МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Л.В.Кутовий
В.А.Овчаренко

ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

для студентів спеціальності
«Інформаційні технології проектування»
денної форми навчання

Краматорськ 2008

УДК 539. 3/.6
ББК 30.121
З-41

Рецензенти:

В.С.Гапонов, д-р техн.наук, проф. Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

Л.І.Сердюк, д-р техн.наук, проф. Полтавського національного технічного університету, м. Полтава

Ф.Л.Шевченко, д-р техн.наук, проф. Донецького національного технічного університету, м. Донецьк.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 1.4/18-Г-2103 від 09.10.2008

Кутовий Л.В., Овчаренко В.А.

З-41 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Технічна механіка» (для студентів денної форми навчання спеціальності «Інформаційні технології проектування») / Л.В.Кутовий, В.А.Овчаренко. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 144 с.

ISBN 978-966-379-300-9

Містяться умови задач, які входять до завдання, викладаються стислі теоретичні відомості за тематикою задач, які виконуються, рекомендації щодо їх розв'язання, приклади їх виконання та аналіз одержаних результатів.

УДК 539. 3/.6
ББК 30.121

ISBN 978-966-379-300-9

© Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко, 2008
© ДДМА, 2008

З М І С Т

ВСТУП 4

1 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
“СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА” 5
1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла.....5
1.2 Визначення реакцій опор балки та рами.....13

2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
“КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА” 24
2.1 Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному рухах 24
2.2 Кінематичний аналіз плоского механізму.....38

3 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
“ДИАМІКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА”.....52
3.1 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи.....52
3.2 Застосування загального рівняння динаміки при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем свободи 67

4 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА “ОПІР МАТЕРІАЛІВ” 78
4.1 Геометричні характеристики перерізів 78
4.2 Статично визначувана стрижнева система 86
4.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок.....92
4.4 Повна перевірка міцності балки 103
4.5 Згинання з крученням 114

ЛІТЕРАТУРА.....124

ДОДАТКИ.....126
Додаток А. Двотаври 126
Додаток Б Нормальні лінійні розміри.....126
Додаток В. Швелери 127
Додаток Г. Кутики сталеві гарячекатані рівносмужні.....128
Додаток Д. Кутики сталеві гарячекатані нерівно смужні.....130
Додаток Е. Питання для підготовки до екзамену.....132

ВСТУП

Технічна механіка містить багато наукових узагальнень, які допомагають майбутнім інженерам різних спеціальностей правильно розуміти ті явища, які вони спостерігають, і робити науково обґрунтовані висновки. Крім того, ця дисципліна є науковою базою багатьох галузей сучасної техніки. Вона є основою таких загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, гідравліка, деталі машин, динаміка машин та інші, що вивчаються у вузах. Знання технічної механіки потрібні студентам для успішного вивчення профілюючих предметів, а також для творчої інженерної діяльності на промисловому виробництві після закінчення вузу.

Запропоновані методичні вказівки складено відповідно до уніфікованого навчального плану програми та робочого плану з цього курсу. Курсові розрахунково-графічні роботи з технічної механіки спрямовані на розвиток у студентів уміння виконувати типові задачі. Крім того, ці роботи сприяють кращому засвоєнню теоретичного матеріалу й придбанню навичок самостійної практичної роботи.

Кожний із студентів отримує варіант, згідно з яким він протягом семестру виконує усі задачі завдань. Номер варіанта задає викладач.

Номер варіанта складається із ***чотирьох*** *цифр:*

- перша цифра – це номер стовпчика першої таблиці,
- друга цифра – номер стовпчика другої таблиці,
- дві останні цифри відповідають номеру схеми.

Завдання видаються після вивчення відповідних тем і повинні бути виконаними у термін, визначений робочим планом і для перевірки. Завдання повинні бути оформлені відповідно до вимог і правил оформлення розрахунково-графічних завдань згідно з ДСТУ.

Після перевірки (а при необхідності – після доопрацювання) студент повинен захистити завдання у визначений термін.

1 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА»

1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла

Визначити опорні реакції твердого тіла, зображеного на рис. 1.1. Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини, м	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
b	2	3	4	5	1	5	4	3	2	1
c	3	4	5	1	2	4	3	2	1	5

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
M, кН·м	14	18	12	16	20	14	18	12	16	20
P, кН	12	8	10	14	18	14	16	10	14	18
q, кН/м	5	2	3	4	6	5	4	3	2	4

1.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.1

Зазначена система сил характеризується тим, що всі сили системи діють в одній площині, але не мають спільної точки перетину їх ліній дії і не паралельні одна одній, тобто маємо довільну плоску систему сил.

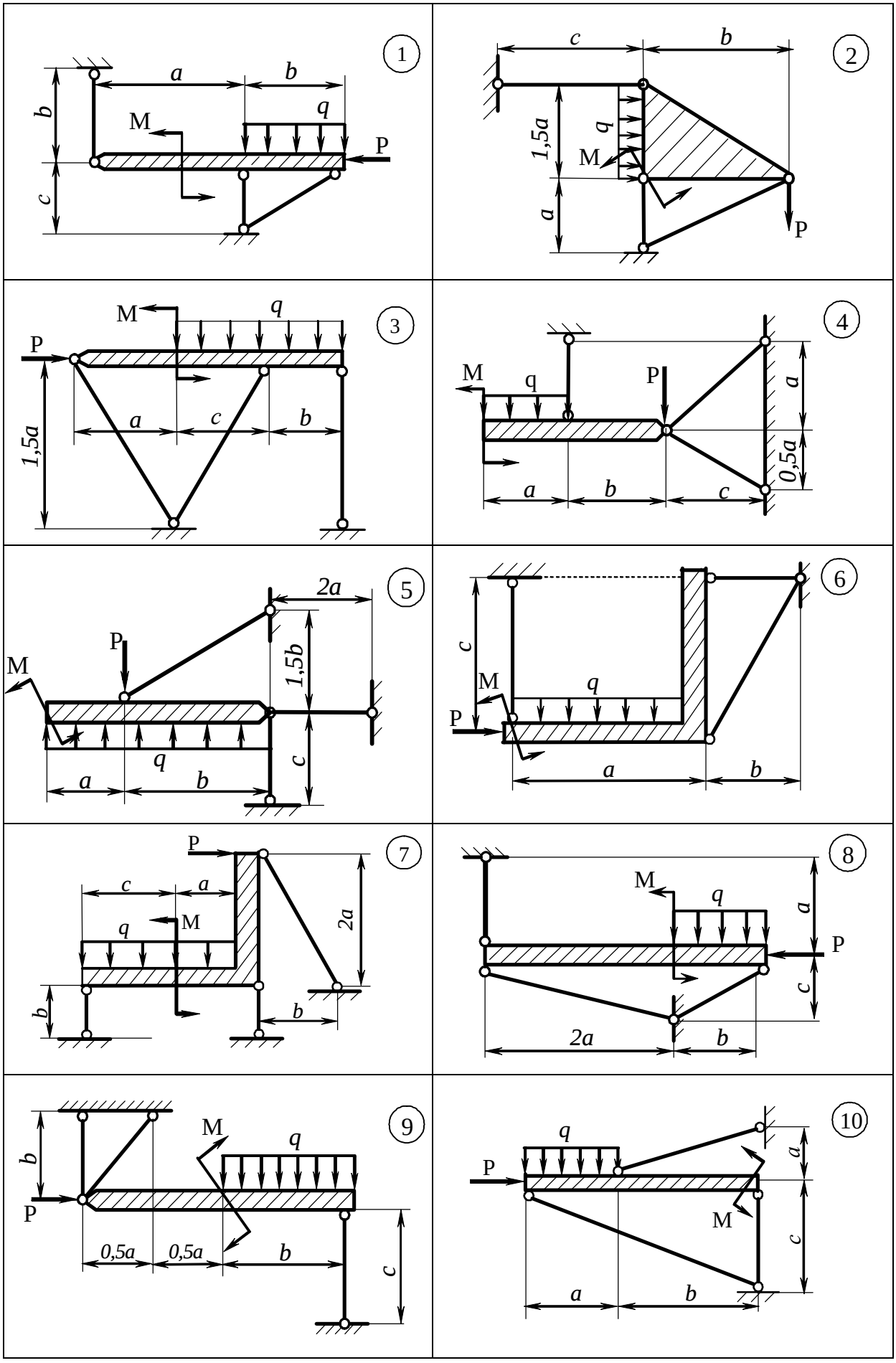


Рисунок 1.1 - Схеми до варіантів завдання 1.1

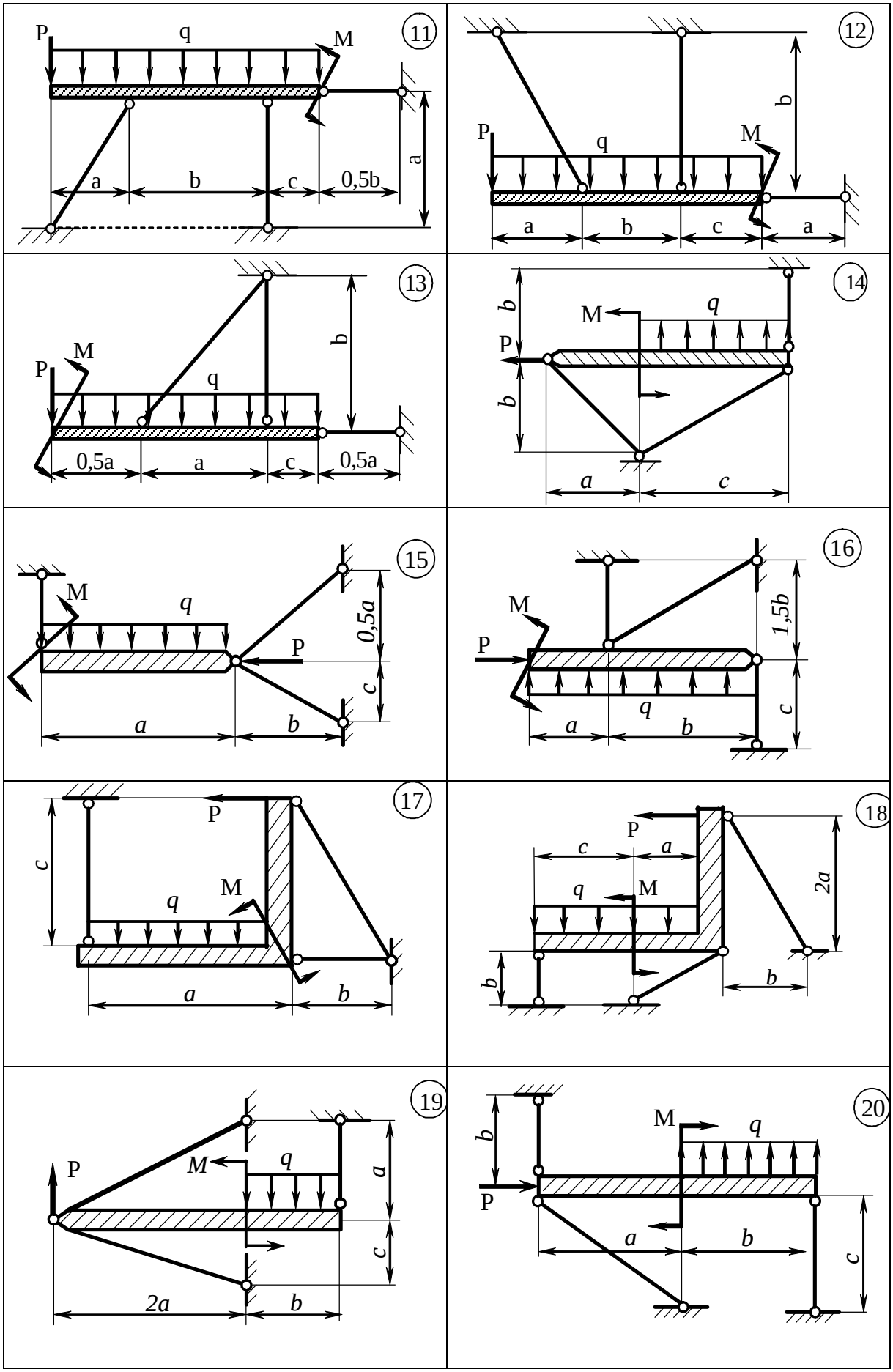


Рисунок 1.1, аркуш 2

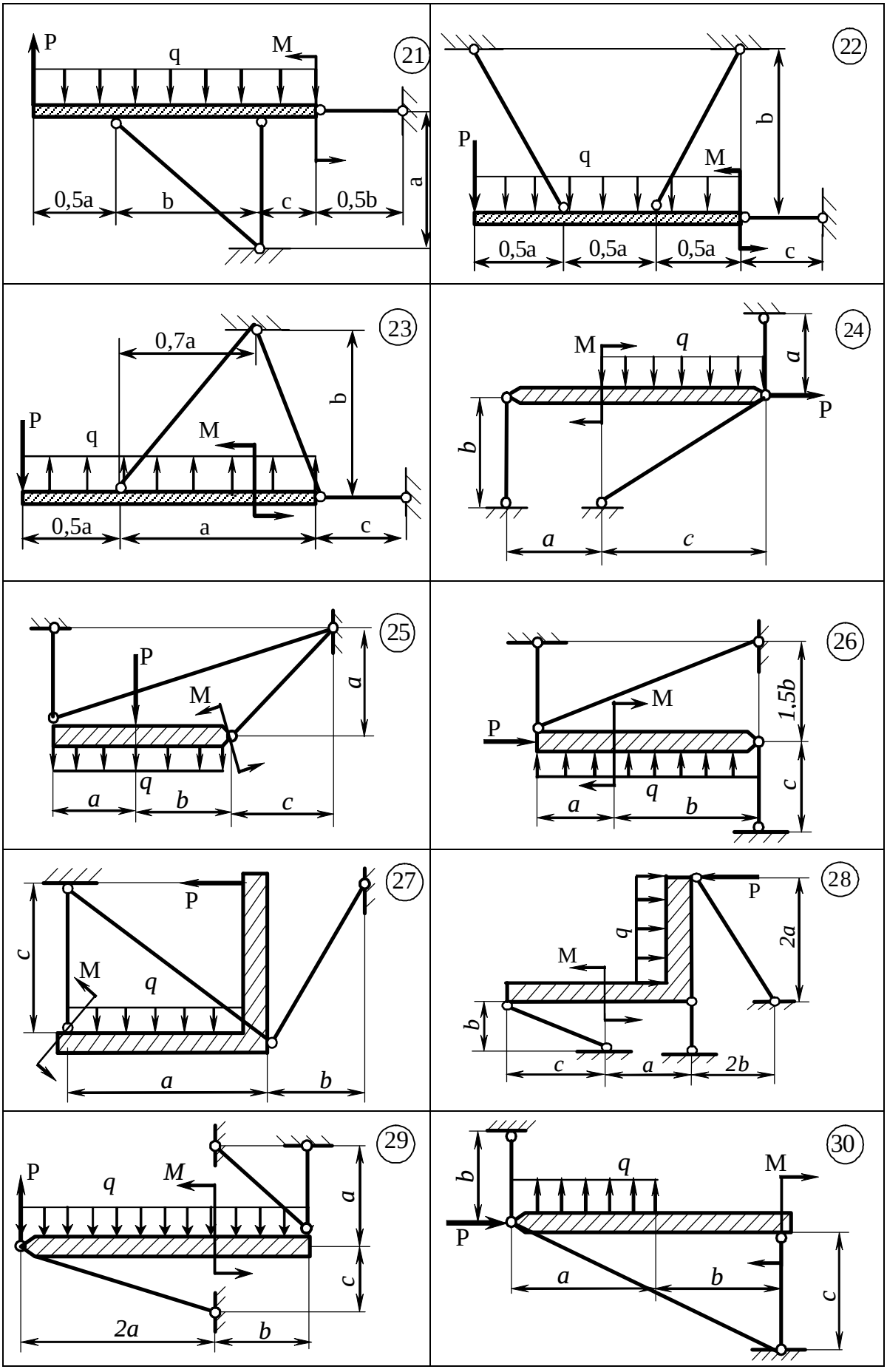


Рисунок 1.1, аркуш 3

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил системи на дві взаємно перпендикулярні осі в площині дії сил дорівнювали нулю і щоб при цьому дорівнювала нулю сума алгебраїчних моментів сил відносно будь-якої точки цієї площини:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A(P_k) = 0, \tag{1.1}$$

де n – кількість сил у системі (k = 1,2,3...,n);

A – довільна точка в площині дії сил.

Це перша (основна) форма аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил. Крім неї існують ще дві форми.

Друга форма умов рівноваги довільної плоскої системи сил використовує дві довільні точки в площині дії сил, наприклад A та B, та суму проекцій всіх сил системи на вісь (наприклад x) в площині дії сил, яка не перпендикулярна прямій AB:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A(P_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(P_k) = 0. \tag{1.2}$$

Третя форма умов рівноваги довільної плоскої системи сил використовує три довільні точки в площині дії сил, наприклад, A, B та C, при цьому моментні точки не повинні лежати на одній прямій:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(P_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(P_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_C(P_k) = 0, \tag{1.3}$$

Застосувавши будь-яку з зазначених форм умов рівноваги, можна визначити не більше трьох невідомих опорних реакцій твердого тіла, навантаженого тією чи іншою заданою системою сил, довільно розташованих в одній площині.

1.1.2 Приклад розв'язання задачі 1.1

Для заданої системи (балки), показаної на рисунку 1.2, знайти опорні реакції, якщо: P = 8 кН; q = 2кН/м; M = 10кНм; a = 3м; b = 2м; c = 2м; $a = 45^0$, $\beta = 30^0$.

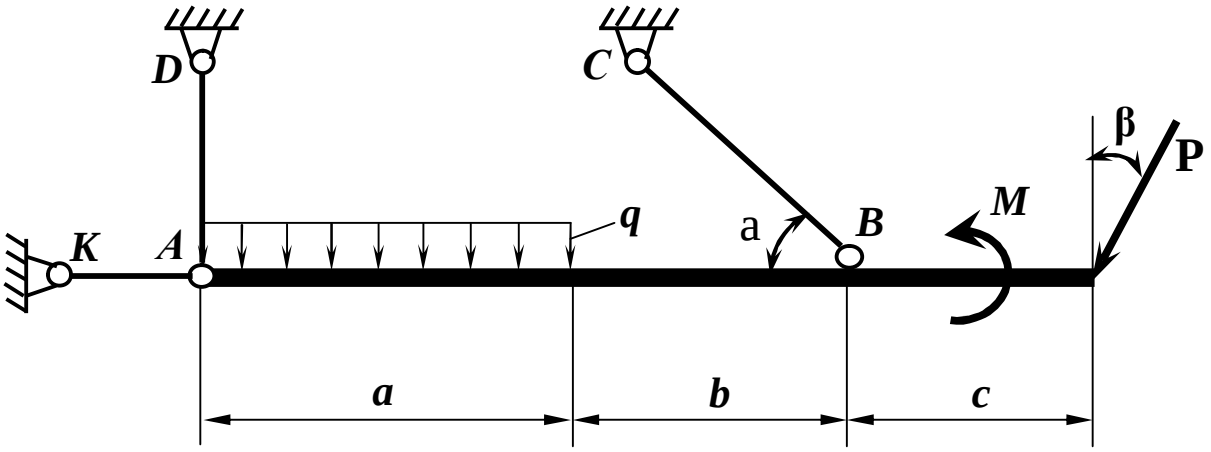


Рисунок 1.2 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.1

Розв'язання. Розглянемо систему врівноважених сил, діючих на балку.

Відкинемо в'язі (див. рис. 1.2) – невагомі двошарнірні стрижні AD, AK і BC, а дію в'язей замінимо їх реакціями (рис.1.3).

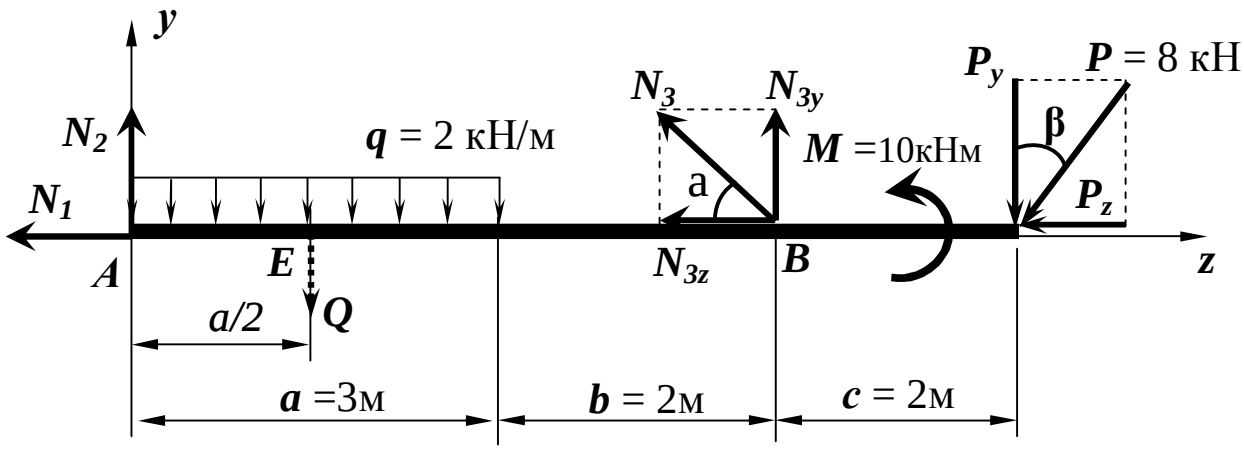


Рисунок 1.3 – Заміна в'язів реакціями

Вважаючи стрижні AD, AK і BC розтягненими, спрямуємо їх реакції N_1, N_2 і N_3 уздовж відповідних стрижнів за напрямком від балки.

Спростуємо систему сил, діючих на балку.

Розподілене навантаження з інтенсивністю q, що діє на частину балки довжиною a, замінимо рівнодійною Q, прикладеною посередині навантаженого відрізку балки. Її модуль визначаємо як площу епюри розподіле-

ного навантаження: $Q = q \cdot a = 2 \cdot 3 = 6\,кН.$

Силу P розкладемо на складові – P_z та P_y, визначимо їх модулі:

$$P_z = P \cdot \sin b = 8 \cdot 0{,}5 = 4\,кН; \quad P_y = P \cdot \cos b = 8 \cdot 0{,}866 = 6{,}93\,кН.$$

Реакцію N_3 також розкладемо на складові – N_{3z} та N_{3y}:

$$N_{3z} = N_3 \cdot \cos a \approx 0{,}707 N_3; \quad N_{3y} = N_3 \cdot \sin a \approx 0{,}707 N_3.$$

Для плоскої довільної системи сил, діючих на балку, запишемо три рівняння рівноваги, з яких визначимо три невідомі – N_1, N_2 і N_3.

Виберемо другу форму умов рівноваги (1.2), оскільки при цьому в більшості рівнянь буде лише одна невідома:

$$\begin{cases} \sum P_{kz} = 0; \qquad -N_1 - N_3 \cdot \cos a - P \cdot \sin b = 0; & (1.4) \\ \sum M_A(P_k) = 0; -Q \cdot \dfrac{a}{2} + N_3(a+b) \cdot \sin a + M - P(a+b+c) \cdot \cos b = 0; & (1.5) \\ \sum M_B(P_k) = 0; -N_2 \cdot (a+b) + Q \cdot \left(b + \dfrac{a}{2}\right) + M - Pc \cdot \cos b = 0; & (1.6) \end{cases}$$

З рівняння (1.5) знаходимо:

$$N_3 = \frac{P(a+b+c)\cos b + Q \cdot \frac{a}{2} - M}{(a+b)\sin a} = \frac{8 \cdot 0{,}866 \cdot 7 + 6 \cdot 1{,}5 - 10}{0{,}707 \cdot 5} = 13{,}44\ кН.$$

З рівняння (1.4) знаходимо:

$$N_1 = -P \sin b - N_3 \cos a = -6 \cdot 0{,}5 - 13{,}44 \cdot 0{,}707 = -12{,}49\ кН.$$

З рівняння (1.6) знаходимо:

$$N_2 = \frac{Q(\frac{a}{2} + b) + M - P \cos b \cdot c}{(a+b)} = \frac{6\left(\frac{3}{2} + 2\right) + 10 - 8 \cdot 0{,}866 \cdot 2}{5} = 3{,}43\ кН.$$

Після розв'язання задачі треба обов'язково зробити перевірку. Для цього треба скласти ще одне рівняння рівноваги, але таке, яке раніше не використовувалось.

У нашому прикладі можна скласти рівняння – суму проекцій всіх сил

системи на вісь y:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \qquad N_2 - Q + N_3 \cdot \sin a - P \cdot \cos b = 0. \quad (1.7)$$

Підставимо у рівняння (1.7) знайдені величини:

$$3{,}43 - 6 + 13{,}44 \cdot 0{,}707 - 8 \cdot 0{,}866 = 12{,}932 - 12{,}928 \approx 0.$$

Похибка складає: $d = \dfrac{12{,}932 - 12{,}928}{12{,}928} \cdot 100\% = 0{,}025\%$.

Таким чином можна бути впевненим, що реакції знайдені вірно.

Негативний знак реакції N_1 стрижня 1 означає, що стрижень не розтягнутий, як ми вважали спочатку, а стиснутий. Два других стрижня розтягнути, як ми і вважали. Покажемо на рисунку 1.4 дійсні напрямки реакцій стрижнів.

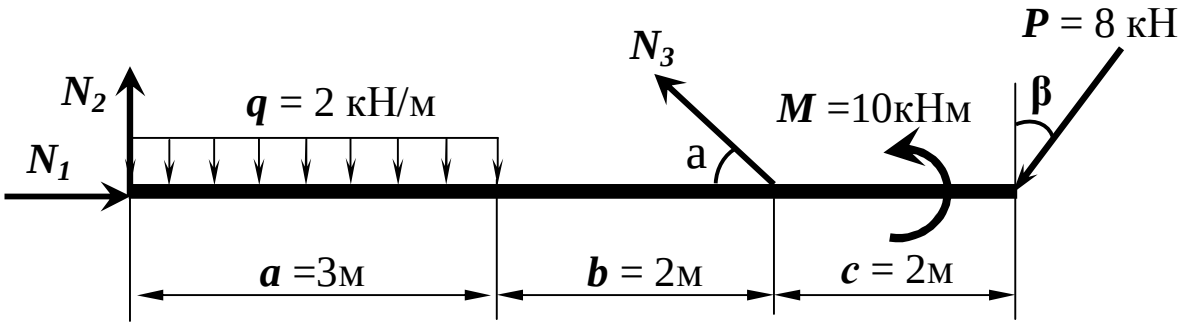


Рисунок 1.4 – Дійсні напрямки реакцій стрижнів

Розв'язок:

1 Реакції стрижнів дорівнюють: $N_1 = 12{,}49$ *кН*; $N_2 = 3{,}43$ *кН*; $N_3 = 13{,}44$ *кН*.

2 Знаки «плюс» при значеннях N_1 та N_2 вказують на те, що дані реакції дійсно спрямовані саме так, як зображено на рисунку 1.4, тобто стрижені 2 і 3 в дійсності є розтягнутими.

3 Негативний знак реакції N_1 стрижня 1 означає, що стрижень не розтягнутий, а стиснутий, як зображено на рисунку 1.4.

1.2 Визначення реакцій опор балки та рами

Визначити опорні реакції твердого тіла (балки та рами).

Вихідні дані вибрати за таблицями 1.3 та 1.4 і рисунків 1.5 та 1.6.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані для задачі 1.2

Величини, м	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	2,0	3,0	2,4	2,8	1,6	1,8	2,4	1,8	1,6	1,4
b	1,6	1,8	1,2	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2,6	2,4
c	1,2	1,4	1,6	1,8	1,5	2,2	2,4	2,6	2,5	2,7
d	1,5	1,3	1,4	2,0	2,4	2,8	3,0	1,5	3,4	4,0

Таблиця 1.4 – Вихідні дані для задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
M, кН·м	12	14	16	18	20	18	16	14	12	16
P, кН	5	6	7	8	5	6	7	8	7	6
q, кН/м	3	2	4	5	4	3	2	5	3	4

1.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.2

Балкою називають стрижень, який працює на згинання.

Рамами називають стрижневі системи, які складаються з прямолінійних стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розміщені стрижні рам називають *стояками*, горизонтальні – *ригелями*. Жорсткість вузлів виключає взаємний поворот скріплених стрижнів, тобто у вузлових точках кути між осями з'єднаних стрижнів залишаються незмінними.

Для визначення реакцій опор рами можна використовувати рівняння (1.1)…(1.3). Але, якщо це можливо, треба вибирати такі рівняння, щоб у кожному з них була тільки одна невідома реакція.

