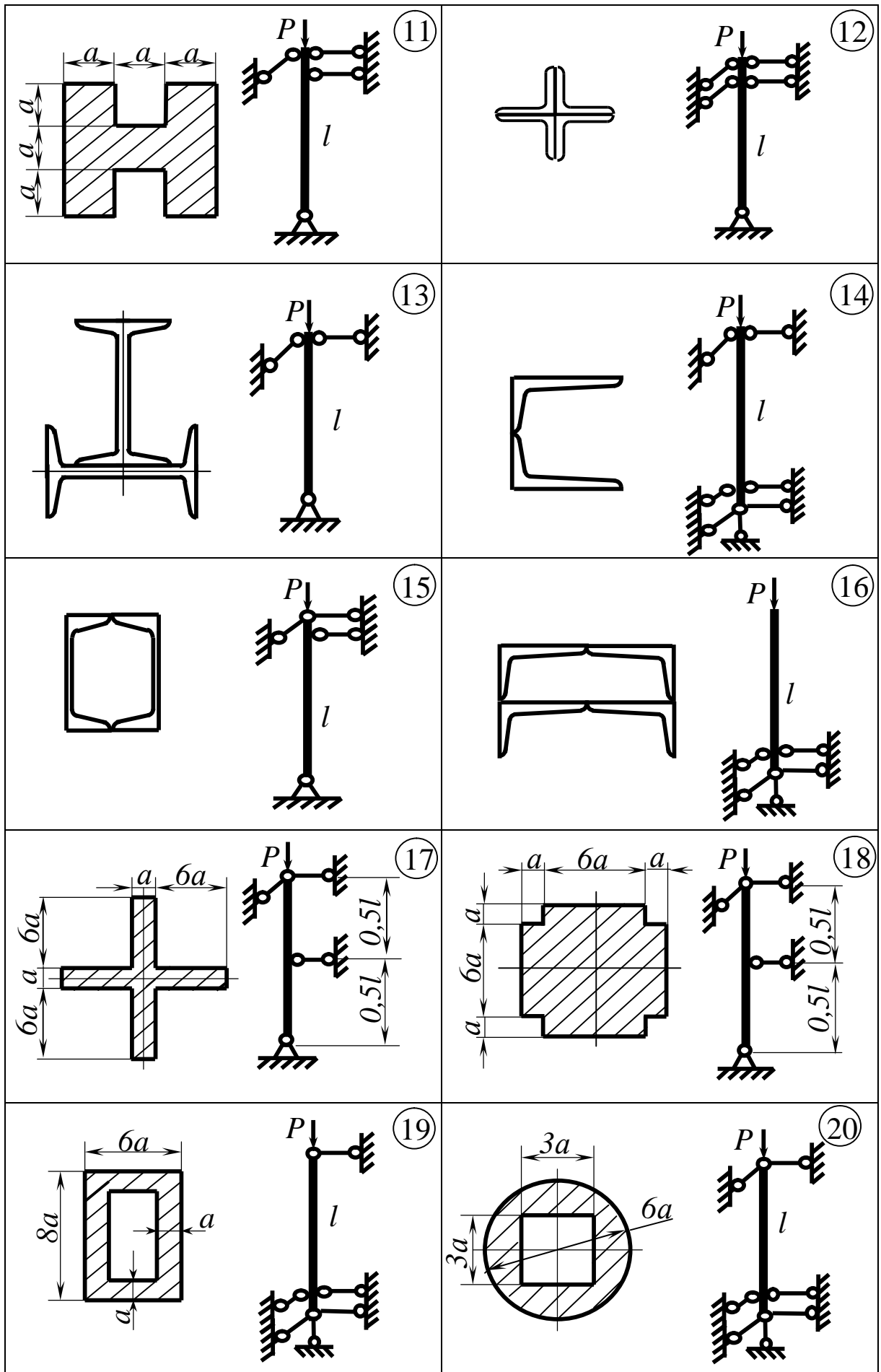


Рисунок 6.1, аркуш 2

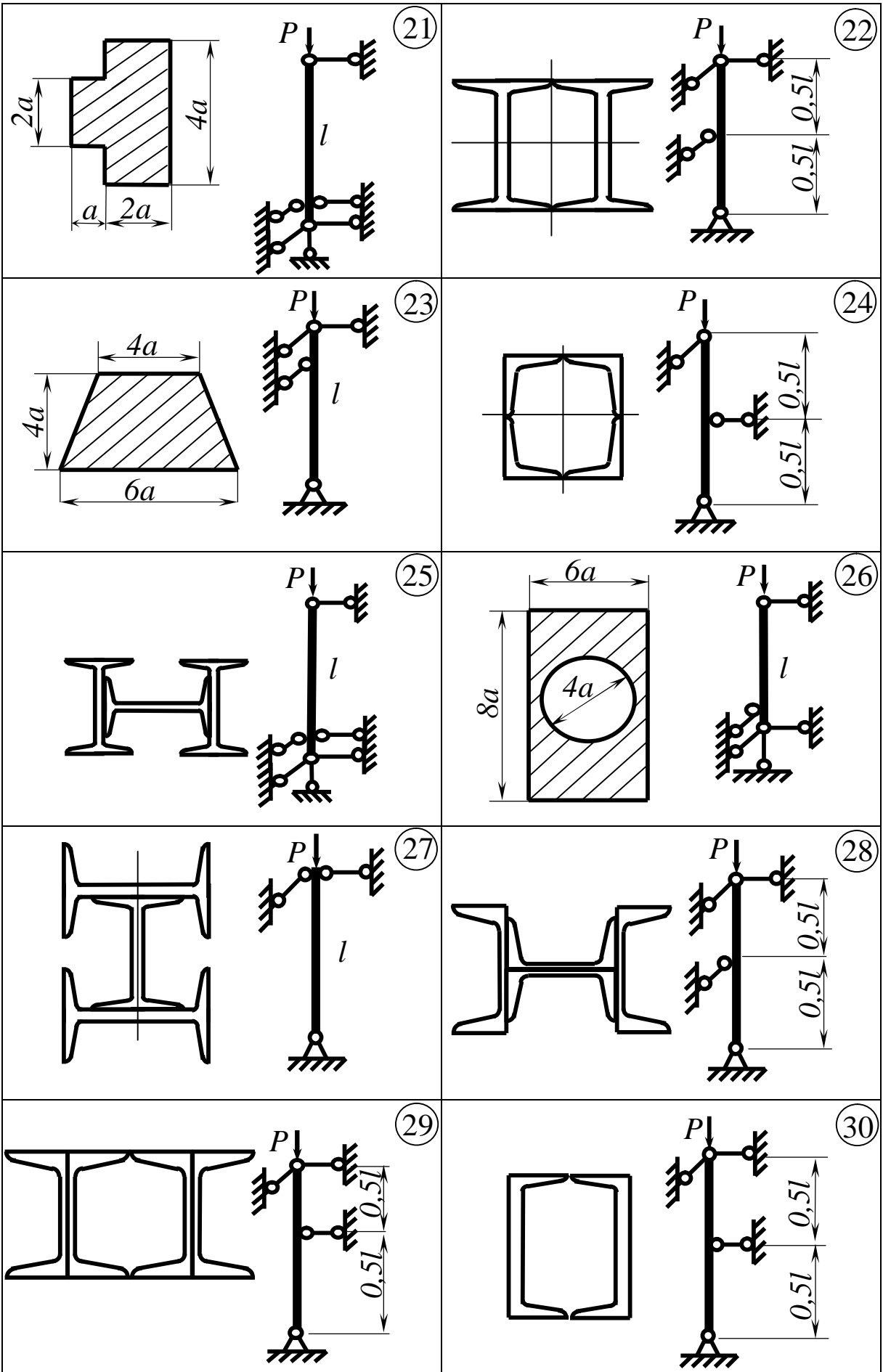


Рисунок 6.1, аркуш 3

Оскільки в умову стійкості входять дві взаємозалежні невідомі величини F і φ , то задачу варто розв'язувати шляхом послідовних наближень. Для цього треба задати деяке початкове значення коефіцієнта зниження основних допустимих напружень j_0 (найбільш доцільно обирати j_0 у межах 0,5 - 0,6) і з умови стійкості визначити необхідну площу поперечного перерізу F_0 :

$$F_0 \geq \frac{P}{\varphi_0[\sigma]}.$$

2 За знайденою площею визначають номер профілю з сортаменту чи розмір перерізу a , обчислюють його моменти інерції щодо головних центральних осей J_x і J_y і радіуси інерції щодо цих осей i_x, i_y :

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

3 Обчислюють значення гнучкості в двох площинах, при цьому попередньо переріз раціонально розташовують так, щоб у площині меншого моменту інерції закріплення було більш жорстким, а в площині більшого моменту інерції – менш жорстким. У цьому випадку більшому значенню радіуса інерції i_{max} відповідає більше значення коефіцієнта приведення довжини μ_{max} і навпаки:

$$I_{x(y)} = \frac{m_{max} l}{i_{max}}, \quad I_{y(x)} = \frac{m_{min} l}{i_{min}}.$$

4 Подальший розрахунок ведуть для площини, де I має більше з двох значень. За більшим I визначається з таблиці коефіцієнт j'_0 , який, як правило, відрізняється від прийнятого на початку розрахунку j_0 .

5 Перевіряють умову міцності:

$$s = \frac{P}{F} \leq j'_0 [s].$$

6 При виконанні умови перевіряють недовантаження (перевантаження) перерізу:

$$\delta = \frac{[\sigma] - \frac{P}{\varphi \cdot F}}{\frac{P}{\varphi \cdot F}} 100 \leq [\delta].$$

7 При невиконанні будь-якої умови задають нове значення коефіцієнта j_1 , яке дорівнює середньому між j_0 і j'_0 :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi'_0 + \varphi_0}{2}$$

і розрахунок повторюють знову, починаючи з пункту 1, але замість j_0 приймають j_1 і повторюють доти, доки будуть виконуватися обидві умови.

8 Якщо нове значення j_1 значно відрізняється від j_0 , можна умови міцності і недовантаження (пункти 5 і 6) не перевіряти, а одразу приступати до наступного наближення.

9 У випадку, коли гнучкість стійки перевищує максимальне значення в таблиці, необхідно зменшити значення j_0 .

10 Якщо обидві умови виконати неможливо, треба залишити переріз, який задовольняє умові міцності.

6.1.2 Приклад розв'язання задачі 6.1 (варіант 1)

Для заданої стійки, розрахункова схема якої дана в аксонометрії (рис.6.2, а), з умови стійкості підібрати і розташувати найбільш вигідним образом чинний переріз, що складається з трьох швелерів (рис. 6.2.б), якщо $[\sigma] = 160$ МПа, навантаження $P = 250$ кН, довжина $l = 2,6$ м, матеріал Ст.3.

З рисунку 6.2 видно, що умови закріплення стійки в головних площинах інерції різні.

Покажемо проекції розрахункової схеми стійки (рис. 6.3, а та рис. 6.3, б).

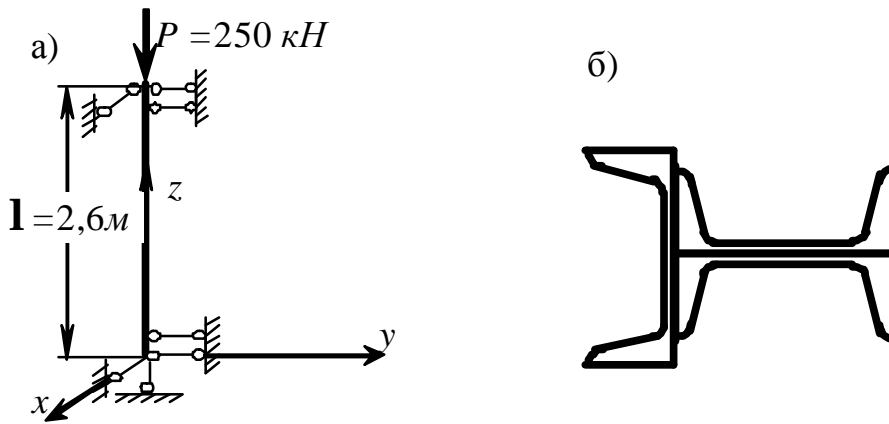


Рисунок 6.2

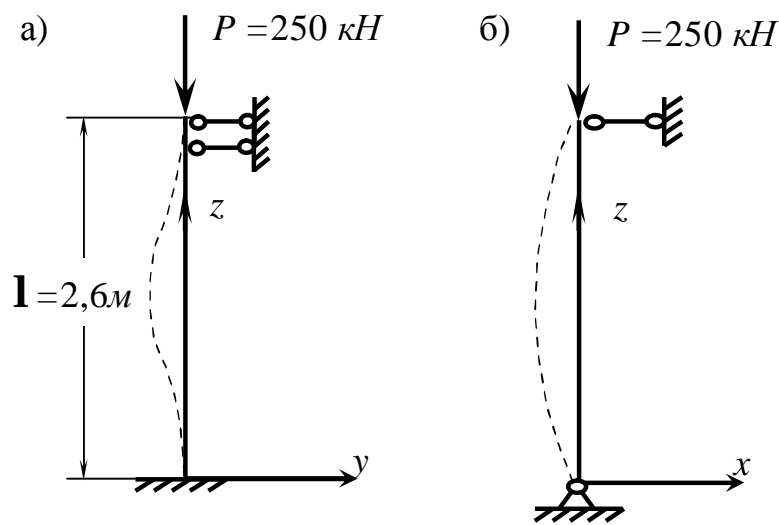


Рисунок 6.3

Підбір перерізів робимо з умови стійкості:

$$s = \frac{P}{j F} \leq [s],$$

де P – сила, що стискає стійку;

F - площа поперечного перерізу стійки;

j - коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень при стиску.

Коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень залежить від гнучкості стрижня, який, у свою чергу, залежить від площі поперечного перерізу стійки. Отже, до формули входять дві взаємозалежні невідомі величини F і j . Однієї з них, як правило, це j , задаємося.

Оскільки j змінюється від 0 до 1, то приймаємо: $j_0 = 0,5$. Тоді

$$F = \frac{P}{j_0 [s]} = \frac{250 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 0,00311 \text{ м}^2 = 31,1 \text{ см}^2.$$

Площа одного швелера:

$$F_{ш} = \frac{P}{3} = \frac{31,1}{3} = 10,4 \text{ см}^2.$$

За сортаментом (ГОСТ 8240-97) вибираємо швелер 10, геометричні характеристики якого: $F = 10,9 \text{ см}^2$; $J_x = 174 \text{ см}^4$.