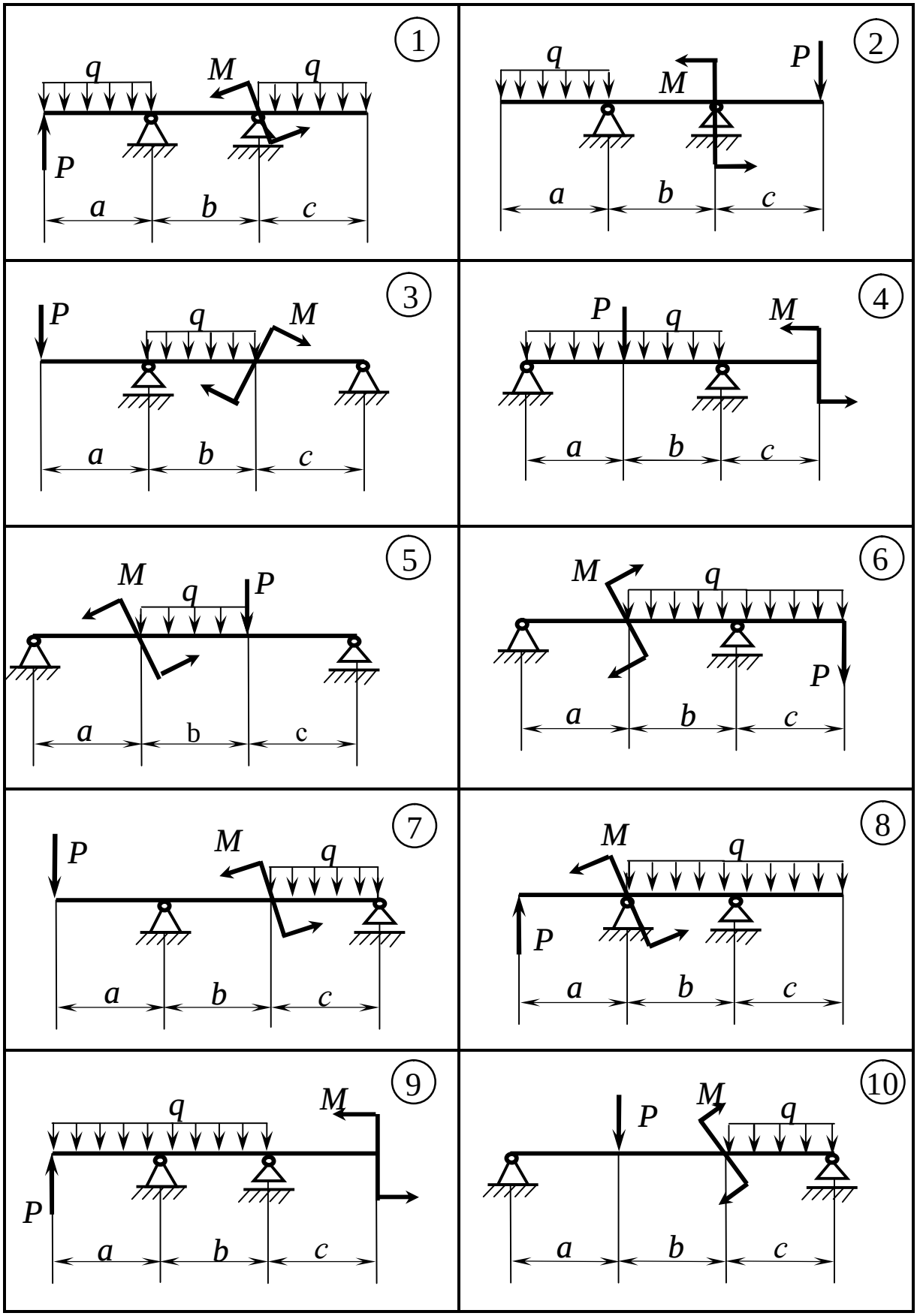


Рисунок 1.5 - Схеми до варіантів завдання 1.2

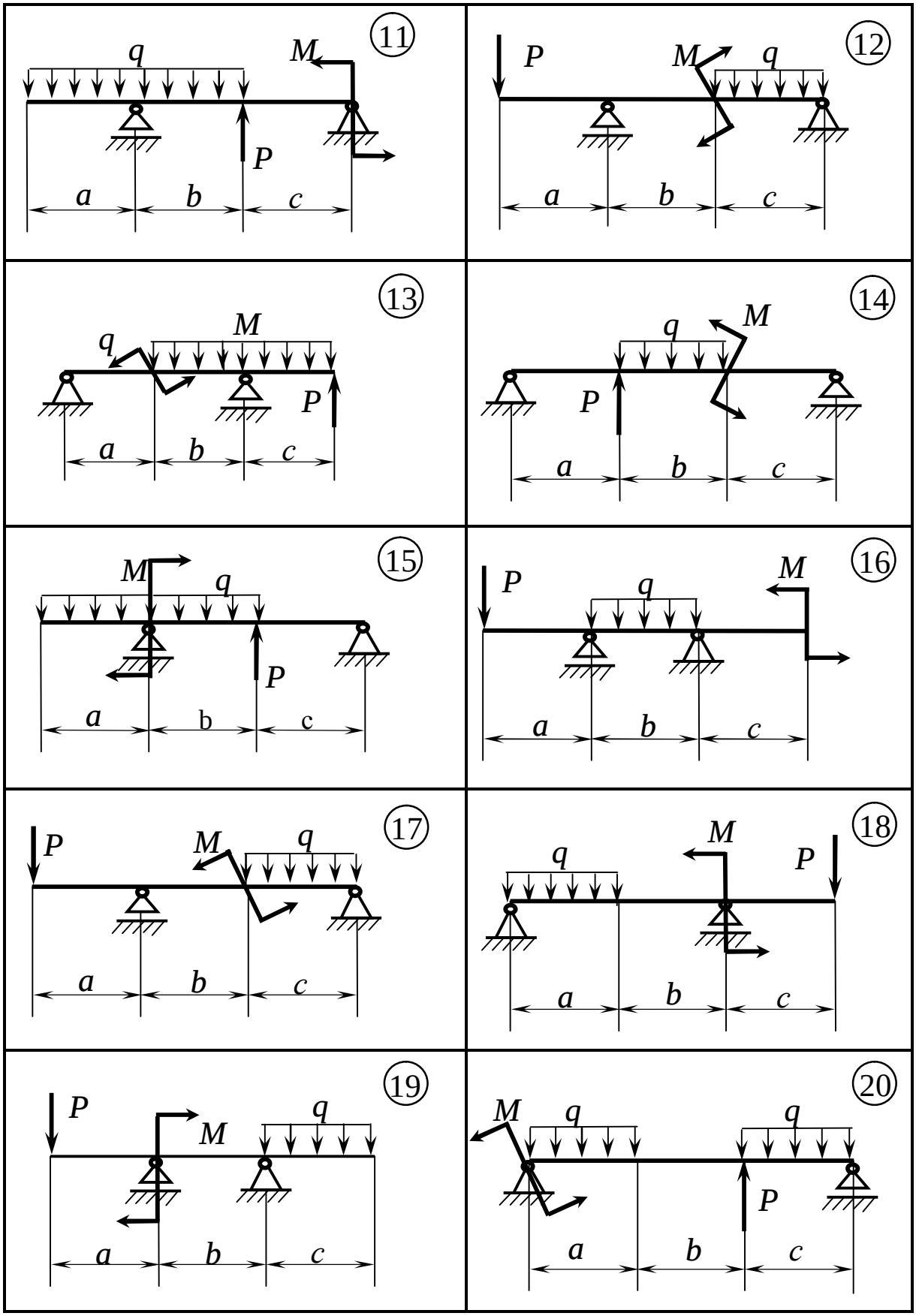


Рисунок 1.5, аркуш 2

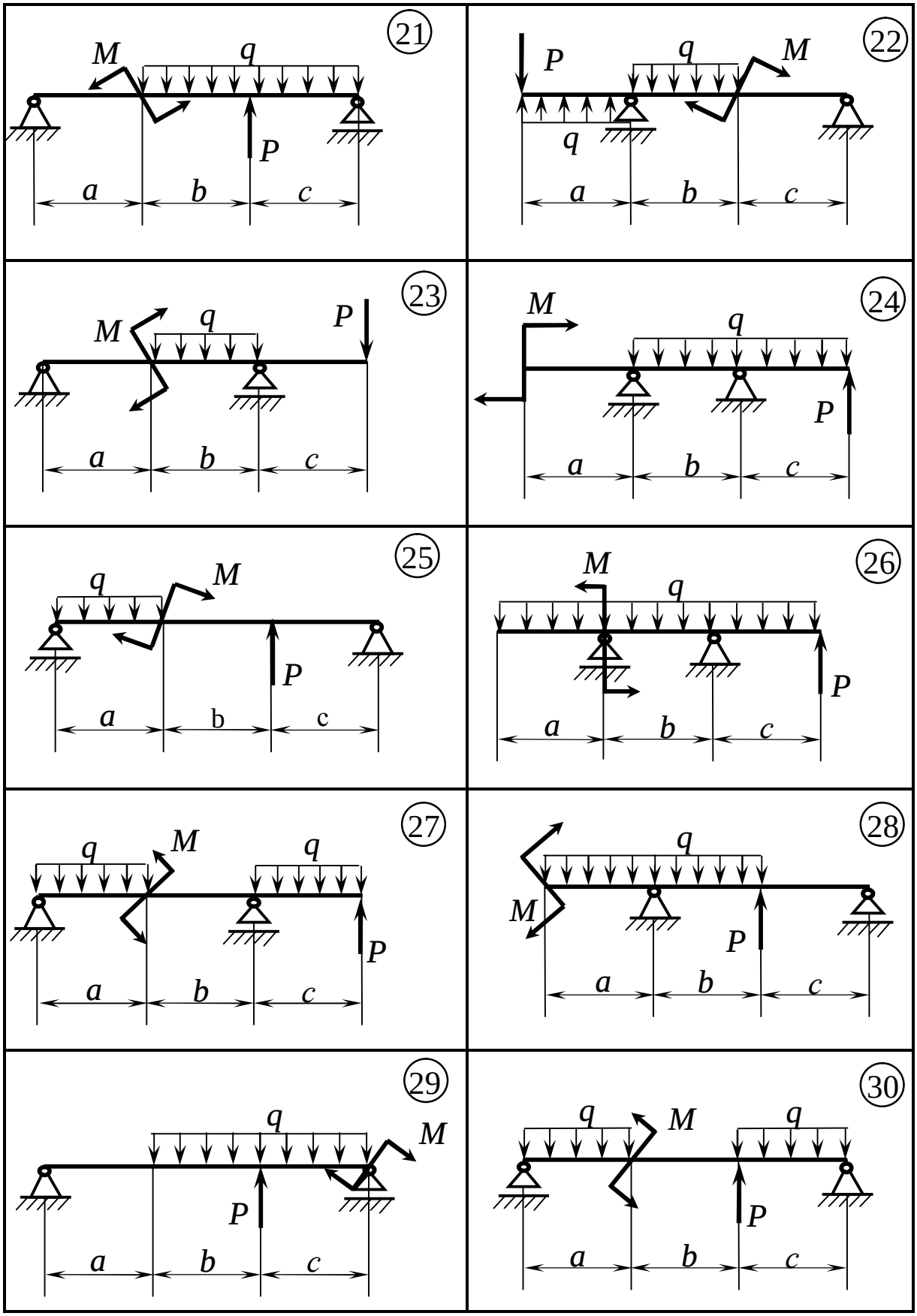


Рисунок 1.5, аркуш 3

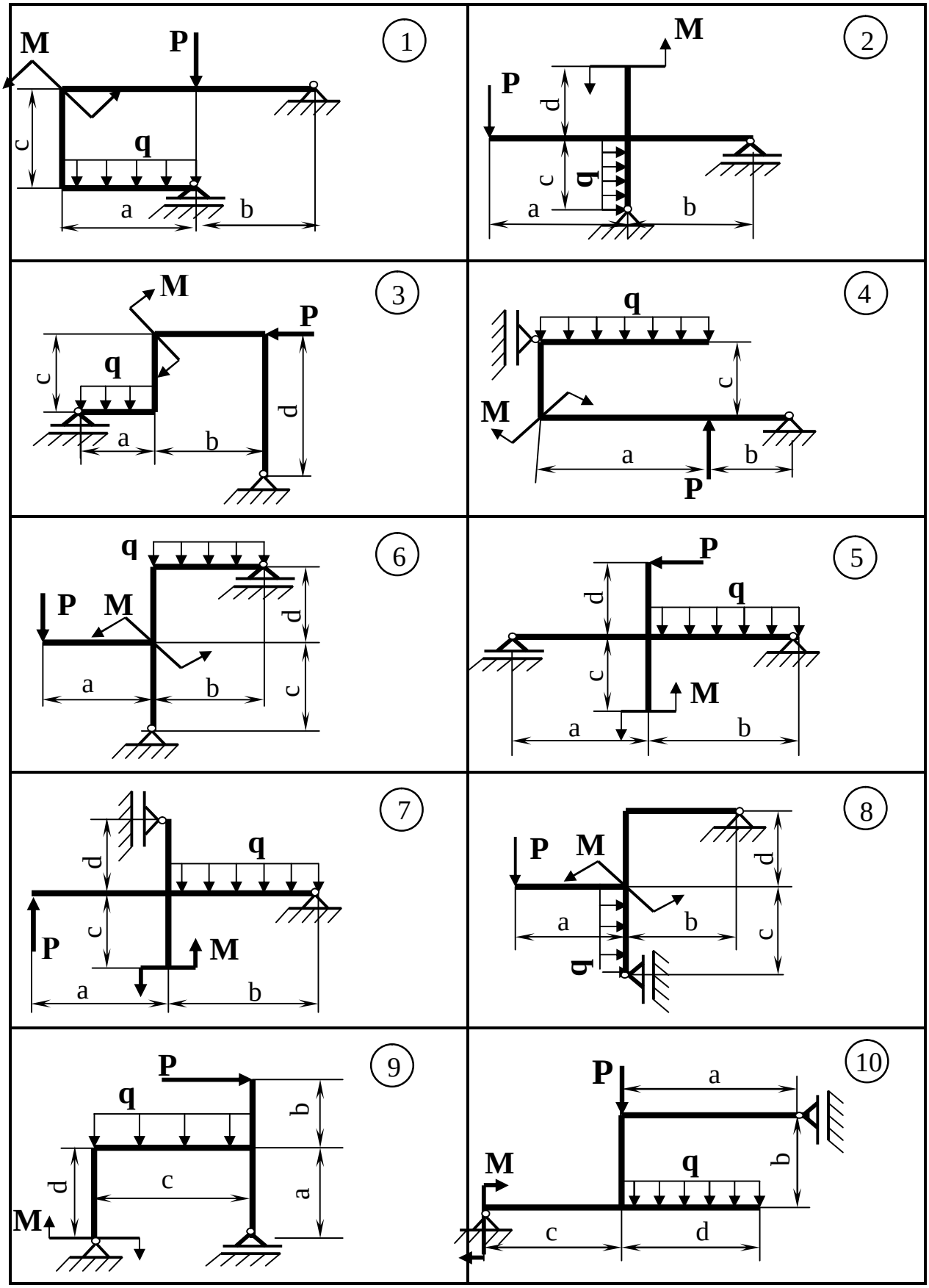


Рисунок 1.6 - Схеми до варіантів завдання 1.2

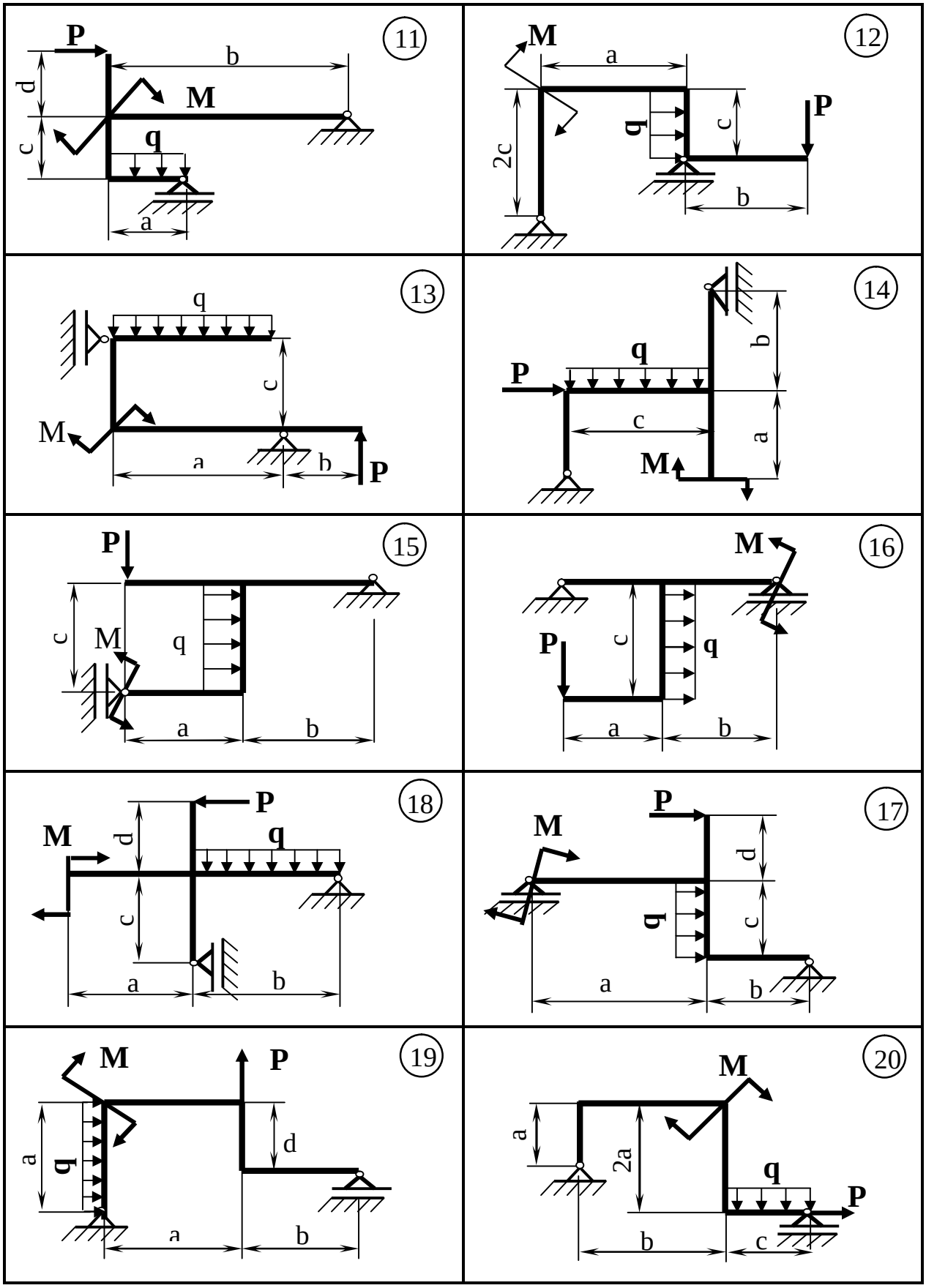


Рисунок 1.6, аркуш 2

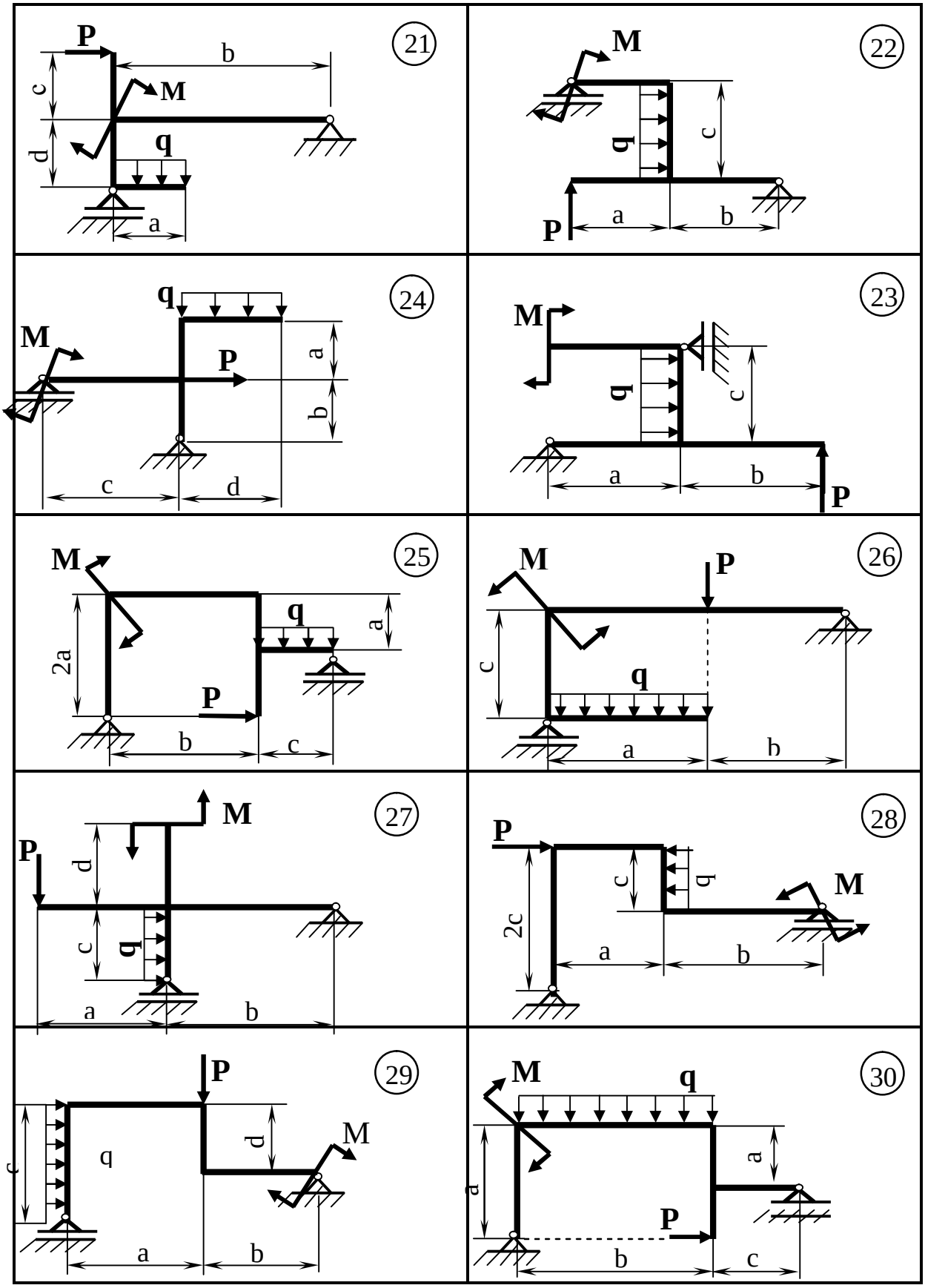


Рисунок 1.6, аркуш 3

1.2.2 Приклад розв'язання задач 1.2

Задача 1.2,а. Для заданої балки (рис. 1.7, а) знайти реакції опор.

Дано: P = 55 кН; q = 50 кН/м; M = 40 кНм; a = 2 м; b = 0,8 м; c = 0,6 м.

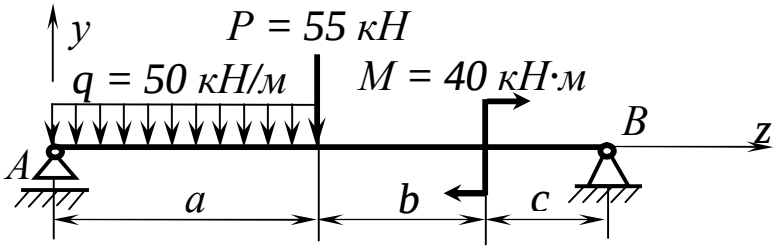


Рисунок 1.7 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.2, а

Розв'язання. 1 Задана балка опирається на дві опори, одна з яких шарнірно-рухома (т. А) і має одну реакцію (R_A), а друга – нерухома (т. В) і має дві реакції (R_B та X_B).

Відкинемо в'язі, а дію цих в'язей замінимо їх реакціями (рис.1.8).

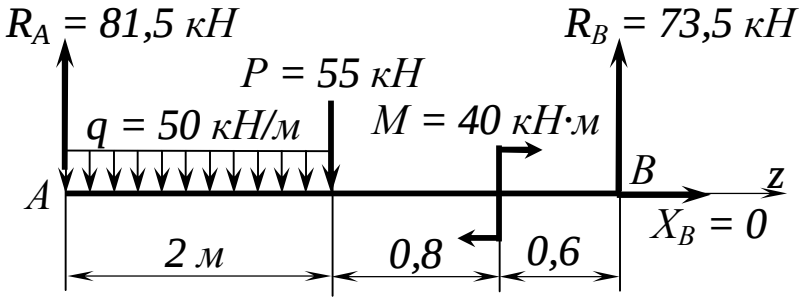


Рисунок 1.8 – Заміна в'язів реакціями

2 З умов рівноваги визначимо опорні реакції балки.

Для визначення реакції R_A складемо рівняння – суму моментів відносно точки В. Розподілене навантаження з інтенсивністю q, що діє на частину рами довжиною a, замінимо рівнодійною, яку прикладемо посередині навантаженого відрізку рами і яка має модуль $q \cdot a = 50 \cdot 2 = 100\,кН$.

$$SM_B = 0;\ q \cdot 2\left(\frac{2}{2} + 0{,}8 + 0{,}6\right) + P(0{,}8 + 0{,}6) - M - R_A(2 + 0{,}8 + 0{,}6) = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 40}{3,4} = 81,5\ кН\ \cdot$$

Для визначення реакції R_B складемо рівняння – суму моментів відносно точки А.

$$\sum M_A = 0;\ -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3,4} = 73,5\ кН$$

Для визначення реакції X_B складемо рівняння – суму проекцій сил на вісь x. $\sum P_X = 0;\quad X_A = 0.$

Зробимо перевірку. Для цього використаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y: $\sum P_Y = 0;\ R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0;$

$$81,5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73,5 = 0;\ 155 - 155 = 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

Задача 1.2,б. Для заданої рами (рис. 1.9) знайти реакції опор.

Дано: $P = 4\ кН;\quad q = 3\ кН/м;\quad M = 6,5\ кН{\cdot}м;\quad a = 1,5\ м;$

$b = 2м;\ c = 1м;\quad d = 2м.$

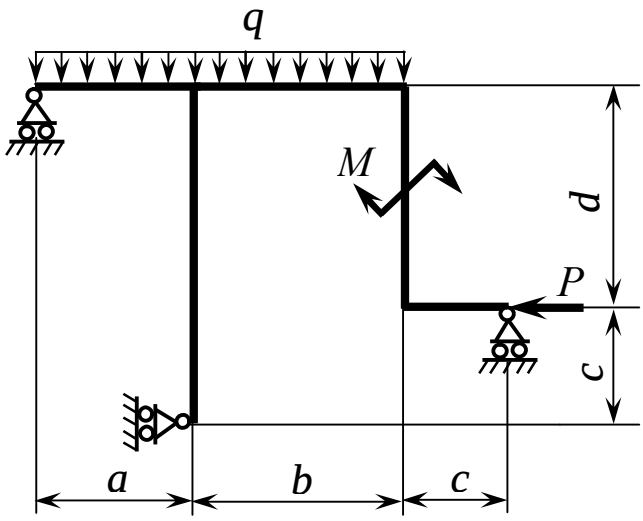


Рисунок 1.9 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.2

Розв'язання. Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з яких має по одній реакції. Відкинемо в'язі, а дію цих в'язей замінимо їх реакціями (рис.1.10). Позначимо на схемі всі задані величини.

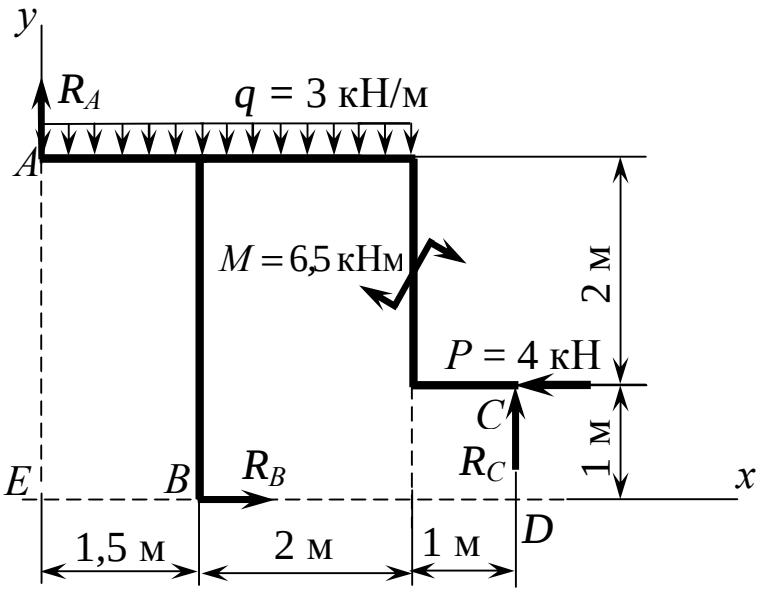


Рисунок 1.10 – Заміна в'язів реакціями

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для рами рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції.

Для визначення реакції R_A знайдемо точку перетинань ліній дій двох інших реакцій (R_B та R_C). Такою точкою є точка D (див. рис. 1.10). Розподілене навантаження з інтенсивністю q, що діє на частину рами довжиною $(a + b)$, замінимо рівнодійною, яку прикладемо посередині навантаженого відрізку рами і яка має модуль $q(a+b) = 3 \cdot 3{,}5$.

$$\sum M_D(\overline{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}75 - M + P \cdot 1 - R_A \cdot 4{,}5 = 0;$$

$$R_A = \frac{3 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}75 - 6{,}5 + 4 \cdot 1}{4{,}5} = 5{,}86 \text{ кН};$$

Для визначення реакції R_C знайдемо точку перетину ліній дій двох інших реакцій (R_A та R_B). Такою точкою є точка E (див. рис. 1.10).

$$\sum M_E(\overline{P}_k) = 0; \quad -q \cdot 3{,}5 \cdot 1{,}75 - M + P \cdot 1 + R_C \cdot 4{,}5 = 0;$$

$$R_C = \frac{3 \cdot 3{,}5 \cdot 1{,}75 + 6{,}5 - 4 \cdot 1}{4{,}5} = 4{,}64 \text{ кН};$$

Для визначення реакції R_B використаємо рівняння суми проекцій сил на вісь x, оскільки реакції R_A та R_C (див. рис. 1.10) паралельні осі y.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_B - P = 0; \quad \text{звідки} \quad R_B = P = 4 \text{ кН}.$$

Прикладемо всі зовнішні та знайдені сили до рами (рис. 1.11).

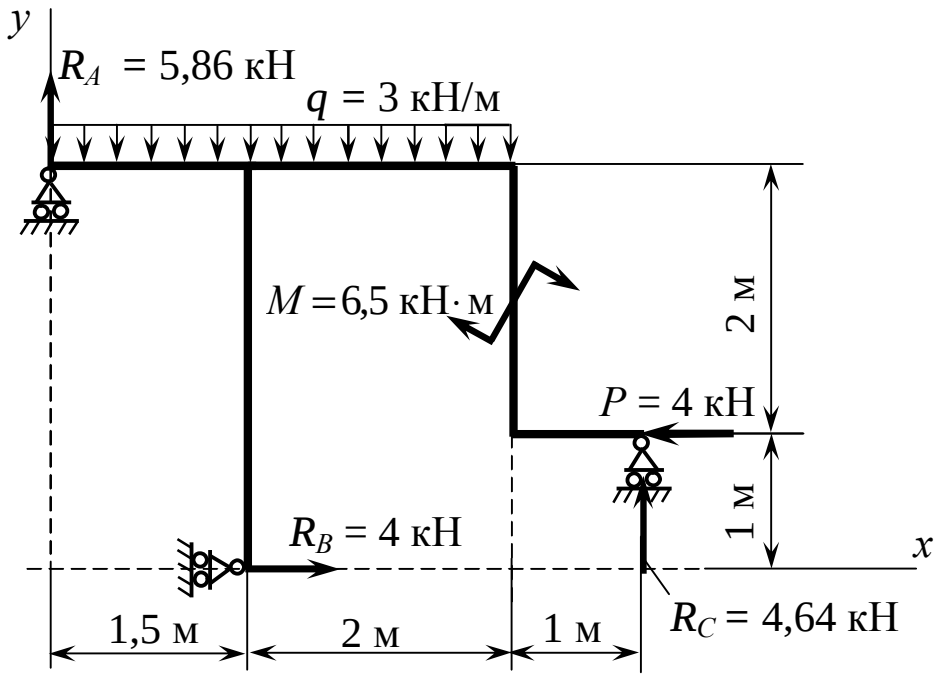


Рисунок 1.11 – Рама із знайденими реакціями

Зробимо перевірку.

Для цього використаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y (див. рис. 1.11).

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_1 - q \cdot 3{,}5 + R_5 = 0;$$

$$5{,}86 - 3 \cdot 3{,}5 + 4{,}64 = 10{,}5 - 10{,}5 = 0.$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Розв'язок:

1 Реакції дорівнюють величинам: $R_A = 5{,}86 \text{ кН}; \quad R_B = 4 \text{ кН}$;

$R_C = 4{,}64 \text{ кН}$.

2 Позитивні знаки при значеннях реакцій вказують на те, що реакції R_A, R_B, R_C дійсно спрямовані так, як зображено на рисунку 1.11.

2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА»

2.1 Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному рухах

Механізм (рис.2.1) складається із ступінчастих коліс 1...3, зубчатої рейки 4 і тягаря 5, який прив'язано до кінця нитки, намотаної на циліндричний барабан одного із коліс. Колеса знаходяться в зачепленні між собою або зв'язані ремінною передачею. На ободі коліс позначені точки A, B і C.

Згідно із заданим рівнянням руху ведучого тіла механічної системи і в заданий час $t_1=2c$, визначити лінійні та кутові переміщення зазначених тіл, а також кінематичні характеристики вказаних точок.

Дані взяти з таблиць 2.1, 2.2 та рисунку 2.1.

У таблиці 2.2 зазначені рівняння руху або кутові переміщення ведучого тіла механізму, де $j_1(t)$, $j_2(t)$ – закон обертання відповідних коліс, (радіан); $S_4(t)$, $S_5(t)$ – закони руху відповідно зубчатої рейки і тягаря, (сантиметри).

Додатні спрямування для j – проти руху стрілки годинника, для S_4 та S_5 – у бік додатних спрямувань відповідних осей (x та z) або вниз.