Визначаємо положення центра ваги поперечного перерізу стійки (рис. 6.4). У якості допоміжних приймаємо осі X_c і Y_l .

$$X_c = \frac{\sum X_i F_i}{\sum F_i} = \frac{-(z_0 + \frac{h}{2}) F_1}{3 F_1} = \frac{-(1,44 + \frac{10}{2})}{3} = -2,15 \text{ см}.$$

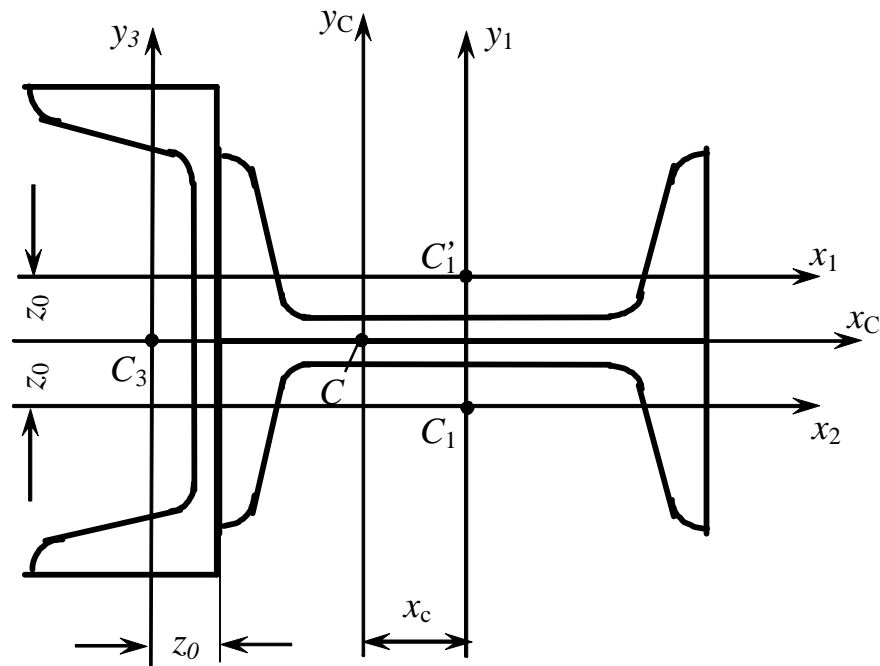


Рисунок 6.4

Визначаємо моменти інерції щодо головних центральних осей X , Y :

$$J_x = \sum_{i=1}^3 (J_{xi} + (y_c - y_i)^2 F_i) = 2(20,4 + 1,44^2 \cdot 10,9) + 174 = 260 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \sum_{i=1}^3 (J_{yi} + (x_c - x_i)^2 F_i) = 2(174 + 2,15^2 \cdot 10,9) + 20,4 +$$

$$+ (1,44 + \frac{10}{2} - 2,15)^2 \cdot 10,9 = 669 \text{ см}^4.$$

З метою раціонального розподілу матеріалу переріз необхідно розташовувати так, щоб гнучкості I_x (у площині YZ) і I_y (у площині XZ) відрізнялися між собою якнайменше.

Це виконується в тому випадку, коли більшому коефіцієнту приведення довжини m відповідає більший момент інерції. У нашому випадку ця умова виконується: $m_y > m_x$ і $J_y > J_x$. Переріз варто повернути на 90° .

Знайдемо радіуси інерції і гнучкості:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{260}{3 \cdot 10,9}} = 2,82 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{669}{3 \cdot 10,9}} = 4,53 \text{ см};$$

$$I_x = \frac{m_x \mathbf{l}}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 260}{2,82} = 46; \quad I_y = \frac{m_y \mathbf{l}}{i_y} = \frac{1 \cdot 260}{4,53} = 57,3.$$

Оскільки $I_y > I_x$, то стійка швидше втратить стійкість у площині ZX. Отже, подальший підбір перерізу ведемо по I_y .

За допомогою таблиці коефіцієнтів j визначаємо значення коефіцієнта зниження основних допустимих напружень φ'_0 .

При $I_y = 57,3$ шляхом інтерполяції знаходимо значення $\varphi'_0 = 0,87$.

Коефіцієнт j_0 значно відрізняється від φ'_0 , тому задаємося новим значенням коефіцієнта зниження основних допустимих напружень:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi'_0}{2} = \frac{0,5 + 0,87}{2} = 0,68,$$

і повторюємо розрахунки:

$$F_1 = \frac{250 \cdot 10^{-3}}{0,68 \cdot 160} = 23 \text{ см}^2; \quad F_{ш} = \frac{23}{3} = 7,67 \text{ см}^2.$$

Приймаємо швелер 8:

$$J_{y_1} = 89,4 \text{ см}^4; \quad J_{x_1} = 12,8 \text{ см}^4; \quad F_1 = 8,98 \text{ см}^2;$$

$$z_0 = 1,31 \text{ см}; \quad X_c = \frac{-(1,31 + \frac{8}{2})}{3} = -1,77 \text{ см};$$

$$J_{yc} = 2(89,4 + 1,77^2 \cdot 8,98) + 12,8 + (1,31 + \frac{8}{2} - 1,77)^2 \cdot 8,98 = 361 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{361}{3 \cdot 8,98}} = 3,65 \text{ см}; \quad I_y = \frac{1 \cdot 260}{3,65} = 71,2.$$

При $I_y = 71,2$ коефіцієнт $\varphi'_1 = 0,80$.

У третьому наближенні задаватися новим Φ немає необхідності.

Досить узяти сусідній, менший профіль і перевірити його стійкість.

Приймаємо швелер 6,5:

$$J_{y_1} = 48,6 \text{ см}^4; \quad J_{x_1} = 8,7 \text{ см}^4; \quad z_0 = 1,24 \text{ см}; \quad F_1 = 7,51 \text{ см}^2;$$

$$X_c = \frac{1,24 + \frac{6,5}{2}}{3} = -1,5 \text{ см};$$

$$J_{yc} = 2(48,6 + 1,5^2 \cdot 7,51) + 8,7 + (1,24 + \frac{6,5}{2} - 1,5)^2 \cdot 7,51 = 207 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \frac{207}{3 \cdot 7,51} = 3,02 \text{ см}; \quad I_y = \frac{1 \cdot 260}{3,02} = 86;$$

при $I_y = 86$ $j = 0,71$.

Діюче напруження:

$$S = \frac{250 \cdot 10^{-3}}{0,71 \cdot 3 \cdot 7,51 \cdot 10^{-4}} = 156,6 \text{ МПа}.$$

Таким чином, недовантаження складає:

$$\delta = \frac{160 - 156,6}{156,5} 100\% = 2,2\% < [\delta] = 10\% .$$

Таке недовантаження допускається.

Таким чином, остаточно приймаємо швелер 6.5.

6.1.3 Приклад розв'язання задачі 1 (варіант 2)

Цей приклад відрізняється від попереднього тим, що у прикладі № 1 задано тип стандартних профілів.

У цьому ж прикладі задається вигляд самого перерізу, а усі розміри залежать від невідомого параметру a (рис. 6.5, б). Задача полягає у визначенні значення цього параметру a таким, щоб він задовольняв умові стійкості.

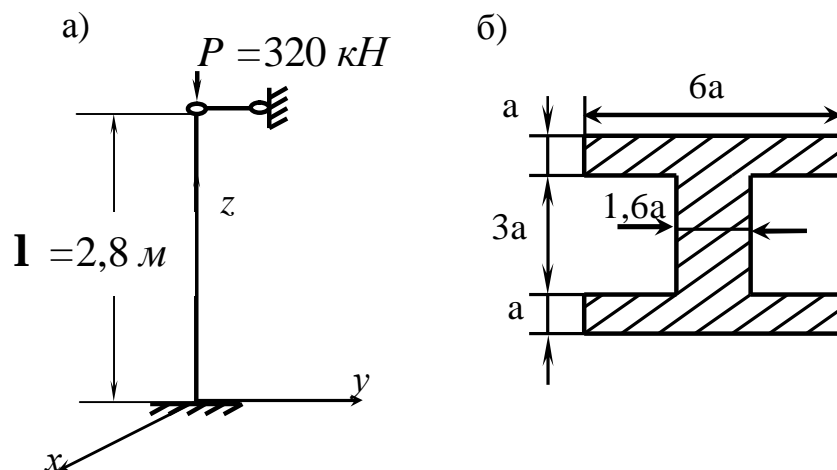


Рисунок 6.5

Так само, як і в попередньому прикладі, зображуємо окремо проєкції розрахункової схеми (рис 6.6).

Визначимо геометричні характеристики перерізу, як функції a .

Спочатку визначимо геометричні характеристики кожної зі складових:

$$F_1 = F_3 = 6a \cdot a = 6a^2;$$

$$F_2 = 3a \cdot 1,6a = 4,8a^2;$$

$$J_{x_1} = J_{x_3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{a \cdot (6a)^3}{12} = 18a^4;$$

$$J_{y_1} = J_{y_3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{6a \cdot a^3}{12} = 0,5a^4;$$

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3a \cdot (1,6a)^3}{12} = 1,024a^4;$$

$$J_{y_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{1,6a \cdot (3a)^3}{12} = 3,6a^4;$$

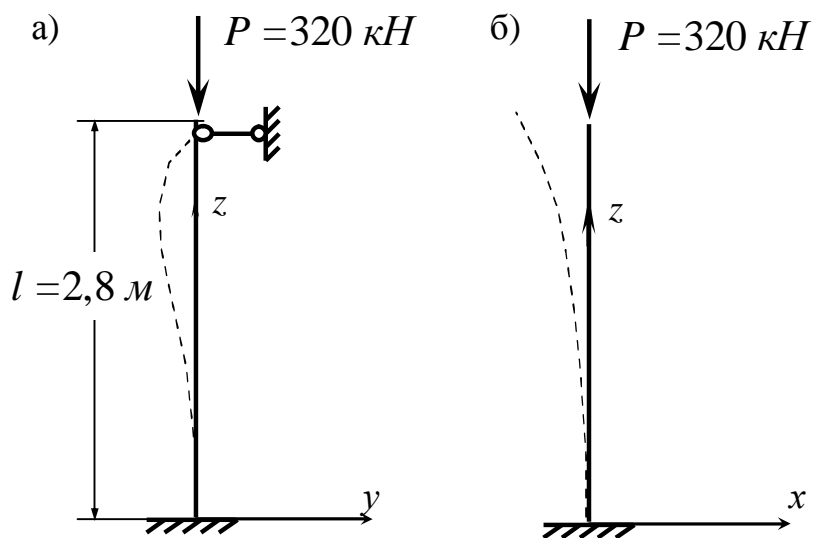


Рисунок 6.6

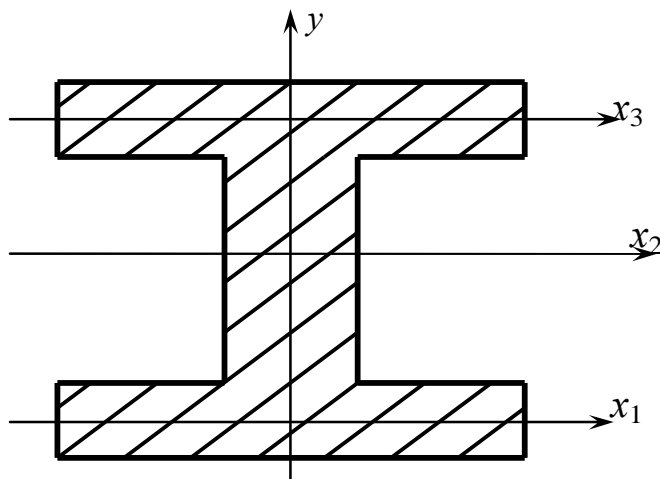


Рисунок 6.7

Знайдемо геометричні характеристики усього перерізу (рис. 6.7). Переріз симетричний. Осі симетрії y та x_2 . Тому положення центра ваги та головних осей інерції для такого перерізу визначати не потрібно. Головні моменти інерції та площа усього перерізу за формулою паралельного переносу дорівнюють:

$$J_{xc} = 2 \left(18a^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2} \right)^2 \cdot 6a^2 \right) + 1,024a^4 = 85,024a^4;$$

$$J_{yc} = 2 \cdot 0,5a^4 + 3,6a^4 = 4,6a^4;$$

$$F = 2 \cdot 6a^2 + 4,8a^2 = 16,8a^2;$$

З метою раціонального розподілу матеріалу переріз необхідно розташовувати так, щоб гнучкості I_x (у площині yz) і I_y (у площині xz) відрізнялися між собою якнайменше.

Це виконується в тому випадку, коли більшому коефіцієнту приведення довжини m відповідає більший момент інерції. У нашому випадку ця умова не виконується: $m_y > m_x$, але $J_{xc} > J_{yc}$. Тому переріз необхідно розвернути на 90° , тоді $J_{xc} = 4,6a^4$; $J_{yc} = 85,024a^4$.

Знайдемо радіуси інерції і гнучкості:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{4,6a^4}{16,8a^2}} = 0,523a; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{85,024a^4}{16,8a^2}} = 2,25a;$$

$$I_x = \frac{m_x \mathbf{l}}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 2,80}{0,523a} = \frac{3,75}{a}; \quad I_y = \frac{m_y \mathbf{l}}{i_y} = \frac{2 \cdot 2,80}{2,25a} = \frac{2,49}{a}.$$

Оскільки $I_x > I_y$, то стійка швидше втратить стійкість у площині zy . Отже, подальший підбір перерізу ведемо за I_x .

Приймаємо $\Phi_0 = 0,5$. Тоді

$$F = \frac{P}{\Phi_0 [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 0,004 \text{ м}^2 = 16,8a^2.$$

Тоді

$$a = \sqrt{\frac{0,004}{16,8}} = 0,0154 \text{ м.}$$

$$I_x = \frac{3,75}{0,0154} = 244.$$

Таке значення гнучкості перевищує найбільше значення гнучкості у таблиці коефіцієнтів j , тому приймаємо $\varphi_1 = 0,19$;

Робимо наступний крок ітераційного процесу:

$$F = \frac{P}{j_1[\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,19 \cdot 160} = 0,0105 \text{ м}^2 = 16,8a^2.$$

Тоді

$$a = \sqrt{\frac{0,0105}{16,8}} = 0,025 \text{ м.}$$

$$I_x = \frac{3,75}{0,025} = 150;$$

При $I_x = 150$ коефіцієнт $\varphi'_1 = 0,32$.

Коефіцієнт φ'_1 значно відрізняється від j_1 , тому задаємося новим значенням:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,19 + 0,32}{2} = 0,255,$$

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,255 \cdot 160} = 0,0078 \text{ м}^2 = 16,8a^2.$$

Тоді

$$a = \sqrt{\frac{0,0078}{16,8}} = 0,0216 \text{ м}, \quad I_x = \frac{3,75}{0,0216} = 174.$$

При $I_x = 174$ коефіцієнт $\varphi'_2 = 0,248$ (значення знаходимо шляхом інтерполяції).

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,255 + 0,248}{2} \approx 0,252,$$

$$F_3 = \frac{P}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,252 \cdot 160} = 0,00795 \text{ м}^2 = 16,8a^2.$$

Тоді

$$a = \sqrt{\frac{0,00795}{16,8}} = 0,0218 \text{ м.}$$

$$I_x = \frac{3,75}{0,0218} = 173.$$

При $I_x = 174$ коефіцієнт $\varphi'_3 = 0,251$.

Діюче напруження:

$$s = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,251 \cdot 0,00795} = 160,37 \text{ МПа.}$$

Перенавантаження складає

$$\delta = \frac{160 - 160,37}{160} \cdot 100\% = 0,23\%.$$

Тобто перенавантаження не перевищує 5%, що допускається.