Попередження: для деяких кінематичних схем розмір колеса 3 підлягає знаходженню із умови складання механізму.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі 2.1

Розміри коліс, см	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
r_1	2	3	2	4	2	3	2	3	2	3
R_1	4	6	4	10	6	6	4	9	4	6
r_2	6	8	5	6	3	4	3	4	4	4
R_2	8	10	10	12	9	8	6	10	8	12
r_2	12	14	12	14	12	10	14	12	8	14
R_3	14	18	16	20	16	12	20	18	16	18

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі 2.2

Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта	Задано	Знайти	
	Рівняння руху (см або рад)	Швидкості, см/с	Прискорення, см/с^2
0	$S_4 = 8t + 40t^2$	V_A, V_5 w_1, w_2	e_1, a_4 a_B
1	$S_5 = 7t + 90t^2$	V_C, V_4 w_1, w_2	e_2, a_5 a_B
2	$j_1 = 0{,}5t + t^2$	V_C, V_5 w_2, w_3	e_1, a_4 a_B
3	$j_2 = t + 1{,}5t^2$	V_A, V_4 w_2, w_3	e_1, a_5 a_C
4	$S_4 = 10t + 100t^2$	V_B, V_5 w_1, w_2	e_2, a_5 a_A
5	$S_5 = 5 + 40t^2$	V_C, V_4 w_1, w_2	e_2, a_4 a_B
6	$j_1 = t + 0{,}5t^2$	V_B, V_4 w_2, w_3	e_2, a_4 a_C
7	$j_2 = 2t + 0{,}5t^2$	V_A, V_4 w_1, w_3	e_1, a_5 a_B
8	$S_4 = 5t + 60t^2$	V_A, V_5 w_1, w_2	e_1, a_4 a_C
9	$S_5 = 18t + 70t^2$	V_B, V_4 w_1, w_2	e_2, a_5 a_C

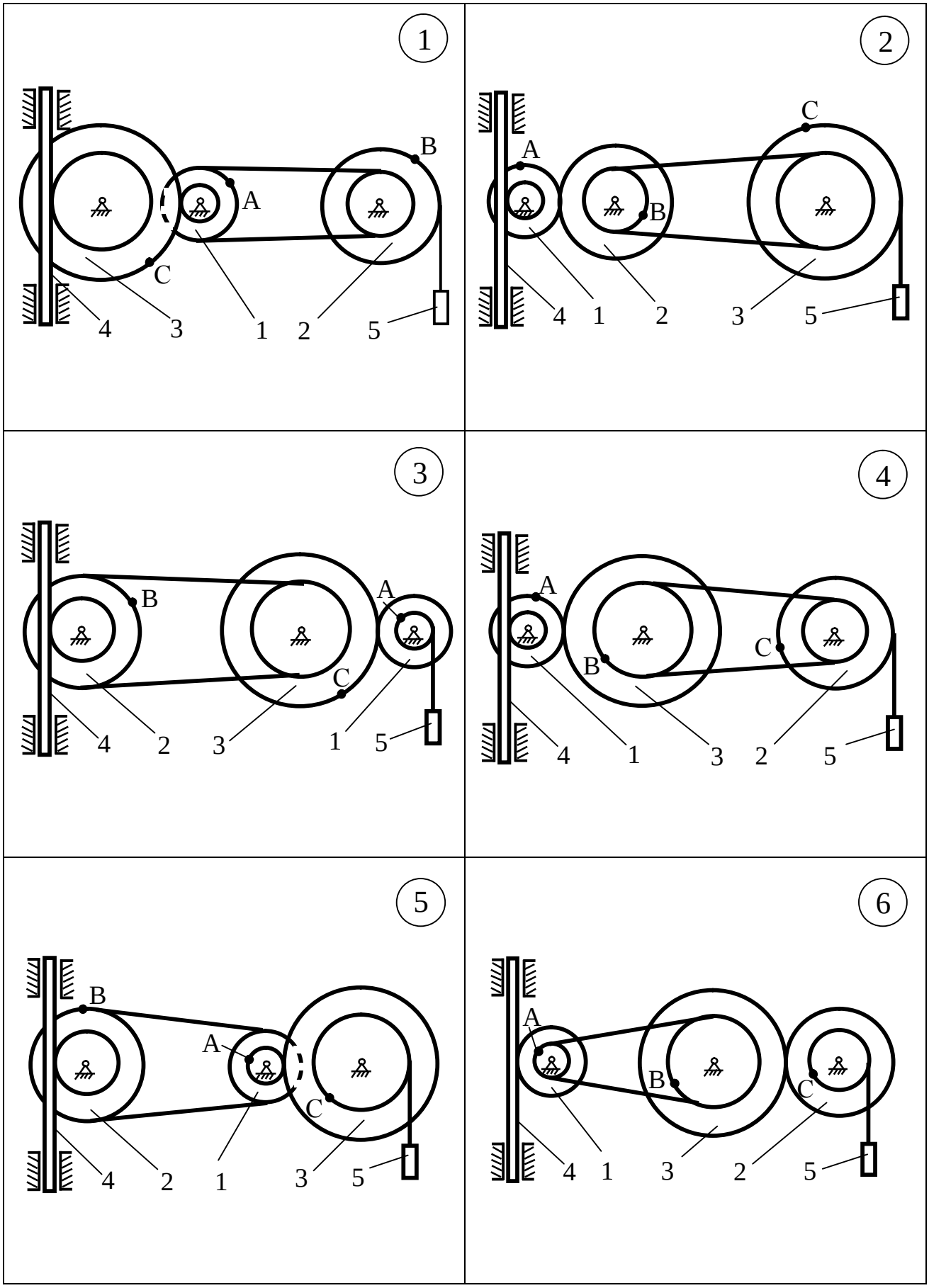


Рисунок 2.1 – Схеми до варіантів завдання

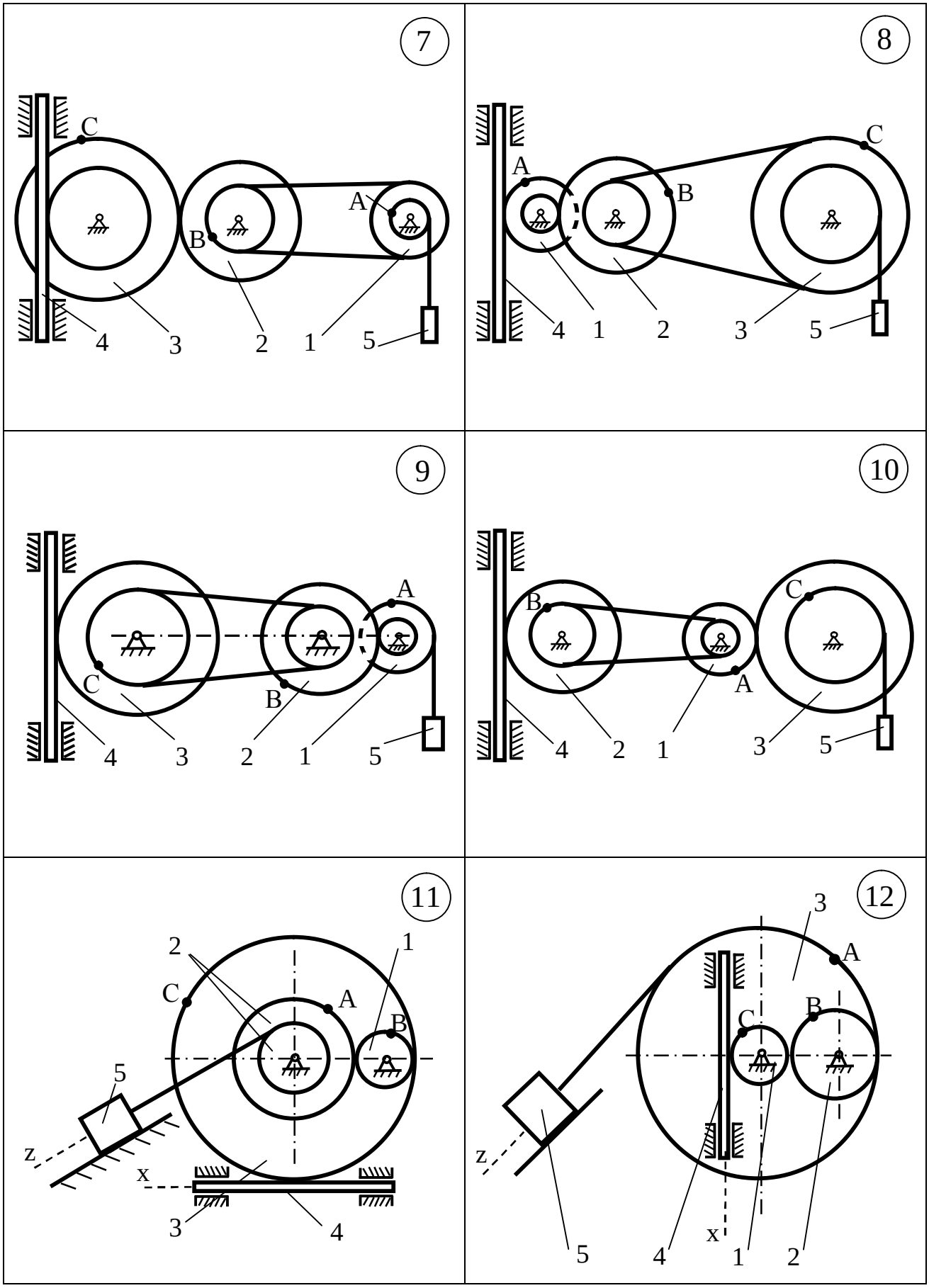


Рисунок 2.1, аркуш 2

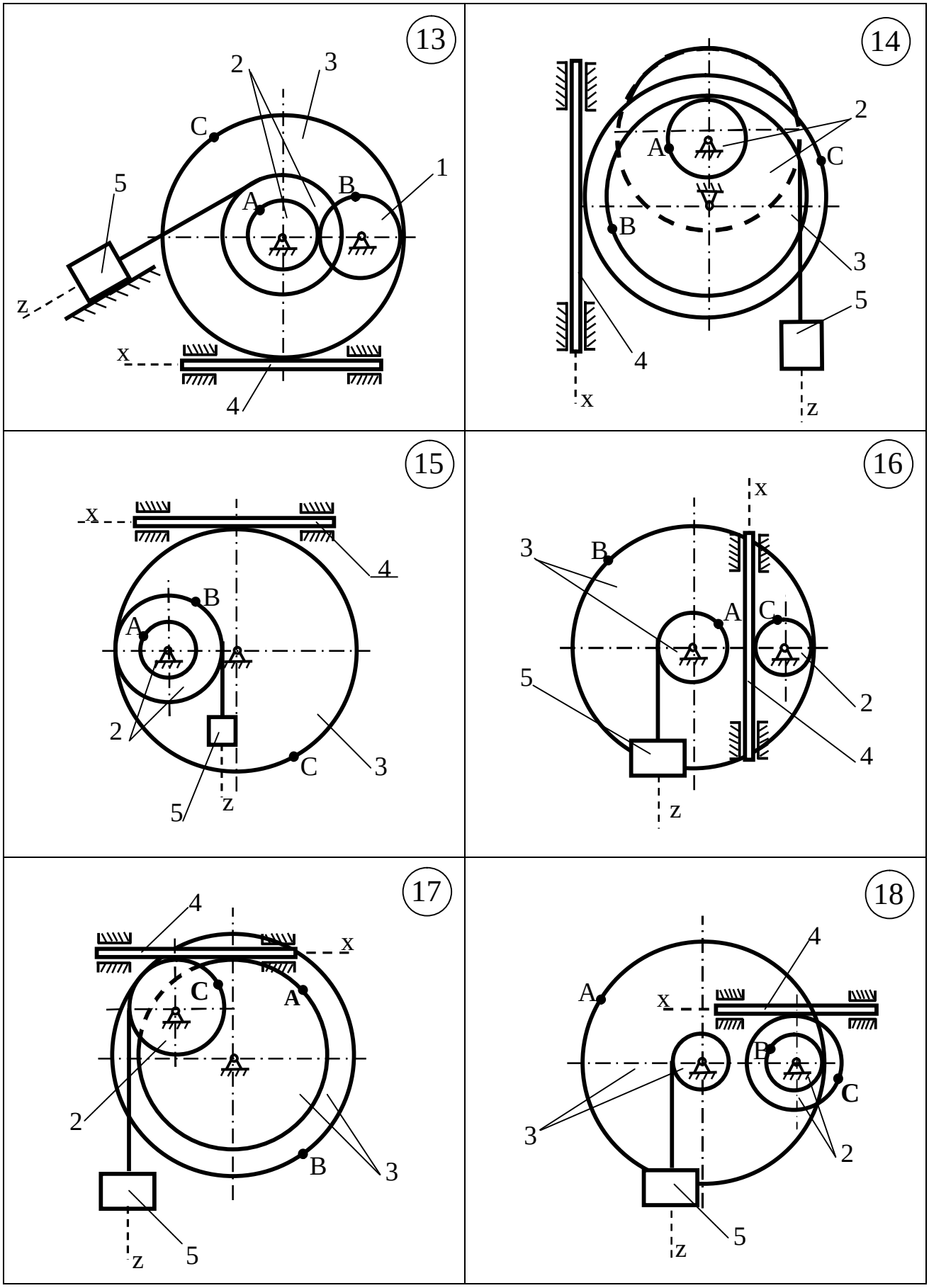


Рисунок 2.1, аркуш 3

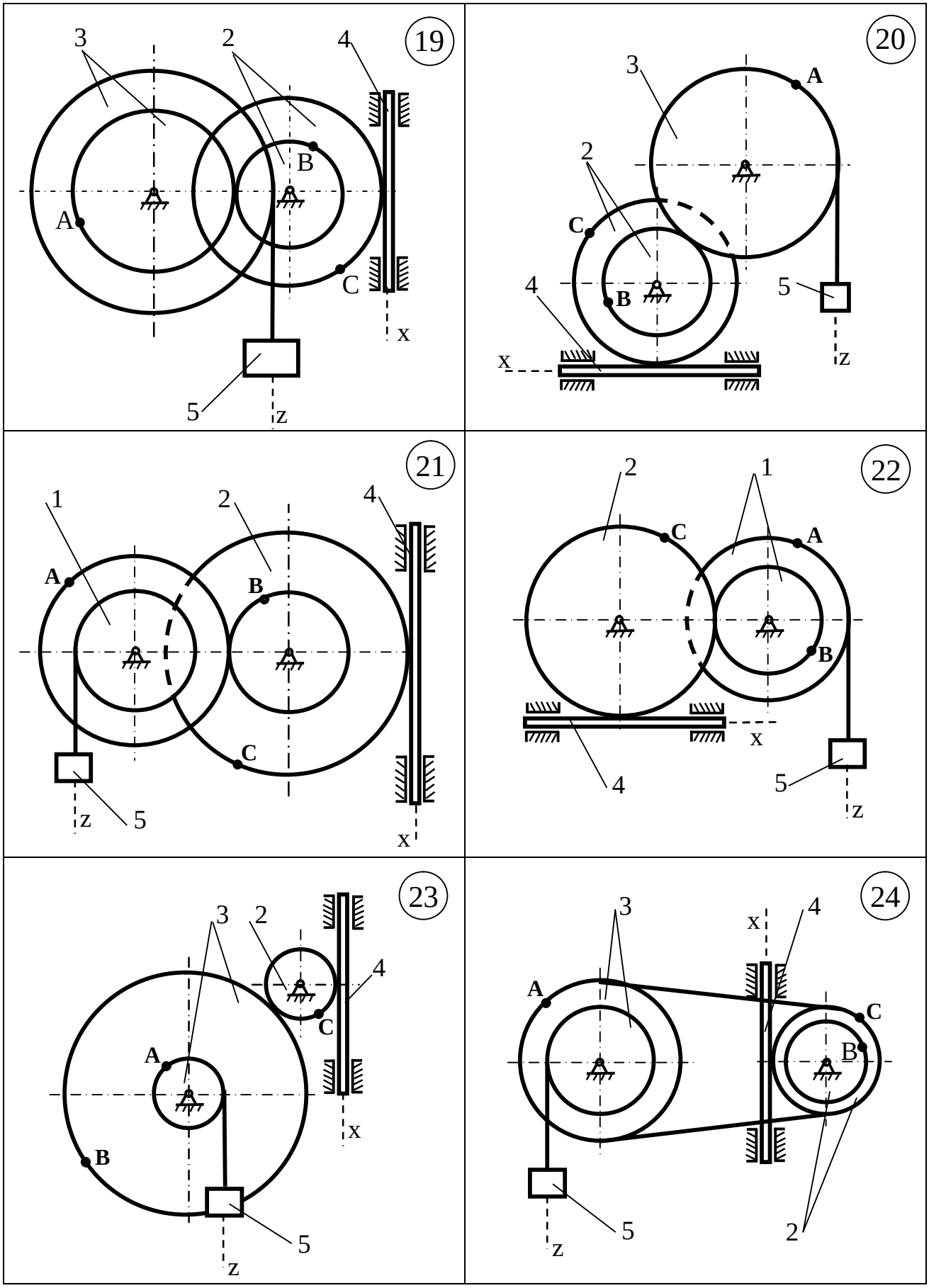


Рисунок 2.1, аркуш 4

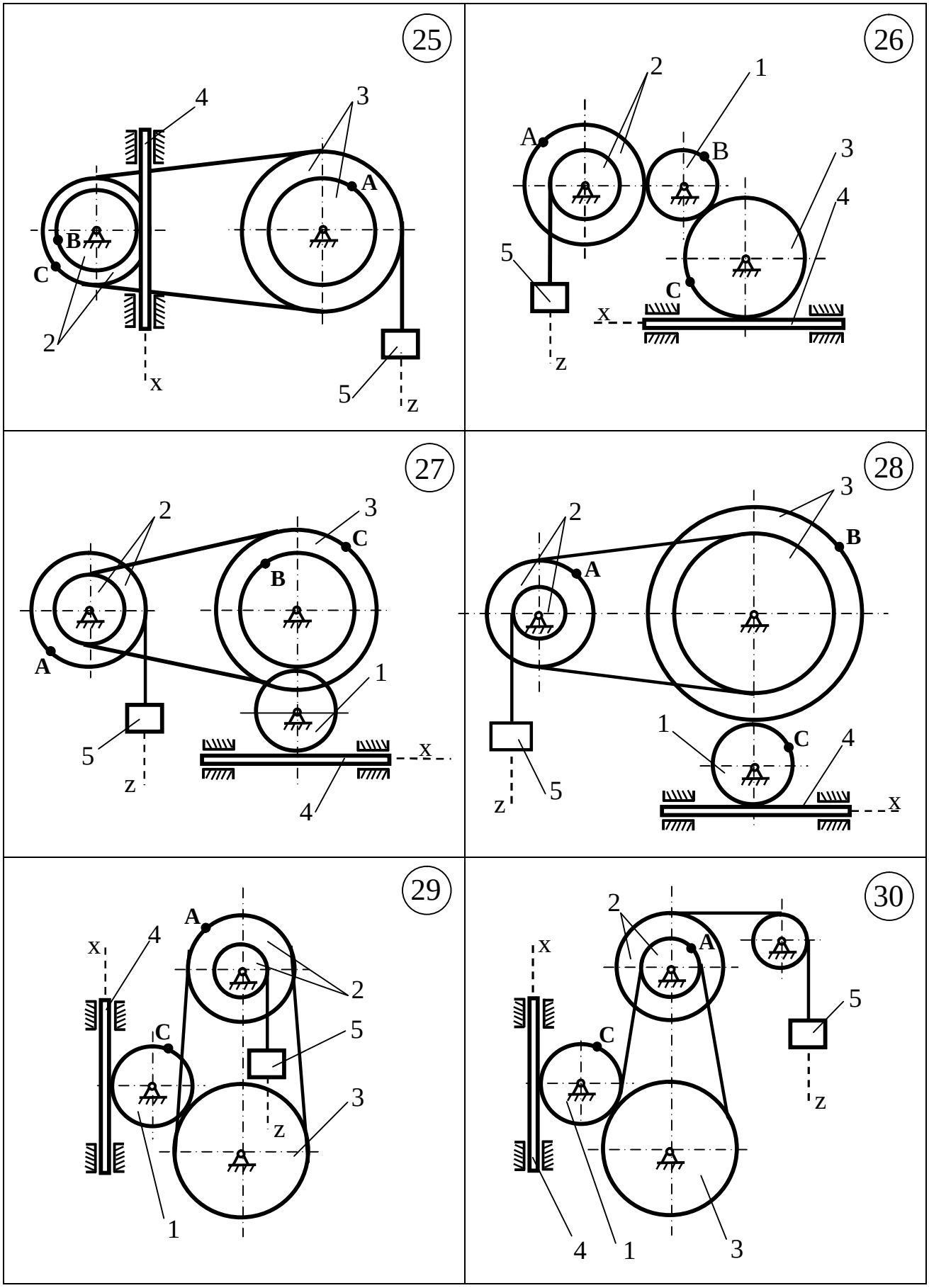


Рисунок 2.1, аркуш 5

2.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 2.1

Розрізняють п’ять видів руху твердого тіла:

1) поступальний;
2) обертальний навколо нерухомої осі;
3) плоско-паралельний;
4) обертальний рух навколо нерухомої точки;
5) рух вільного твердого тіла.

Поступальний і обертальний рухи навколо нерухомої осі належать до простих рухів. Інші види руху твердого тіла можна звести до одного із цих рухів або їх сукупності.

Поступальним називається рух твердого тіла, при якому відрізок прямої, що з’єднує будь-які дві його точки, рухається паралельно самому собі.

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, а вектори швидкостей і вектори прискорень усіх його точок відповідно однакові в кожний момент часу.

Таким чином поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки залишаються нерухомими. Пряма, проведена через ці дві нерухомі точки, називається віссю обертання.

При обертальному русі положення твердого тіла визначається кутом повороту j, де $j = j(t)$. Це співвідношення називається рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Зміну кута повороту тіла j з часом характеризує кутова швидкість w, яка дорівнює похідній за часом від кута повороту j, тобто $w = j'$.

У міжнародній системі одиниць СІ кутова швидкість має розмірність *рад/с* або c^{-1}. У техніці кутову швидкість часто визначають кількістю обертів за хвилину (n об/хв). Зв'язок між цими одиницями вимірювання задається формулою

$$w = \frac{pn}{30} c^{-1}.$$

Зміну кутової швидкості з часом характеризує кутове прискорення, яке дорівнює першій похідній від кутової швидкості з часом або другій по-

хідній від кута повороту тіла з часом, тобто

$$e = w = \ddot{\varphi}.$$

При обертальному русі тіла кожна його точка має швидкість

$$V = wR, \tag{2.1}$$

і прискорення, яке складається з тангенціальної складової

$$a_t = eR, \tag{2.2}$$

та нормальної складової прискорення

$$a_n = w^2 R, \tag{2.3}$$

де R – радіус обертання точки.

Вектори швидкості V і тангенціальне прискорення a_t напрямлені за дотичною до кола, яке описує дана точка тіла, або перпендикулярно до радіусу R, а вектор нормального прискорення a_n напрямлений за радіусом цього кола до його центра (рис. 2.2).

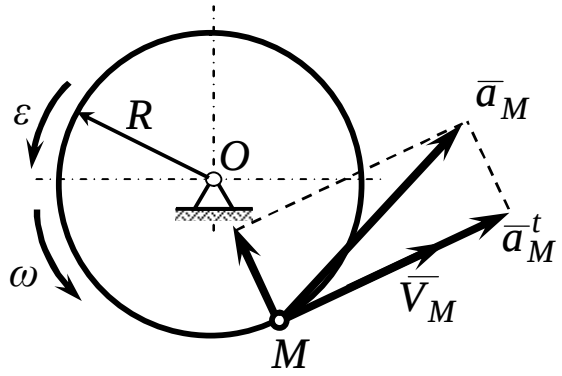
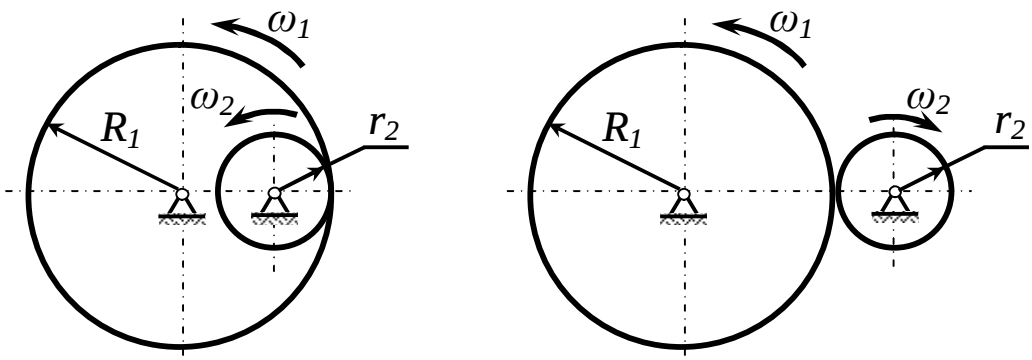


Рисунок 2.2 – Швидкості та прискорення точок тіла при обертальному русі

Якщо обертальний рух тіла прискорений, то вектори V і a_t мають однаковий напрямок, якщо рух сповільнений, то напрямки протилежні.

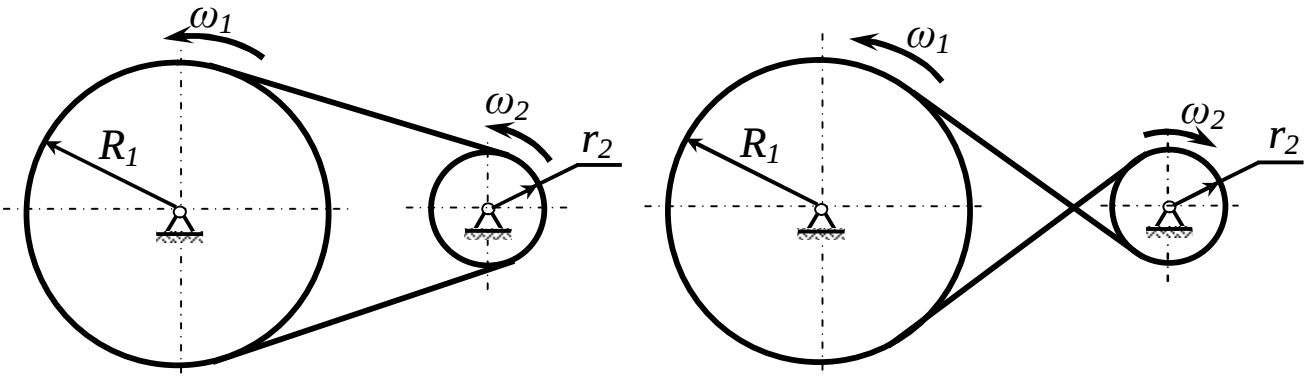
Передачами називають механізми, які змінюють швидкість обертання, напрямок обертання або вид руху тіла.

Передача обертання від одного твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, до другого твердого тіла, яке обертається навколо другої нерухомої осі, здійснюється за допомогою зубчастого або фрикційного зачеплення двох коліс (рис.2.4), або за допомогою ремінної або ланцюгової передач (рис.2.5).



а б

Рисунок 2.3 – Приклади зубчастих або фрикційних передач



а б

Рисунок 2.4 – Приклади ремінних або ланцюгових передач

При внутрішньому зачепленні (див.рис.2.4, а) і не перехресній пасовій передачі (див.рис.2.5, а) напрямки обертань обох коліс збігаються. При зовнішньому зачепленні (див.рис.2.4, б) і перехресній пасовій передачі (див.рис.2.5, б) напрямки обертань коліс протилежні.

Величини швидкостей точок на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зачепленні, однакові. Однакові за модулем і швидкості на ободі шківів пасової передачі, якщо немає ковзання паса по шківу.

Тому кутові швидкості колес обернено пропорційні радіусам r_i відповідних коліс (або діаметрам d_i коліс, або кількості зубців z_i):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.4)$$

2.1.2 Приклад розв'язання задачі 2.1

Механізм складається із ступінчастих коліс 1…3, що перебувають у зачепленні або зв'язаних пасовою передачею, зубчастої рейки 4 і тягаря 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на колесо 3 (рис. 2.5). Радіуси коліс відповідно дорівнюють: $R_1 = 4$ *см*; $r_1 = 2$ *см*; $R_2 = 8$ *см*; $r_2 = 6$ *см*; $R_3 = 16$ *см*; $r_3 = 12$ *см*. На ободах коліс розташовані точки *A*, *B* і *C*.

Закон зміни швидкості вантажу $S_5 = 2t^2 - 3t$. Позитивний напрямок для S_5 – униз. У завданні φ виражається в радіанах, S – у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити в момент часу $t_1 = 2$ *с* V_A, V_C, ε_3, a_B, a_4.

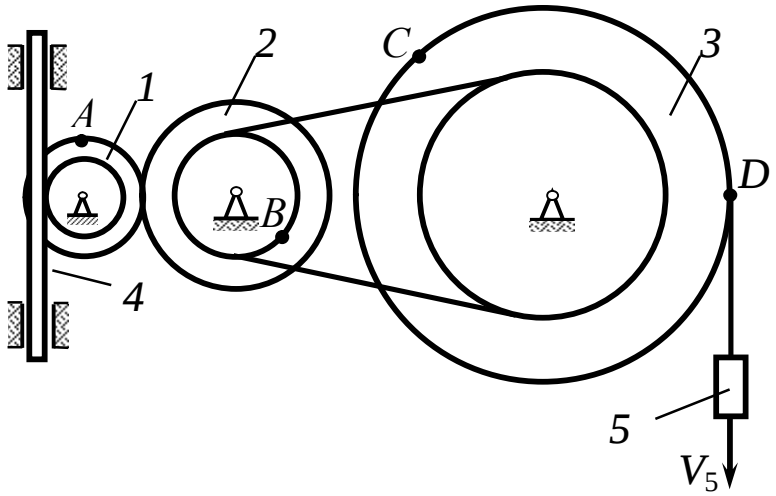


Рисунок 2.5 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 2.1

Розв'язання:

1 Визначення швидкостей

Знайдемо швидкість тягаря 5: $V_5 = \dfrac{dS_5}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2t^2 - 3t\right) = 4t - 3$.

Тягар 5 зв'язаний з колесом 3 у точці D, отже $V_D = V_5 = 4t - 3$.

Використаємо формулу (2.1) і знайдемо кутову швидкість ω_3:

$$w_3 = \frac{V_D}{R_3} = \frac{4t - 3}{16}.$$

Обертання колеса 3 відбувається за ходом годинникової стрілки.

Колесо 3 знаходиться з колесом 2 в зачепленні, отже $\frac{w_2}{w_3} = \frac{r_3}{r_2}$.

Звідки знайдемо кутову швидкість колеса 2:

$$w_2 = \frac{w_3 r_3}{r_2} = \frac{(4t-3)\cdot 12}{16\cdot 6} = \frac{4t-3}{8}.$$

Аналогічно знайдемо кутову швидкість колеса 1: $\frac{w_2}{w_1} = \frac{R_1}{R_2}$.

Звідки знайдемо кутову швидкість колеса 1:

$$w_1 = \frac{w_2 R_2}{R_1} = \frac{(4t-3)\cdot 8}{8\cdot 4} = \frac{(4t-3)}{4}.$$

Використовуючи формулу (2.1), знайдемо швидкість рейки 4:

$$V_4 = w_1 r_1 = \frac{(4t-3)}{4}\cdot 2 = \frac{(4t-3)}{2}.$$

Швидкість точки C співпадає із швидкістю точки D, оскільки вони знаходяться на одному колесі на однаковій відстані від осі обертання:

$$V_C = V_5 = 4t-3.$$

Швидкість точки A можна знайти за допомогою формули (2.1)

$$V_A = w_1 r_1 = V_4 = \frac{(4t-3)}{2}.$$

У момент часу $t_1 = 2\ c$ швидкості дорівнюють:

$$V_A = \frac{(4t-3)}{2} = \frac{(4\cdot 2-3)}{2} = 2{,}5\ м/с;\ V_C = 4\cdot 2-3 = 5\ м/с;$$

$$w_2 = \frac{4\cdot 2-3}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625 c^{-1}.$$

Вектори швидкостей всіх тіл і точок проставимо на рисунку 2.6.