6.2 Визначення напружень під час коливань

На стрижневій конструкції (рис. 6.8) установлений електродвигун вагою m , що обертається зі швидкістю n . Відцентрова сила, що виникає під час роботи двигуна, $T = 0,3 m g$. Переріз стрижньової рами – двотавр, ферми – труба, зовнішній діаметр якої D , внутрішній $d = 0,9D$. Визначити найбільші напруження в стрижнях та число обертів двигуна, при яких настає резонанс. Модуль пружності матеріалу стрижнів $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 6.3 та 6.4 і рисунку 6.8

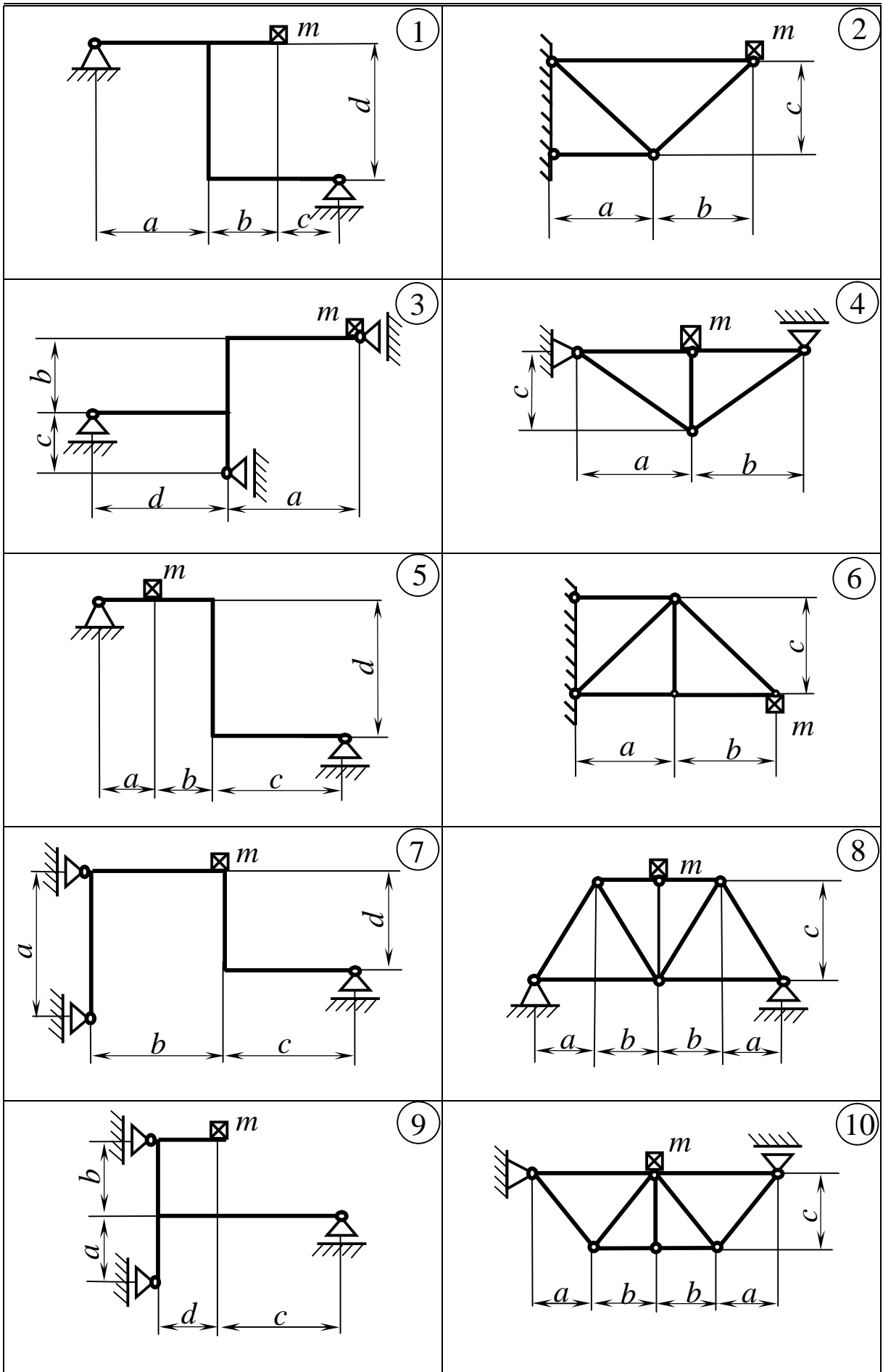


Рисунок 6.8

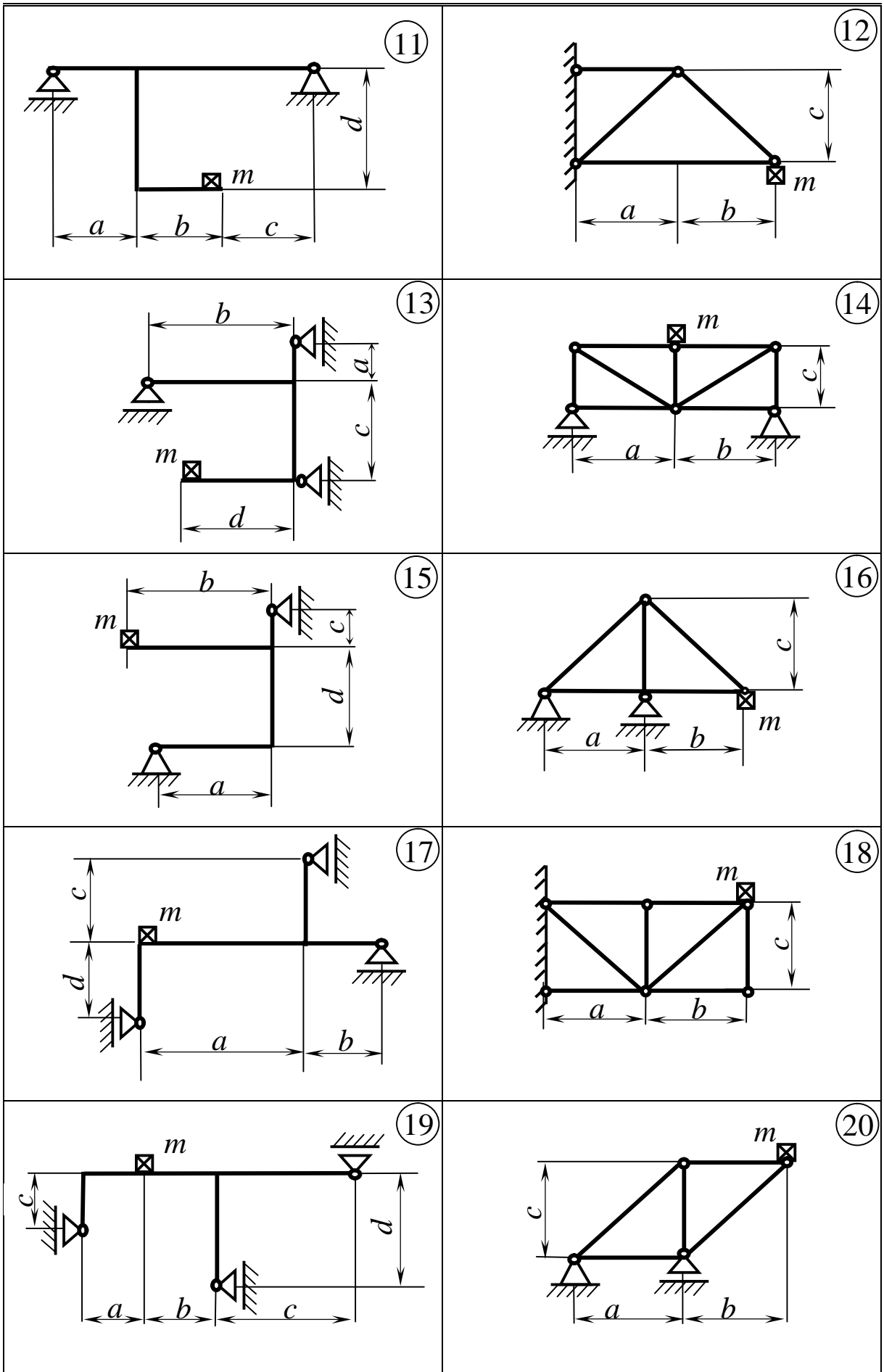


Рисунок 6.8, аркуш 2

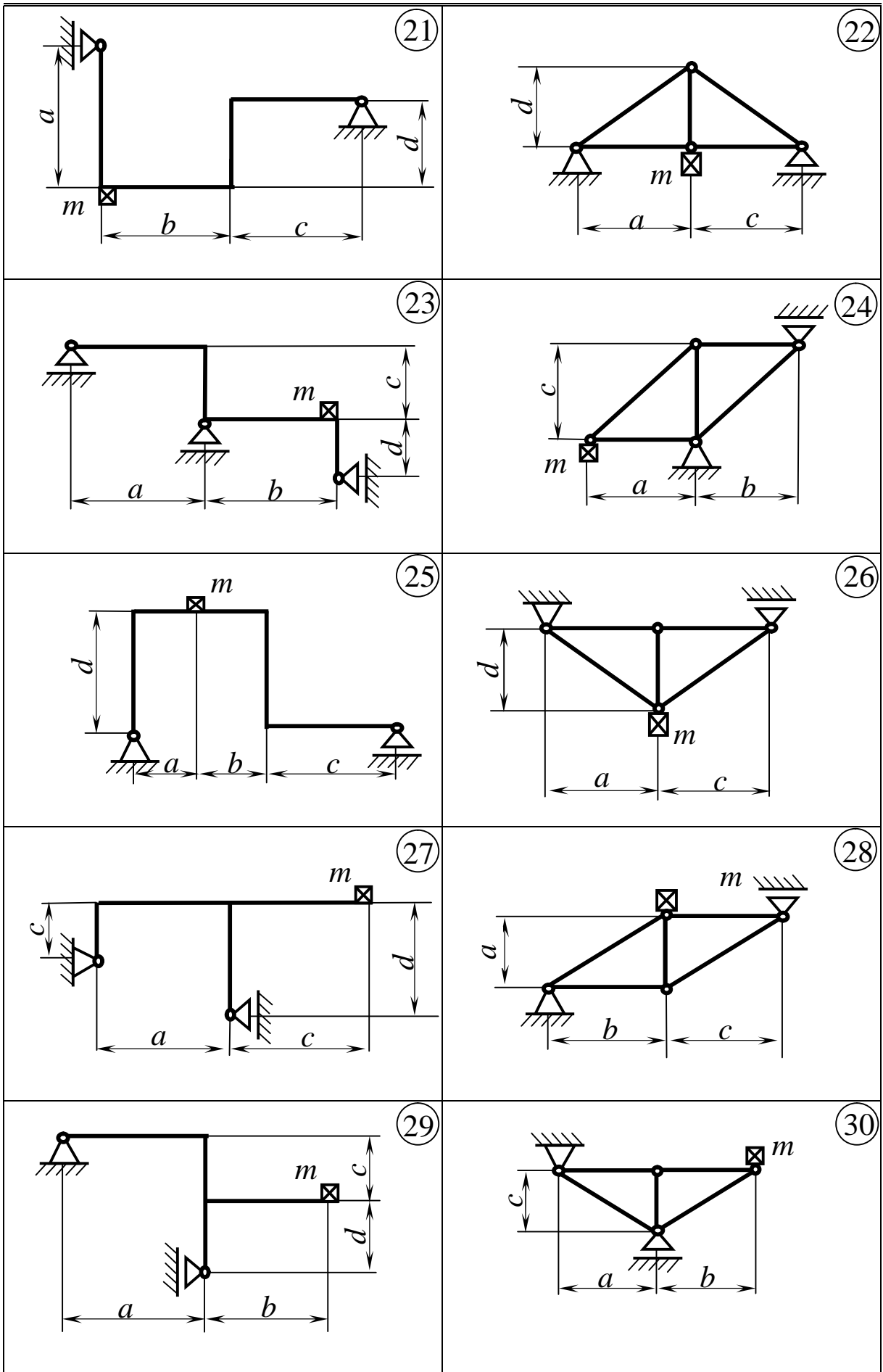


Рисунок 6.8, аркуш 3

Таблиця 6.3 – Вихідні дані до задачі 6.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	1500	1700	1900	2100	2200	2400	2600	1300	1100	2800
Двотавр	12	14	16	18	20	22	24	27	30	33
D , см	5,9	5,8	6,0	6,6	7,5	7,0	7,3	8,6	6,8	9,4
a , м	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	2,0	1,4	2,2

Таблиця 6.4 – Вихідні дані до задачі 6.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n , об./хв	150	170	190	210	220	240	260	130	110	280
v , м	2,9	2,7	2,5	2,1	1,9	1,7	1,6	1,2	1,2	1,2
c , м	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,6	2,8	1,4
d , м	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	2,0	1,4	2,2

6.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.2

1 Для визначення найбільшого внутрішнього зусилля і власної частоти коливань до стрижневої системи в точці, де розташована зосереджена маса, прикладається в напрямку коливань сила $\bar{X}_1 = 1$.

У випадку ферми знаходяться повздовжні сили в стрижнях методом вирізання вузлів і визначається переміщення від одиничної сили по напрямку коливань:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E F} \sum_{i=1}^n \bar{N}_i^2 \mathbf{l}_i,$$

де N_i – подовжня сила в i -му стрижні від одиничної сили;