2 Визначення прискорень

Кутове прискорення є похідна від кутової швидкості: $e = \dot{w}$.

Для кутового прискорення колеса 3 рівняння запишеться у вигляді:

$$e_3 = \dot{w}_3, \quad \text{звідки} \quad e_3 = \frac{d}{dt}\left(\frac{(4t-3)}{16}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25 c^{-2}.$$

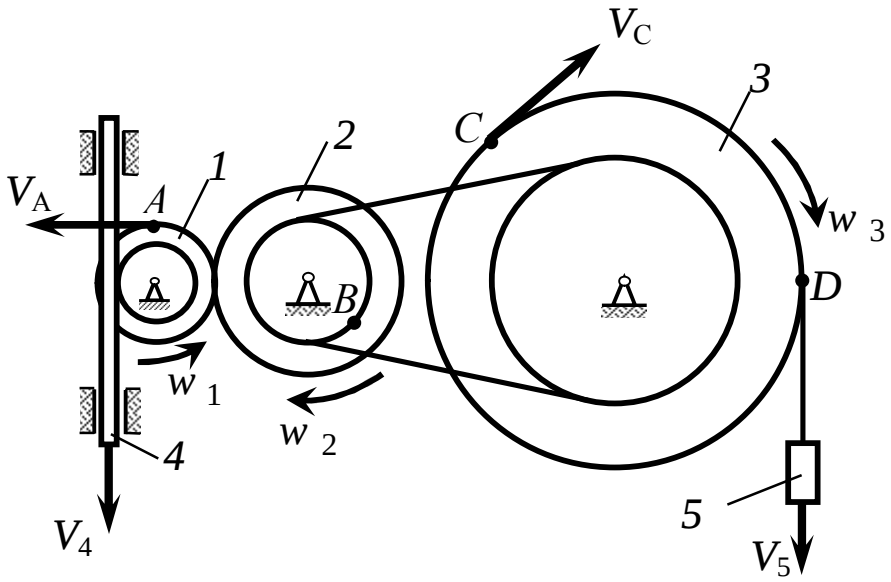


Рисунок 2.6 – Означення швидкостей тіл і точок заданого механізму

Прискорення будь-якої точки тіла при його обертовому русі має дві складові $\bar{a}_t$ й $\bar{a}_n$. Дотичне прискорення $\bar{a}_t$ чисельно дорівнює $a_t = e \cdot R$ і спрямоване за дотичною до кола, а нормальне прискорення $\bar{a}_n$ чисельно дорівнює $a_n = w^2 R$ і спрямовано за нормаллю (за радіусом) убік осі обертання.

Таким чином, повне прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_t{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{(e \cdot R)^2 + (w^2 \cdot R)^2} = R\sqrt{e^2 + w^4}\,.$$

Спочатку визначимо кутове прискорення колеса 2:

$$e_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{(4t-3)}{8}\right) = 0{,}5\,c^{-2}.$$

Визначимо дотичне прискорення точки B:

$$a_B^t = e_2 \cdot r_2 = 0{,}5 \cdot 6 = 3\,м/с^2.$$

Визначимо нормальне прискорення точки B.

$$a_B^n = w_2{}^2 \cdot r_2 = 0{,}625^2 \cdot 6 = 2{,}34\,м/с^2.$$

Повне прискорення точки B:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^t\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2} = \sqrt{3^2 + 2{,}34^2} = 3{,}8\,м/с^2.$$

Прискорення рейки 4 можна визначити як похідну від швидкості V_4 рейки 4:

$$a_4 = \frac{dV_4}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{(4t-3)}{2}\right) = 2\,м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_4$ спрямований за швидкістю V_4 рейки 4, тобто донизу.

У момент часу $t_1 = 2\,c$ прискорення дорівнюють:

$$e_3 = 0{,}25\,c^{-2};\ a_B = 3{,}8\,м/с^2;\ a_4 = 2\,м/с^2.$$

Вектори знайдених прискорень зображені на рисунку 2.7.

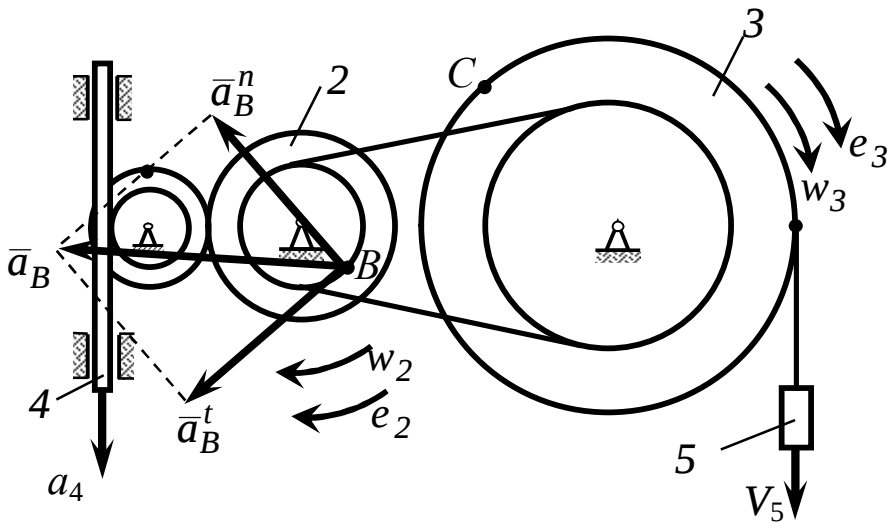


Рисунок 2.7 – Означення прискорень тіл і точок заданого механізму

Розв'язок:

1 У момент часу $t_1 = 2\,c$ $V_A = 2{,}5\,м/с;\ V_C = 5\,м/с;$

$e_3 = 0{,}25\,c^{-2};\ a_B = 3{,}8\,м/с^2;\ a_4 = 2\,м/с^2.$

2 Заданий механізм рухається прискорено.

2.2 Кінематичний аналіз плоского механізму

Плоский механізм, зображений на рис.2.8, складається із декількох стрижнів, повзунів та опор. Довжини стрижнів дорівнюють відповідно: $\mathbf{l}_1 =$ 0,6 м, $\mathbf{l}_2 =$1,8 м, $\mathbf{l}_3 =$2,0 м, $\mathbf{l}_4 =$0,8 м.

Один із стрижнів в схемах поділений шарніром приєднання на дві рівні частини. Положення механізму визначається кутами a, b, g та q. Значення цих кутів й інших заданих величин вказані в таблицях 2.3 і 2.4.

Знайти швидкості та прискорення точок та кутові швидкості й кутові прискорення ланок, які вказані в таблиці 2.4.

Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатись відповідні кути. Побудову механізму слід починати із стрижня, напрям якого визначається кутом a.

Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати напрямленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість V_B і прискорення a_B - вниз або праворуч (відповідно до рисунка 2.8).

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до задачі 2.2

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Кути a,^{0}	90	120	0	30	60	90	150	60	30	0
Кути g,^{0}	60	150	30	120	90	60	90	30	120	60

Таблиця 2.4 – Вихідні дані до задачі 2.2

Величина			Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Задані кінематичні характеристики	Кути	$q,^0$	120	60	90	150	60	30	120	30	90	30
		$b,^0$	30	120	150	60	30	120	150	60	90	30
	Для схем 1…5,11,12, 14,15, 17…21, 24, 25, 29	w_1	6	-	5	-	2	-	8	-	4	-
		w_4	-	4	-	3	-	5	-	6	-	2
	Для схем 6…10, 13, 16, 22, 23, 26…28, 30	w_1	2	-	3	-	4	-	5	-	6	-
		e_1	4	-	5	-	6	-	8	-	10	-
		V_B	-	4	-	6	-	2	-	3	-	5
		a_B	-	6	-	8	-	5	-	6	-	4
Невідомі (треба знайти)	V точок, м/с		B,E	A,E	B,E	A,E	B,E	D,E	B,E	A,E	B,E	D,E
	w ланки, $с^{-1}$		ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_3	ω_2	ω_3
	a точок, $м/с^2$		B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
	e ланки, $с^{-2}$		ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2	ε_2

2.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 2.2

Плоско-паралельний (плоский) рух твердого тіла може бути зведений до руху проекції (плоскої фігури) цього тіла на площину, паралельну площинам, в яких рухаються його точки.

Рух плоскої фігури в її площині складається з поступального руху разом з полюсом (це може бути будь-яка точка плоскої фігури) і обертального руху навколо полюса.

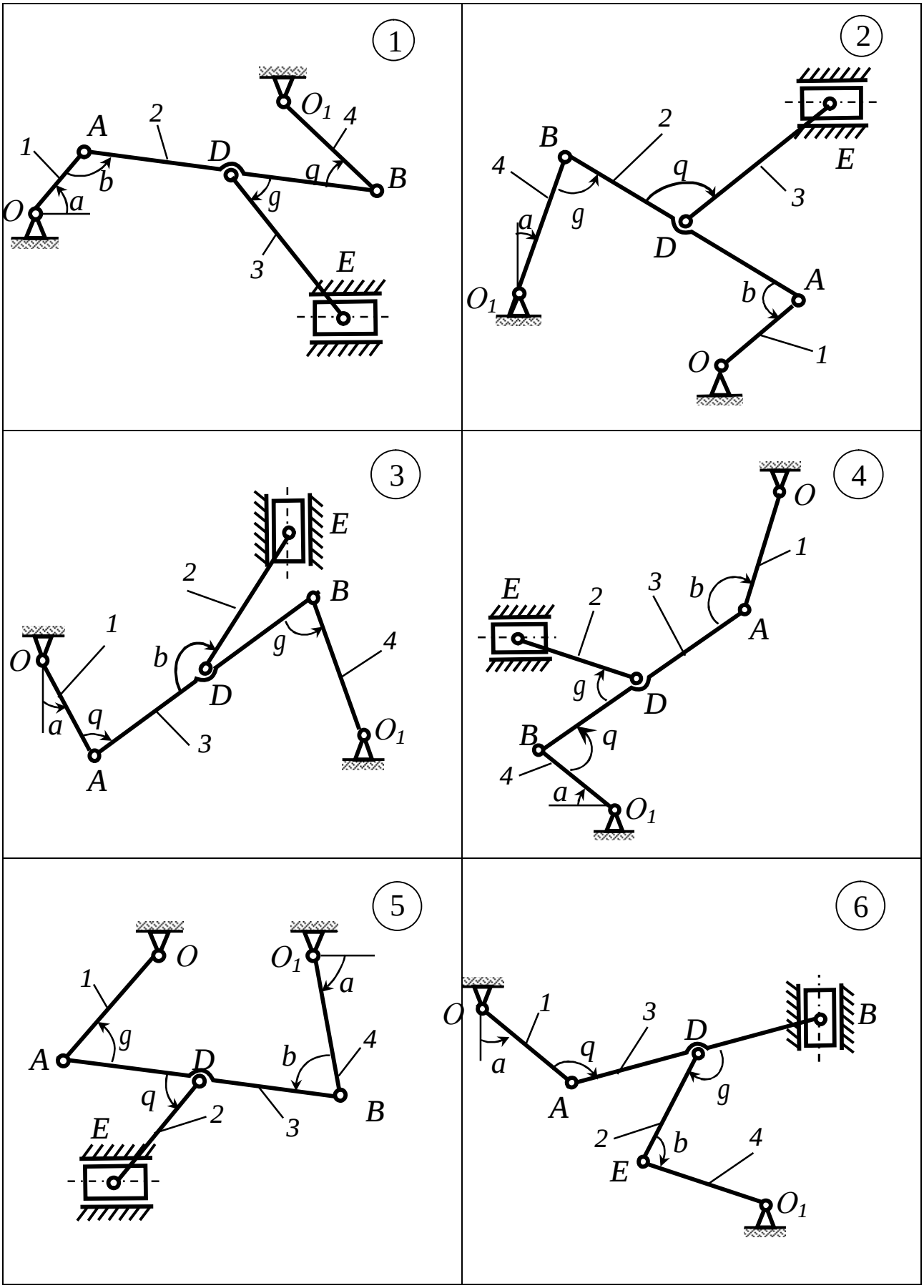


Рисунок 2.8 – Схеми до варіантів завдання

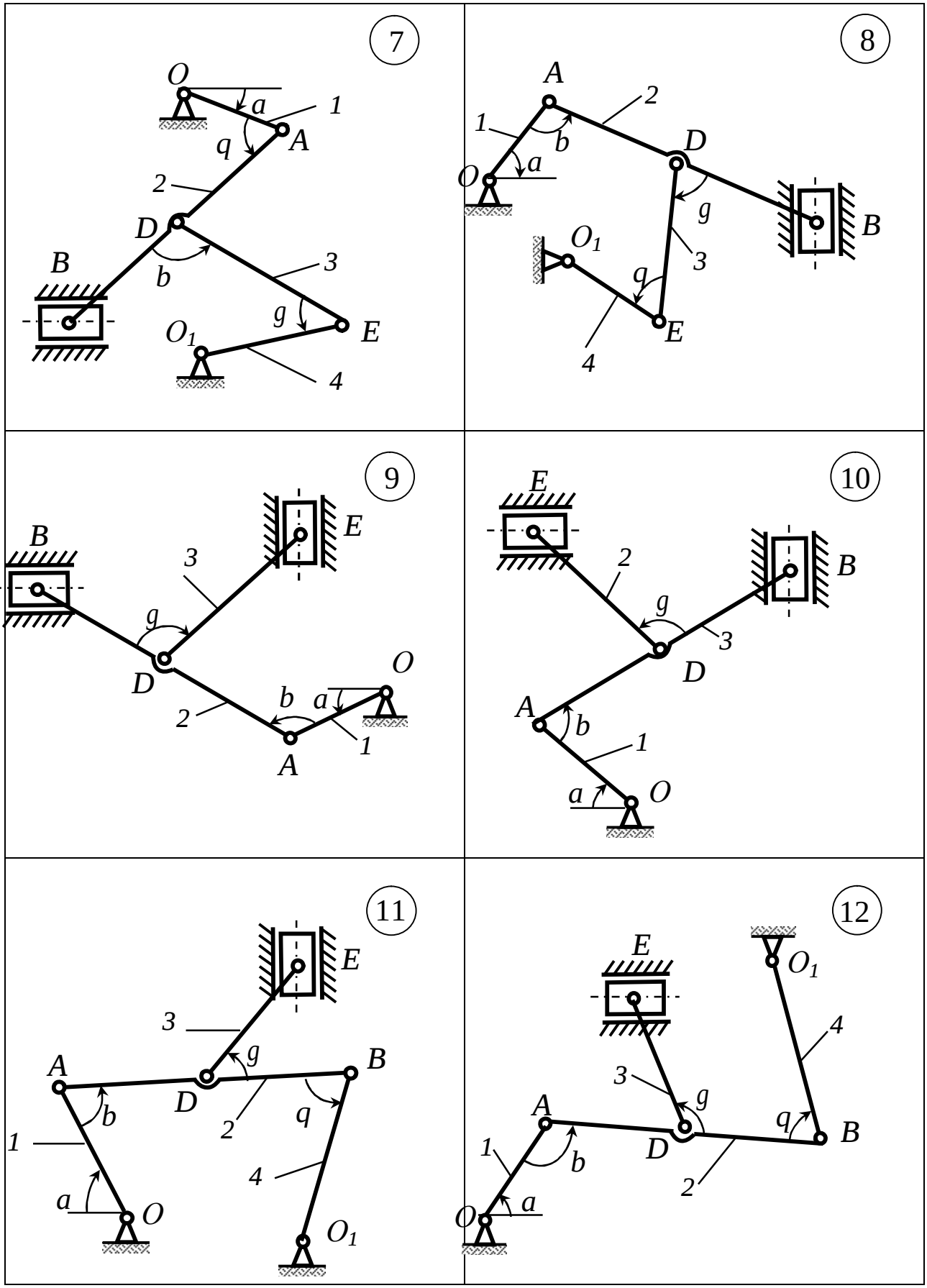


Рисунок 2.8, аркуш 2

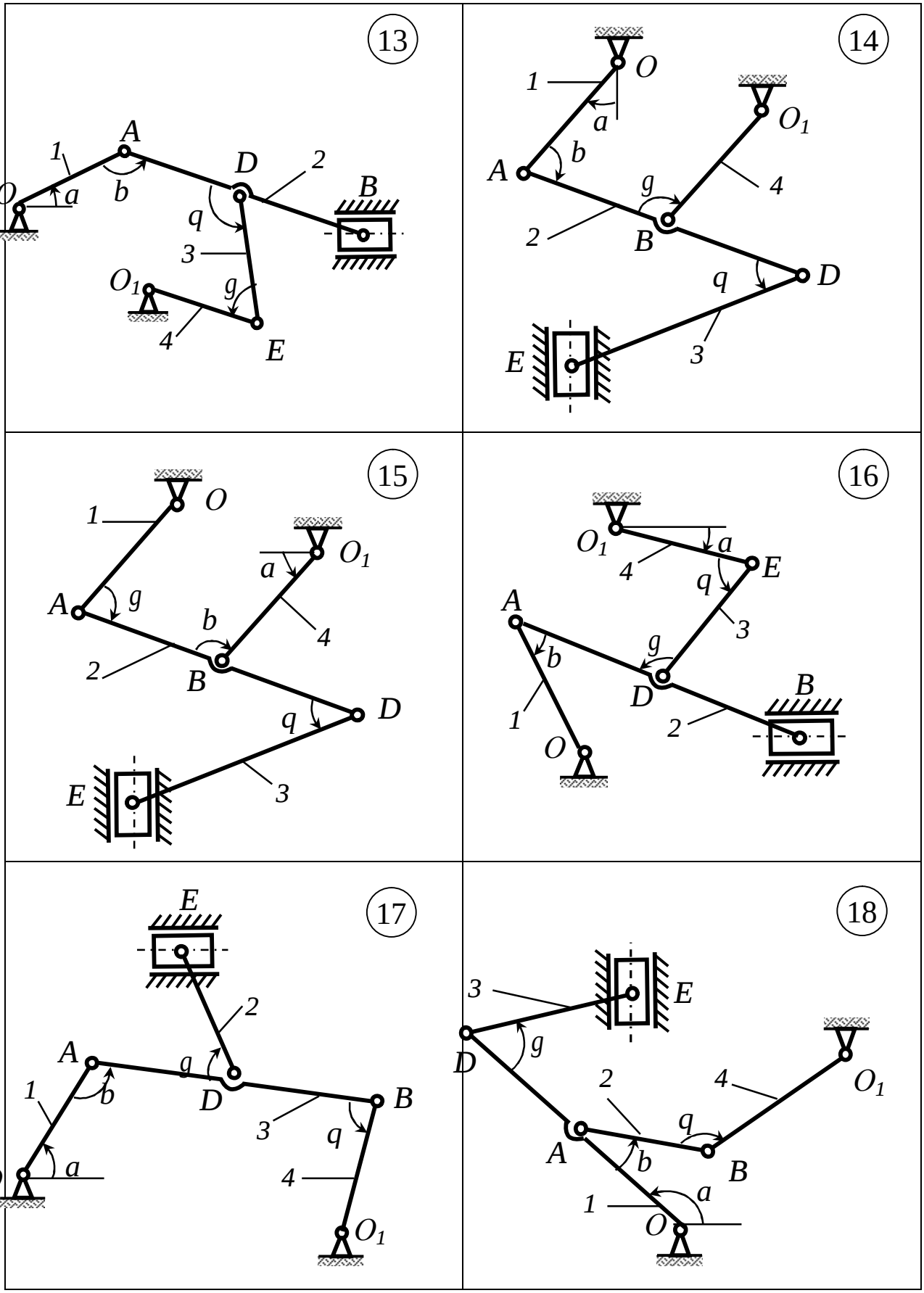


Рисунок 2.8, аркуш 3

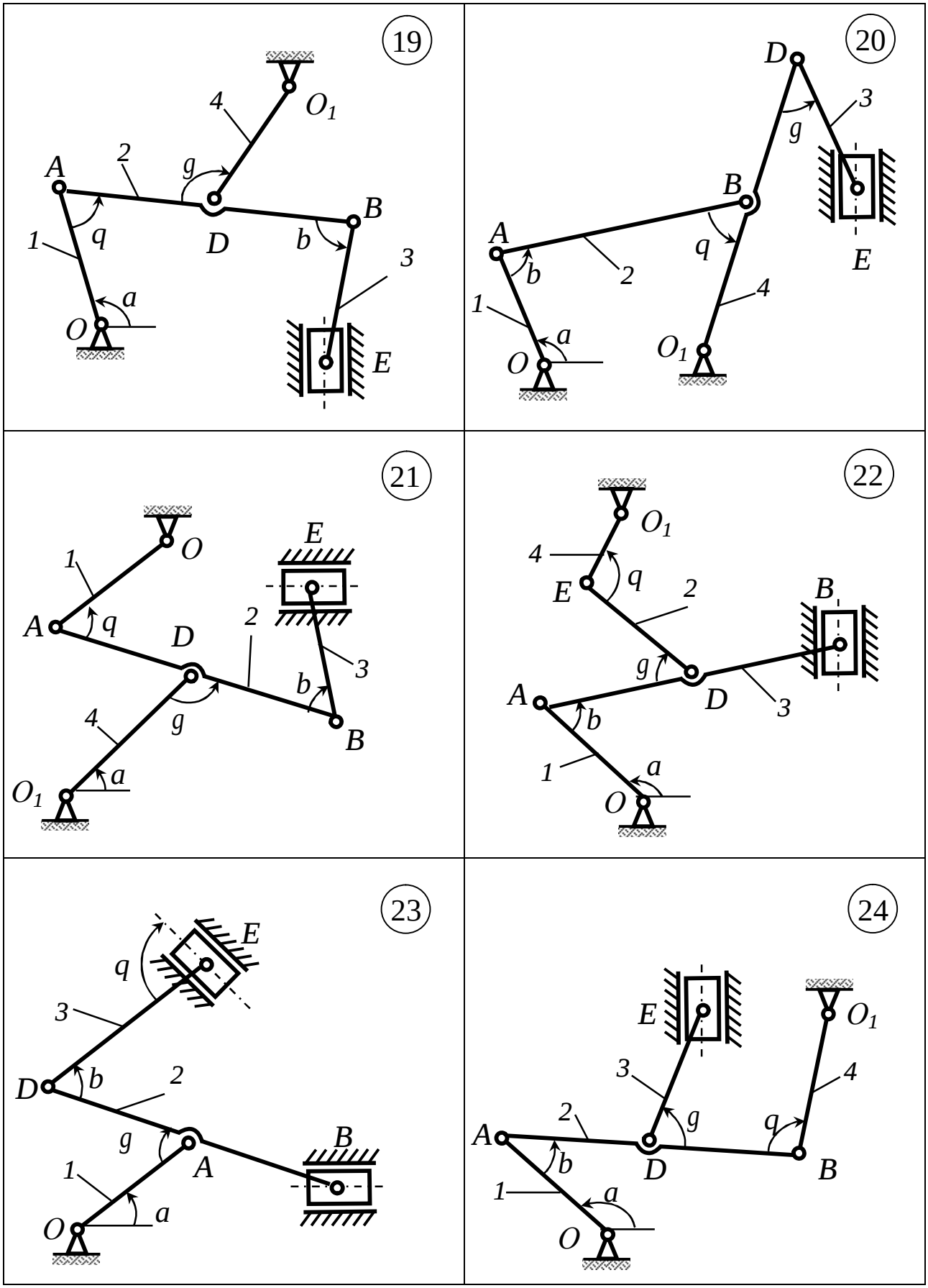


Рисунок 2.8, аркуш 4

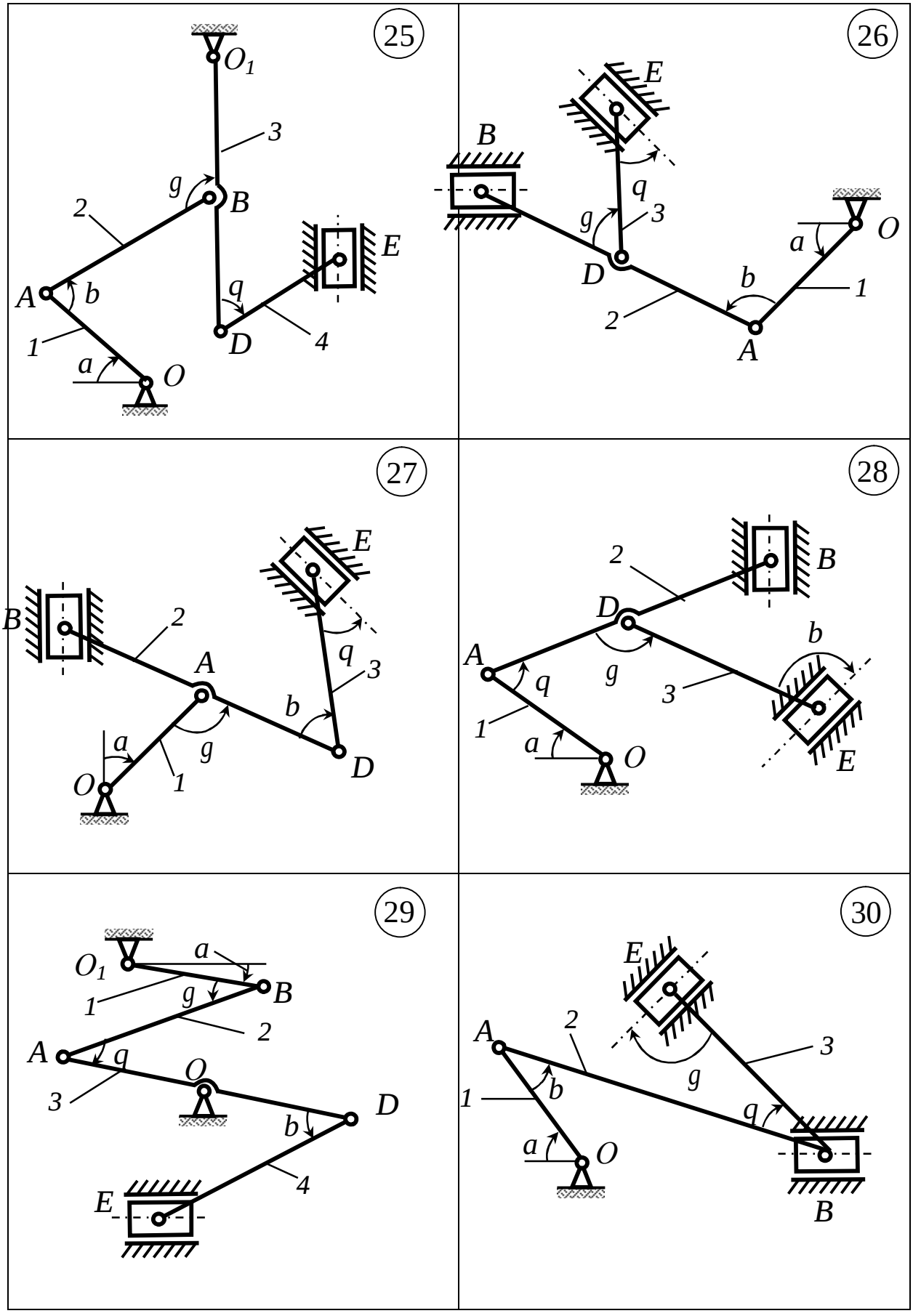


Рисунок 2.8, аркуш 5

Кінематичними характеристиками такого руху є швидкість та прискорення полюсу і кутова швидкість та кутове прискорення плоскої фігури.

Крім того, рух плоскої фігури в кожний момент часу зводиться до миттєвого обертального руху навколо певної точки, що називається миттєвим центром швидкостей (МЦШ).

Виходячи з цього, швидкість V_B довільної точки B плоскої фігури визначається за формулою

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}, \tag{2.12}$$

де $\overline{V}_A$ - вектор швидкості полюса A,

$\overline{V}_{BA}$ - вектор швидкості точки B в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса A. При цьому вектор $\overline{V}_{BA}$ - перпендикулярний до лінії AB, і його числове значення:

$$\overline{V}_{BA} = w_{AB} AB, \tag{2.13}$$

де w_{AB} - кутова швидкість плоскої фігури.

Крім того, швидкість довільної точки В можна знайти, використовуючи теорему: проекції швидкостей двох довільних точок A і B на напрямок відрізка AB, що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній, тобто:

$$V_A \cos a = V_B \cos b . \tag{2.14}$$

Але найбільш універсальним є спосіб знаходження швидкостей довільних точок плоскої фігури за допомогою поняття миттєвого центру швидкостей (МЦШ) – точки плоскої фігури, швидкість якої в момент часу, коли розглядаємо, дорівнює нулю.

Отже швидкість точок плоскої фігури можна розглядати як швидкість обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей. Тому вектори швидкостей всіх точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей і напрямлені в бік обертання фігури, а модулі швидкостей пропорційні відстаням точок до миттєвого центра швидкостей-точки P.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = ... = \frac{V_K}{KP} = w_{AB}. \qquad (2.15)$$

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок, можна за допомогою формули (2.15) знайти швидкість всіх інших точок та кутову швидкість плоскої фігури.

Прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорень полюса і прискорення цієї точки в обертальному русі фігури навколо полюса, тобто:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \qquad (2.16)$$

Тут дотичне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^t = e_{AB} \cdot AB \quad \text{і} \quad \bar{a}_{BA}^n \perp \overline{AB} \qquad (2.17)$$

а нормальне прискорення в обертальному русі дорівнює:

$$a_{BA}^n = w_{AB} \cdot AB \qquad (2.18)$$

і напрямлене від точки B до точки A.

2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.2

Механізм (рис. 2.9) складається із з'єднаних один з одним стрижнів 1…4, повзуна B та нерухомих опорів O і O_1.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $g = 90°$, $j = 30°$, $q = 30°$, $AD = DB$, $\mathbf{l}_1 = 0{,}4$ *м*, $\mathbf{l}_2 = 1{,}2$ *м*, $\mathbf{l}_3 = 1{,}4$ *м*, $\mathbf{l}_4 = 0{,}6$ м, $\omega_1 = 2$ *с*$^{-1}$, $e_1 = 7c^{-2}$ (напрямки ω_1 і e_1 - проти ходу годинникової стрілки).

Визначити: V_B, V_E, ω_2, a_B, e_3.

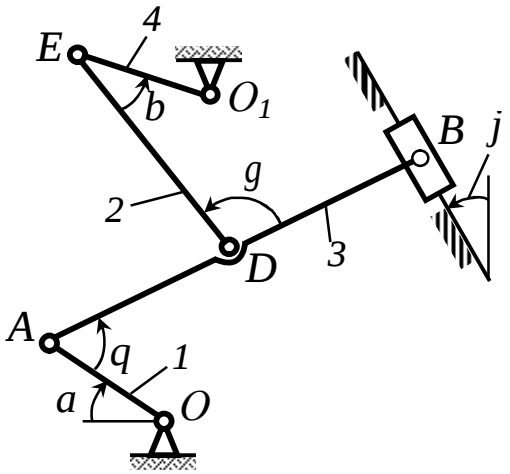


Рисунок 2.9 - Задана схема до прикладу виконання завдання 2.2

Розв'язання:

1 Побудуємо положення механізму (рис. 2.10) відповідно до заданих кутів та довжин стрижнів.

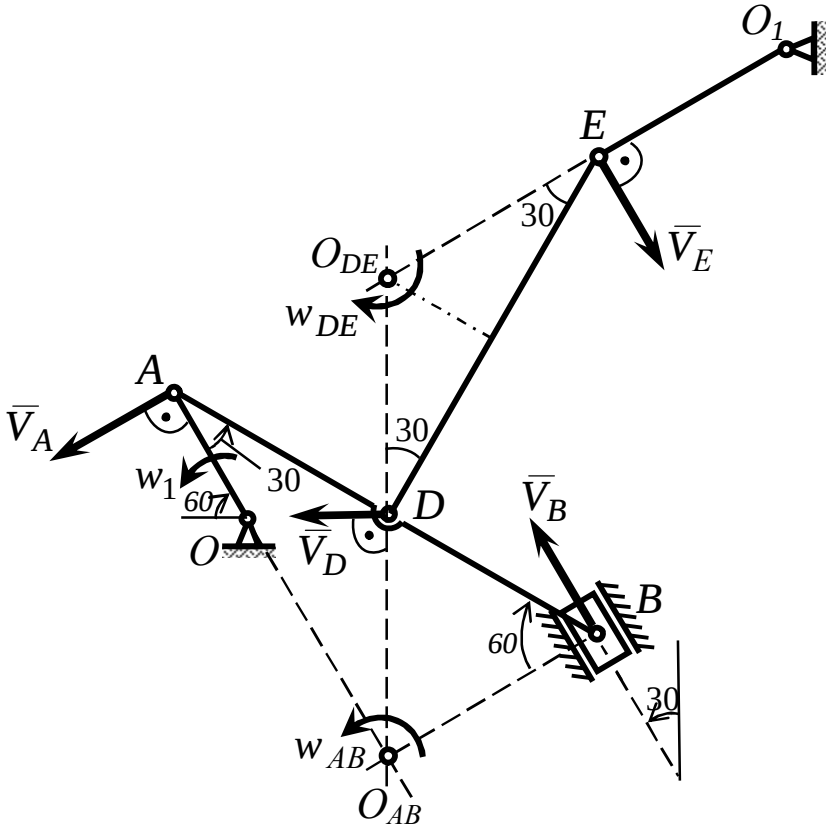


Рисунок 2.10 - Розрахункова схема для визначення швидкостей до прикладу виконання завдання 2.2

2 Спочатку знайдемо швидкість точки А, оскільки задана кутова

швидкість (ω_1) стрижня ОА:

$$V_A = w_1 \mathbf{l}_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8\ м/с; \qquad \overline{V}_A \perp O_1A. \tag{2.19}$$

3 Визначимо швидкість V_B. Точка B (див. рис. 2.8) належить стрижню AB, який здійснює плоско-паралельний рух. Напрямок $\overline{V}_B$ знайдемо, ураховуючи, що точка B належить одночасно повзуну, який рухається уздовж напрямних поступально. Тепер, знаючи напрямки векторів $\overline{V}_A$ та $\overline{V}_B$, скористаємося теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB).

$$V_B \cos 30° = V_A \cos 60° \tag{2.20}$$

Звідки $$V_B = V_A \frac{\cos 60^0}{\cos 30^0} = 0{,}8 \frac{0{,}5}{0{,}867} = 0{,}46\ м/с.$$

4 Визначимо швидкість $\overline{V}_E$. Точка E (див. рис. 2.10) належить стрижню DE. Отже, за аналогією з попереднім, щоб визначити $\overline{V}_E$, треба спочатку знайти швидкість точки D, що належить одночасно стрижням AB і DE. Для цього, знаючи $\overline{V}_A$ й $\overline{V}_B$, будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) стрижня AB. Це точка O_{AB}, що лежить на перетинанні перпендикулярів до $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$, побудованих із точок A і B. За напрямком вектора $\overline{V}_A$ визначимо напрямок кутової швидкості стрижня AB (ω_{AB}) навколо МЦШ O_{AB}. Вектор $\overline{V}_D$ направлений перпендикулярно відрізку $O_{AB}D$ і спрямований убік повороту ω_{AB}.

Величину V_D знайдемо із пропорції

$$\frac{V_D}{O_{AB}D} = \frac{V_B}{O_{AB}B}. \tag{2.21}$$

Щоб обчислити $O_{AB}D$ і $O_{AB}B$, будемо мати на увазі, що ΔABO_{AB} — прямокутний, тому що гострі кути в ньому дорівнюють 30° і 60°, і що

$$O_{AB}B = AB \sin 30° = 0{,}5 \cdot AB = BD.$$

Тоді ΔBDO_{AB} є рівностороннім, і $BO_{AB} = DOP_{AB}$.

У результаті чого з рівняння (2.21) знаходимо

$$V_D = V_B = 0{,}46\ м/с \quad \text{і} \qquad V_D \perp DO_{AB}. \tag{2.22}$$

5 Оскільки точка E (див. рис. 2.10) належить одночасно стрижню O_1E, що обертається навколо опори O_1, то $\bar{V}_E \perp O_2E$. Тоді, проводячи із точок E і D перпендикуляри до швидкостей $\bar{V}_E$ і $\bar{V}_D$, побудуємо МЦШ O_{DE} стрижня DE. За напрямком вектора $\bar{V}_D$ визначаємо напрямок кутової швидкості (ω_{DE}) стрижня DE навколо центра O_{DE}. Вектор $\bar{V}_E$ також спрямований убік кутової швидкості ω_{DE}. З рисунку 2.10 видно, що $\angle O_{DE}ED = \angle O_{DE}DE = 30°$, звідки $O_{DE}E = O_{DE}D$.

Пам'ятаючи, що швидкості точок пропорційні відстаням до МЦШ

$$\frac{V_E}{O_{DE}E} = \frac{V_D}{O_{DE}D}, \tag{2.23}$$

знайдемо $V_E = V_D = 0{,}46\ м/с$.

6 Визначимо $\omega_{DE.}$ Для цього треба знайти відстань $O_{DE}D$. Опустимо перпендикуляр з точки O_{DE} на стрижень DE і знайдемо

$$O_{DE}D = \frac{0{,}5\mathbf{l}_2}{\cos 30°} = 0{,}69\ м, \tag{2.24}$$

тоді $$w_{DE} = \frac{V_D}{O_{DE}D} = \frac{0{,}46}{0{,}69} = 0{,}67\ с^{-1}.$$

6 Для визначення прискорень побудуємо рис. 2.11, на якому зображено вектори всіх прискорень.

7 Визначимо $\bar{a}_B$. Точка B належить стрижню AB, який здійснює плоско-паралельний рух, тому для визначення $\bar{a}_B$ скористаємося рівнянням

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \tag{2.25}$$

Щоб знайти $\bar{a}_B$, треба знати прискорення якої-небудь іншої точки (полюса) стрижня AB і траєкторію точки B.

За даними завдання можемо визначити $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$, де чисельно

$$a_A^t = e_1 \mathbf{l}_1 = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8\ м/с^2, \quad (2.26)$$

$$a_A^n = w_1^2 \mathbf{l}_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6\ м/с^2. \quad (2.27)$$

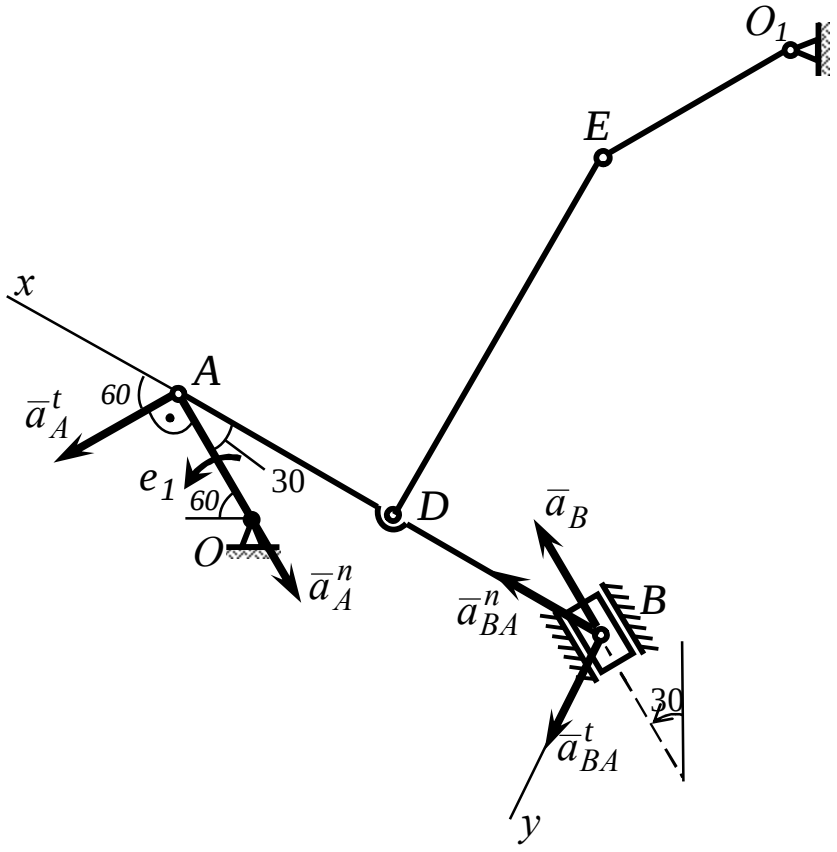


Рисунок 2.11 - Розрахункова схема для визначення прискорень до прикладу виконання завдання 2.2

Вектор $\bar{a}_A^n$ спрямований уздовж AO, а $\bar{a}_A^t$ – перпендикулярно AO; зображуємо ці вектори на схемі (див. рис. 2.11).

Точка B, яка належить повзуну, рухається паралельно напрямку повзуна. Тому зобразимо вектор $\bar{a}_B$ на схемі (див. рис. 2.11), вважаючи, що $\bar{a}_B$ спрямований у ту ж сторону, що й швидкість $\bar{V}_B$.

Зобразимо на схемі вектори $\bar{a}_{BA}^n$ (уздовж BA від B к A) і $\bar{a}_{BA}^t$ (у будь-яку сторону перпендикулярно BA). Чисельно $\bar{a}_{BA}^n = w_3^2 \mathbf{l}_3$.

Кутову швидкість ω_{AB} знайдемо за допомогою побудованого МЦШ стрижня АВ (точка O_{AB}, див. рис. 2.10).

$$w_{AB} = \frac{V_A}{O_{AB}A} = \frac{V_A}{\mathbf{l}_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66\, c^{-1}.$$

Тоді $$\bar{a}^n_{BA} = 0{,}66^2 \cdot 1{,}4 = 0{,}61\, м/с_2. \qquad (2.28)$$

Таким чином, з прискорень, які входять до рівняння (2.25), невідомі тільки дві величини: a_B й a^t_{BA}. Їх можна знайти, спроектувавши частини рівняння (2.25) на дві будь-які осі. Наприклад, вісь x направимо вздовж стрижня АВ, а ось y – в перпендикулярному напрямку.

Спроектуємо векторне рівняння (2.25) на вісь x і одержимо

$$a_B \cos 30^\circ = a^t_A \cos 60^\circ - a^n_A \cos 30^\circ + a^n_{BA}. \qquad (2.29)$$

Підставивши в рівняння (2.29) числові значення всіх величин з (2.26)…(2.28), знайдемо:

$$a_B = \frac{2{,}8 \cdot 0{,}5 - 1{,}6 \cdot 0{,}867 + 0{,}61}{0{,}867} = 0{,}72\, м/с^2. \qquad (2.30)$$

Оскільки a_B>0, то це означає, що вектор $\bar{a}_B$ спрямований так, як і показано на рис. 2.11.

Тепер спроектуємо векторне рівняння (2.25) на вісь y і одержимо:

$$-a_B \sin 30^\circ = a^t_A \sin 60^\circ + a^n_A \sin 30^\circ + a^t_{BA}. \qquad (2.31)$$

звідки знайдемо $a^t_{BA} = a_B \sin 30^\circ - a^t_A \sin 60^\circ - a^n_A \sin 30^\circ = -3{,}58\, м/с^2.$

Знак a^t_{BA}>0 указує, що напрямок $\bar{a}^t_{BA}$ протилежний показаному на рис. 2.11.

8 Визначимо e_3. Оскільки $a^t_{BA} = e_3 \mathbf{l}_3$, то

$$e_3 = \frac{\left|a^t_{BA}\right|}{\mathbf{l}_3} = \frac{3{,}58}{1{,}4} = 2{,}56\, c^{-2}. \qquad (2.32)$$

Розв'язок: $V_B = 0{,}46\, м/с$; $V_E = V_D = 0{,}46\, м/с$;

$w_{DE} = 0{,}67\, c^{-1}$; $a_B = 0{,}72\, м/с^2$; $e_3 = 2{,}56\, c^{-2}$.

3 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «ДИНАМІКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА»

3.1 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під впливом змінної сили $P = f(S)$ починає рухатись зі стану спокою (при цьому пружини вважаються не розтягнутими). Початкові положення системи зображені на рис. 3.1.

Враховуючи тертя ковзання тіла 1 та опір тіла 3 при коченні (вар.1-6, 8, 9, 12-14, 16-19, 21-26, 28-30), ігноруючи маси ниток, які вважають нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у положенні, коли точка прикладання сили P пройде шлях $S = 1м$.

У завданні прийняті такі позначення:

- m_1, m_2 та m_3 - маси тіл 1, 2 та 3, величини яких залежать від заданої маси (для усіх варіантів $m = 10$ *кг*);
- r_2, R_2, r_3 та R_3 – радіуси великих та малих кіл, причому $R_2=2r_2$, $R_3=2r_3$;
- $i_{2Z} = 1{,}5\ r_2$ – радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі;
- c – коефіцієнт жорсткості пружини;
- f та f_K – коефіцієнти тертя відповідно ковзання та кочення.

Необхідні для рішення дані наведені в таблицях 3.1 і 3.2.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
r_2, м	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
r_3, м	0,50	0,60	0,80	0,70	0,60	0,40	0,50	0,30	0,20	0,10
f	0,12	0,15	0,22	0,28	0,35	0,40	0,35	0,32	0,25	0,24
f_K, см	0,25	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32	0,18	0,12	0,14	0,16

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі 3.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
m_1, кг	9m	10m	9m	8m	6m	8m	7m	9m	10m	8m
m_2, кг	6m	5m	4m	3m	4m	3m	5m	6m	4m	3m
m_3, кг	2m	3m	1m	3m	2m	1m	2m	3m	2m	1m
c, Н/м	12	14	18	20	16	14	12	18	22	20
$P=¦(S)$, Н	$30S^2$	$21S^2$	$40S^2$	$18S^2$	$10S^2$	$24S^2$	$16S^2$	$30S^2$	$24S^2$	$12S^2$

Попередження: блоки та катки, які мають тільки один радіус, вважати однорідними суцільними циліндрами. Тіла, маси яких не задані, вважаються невагомими.

3.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.1

Для розв'язання даного завдання треба застосувати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи в інтегральній формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i , \qquad (3.1)$$

де T – поточне значення кінетичної енергії системи;

T_0 – початкове значення кінетичної енергії системи;

$\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ і $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ – суми робіт усіх відповідно зовнішніх і внутрішніх сил;

n – кількість матеріальних точок, які складають систему.

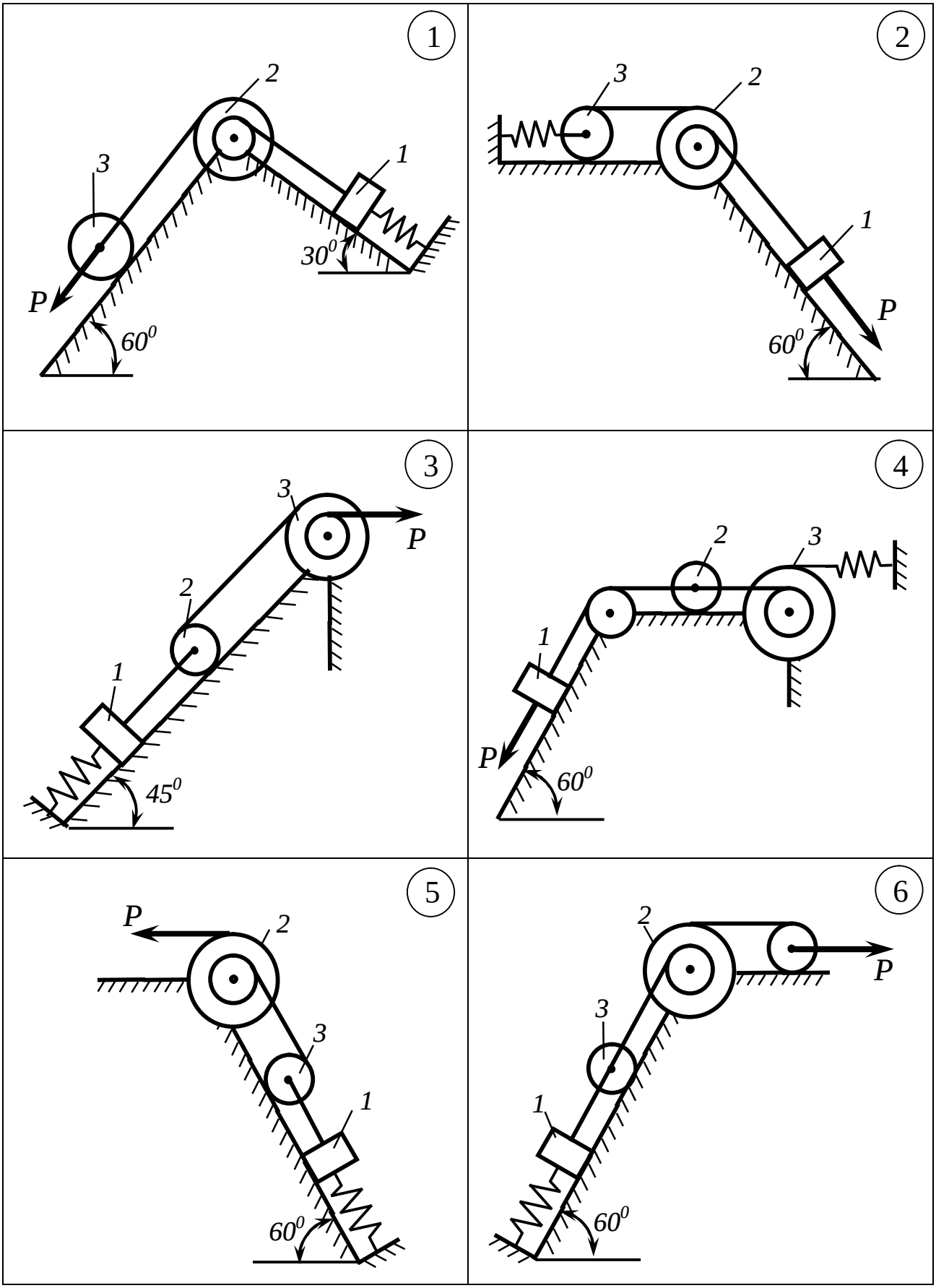


Рисунок 3.1-Схеми до варіантів завдань

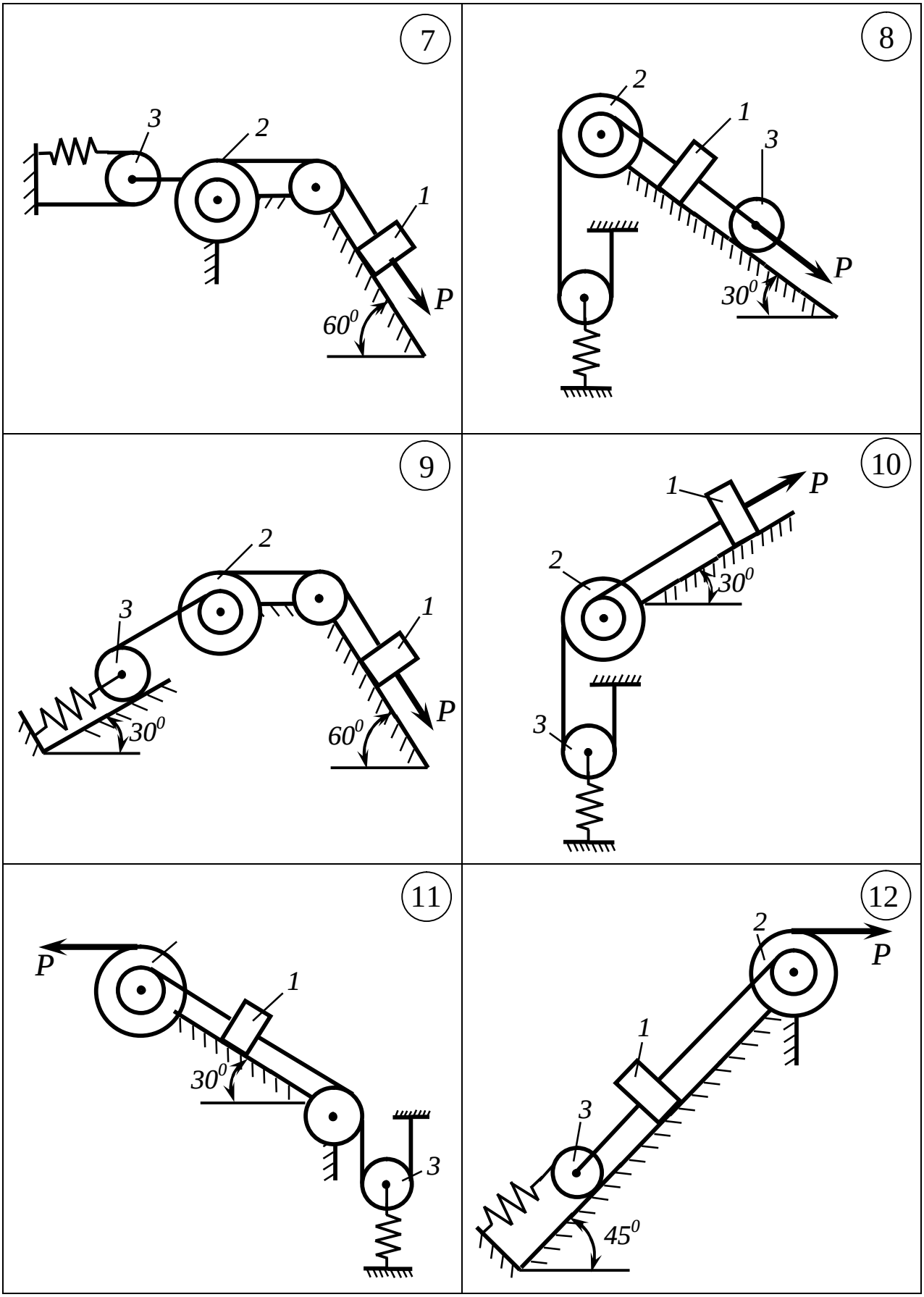


Рисунок 3.1, аркуш 2

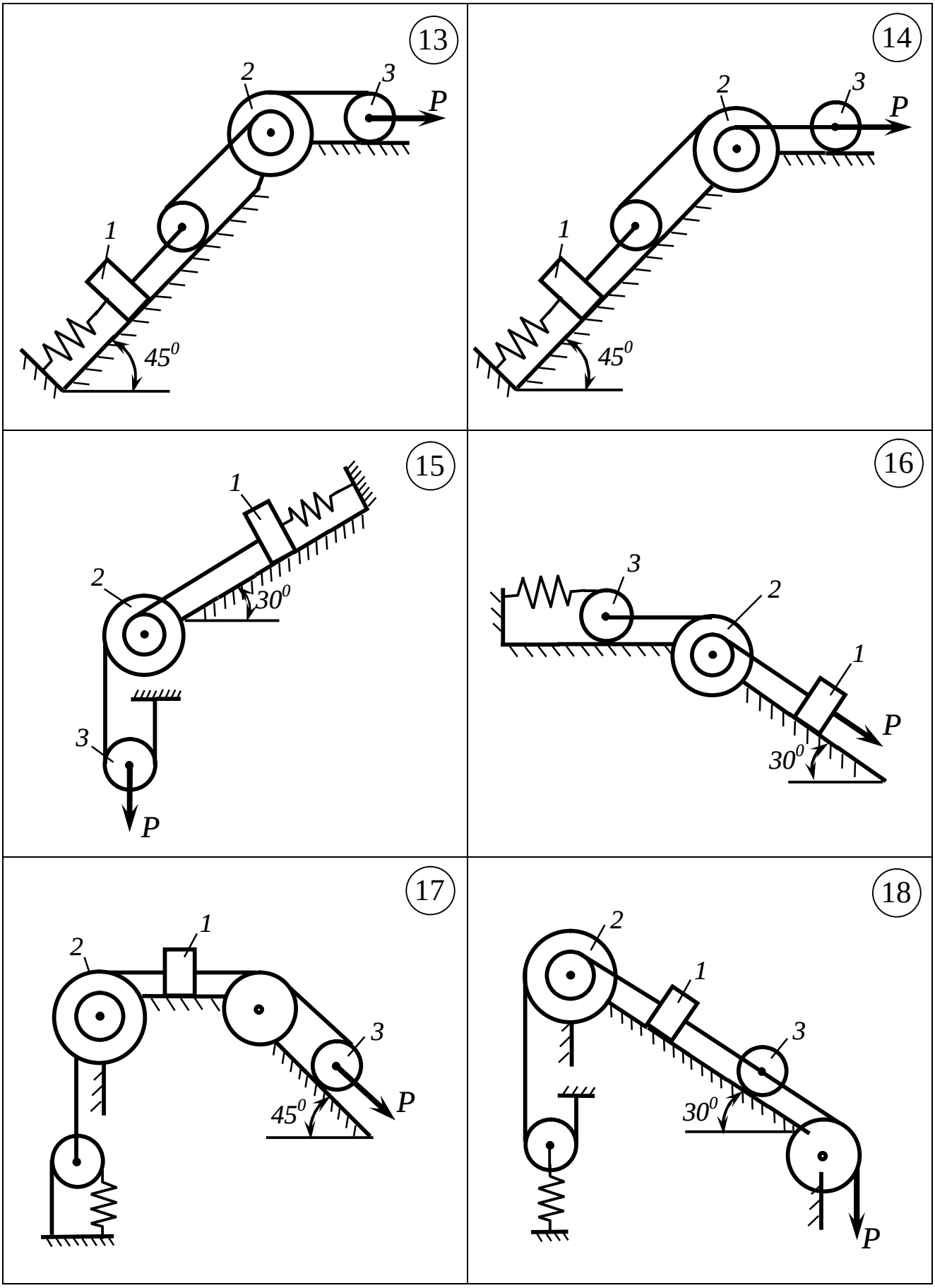


Рисунок 3.1, аркуш 3

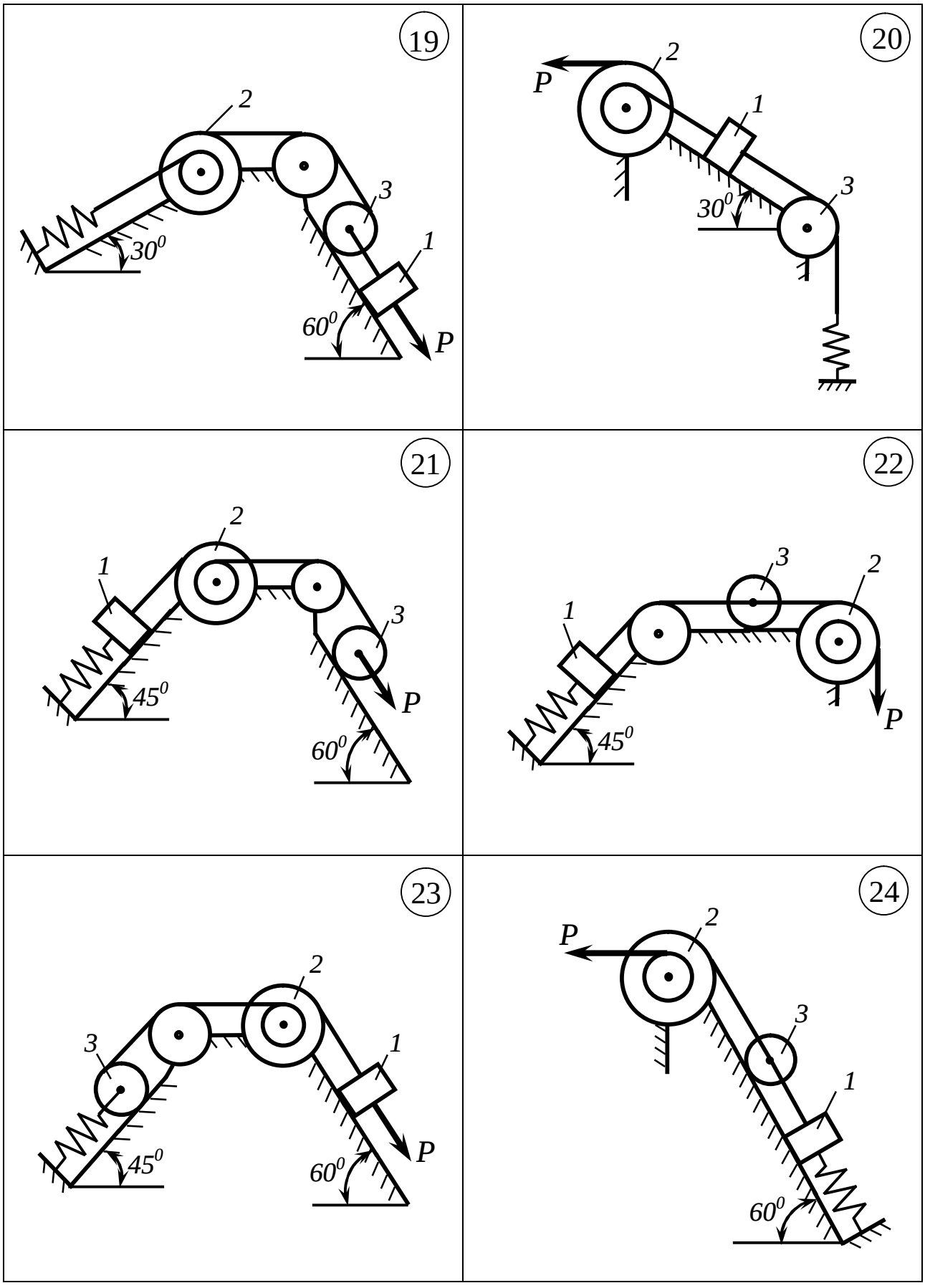


Рисунок 3.1, аркуш 4

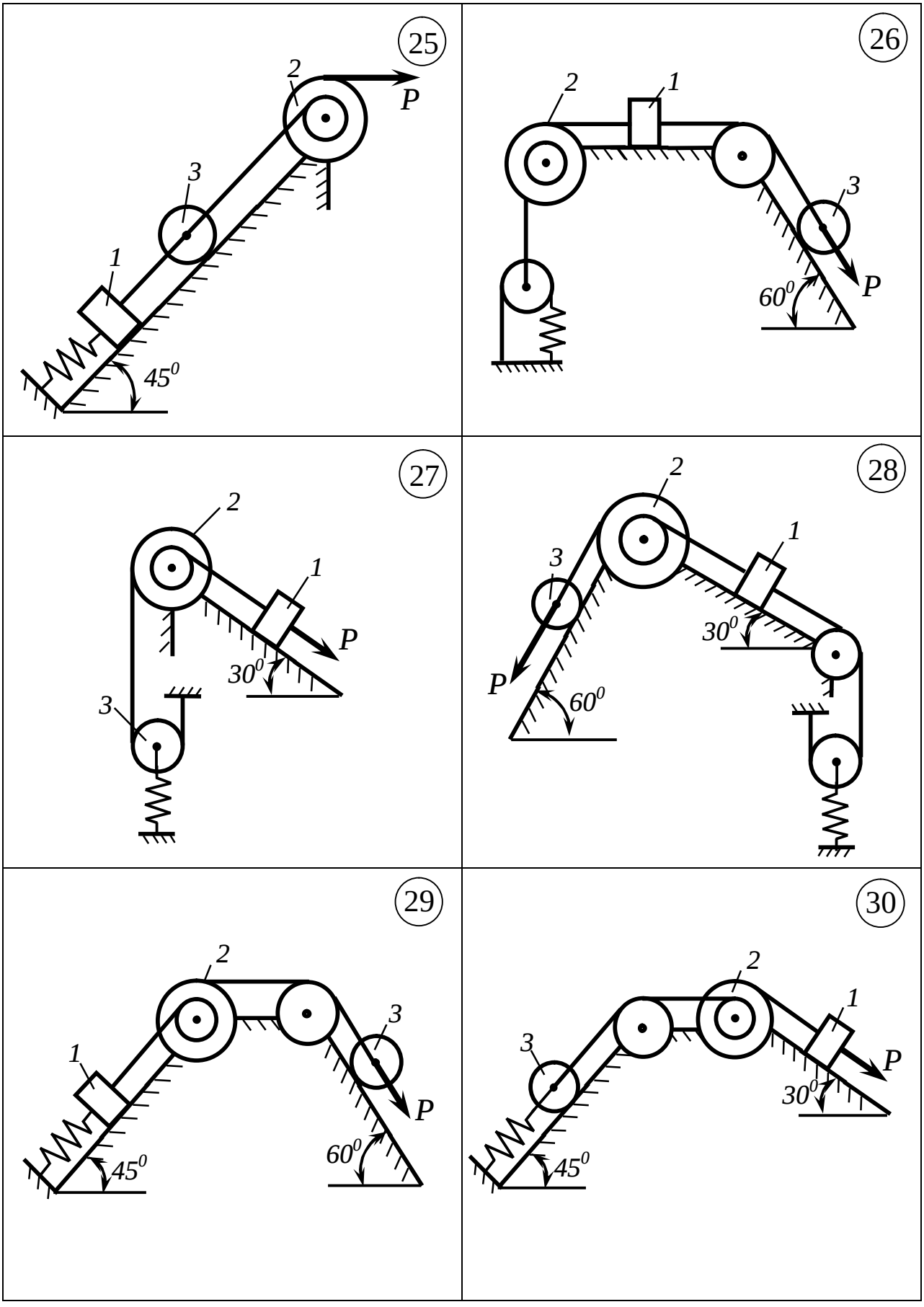


Рисунок 3.1, аркуш 5

Оскільки робота внутрішніх сил для ідеальної системи, в якій в'язі не деформуються, а тертям нехтують, дорівнює нулю, то формула (3.1) буде мати вигляд

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e . \qquad (3.2)$$

Якщо в початковий момент система була нерухома, то $T_0 = 0.$

Кінетична енергія системи T складається із кінетичних енергій (T_k) тіл, які входять до складу системи: $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$. (3.3)

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається поступально, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m V^2, \qquad (3.4)$$

де m – маса тіла;

V – його швидкість.