\mathbf{l}_i – довжина стрижня.

2 Для рами будується епюра згинальних моментів \bar{M} і визначається переміщення ваги, викликане одиничною силою:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E I_x} \int \bar{M}_i^2 dz, \quad (6.1)$$

де M_i – згинальний момент від одиничної сили.

Інтеграл у формулі (6.1) обчислюється способом Верещагіна чи “перемноженням” епюр за універсальною формулою (5.1) кінцевих ординат.

3 Визначаються геометричні характеристики перерізів стрижня – площа, момент інерції відносно осі.

4 Власна частота коливань для ферми і рами обчислюється за формулою:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}}.$$

5 Знаходиться частота сили, що збуджує:

$$\Omega = \frac{p n}{30}.$$

6 Коефіцієнт наростання коливань β для випадку відсутності сил опору обчислюється за формулою:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right|}.$$

7 Визначаються найбільші напруження в стрижнях системи з урахуванням коливань: Найбільші напруження в стрижнях ферми:

$$S = \frac{\bar{N}_{max} (mq + bT)}{F},$$

де N_{max} – подовжня сила в найбільш навантаженому стрижні від сили $\bar{X}_1 = 1$, прикладеної в напрямку коливань ваги;

β - коефіцієнт наростання коливань;

F – площа його поперечного перерізу.

Найбільше напруження в стрижнях рами:

$$S = \frac{\bar{M}_{max} (mq + bT)}{W_x},$$

де \bar{M}_{max} – максимальний згинальний момент від одиничної сили, прикладеної в точці, де зосереджена вага системи, у напрямку коливань;

W_x – осьовий момент опору перерізу.

8 Знаходиться число обертів двигуна, при якому настає резонанс:

$$n_p = \frac{30 w}{p}.$$

6.2.2 Приклад розв'язання задачі 6.2 (варіант 1)

Визначити максимальні напруження в стрижнях рами (рис. 6.9) під час коливань та кількість обертів двигуна, при яких настає резонанс, якщо вага двигуна $m = 2$ тони, кількість обертів $n = 300$ об/хв.

Відомо, що перерізом рами є двотавр 27, для якого $I_x = 5010$ см⁴, $W_x = 371$ см³.