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} J_Z w^2, \qquad (3.5)$$

де J_Z – момент інерції тіла відносно осі обертання;

w – кутова швидкість тіла.

Кінетична енергія тіла при плоско-паралельному русі дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{Z_C} w^2, \qquad (3.6)$$

де V_C – швидкість центра мас тіла;

J_{Z_C} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Робота сили P, яка прикладена до точки M, на переміщенні M_1M_2, визначається за формулою

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P_t \, dS, \tag{3.7}$$

де $P_t = P \cdot cos\left(\overline{P}^{\wedge}, \overline{t}\right)$ – проекція сили P на дотичну вісь t ;

dS – елементарне переміщення точки траєкторією.

У деяких випадках роботу обчислюють за формулами, які наведені нижче.

Робота сили ваги матеріальної точки

$$A = \pm mgh, \tag{3.8}$$

де $h = z_2 - z_1$ – різниця вертикальних координат між початковою та кінцевою точками відрізка траєкторії. Робота вважається додатною, якщо напрямок сили (mg) співпадає з напрямком переміщення, тобто коли сила переміщується униз.

Робота сили пружності

$$A = \pm \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x_1^2\right), \tag{3.9}$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини;

x_0 і x_1 – відповідно початкове і кінцеве видовження пружини.

Робота сил, які прикладені до тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$$A = \int_0^j M_Z \, dj \, , \tag{3.10}$$

де $M_Z = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\overline{P}_k^e\right)$ – обертовий момент, або сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання;

dj – елементарний кут повороту тіла навколо осі;

j – кінцевий кут повороту.

3.1.2 Приклад розв'язання задачі 3.1

Механічна система (рис. 3.2) складається з вантажу 1, східчастого шківа 2 і однорідного суцільного циліндра 3. Тіла системи зв'язані нерозтяжними нитками. До центра C_3 циліндра 3 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c (її початкова деформація дорівнює нулю). Коефіцієнт тертя вантажу 1 об поверхню дорівнює f. Коефіцієнт кочення циліндра 3 дорівнює d .

Система починає рухатись під впливом сили $P = f(S)$.

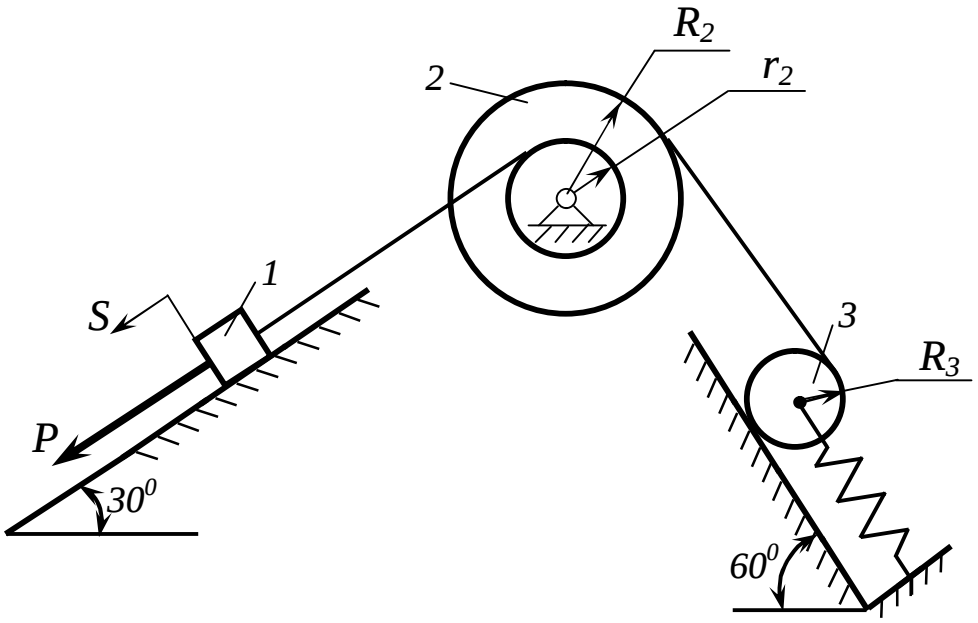


Рисунок 3.2 - Задана схема до прикладу виконання завдання 3.1

Дано: $m_1 = 10m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $m = 10$ *кг*; $r_2 = 6$ *см*; $R_2 = 2r_2 = 12$ *см*; $i_{2Z} = 1{,}5r_2 = 9$ *см*; $R_3 = 15$ *см*; $a = 30^0$; $b = 60^0$; $f = 0{,}1$; $f_K = 0{,}2$*см*; $c = 10$ *Н/м*; $S = 0{,}5$*м*; $P = 30(2+3S)$, *Н*.

Визначити: швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні.

Розв'язання:

Зобразимо механічну систему в кінцевому положенні (рис. 3.3), коли тіло 1 пройде шлях $S = S_1$. Позначимо всі зовнішні сили, які діють на систему: активні сили ваги $m_1\bar{g}; m_2\bar{g}; m_3\bar{g}$; нормальні реакції N_1 та N_3

площини та реакцію N_2 нерухомої опори східчастого шківа *2*; сили тертя ковзання F_{TP_1} та момент опору кочення M_{TP}.

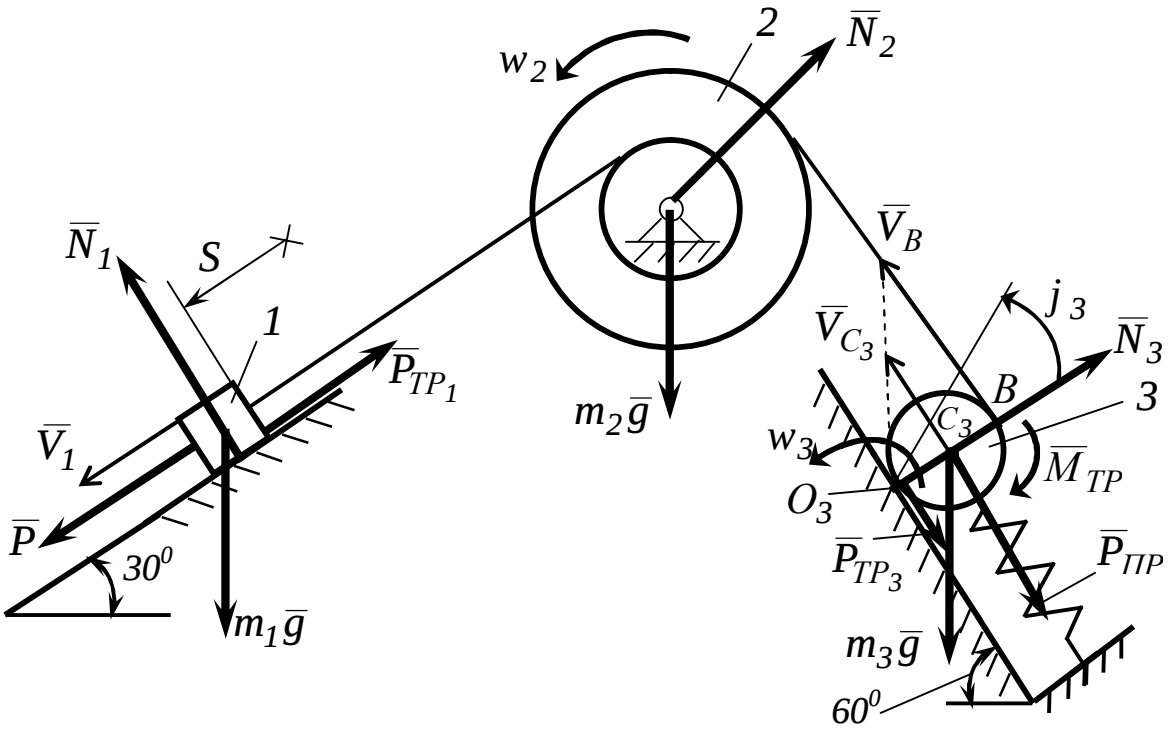


Рисунок 3.3 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 3.1

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії можна записати

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e , \tag{3.11}$$

де $T_0 = 0$ – кінетична енергія системи у початковому положенні;

$\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил.

Кінетична енергія системи у кінцевому положенні дорівнює:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3.12}$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 . \tag{3.13}$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2Z} w_2^2, \tag{3.14}$$

де J_{2Z} – момент інерції блока відносно осі обертання;

$J_{2Z} = m_2 i_{2Z}^2$ – момент інерції блока відносно осі обертання,

w_2 – кутова швидкість блока 2, яка дорівнює

$$w_2 = \frac{V_1}{r_2}. \tag{3.15}$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі

Таким чином

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} V_1^2. \tag{3.16}$$

Кінетична енергія катка 3, який рухається плоско-паралельно

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} J_{Z_C} w_3^2, \tag{3.17}$$

де V_{C3} – швидкість центра мас тіла;

w_3 – кутова швидкість катка;

J_{Z_C} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Оскільки тіло 3 можна вважати суцільним однорідним диском, то його момент інерції відносно осі z, яка проходить через центр мас C, дорівнює

$$J_{ZC} = \frac{m_3 R_3^2}{2}. \tag{3.18}$$

Для знаходження швидкостей w_3 і V_{C3} скористаємось формулою (3.14) і спочатку знайдемо швидкість точки В:

$$V_B = w_2 R_2 = \frac{V_1 R_2}{r_2}. \tag{3.19}$$

Оскільки $V_{C_3} = \frac{1}{2} V_B$, то $V_{C_3} = \frac{V_1 R_2}{2 r_2} = V_1$. (3.20)

Кутова швидкість катка $$w_3 = \frac{V_B}{2R_3} = \frac{V_1 R_2}{2r_2 R_3}\ . \qquad (3.21)$$

Підставимо (3.18), (3.20) та (3.21) в (3.17)

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{V_1 R_2}{2r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \left(\frac{V_1 R_2}{2r_2 R_3} \right) = \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} V_1^2 . \qquad (3.22)$$

Визначимо кінетичну енергію усієї механічної системи, підставивши (3.13), (3.16) та (3.22) у формулу (3.12):

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} V_1^2 + \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} V_1^2 = \frac{V_1^2}{16} \left(8m_1 + 8m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right).$$

Після підстановки значень мас і радіусів одержимо:

$$T = \frac{V_1^2}{16} \left(8 \cdot 10m + 8 \cdot 2m \left(\frac{1{,}5 r_2}{r_2} \right)^2 + 3m \left(\frac{2r_2}{r_2} \right)^2 \right) = 8mV_1^2 . \qquad (3.23)$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил (див. рис. 3.3), які діють на тіла системи на заданому переміщенні.

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = A(\bar{P}) + A(m_1 \bar{g}) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{P}_{TP_1}) + A(m_2 \bar{g}) +$$
$$+ A(\bar{N}_2) + A(m_3 \bar{g}) + A(\bar{N}_3) + A(\bar{P}_{TP_3}) + A(M_{TP}) + A(\bar{P}_{ПР}) . \qquad (3.24)$$

Робота зовнішньої сили F

$$A(P) = \int_0^{S_1} P dS = \int_0^{S_1} 30(2 + 3S) dS = 60S_1 + 45S_1^2 , \qquad (3.25)$$

де S_1 – переміщення вантажу 1.

Робота сили ваги тіла 1

$$A(m_1 g) = A(m_1 g)_t \cdot S_1 = m_1 g \sin a \cdot S_1 . \qquad (3.26)$$

Оскільки нормальна реакція вантажу 1 (N_1) направлена перпендикулярно до напрямку руху вантажу 1 , то її робота дорівнює 0:

$$A(N_1) = 0 . \qquad (3.27)$$

Робота сили тертя ковзання P_{TP_1} ,

$$A(P_{TP_1}) = (P_{TP_1})_t \cdot S_1,$$

де $(\overline{P}_{TP_1})_t$ – проекція сили тертя ковзання на напрямок руху.

Оскільки сила тертя дорівнює $(P_{TP_1}) = fN_1 = fm_1 g \cos a$,

то $$A(P_{TP_1}) = -fm_1 g \cos a\ . \qquad (3.28)$$

Робота сили ваги тіла 2 і реакції підшипника N_2 дорівнюють 0 оскільки сили прикладені до точки , яка не рухається:

$$A(m_2 g) = A(N_2) = 0. \qquad (3.29)$$

Робота сили ваги тіла 3

$$A(m_3 g) = A(m_3 g)_t \cdot S_{C_3},$$

де $(m_3 g)_t$ - проекція сили ваги на напрямок руху,

$(m_3 g)_t = -m_3 g \sin b,$

а S_{C_3} – переміщення центра мас тіла *3*, пропорційне відповідній швидкості: $\frac{S_3}{V_{C_3}} = \frac{S_1}{V_1}$, звідки, враховуючи (3.19), знайдемо

$$S_3 = S_1 \frac{V_{C_3}}{V_1} = S_1.$$

Отже, $$A(m_3 g) = -m_3 g \sin b \cdot S_1. \qquad (3.30)$$

Робота нормальної реакції катка 3 дорівнює 0, оскільки сила N_3 направлена перпендикулярно напрямку руху катка:

$$A(N_3) = 0. \qquad (3.31)$$

Робота сили тертя ковзання P_{TP_3} також дорівнює нулю, оскільки вона прикладена до миттєвого центра швидкостей катка 3 (до точки O_3), який не рухається.

Отже, $$A(P_{TP3}) = 0. \qquad (3.32)$$

Робота сил опору кочення M_{TP}

$$A(M_{TP}) = -M_{TP} \cdot j_3, \qquad (3.33)$$

де j_3 – кут повороту катка 3 навколо осі z, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через миттєвий центр швидкостей катка O_3.

Момент сил опору кочення дорівнює $M_{TP} = f_K N_3 = f_K m_3 g \cos b$.

Кут j_3 пропорційний кутовій швидкості w_3, тому $\frac{j_3}{w_3} = \frac{S_1}{V_1}$,

Звідки, враховуючи (3.20), знайдемо $j_3 = \frac{S_1}{V_1} w_3 = \frac{S_1}{V_1} \cdot \frac{V_1 R_2}{2 r_2 R_3} = \frac{S_1}{R_3}$.

Отже, $$A(M_{TP}) = -f_K m_3 g \cos b \frac{S_1}{R_3}. \qquad (3.34)$$

Робота сили пружності $P_{ПР}$

$$A(P_{ПР}) = -\frac{cS_3^2}{2} = -\frac{cS_1^2}{2}. \qquad (3.35)$$

Підставляючи одержані значення робіт (3.24)…(3.34) до формули (3.23), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 60S_1 + 45S_1^2 + m_1 g \sin a \cdot S_1 - f m_1 g \cos a \cdot S_1 -$$

$$-m_3 g \sin b \cdot S_1 - f_K m_3 g \cos b \frac{S_1}{R_3} - \frac{cS_1^2}{2}. \qquad (3.36)$$

Після підстановки значень мас та функцій кутів одержуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 0{,}5(60 + 45 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 10 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 10 \cdot 98{,}1 \cdot 0{,}866 -$$

$$-98{,}1 \cdot 0{,}866 - 0{,}002 \cdot 98{,}1 \frac{0{,}5}{0{,}015} - \frac{10 \cdot 0{,}5}{2}) = 197 \text{ Дж}. \qquad (3.37)$$

Підставимо (3.23) і (3.37) у формулу (3.11) і знайдемо, що

$$8mV_1^2 = 197.$$

Остаточно $$V_1 = 1{,}57 \text{ м/с}.$$

Розв'язок: Швидкість вантажу *1* в кінцевому положенні дорівнює $V_1 = 1{,}57 \text{ м/с}$.

3.2 Застосування загального рівняння динаміки при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем свободи

Для заданої механічної системи (рис. 3.4) визначити прискорення тіла 1. Величини, необхідні для розв'язання задачі, вказані в таблицях 3.1 і 3.2 (див. попереднє завдання).

Блоки і катки, радіуси інерції яких у таблицях 3.1 і 3.2 відсутні, вважати однорідними круглими циліндрами.

3.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.2

Розглянемо рух механічної системи з ідеальними в'язями. Якщо до кожної точки системи, крім діючих активних сил $\bar{F}_k$ і реакцій в'язей $\bar{R}_k$, додати сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$, то згідно з принципом Даламбера отримана система сил буде перебувати у стані рівноваги. Використовуючи для такої системи принцип можливих переміщень, отримаємо загальне рівняння динаміки, а саме:

$$\sum \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{R}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = 0 \qquad (3.38)$$

або $$\sum dA_k + \sum dA_k^R + \sum dA_k^{\Phi} = 0. \qquad (3.39)$$

Якщо до системи прикладені ідеальні в'язі, то рівняння (3.38) і (3.39) можливо спростити.

Відомо, що умова ідеальності в'язей має вигляд:

$$\sum \bar{R}_k d\bar{r}_k = 0.$$

Тоді рівняння (3.38) набуде вигляду:

$$\sum \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = 0,$$

а рівняння (3.39): $$\sum dA_k + \sum dA_k^{\Phi} = 0. \qquad (3.40)$$

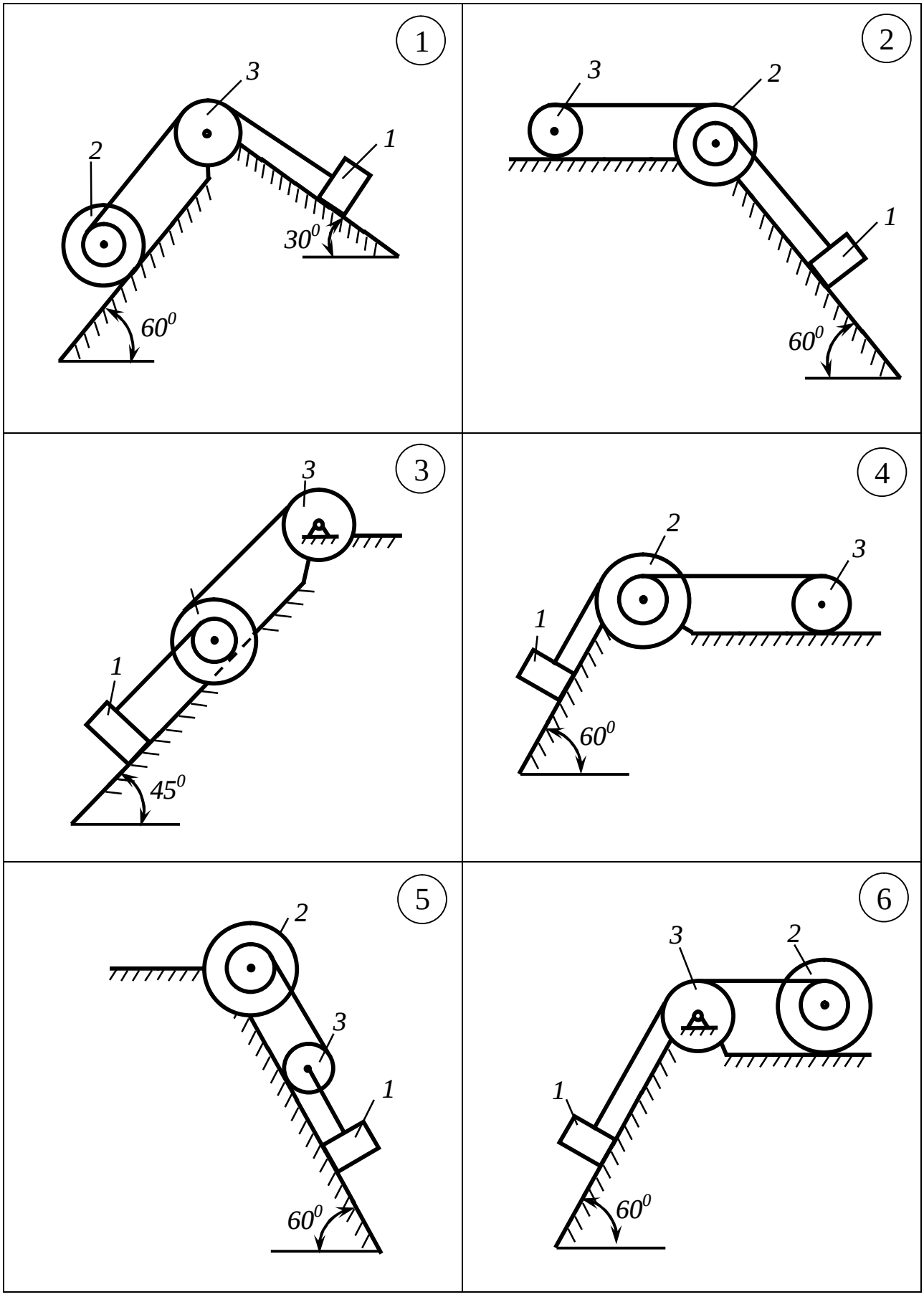


Рисунок 3.4 - Схеми до варіантів завдань

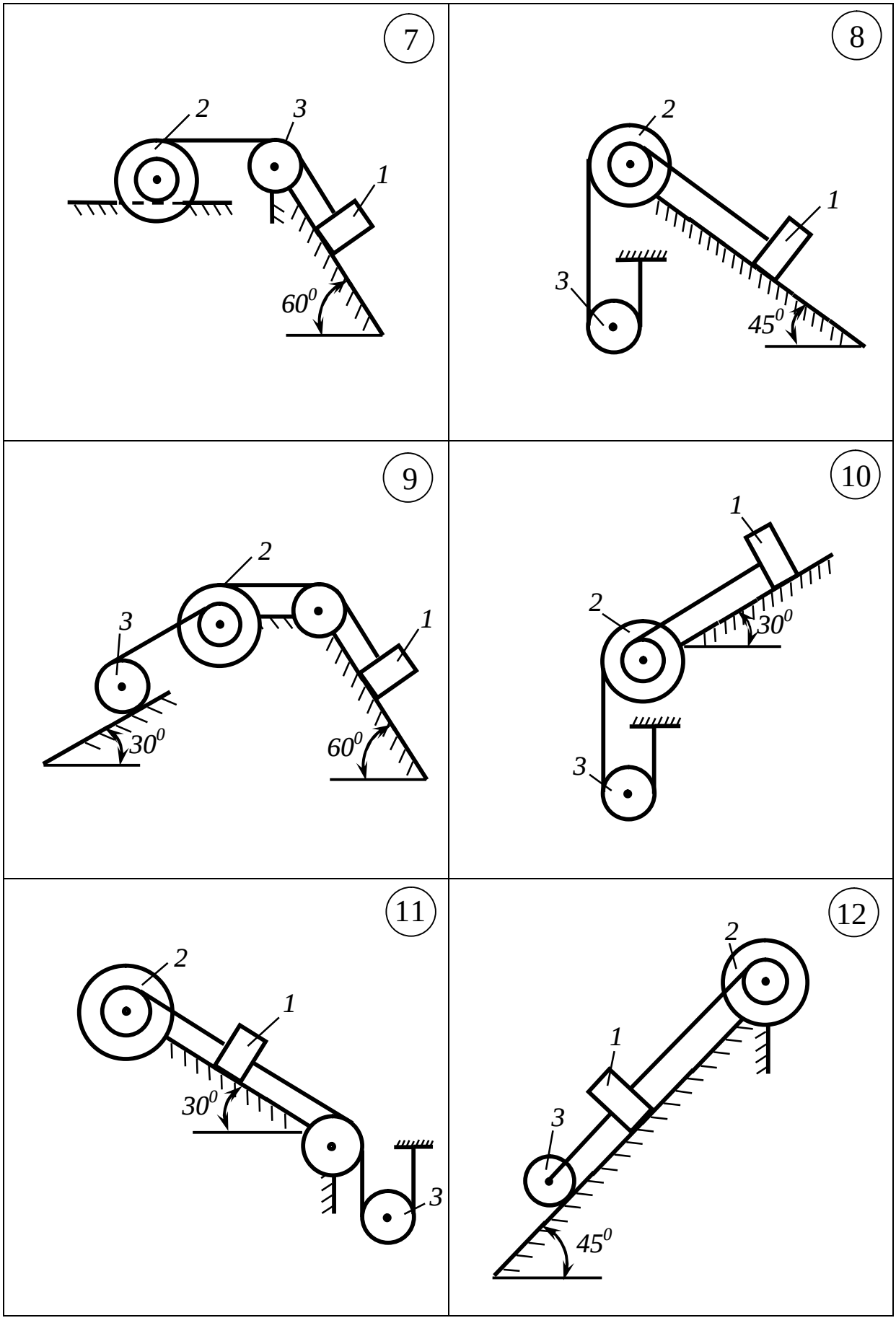


Рисунок 3.4, аркуш 2

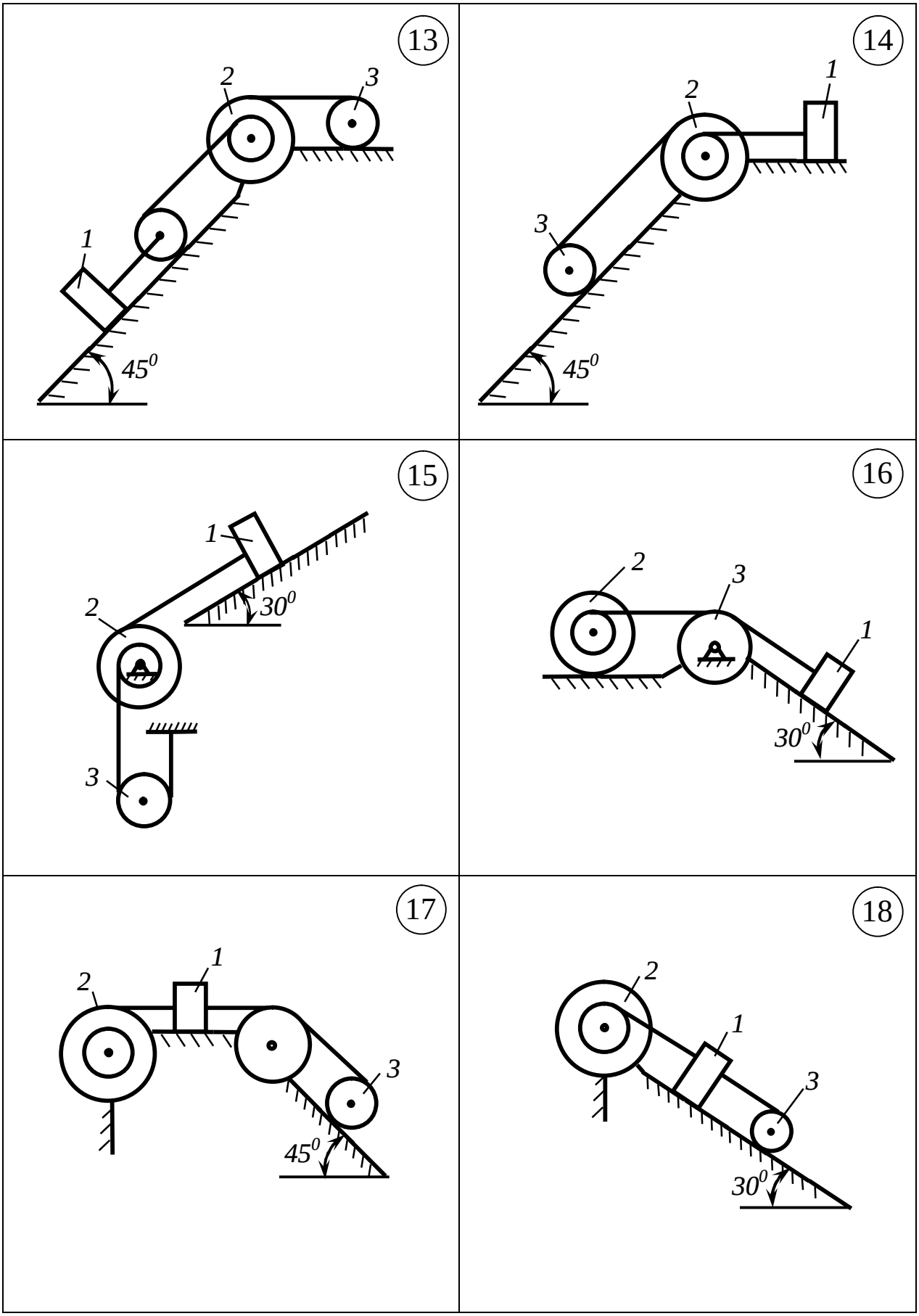


Рисунок 3.4, аркуш 3

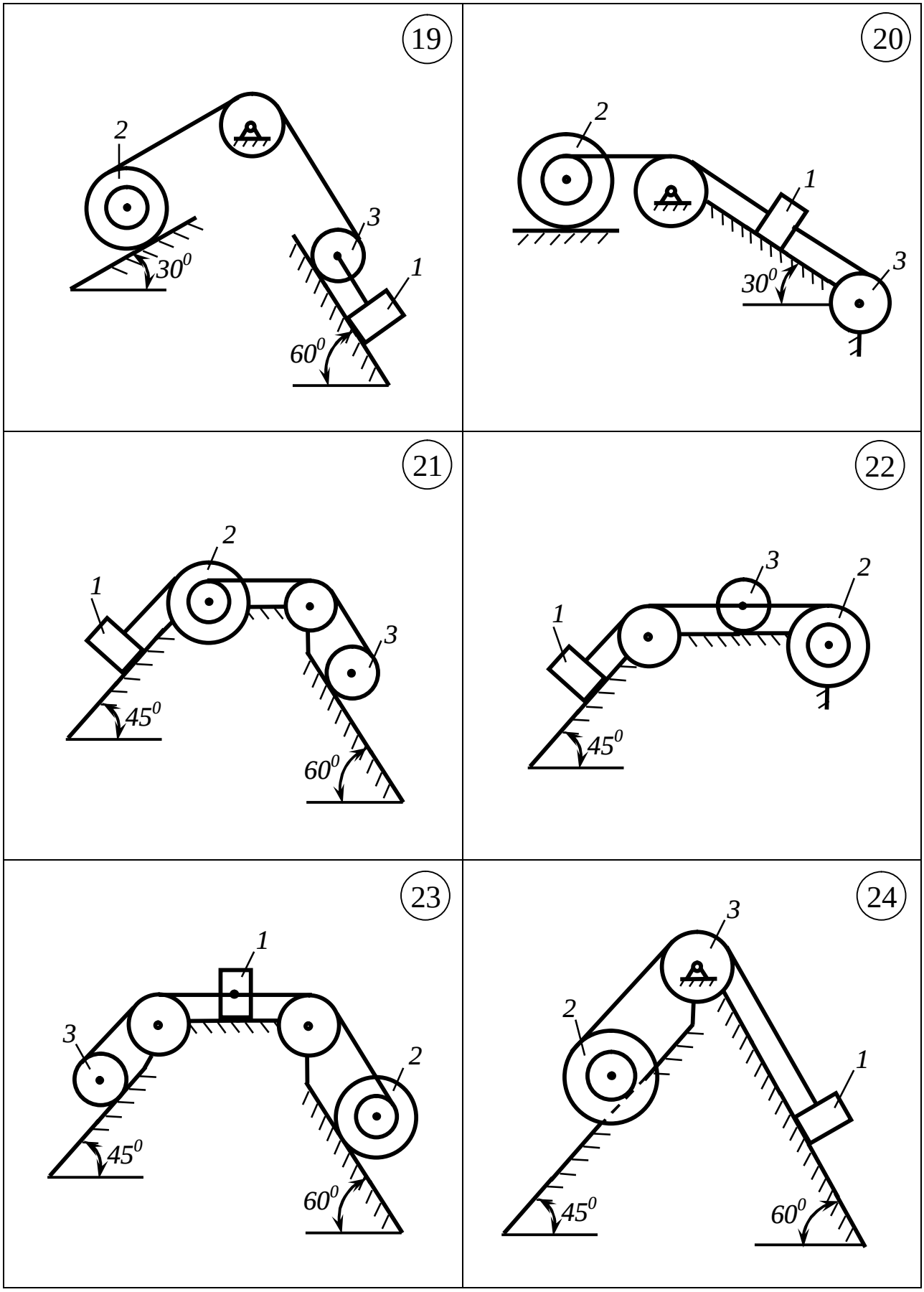


Рисунок 3.4, аркуш 4

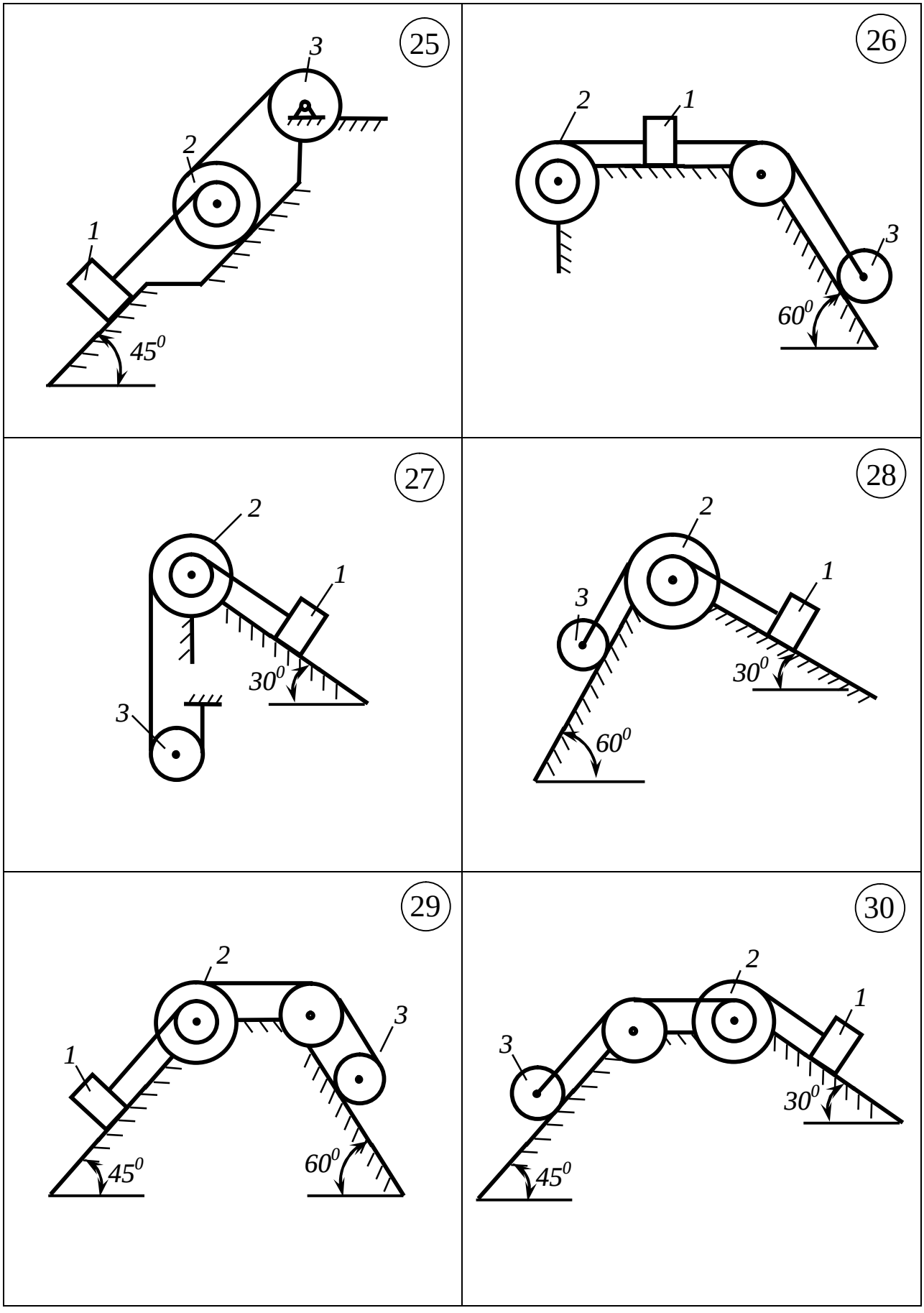


Рисунок 3.4, аркуш 5

Кількість рівнянь (3.38) або (3.39) залежить від числа ступенів свободи системи. Якщо система має один ступінь свободи, то для розв'язання задачі необхідно надати можливе переміщення одній із точок системи. Усі інші можливі переміщення точок системи необхідно визначити через надане можливе переміщення.

На рисунку необхідно зобразити всі діючі сили та додати до них відповідні сили інерції. При цьому треба мати на увазі, що при поступальному русі твердого тіла зображуємо рівнодіючу силу $\bar{\Phi}$, яка спрямована проти прискорення центра мас тіла.

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

де M – маса тіла;

$\bar{a}_C$ – прискорення центра мас тіла.

При обертальному русі однорідних тіл навколо осі, що співпадає з віссю симетрії, сили інерції зводимо до однієї пари сил з моментом:

$$L_x^{\Phi} = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла навколо осі обертання,

e – кутове прискорення тіла.

Напрямок головного моменту сил інерції L_x^{Φ} зображуємо дуговою стрілкою, протилежною напрямку e.

При плоскому русі твердого тіла на рисунку треба зобразити і головний вектор сил інерції, спрямований протилежно прискоренню центра мас тіла (точки C),

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

і головний момент сил інерції

$$L_C^{\Phi} = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла відносно центра мас тіла.

Напрямок L_C^{Φ}, протилежний напрямку e.

Прискорення усіх точок системи і кутові прискорення виражаємо через одне прискорення, яке необхідно знайти згідно з умовою задачі.

Далі обчислюємо елементарну роботу зображених сил і моментів сил

на можливих переміщеннях, тобто записуємо рівняння (3.40), з якого і знаходимо невідому величину.

3.2.2 Приклад розв'язання задачі 3.2

Механічна система (рис. 3.5) складається з вантажу 1, ступінчастого шківа 2 і однорідного суцільного циліндра 3, які зв'язані нерозтяжними нитками. Коефіцієнт тертя вантажу 1 об поверхню дорівнює f. Коефіцієнт кочення циліндра 3 дорівнює $f_к$.

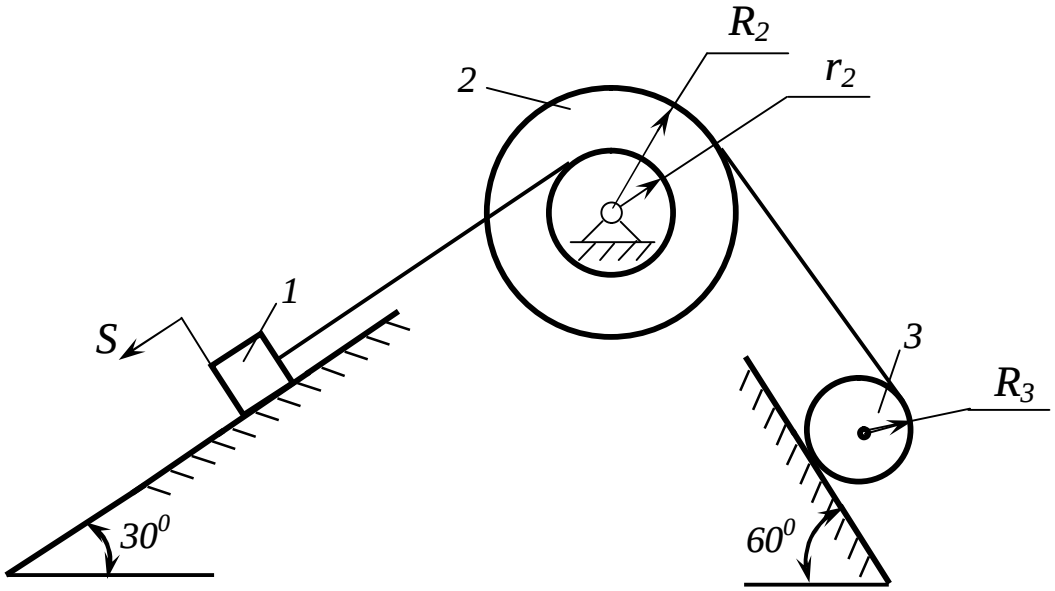


Рисунок 3.5 - Задана схема до прикладу виконання завдання 3.2

Дано: $m_1 = 10m;\ m_2 = 2m;\ m_3 = m;\ m = 10$ *кг*; $r_2 = 6$ *см*; $R_2 = 2r_2 = 12$ *см*; $i_{2Z} = 1{,}5r_2 = 9$ *см*; $R_3 = 15$ *см*; $a = 30^0$; $b = 60^0$; $f = 0{,}1$; $f_к = 0{,}2$*см*.

Визначити: прискорення вантажу 1.

Розв'язання. Розглянемо рух механічної системи. Тіло 1 здійснює поступальний рух, тіло 2 – обертальний, а тіло 3 – плоско-паралельний.

Зобразимо на рисунку 3.6 активні сили ваги $m_1\bar{g}; m_2\bar{g}; m_3\bar{g}$; нормальні реакції N_1 та N_3 площини та реакцію N_2 нерухомої опори ступінчастого шківа *2*; сили тертя ковзання тіл 1 і 3 – P_{TP_1}, P_{TP3} та мо-

мент опору кочення M_{TP}.

Система має один ступінь свободи. Дамо системі можливе переміщення $d\bar{S}_1$, вважаючи, що тіло 1 рухається вниз нахиленою площиною.

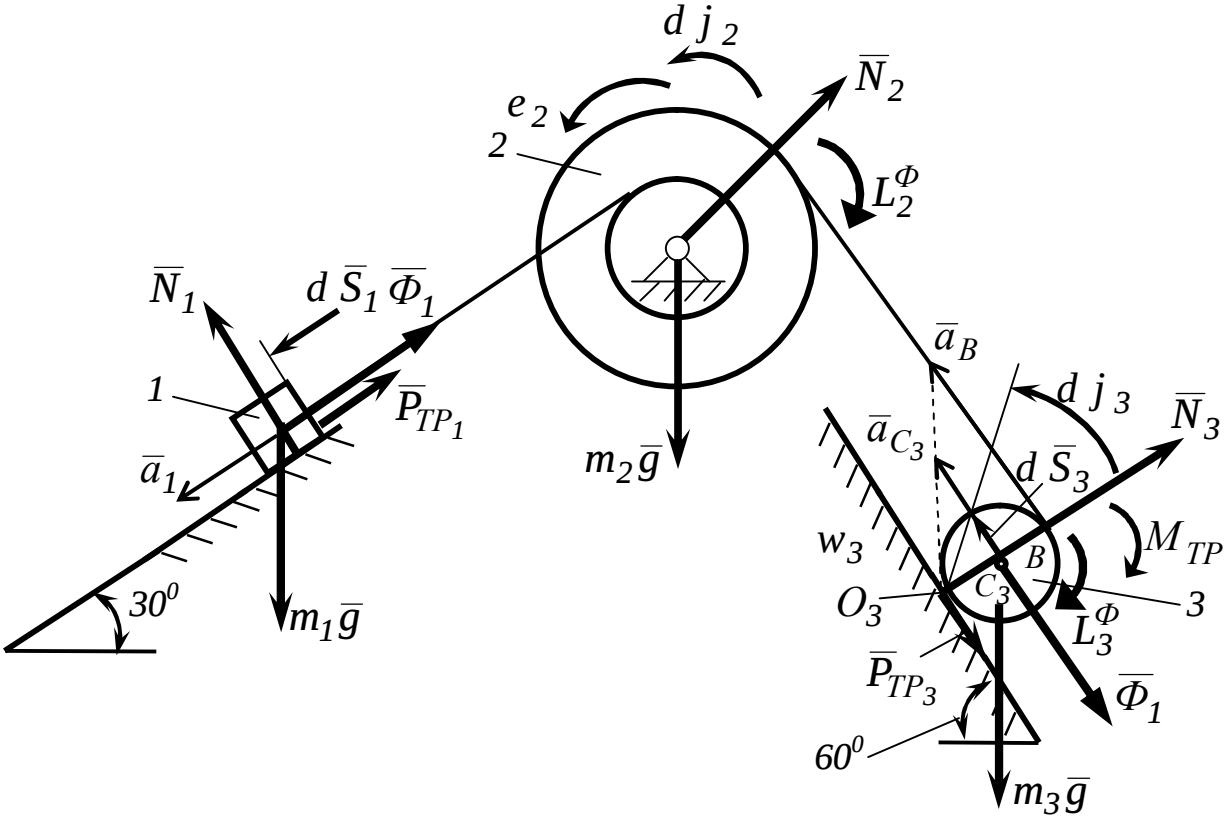


Рисунок 3.6 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 3.2

Для даної системи можливі переміщення будуть такі: для тіла 1, яке рухається поступально, – переміщення тіла $d\bar{S}_1$; для тіла 2, яке обертається навколо нерухомої осі, – кутове переміщення dj_2; для тіла 3, яке здійснює плоско-параллельний рух, маємо переміщення центра ваги (точки C_3) на $d\bar{S}_{C_3}$ та обертання тіла 3 навколо миттєвого центра обертання (точки O_3) на dj_3.

Також позначимо на рисунку 3.6 сили інерції та моменти сил інерції: тіло 1 рухається поступально, тому сили інерції приводяться до головного вектора $\bar{\Phi}_1$; тіло 2 обертається і його сили інерції приводяться до головного моменту сил інерції L_2^{Φ}; рух тіла 3 – плоский, отже сили інерції приводяться до головного вектора $\bar{\Phi}_3$, який прикладений до центра ваги (точки C_3), і

до головного моменту сил інерції L_3^{Φ}. Вектори сил інерції направлені проти векторів відповідних прискорень центрів ваги, а напрямки головних моментів – проти напрямків відповідних кутових прискорень.

Застосуємо для заданої системи загальне рівняння динаміки

$$\sum dA_k + \sum dA_k^{\Phi} = 0.$$

Робота деяких сил системи дорівнює нулю з таких причин:

- нормальні реакції N_1 та N_3 перпендикулярні до переміщень відповідних тіл;
- реакція N_2 нерухомої опори ступінчастого шківа *2* та сила ваги $m_2\bar{g}$ прикладені в нерухомих точках;
- сили тертя ковзання тіла 3 $-P_{TP3}$ прикладена до миттєвого центра обертання (точки O_3), який не рухається.

Складемо загальне рівняння динаміки для заданої системи:

$$\begin{aligned} &m_1 g \cdot \sin a \cdot dS_1 - P_{TP_1} \cdot dS_1 - \Phi_1 \cdot dS_1 - L_2^{\Phi} \cdot d\varphi_2 - \\ &- m_3 g \cdot \sin b \cdot dS_{C_3} - \Phi_3 \cdot dS_{C_3} - L_3^{\Phi} \cdot d\varphi_3 - M_{TP} \cdot d\varphi_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Виразимо деякі величини в цьому рівнянні:

$$P_{TP_1} = fN_1 = fm_1 g\cos a;\ \Phi_1 = m_1 a_1;\ L_2^{\Phi} = J_2 e_2;\ J_2 = m_2 i_2^2;$$

$$\Phi_3 = m_3 a_{C_3};\ L_3^{\Phi} = J_3 e_3;\ J_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2;\ M_{TP} = f_к \cdot N_3 = f_к \cdot m_3 g\cos b.$$

Виразимо прискорення всіх тіл через прискорення тіла *1*:

$$e_2 = \frac{a_1}{r_2};\ a_{C_3} = \frac{a_B}{2} = \frac{e_2 R_2}{2} = \frac{a_1 R_2}{2r_2};\ e_3 = \frac{a_{C_3}}{R_3} = \frac{a_1 R_2}{2r_2 R_3}.$$

Виразимо можливі переміщення всіх тіл через можливе переміщення $d\bar{S}_1$, маючи на увазі, що залежності між швидкостями, прискореннями та переміщеннями тіл однакові:

$$d\varphi_2 = \frac{dS_1}{r_2};\ dS_{C_3} = \frac{dS_B}{2} = \frac{d\varphi_2 R_2}{2} = \frac{dS_1 R_2}{2r_2};\ d\varphi_3 = \frac{dS_{C_3}}{R_3} = \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3}.$$

Підставимо всі найдені величини до формули (3.41):

$$m_1 g \cdot \sin a \cdot dS_1 - f m_1 g \cos a \cdot dS_1 - m_1 a_1 \cdot dS_1 - \\ - m_2 i_2^2 \cdot \frac{a_1}{r_2} \cdot \frac{dS_1}{r_2} - m_3 g \cdot \sin b \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2} - m_3 \cdot \frac{a_1 R_2}{2r_2} \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2} - \\ - \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{a_1 R_2}{2r_2 R_3} \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3} - f_к \cdot m_3 g \cos b \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3} = 0. \qquad (3.42)$$

Скоротимо рівняння (3.41) на dS_1 (оскільки $dS_1 \neq 0$) і на R_3 та знайдемо прискорення a_1 , враховуючі, що $R_2 = 2r_2$:

$$a_1 = \frac{g\left(m_1 \cdot \sin a - f \cdot m_1 \cdot \cos a - m_3 \cdot \sin b - f_к \cdot m_3 \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{r_2^2} + m_3 + \frac{1}{2} m_3}.$$

Підставимо значення мас тіл:

$$a_1 = \frac{g\left(10m \cdot \sin a - f \cdot 10m \cdot \cos a - m \cdot \sin b - f_к \cdot m \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{10m + \frac{2m \cdot i_2^2}{r_2^2} + 1{,}5m} = \\ = \frac{g\left(10 \cdot \sin a - f \cdot 10 \cdot \cos a - \sin b - f_к \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{10 + \frac{2 \cdot i_2^2}{r_2^2} + 1{,}5}.$$

Підставимо вхідні дані:

$$a_1 = \frac{9{,}81\left(10 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}866 - 0{,}867 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{15} \right)}{10 + \frac{2 \cdot 9^2}{6^2} + 1{,}5} = 1{,}999 \text{ м/с}^2.$$

Розв’язок: прискорення тіла 1 дорівнює $a_1 \approx 2 \text{ м/с}^2$.

4 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

4.1 Геометричні характеристики перерізів

Для складеного перерізу визначити положення центра ваги та величини головних центральних моментів інерції.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.1 та 4.2, схему – з рисунка 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Двотавр	10	12	14	16	18	20	18	14	22	24
Швелер	16	18	20	18	20	22	18	22	18	20

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Смуга, мм х мм	150 х 12	170 х 14	180 х 16	200 х 18	220 х 20	240 х 24	260 х 20	230 х 20	240 х 40	180 х 24
Кутик нерівно-смужній	40 х 25 х 4	50 х 32 х 4	63 х 40 х 6	75 х 50 х 8	100 х 63 х 8	125 х 80 х 10	160 х 100 х 12	180 х 110 х 10	200 х 125 х 14	250 х 160 х 18

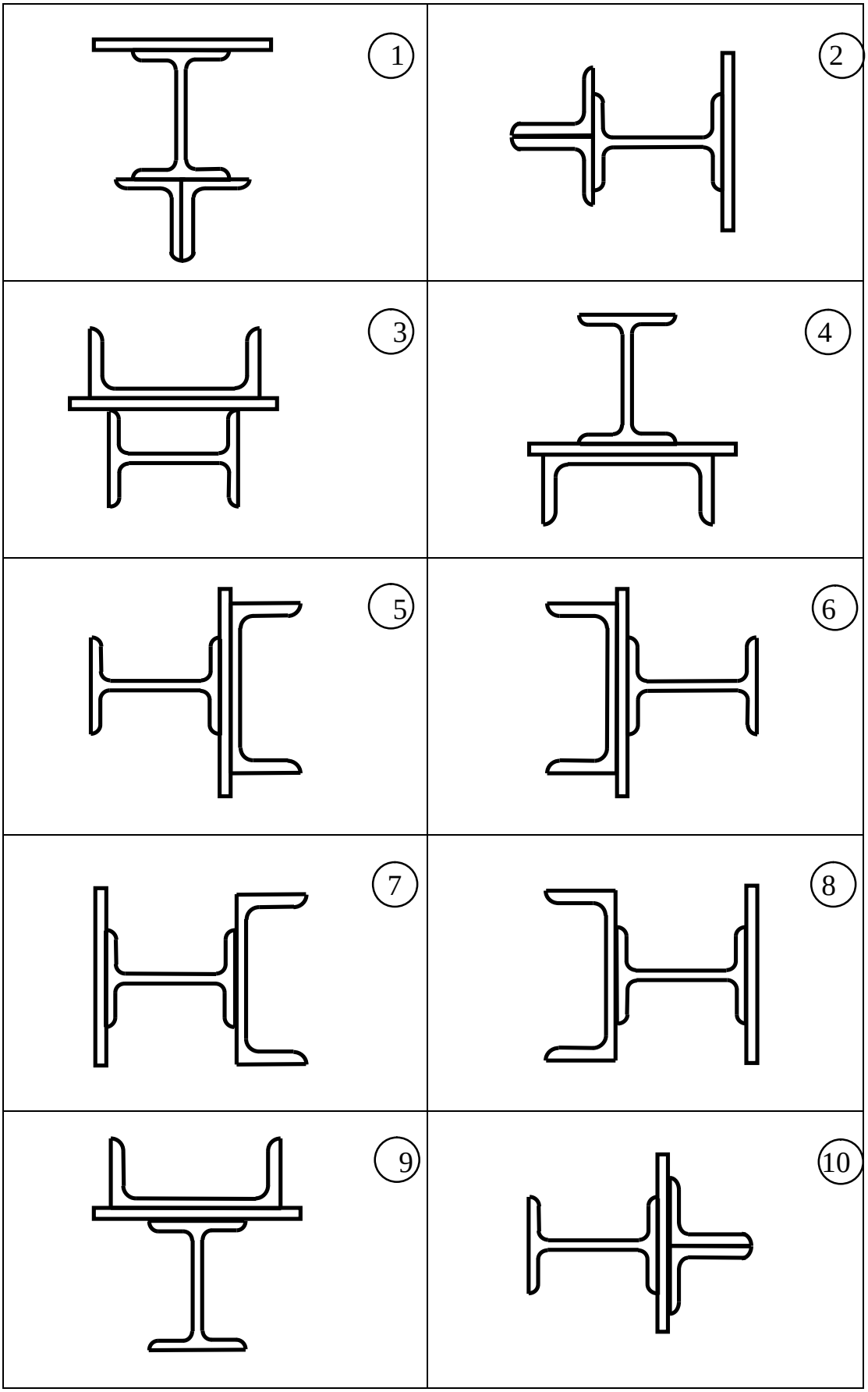


Рисунок 4.1 - Схеми до варіантів завдання 4.1

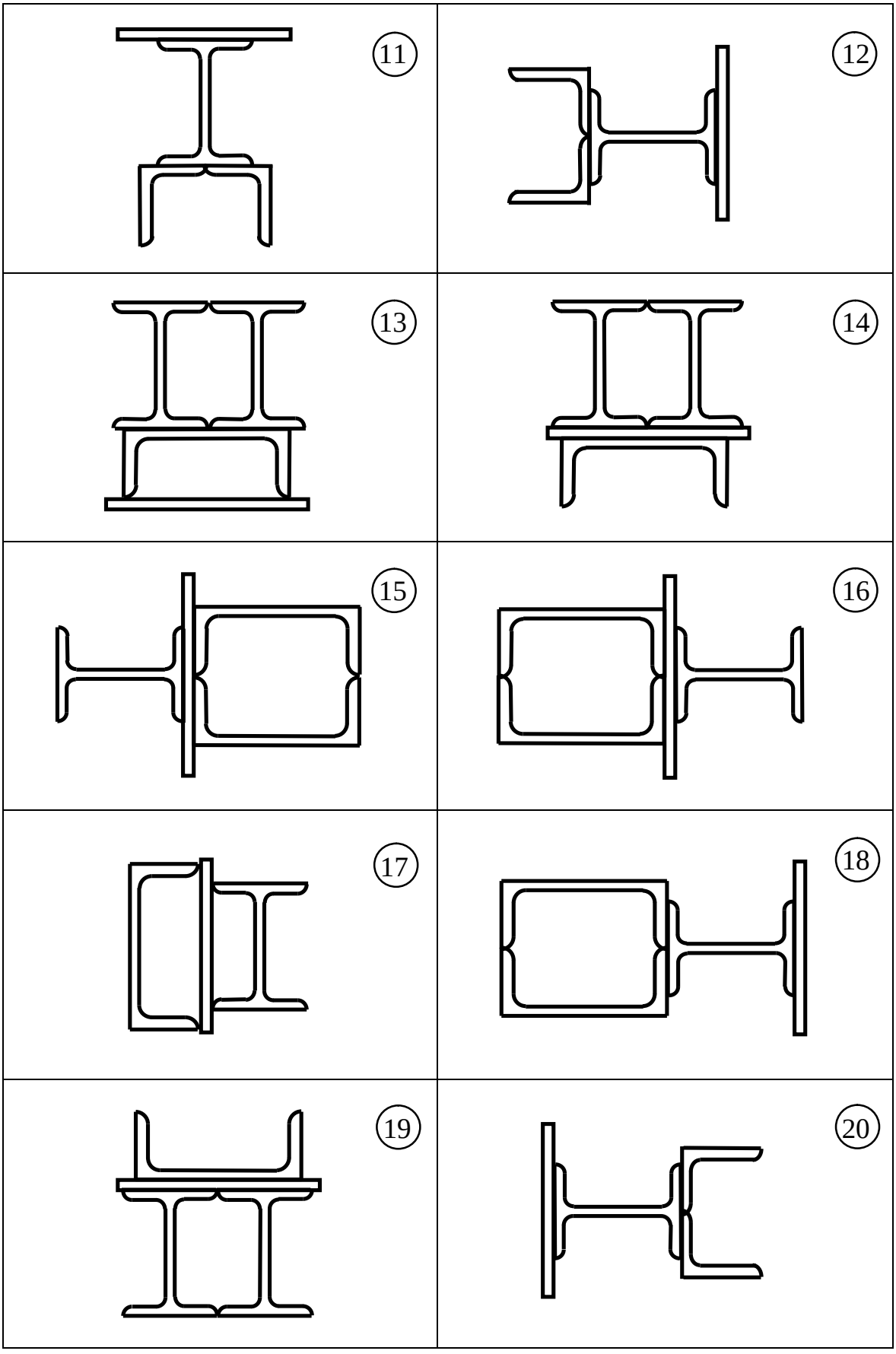


Рисунок 4.1, аркуш 2

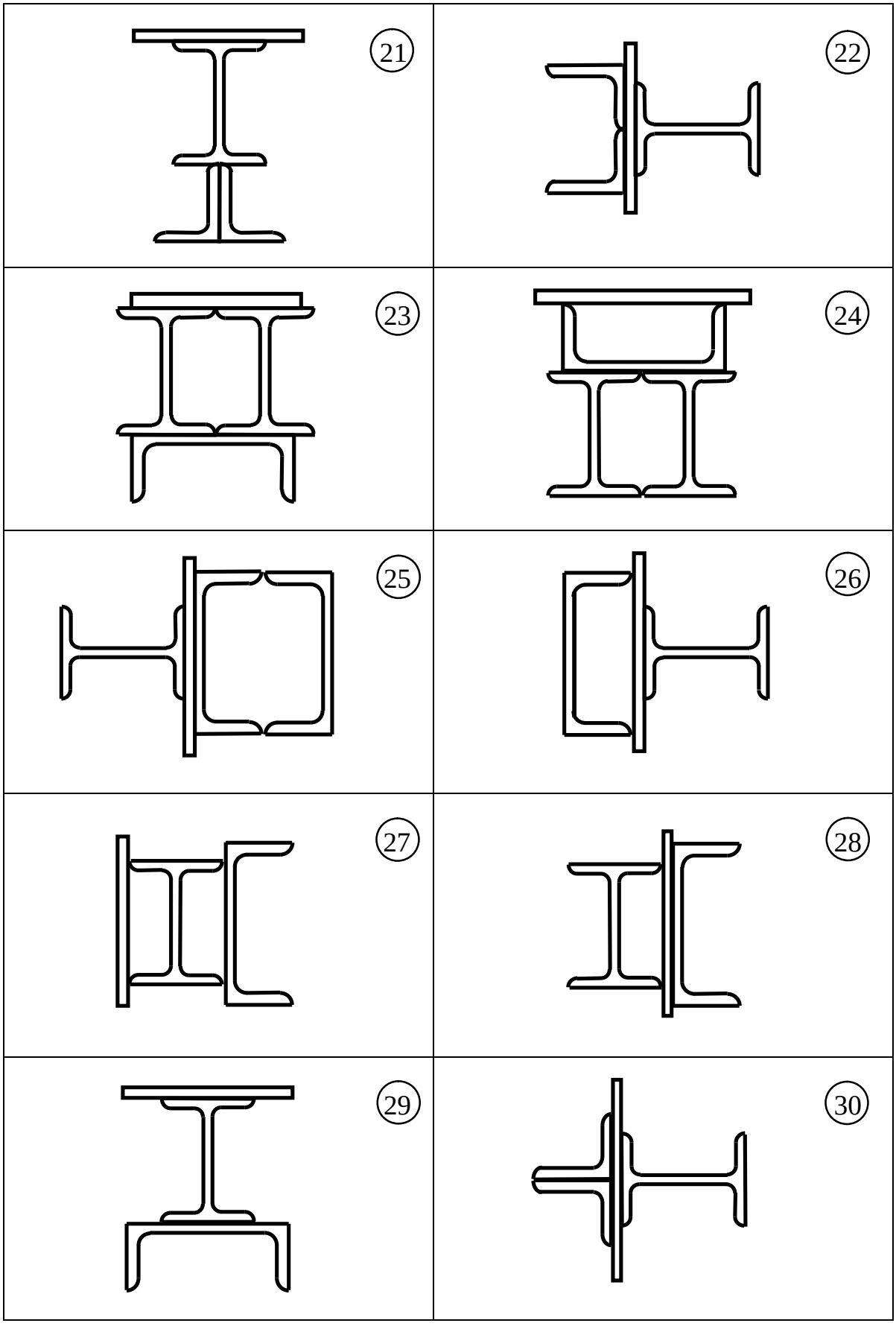


Рисунок 4.1, аркуш 3

4.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.1

Для заданого перерізу вибрати систему осей, відносно яких визначити координати центрів ваги фігур, які до нього входять.