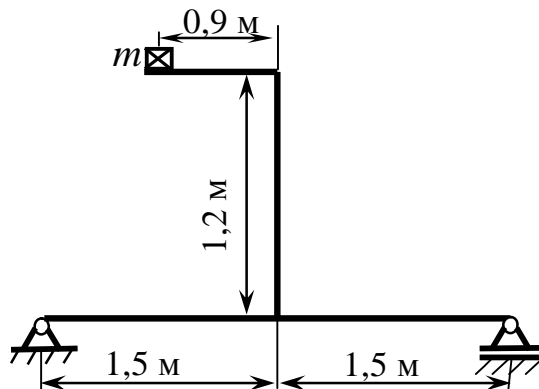


Рисунок 6.9

1 У точці, де розташовано двигун (рис. 6.10), прикладаємо одиничну силу і будуємо від неї епюру згинальних моментів. Для цього знайдемо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; \quad -\bar{X}_1(1,5 - 0,9) + \bar{R}_2(1,5 + 1,5) = 0;$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1 \cdot (1,5 - 0,9)}{1,5 + 1,5} = 0,2;$$

$$\sum M_B = 0; \quad \bar{X}_1(0,9 + 1,5) - \bar{R}_1(1,5 + 1,5) = 0;$$

$$\bar{R}_1 = \frac{1 \cdot (0,9 + 1,5)}{1,5 + 1,5} = 0,8;$$

$$\sum P_x = 0; \quad \bar{H} = 0.$$

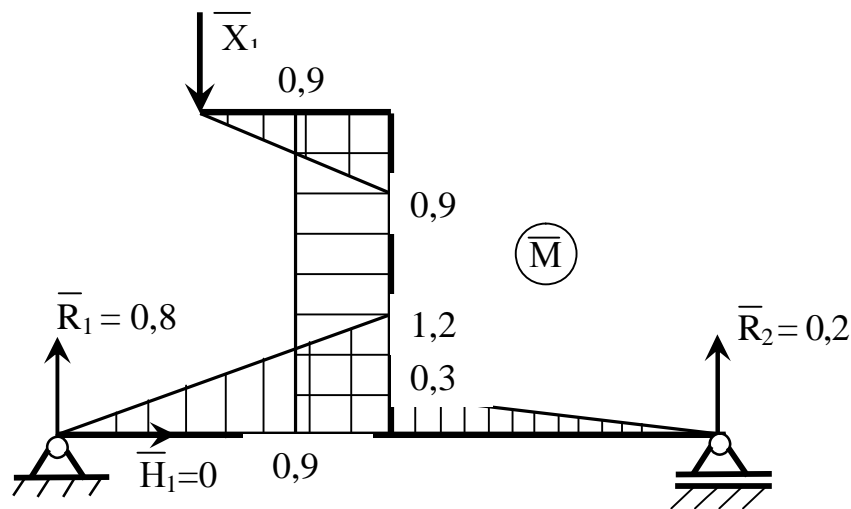


Рисунок 6.10

2 Помножимо одиничну епюру саму на себе:

$$d_{11} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} \left[\frac{0,9}{6} (2 \cdot 0,9 \cdot 0,9) + \frac{1,2}{6} (2 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9) + \frac{1,5}{6} 2 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \right] =$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} (0,972 + 0,243 + 0,72 + 0,045) = 1,98 \cdot 10^{-7} \frac{M}{H}$$

3 Знаходимо частоту власних коливань:

$$w = \sqrt{\frac{1}{md_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{2000 \cdot 1,982 \cdot 10^{-7}}} = 50,25 \text{ c}^{-1}.$$

4 Визначаємо відцентрову силу T:

$$T = 0,3mg = 0,3 \cdot 2000 \cdot 9,81 = 5886 \text{ Н.}$$

5 Визначаємо частоту вимушених коливань:

$$\Omega = \frac{pn}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

6 Знаходимо коефіцієнт наростання коливання:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{31,4}{50,25} \right)^2 \right|} = 1,64.$$

7 Визначаємо напруження під час коливань:

$$\begin{aligned} S_{max} &= \frac{M_{max}}{W_x} (mg + bT) = \frac{1,2}{371 \cdot 10^{-6}} (2000 \cdot 9,81 + 1,64 \cdot 5886) = \\ &= 98,84 \cdot 10^6 = 94,84 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

8 Визначаємо кількість обертів за хвилину, що відповідає резонансу:

$$n_p = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 50,25}{3,14} = 480,1 \text{ об/хв.}$$

6.2.4 Приклад розв'язання задачі 6.2 (варіант 2)

Визначити максимальні напруження в стрижнях ферми (рис. 6.11) під час коливань та кількість обертів двигуна, при яких настає резонанс, якщо вага двигуна $m = 2$ тони, кількість обертів $n = 300$ об/хв.

Відомо, що перерізом стрижня є труба, зовнішній діаметр якої D , внутрішній $d = 0,9D$.

У точці, де розташовано двигун (рис. 6.12), прикладаємо одиничну силу і будуємо від неї епюру поздовжніх зусиль.

Знайдемо реакції опор. Оскільки конструкція симетрична, то реакції

$$R_1 = R_2 = 0,5;$$

$$\sum P_x = 0; \quad \bar{H}_1 = 0.$$

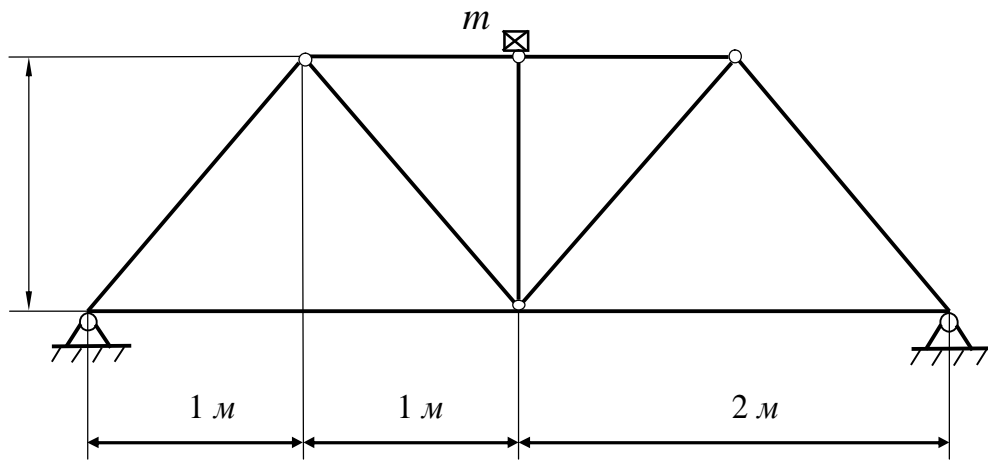


Рисунок 6.11

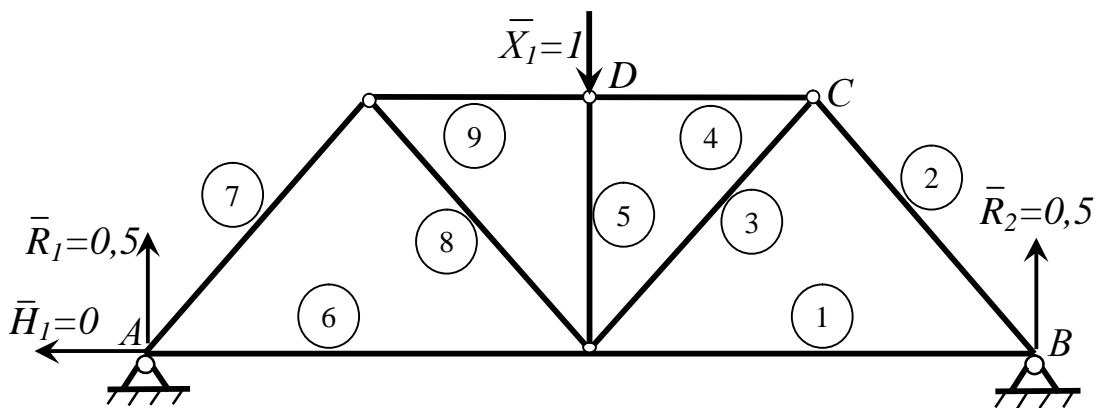


Рисунок 6.12

Для полегшення подальших розрахунків пронумеруємо усі стрижні. Внутрішні зусилля у стрижнях знайдемо, розглядаючи рівновагу кожного з вузлів. Під час розрахунків слід зважати на те, що конструкція симетрична, завдяки цьому внутрішні зусилля будуть попарно рівні й тому можна визначати тільки 5 внутрішніх зусиль.

Розглянемо рівновагу вузла A (див. рис. 6.12). На цей вузол діють реакція R_2 (рис. 6.13) та внутрішні зусилля N_1 та N_2 .

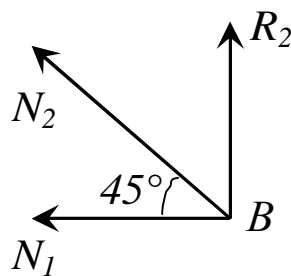


Рисунок 6.13

$$\begin{aligned} \Sigma P_y &= 0; & R_2 + N_2 \cdot \sin 45^\circ &= 0; \\ 0,5 + N_2 \cdot 0,71 &= 0; & N_2 &= -0,71; \\ \Sigma P_x &= 0; & -N_1 - N_2 \cdot \cos 45^\circ &= 0; & N_1 &= 0,5. \end{aligned}$$

Розглянемо рівновагу вузла C (див. рис. 6.12), на нього діють внутрішні зусилля N_2 , N_3 та N_4 (рис. 6.14), з яких N_2 відоме, а інші два зусилля – невідомі.

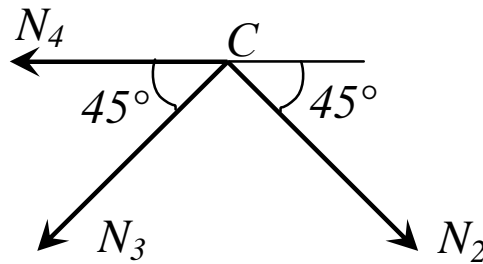


Рисунок 6.14

$$\begin{aligned} \Sigma P_y &= 0; & -N_2 \cdot \sin 45^\circ - N_3 \cdot \sin 45^\circ &= 0; \\ N_3 &= -N_2 & &= 0,71; \\ \Sigma P_x &= 0; & -N_4 - N_3 \cdot \cos 45^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ &= 0; & N_4 &= -1. \end{aligned}$$

Так само розглянемо рівновагу верхнього вузла D (див. рис. 6.15), на нього (рис. 6.14) діють внутрішні зусилля N_2 , N_3 та N_4 , з яких N_2 відоме, а інші два зусилля – невідомі.

Остаточно епюра поздовжніх зусиль для заданої ферми набуває вигляду, зображеного на рисунку 6.16.

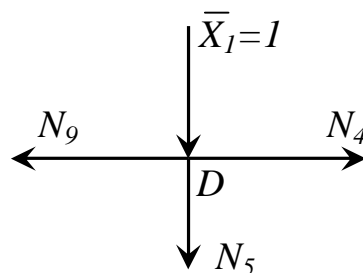


Рисунок 6.15

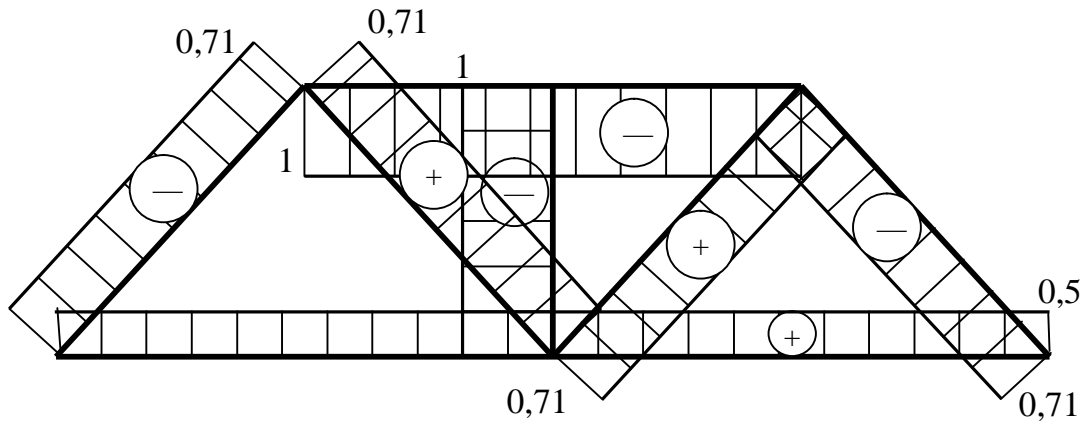


Рисунок 6.16

Площа перерізу для стрижнів заданої ферми дорівнює:

$$F = \frac{pD^2}{4} - \frac{pd^2}{4} = \frac{p \cdot 10^2}{4} - \frac{p \cdot 9^2}{4} = 14,92 \text{ см}^4;$$

$$\Sigma P_y = 0; -N_5 - \bar{X}_1 = 0; N_5 = -1.$$

Помножуємо одиничну епюру саму на себе:

$$d_{11} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 14,92 \cdot 10^{-4}} \left[0,5^2 \cdot 2 + 0,71^2 \cdot 1,41 + 0,71^2 \cdot 1,41 + \right. \\ \left. + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + 0,5^2 \cdot 2 + 0,71^2 \cdot 1,41 + 0,71^2 \cdot 1,41 + 1^2 \cdot 1 \right] = 2,3 \cdot 10^{-7}.$$

Знаходимо частоту власних коливань:

$$w = \sqrt{\frac{1}{md_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{2000 \cdot 2,3 \cdot 10^{-7}}} = 46,6 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо відцентрову силу T:

$$T = 0,3mg = 0,3 \cdot 2000 \cdot 9,81 = 5886 \text{ Н}.$$

Визначаємо частоту вимушених коливань:

$$\Omega = \frac{pn}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Знаходимо коефіцієнт наростання коливання:

$$b = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{w}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{31,4}{46,6}\right)^2\right|} = 1,83$$

Визначаємо напруження під час коливань:

$$\begin{aligned} s_{max} &= \frac{N_{max}}{F} (mg + bT) = \frac{1}{14,92 \cdot 10^{-4}} (2000 \cdot 9,81 + 1,83 \cdot 5886) = \\ &= 20,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20,4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Визначаємо кількість обертів за хвилину, що відповідає резонансу:

$$n_p = \frac{30w}{p} = \frac{30 \cdot 46,6}{3,14} = 445 \text{ об/хв.}$$

ЛІТЕРАТУРА

1 Писаренко Г. С. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. А. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.

2 Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 612 с.

3 Дарков А. В. Сопротивление материалов: Учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.

4 Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев и др. – Киев: Наук. думка, 1988. – 704 с.

Додаток А

Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Кафедра технічної механіки

Розрахунково-графічне завдання № 1 з опору матеріалів

**Розрахунок стрижневих систем, які працюють
на розтягання та стискання**

Варіант № 7214

Виконав

Студент гр. ТМ05-1

Петренко М. П.

Перевірив

Овчаренко В. А.

Краматорськ 2005

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

КУТОВИЙ Леонід Володимирович,
ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович,
ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович,
СОЛОМІН Микола Олексійович,
ДЕНЬЩИКОВ А. Ю.

ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ОПР МАТЕРІАЛІВ»

(для студентів усіх механічних спеціальностей денної форми навчання)

Редактор О. М. Болкова

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 13,75. Обл.-вид. арк. 10,0.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03 р.