1 За формулами визначити положення центра ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad (4.1)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу;

x_{ci}, y_{ci} – координати центрів ваги i-ої фігури у початковій системі осей;

F_i – площа поперечного перерізу i-ої фігури; n – кількість фігур.

2 За знайденими координатами x_c, y_c нанести положення центра ваги складної фігури.

3 Через центр ваги складної фігури провести центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям фігур.

4 Визначити осьові моменти інерції всієї фігури щодо центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^{n} \left(J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i \right), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^{n} \left(J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i \right), \qquad (4.2)$$

де J_{x_c}, J_{y_c} – осьові моменти інерції фігур, щодо власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власною центральною віссю x_{ci} i-ої фігури, $a_i = y_{ci} - y_c$;

b_i – відстань між центральною віссю y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_{ci} i-ої фігури, $b_i = x_{ci} - x_c$.

Для стандартних профілів типу швелера, двотавра, кутика осьові моменти інерції слід брати з таблиць сортаменту, для смуги – визначати за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \qquad (4.3)$$

де b – сторона прямокутника, яка паралельна осі x; h – його висота.

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c, то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу як правило позначають $J_U = J_{x_c}$, $J_V = J_{y_c}$.

4.1.2 Приклад розв'язання задачі 4.1

Для складного перерізу, схему якого показано на рисунку 4.2 і який складається із смуги 27 см х 1,2 см, двотавра 24 та швелера 22, визначити положення центра ваги та величини головних центральних моментів інерції.

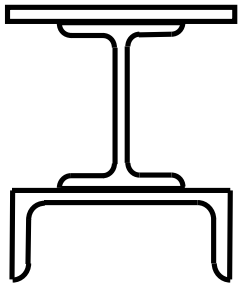


Рисунок 4.2 – Схема заданого перерізу

Розв'язання. Випишемо геометричні характеристики заданих профілів.

Фігура 1 – смуга 27 х1,2 см х см

Для смуги геометричні характеристики обчислимо як для прямокутника: $F = a \cdot b = 27 \cdot 1{,}2 = 32{,}4\ см^2$,

$J_{x_1} = \frac{ab^3}{2} = \frac{27 \cdot 1{,}2^3}{2} = 3{,}888 см^4 \approx 4 см^4$; $J_{y_1} = \frac{ba^3}{2} = \frac{1{,}2 \cdot 27^3}{2} = 1968{,}3 см^4$.

Геометричні характеристики прокатних профілів виберемо з сортаментів, які наводяться в підручниках і збірниках з опору матеріалів (див., наприклад, [9], або додатки до даних методичних вказівок).

Фігура 2 - двотавр 24 (за ГОСТом 8239-89): $h = 24$ *см;* $b = 11{,}5$ *см;* $d = 0{,}56$ *см;* $t = 0{,}95$ *см;* $F = 34{,}8 см^2$; $J_x = 3460\ см^4$; $J_y = 198\ см^4$.

Фігура 3 - швелер 22 (за ДСТУ 3436-96): (треба звернути увагу на те,

що в заданому перерізі швелер розташовано горизонтально, а не вертикально, як в сортаменті, тому його моменти інерції J_x і J_y треба поміняти місцями): $h = 22$ *см;* $b = 8{,}2$ *см;* $d = 0{,}54$*см;* $t = 0{,}95$ *см;* $F = 26{,}7$ *см* ^{2}; $I_x = 151$ *см* ^{4}; $I_y = 2110$ *см* ^{4}; $z_0 = 2{,}21$ *см* ^{2}.

Викреслимо переріз в масштабі (див. рис. 4.3).

Виберемо систему осей координат.

За початкові осі координат можна прийняти будь-яку систему, наприклад, систему осей координат, яка зв'язана з центрами ваги двотавра або швелера.

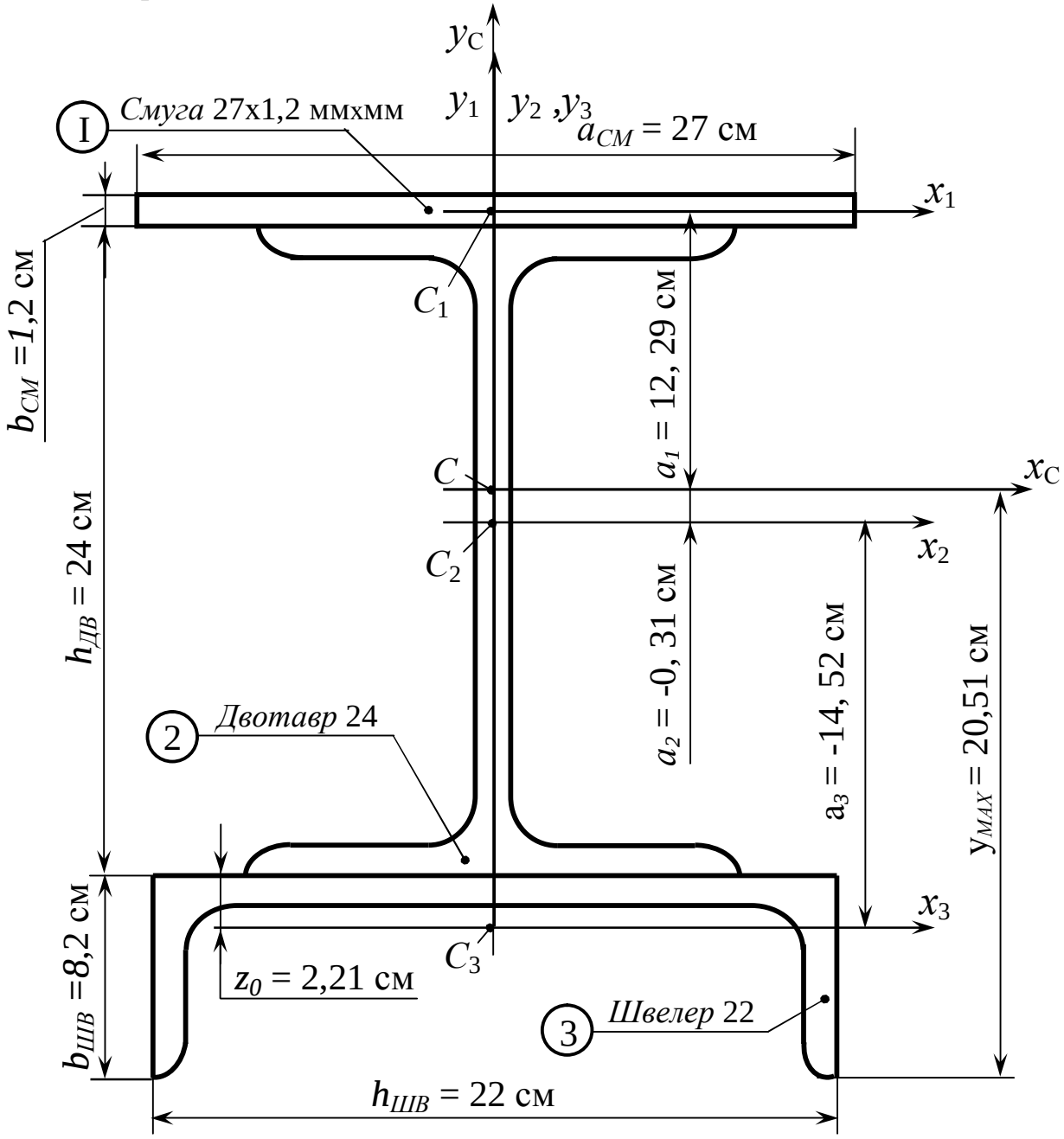


Рисунок 4.3 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 4.1

Приймемо за початковий центр координат центр ваги швелера (точка C_3), а за початкові осі координат осі x_3 і y_3 , оскільки відносно цих осей координати центрів ваги всіх фігур будуть додатними.

Оскільки заданий переріз симетричний щодо осі y_3, то центр ваги складного перерізу будемо шукати тільки за висотою перерізу, тобто визначати тільки координату y_c.

Визначимо координати центрів ваги всіх фігур у вибраній початковій системі осей координат:

$$y_{c_1} = z_0 + h_{ДВ} + \frac{b_{СМ}}{2} = 2{,}21 + 24 + 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 26{,}81 см;$$

$$y_{c_2} = z_0 + \frac{h_{Д\,В}}{2} = 2{,}21 + 0{,}5 \cdot 24 = 14{,}21 см; \; y_{C_3} = 0.$$

Визначимо координату центра ваги y_c за формулою

$$y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_{c_i} F_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i} = \frac{y_{c_1} F_1 + y_{c_2} F_2 + y_{c_3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{26{,}81 \cdot 32{,}4 + 14{,}21 \cdot 34{,}8 + 0 \cdot 26{,}7}{32{,}4 + 34{,}8 + 26{,}7} = 14{,}52 см.$$

Проведемо головну центральну вісь $x_{c.}$ на відстані $y_C = 14{,}52$ *см* від осі x_3 (див. рис. 4.3).

Визначимо відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власними центральними осями x_{ci} фігур:

$$a_1 = y_{c1} - y_c = 26{,}81 - 14{,}52 = 12{,}29 см;$$

$$a_2 = y_{c2} - y_c = 14{,}21 - 14{,}52 = -0{,}31 см;$$

$$a_3 = y_{c3} - y_c = 0 - 14{,}52 = -14{,}52 см.$$

Тепер визначимо моменти інерції J_{x_c}, J_{y_c}:

$$J_{x_c} = \sum_{i-1}^{n} \left(J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i \right) = 4 + 12{,}29^2 \cdot 32{,}4 + 3460 + 0{,}31^2 \cdot 34{,}8 +$$

$$+ 151 + 14{,}52^2 \cdot 26{,}7 = 14141{,}23 \; см^4.$$

Оскільки центри ваги всіх трьох фігур знаходяться на осі y_c, то відстань між осями y_{ci} тобто $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тому

$$J_{yc} = \sum_{i-1}^{n} \left(J_{yci} + b_i^2 F_i \right) = 1968{,}3 + 198 + 2110 = 4276{,}3 \ см^4.$$

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c, то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Висновок: Моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{xc} = 14141{,}23 \ см^4, \ J_V = J_{yc} = 4276{,}3 \ см^4.$$

4.2 Статично визначувана стрижнева система

З розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів:

стрижень 1 – круглого поперечного перерізу;

стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків;

стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160$ *МПа*, $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*..

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.3 та 4.4 і рисунку 1.1.

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a, м	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
b, м	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
c, м	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6

Таблиця 4.4 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
M, кН·м	100	120	200	80	300	100	220	160	140	250
P, кН	400	300	450	200	350	240	250	280	340	320
q, кН/м	200	150	250	300	350	400	280	350	380	320

4.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.2

Необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів можна знайти з умови міцності. Для даних стрижневих систем, які працюють на розтягання і стискання, умова міцності має вигляд:

$$s = \frac{N}{F} \le [s], \qquad (4.4)$$

де N – подовжня (осьова) сила в стрижні;

F - площа поперечного перерізу стрижня;

$[s]$ - допустиме напруження.

Для виконання проектувальних розрахунків необхідно визначити площу поперечних перерізів стрижнів:

$$F \ge \frac{N}{[s]} \qquad (4.5)$$

У цій нерівності невідоме зусилля N.

Системи, які розглядаються, статично визначувані та зусилля в них можуть бути знайдені тільки з рівнянь рівноваги статики. Задачу слід розв’язувати за таким планом:

1 Скласти рівняння рівноваги, використовуючи тільки ті з них, до яких не входять реакції опор, котрі знаходити немає потреби, і розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 3.

2 Знайти площі поперечних перерізів стрижнів за формулою (4.5):

а) поперечний переріз стрижня 1 – круг. Для круглого поперечного перерізу

$$F_1 = \frac{pd^2}{4},\ \text{звідки} \qquad d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}, \tag{4.6}$$

після чого прийняти діаметр з рекомендованих розмірів згідно з Державним стандартом;

б) поперечний переріз стрижня 2 – два рівнобічних кутика.

За площею кутика $F^L = \frac{F_2}{2} = \frac{N_2}{2[\sigma]}$.

За таблицею сортаменту (додаток Г) знаходимо номер кутика, площа якого повинна бути не меншою за F^L;

в) поперечний переріз стрижня 3 – двотавр. За площею $F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]}$.

Із таблиці сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра. Якщо знайдені площі рівнобічного кутика і двотавра менші за площі найменшого профілю, то необхідно прийняти найменший профіль.

3 Визначити подовження (укорочення) стрижнів за законом Гука. Якщо стрижень розтягується, то його абсолютне подовження $\Delta\mathbf{l}$ вважається додатним, а якщо стискається – від'ємним:

$$\Delta\mathbf{l}_i = \frac{N_i \mathbf{l}_i}{EF_i}, \tag{4.7}$$

де N_i – зусилля в *i*-му стрижні;

$\mathbf{l}_i$ – довжина *i*-го стрижня;

E – модуль пружності матеріалу;

F_i – площа поперечного перерізу підібраного профілю.

4.2.2 Приклад розв'язання задачі 4.2

Для стрижневої системи, показаної на рисунку 4.4, із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів: стрижень 1 – круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків, стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу. Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160$ *МПа;* $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа.*

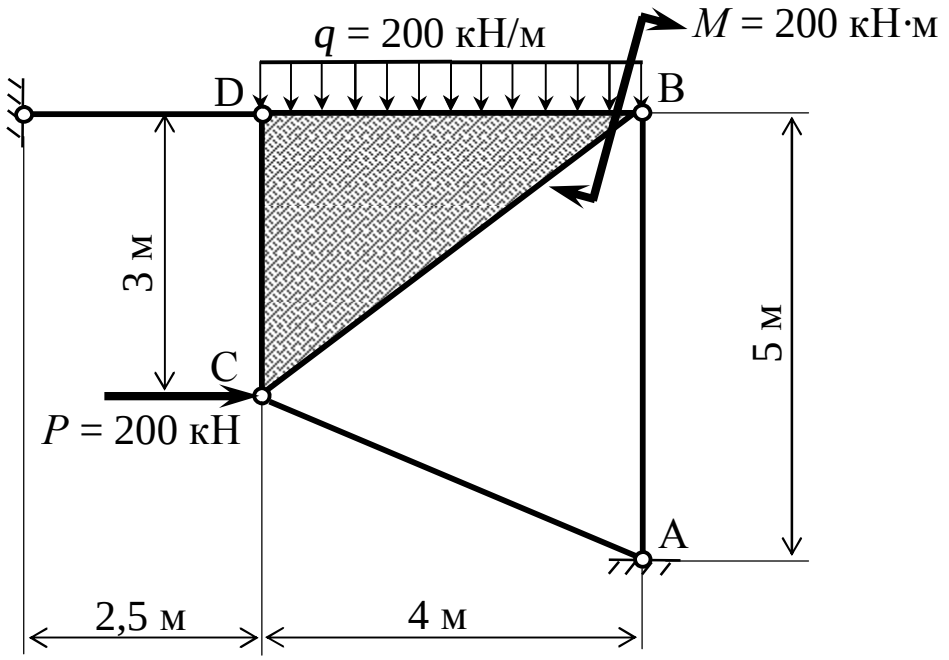


Рисунок 4.4 – Задана стрижнева система

Розв’язання. У заданій стрижневій системі (рис. 4.4) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою. Відкинемо в’язі, а їх вплив замінимо зусиллями N_1, N_2 та N_3 (рис. 4.5).

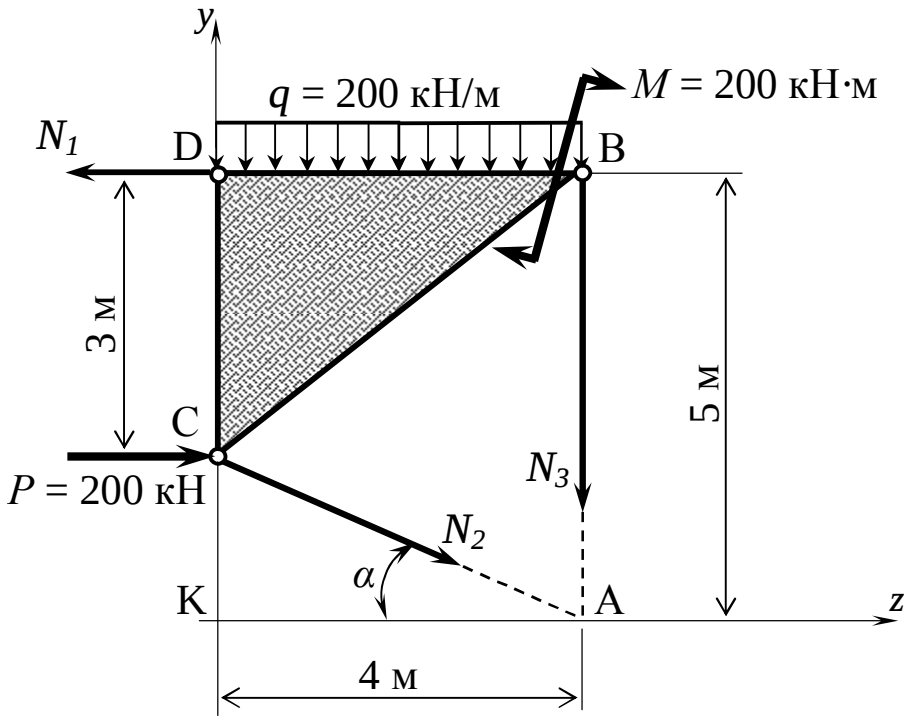


Рисунок 4.5 – Стрижнева система з відкинутими в’язями

Для довільної плоскої системи сил, яку ми розглядаємо, можна скласти три незалежних рівняння статики, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися складати тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

Перш за все визначимо довжину стрижня 2 і функції кута a .

Косинус та синус кута α знаходимо з трикутника AKC (рис. 4.4).

$$\mathbf{l}_3 = AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}48\,м;$$

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4{,}48} = 0{,}893; \quad \sin\alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4{,}48} = 0{,}446.$$

Візьмемо суму моментів відносно точки A (див. рис. 4.5), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3:

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot 5 - P \cdot (5-3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0,$$

звідки $N_1 = \dfrac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \dfrac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160\,\text{кН}.$

Тепер беремо суму моментів відносно точки B (у ній перетинаються невідомі зусилля N_1 та N_3):

$$\sum M_B = 0; \; P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cos a \cdot 3 + N_2 \sin a \cdot 4 = 0;$$

звідки

$$N_2 = \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{\cos a \cdot 3 + \sin a \cdot 4} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{0{,}893 \cdot 3 + 0{,}446 \cdot 4} = -459{,}2\,кН.$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проекцій на вертикальну вісь:

$$\sum P_Y = 0; \; -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin\alpha - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin\alpha = -200 \cdot 4 - (-459{,}2) \cdot 0{,}446 = -595{,}2\,\text{кН}.$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус, значить напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль, наприклад, суму проекцій на горизонтальну вісь, або суму моментів відносно точки *C:*

$$\sum P_z = 0;\ P - N_1 + N_2 \cdot \cos\alpha = 0;$$

250-(-160)-460·0,893=0; 410-410=0.

$$\sum M_c = 0;\ N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 = 0;$$

-160·3-200·4·2-300-(-595,2)=0; -2380+2380,7=0.

Похибка складає $\frac{2380,7 - 2380}{2380} \cdot 100\% = 0,03\%$, що є допустимим.

Тепер за допомогою формули (4.5) підберемо розміри поперечних перерізів стрижнів.

Стрижень 1 за умовою задачі повинен бути круглого поперечного перерізу:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10\,\text{см}^2.$$

Його діаметр: $d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3,57\,\text{см}.$

З рекомендованого ряду чисел (див. додаток Б, за ГОСТом 6636-69) приймаємо діаметр стрижня $d = 36$ *мм*, площа якого

$$F_1 = \frac{pd^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,6^2}{4} = 10,2\,см^2.$$

Стрижень 2 за умовою задачі складається з двох рівнобічних кутиків:

$$F_2 \geq \frac{N}{[s]} = \frac{459,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 28,68\,см^2.$$

Звідси площа одного кутика: $F_{кут} = \frac{F_2}{2} = \frac{28{,}68}{2} = 14{,}32\,см^2$.

З таблиці сортаменту (див. додаток Г, ДСТУ 2251-93) приймаємо кутик *90х90х9*, площа якого $F = 15{,}6\ см^2$.

Стрижень 3 за умовою задачі – двотаврового поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{595{,}2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 37{,}2\,\text{см}^2.$$

З таблиці сортаменту (див. додаток А, ГОСТ 8239-89) приймаємо двотавр 24а, площа якого F =37,5см^2.

Підібравши площі поперечних перерізів, знаходимо їх абсолютні подовження за формулою (4.4):

$$D\mathbf{l}_1 = \frac{N_1 \mathbf{l}_1}{E \cdot F_1} = \frac{-160 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10{,}2 \cdot 10^{-4}} = -19{,}6 \cdot 10^{-4}\ м = -1{,}96\,мм;$$

$$D\mathbf{l}_2 = \frac{N_2 \mathbf{l}_2}{E \cdot F_2} = \frac{-459{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 15{,}6 \cdot 10^{-4}} = -17{,}94 \cdot 10^{-4}\ м = -1{,}79\,мм;$$

$$D\mathbf{l}_3 = \frac{N_3 \mathbf{l}_3}{E \cdot F_3} = \frac{-595{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}48}{2 \cdot 10^5 \cdot 37{,}5 \cdot 10^{-4}} = -35{,}6 \cdot 10^{-4}\ м = -3{,}56\,мм.$$

Розв’язок: усі три стрижні укорочуються.

4.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок

Для заданих балок побудувати епюри поперечних сил *Q* і згинальних моментів *M*. Визначити максимальне нормальне напруження σ_{MAX}, узявши схему перерізу із завдання 4.1.

Вихідні дані вибрати з таблиць 1.3 та 1.4 і рисунка 1.5.

4.3.1 Методичні вказівки до виконання задач 4.3

Балка – це стрижень, який працює на згинання.

Зовнішні навантаження, що діють на балку, зводяться до зосереджених сил P (*кН* або *МН*), пар сил M (*кН·м* або *МН·м*) і рівномірно чи нерів-

номірно розподілених за довжиною балки навантажень з інтенсивністю q *(кН/м* або *МН/м)*.

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки можуть виникнути два внутрішніх зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, щодо центра ваги цього перерізу.

Установимо такі правила знаків для Q і M в балках:

Поперечна сила Q у перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки (рис. 4.6).

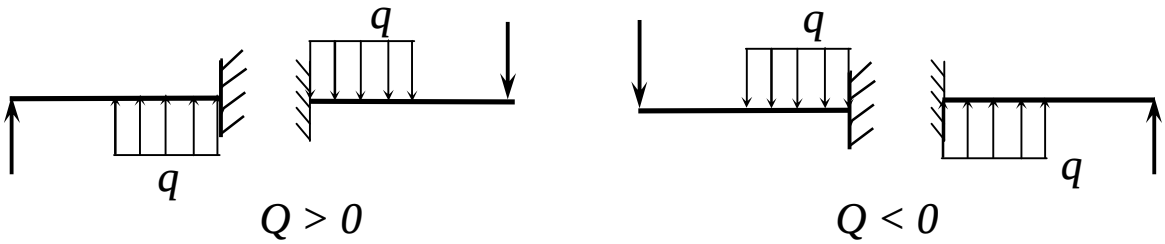


Рисунок 4.6

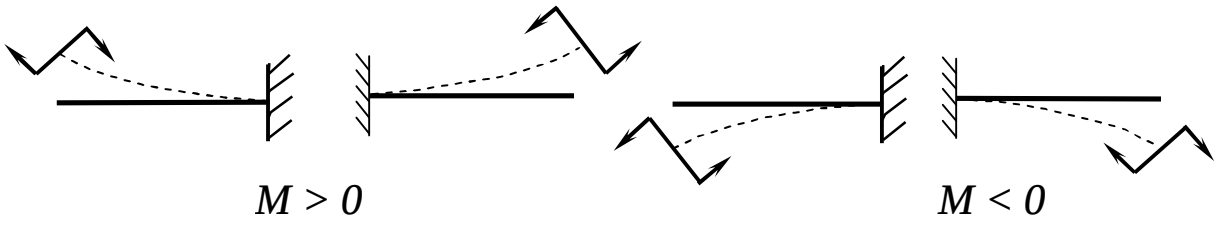


Рисунок 4.7

Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 4.7).

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів будують* ***на стиснутих волокнах.***

4.3.2 Правила побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри Q окреслюються прямими, паралельними базі, а епюри M у загальному випадку – похилими прямими.

2 На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q, епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M – квадратичною параболою. Оскільки епюру M будуємо на стиснутих волокнах, то випуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q.

3 У перерізі, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри, тобто епюра M досягає екстремального значення.

Якщо, "рухаючись" зліва направо, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{max}$, а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{min}$.

Координату z перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулами:

$$z_л = \frac{Q_л}{q} \text{ або } z_{пр} = \frac{Q_{пр}}{q},$$

де $Q_л$ та $Q_{пр}$ – значення поперечної сили відповідно з лівого або з правого краю ділянки.

4 На ділянках, де $Q > 0$, момент зростає, де $Q < 0$, момент зменшується.

5 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені сили:

а) на епюрі Q будуть "стрибки" на значення прикладених сил з урахуванням їх знаків (якщо будувати епюру, "рухаючись" зліва направо, то напрямок "стрибка" буде співпадати з напрямком вектора сили);

б) на епюрі М будуть злами, причому вістря зламу спрямоване проти дії сили.

6 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть "стрибки" на значення цих моментів (на епюрі Q змін не буде).

Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. Лінії епюри до стрибка і після нього – паралельні. Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент, сила спричиняє злам і порушує паралельність.

7 Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту. Якщо ж у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них M = 0, що буває найчастіше.

8 Епюра Q є діаграмою, похідною від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M.

Епюра будується на *базовій лінії (*або на *базі),* яка співпадає з віссю стрижня і на якій значення всіх внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Додатні ординати будемо відкладати уверх від базової лінії, а від′ємні – униз.

Найзручніше будувати епюри Q і M за характерними перерізами.

Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Характерні перерізи проводять на нескінченно малій відстані від сил, моментів, тощо, і позначаються, як правило, цифрами.

Можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки).

Визначити характерні перерізи.

Обчислити значення Q у характерних перерізах, потім, “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q, використовуючи описані вище правила.

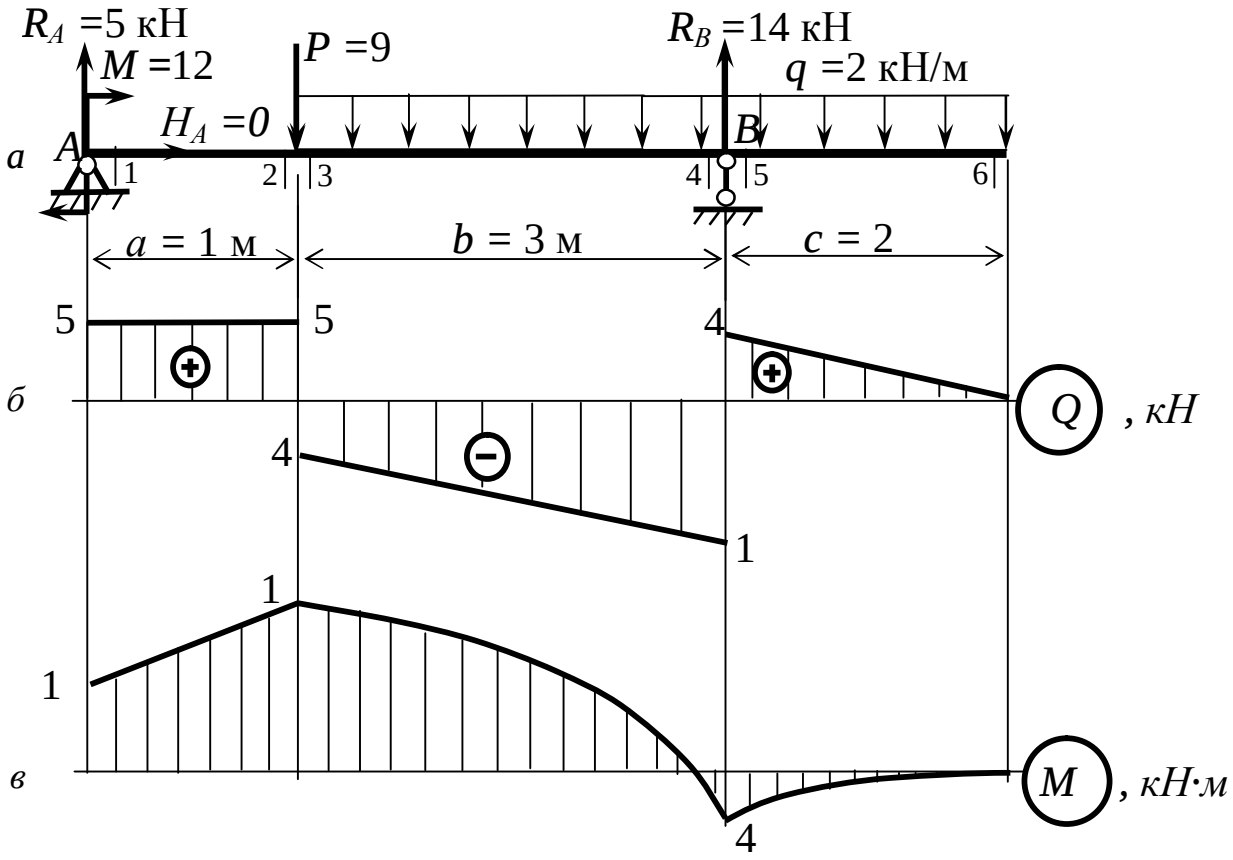
Обчислити значення M у характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями.

Перевірка вірності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямок стрибків і нахилів прямих на епюрі згинальних моментів M.

4.3.3 Приклад розв'язання задачі 4.3а (схема без екстремуму)

Для двоопорної балки, яка зображена на рис. 4.8, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. Визначити максимальне нормальне напруження σ_{MAX}, узявши схему перерізу із завдання 4.1.

Розв'язання: Перш за все, знайдемо опорні реакції H_A, R_A та R_B.



а - задана схема; б - епюра поперечних сил;
в - епюра згинальних моментів
Рисунок 4.8 – Двоопорна балка до задачі 4.3а

Для визначення реакцій складемо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kz} = 0; \qquad H_A = 0.$$

$$SM_A(\overline{P_k}) = 0; \; -M - P \cdot a - q(b+c)\left(a + \frac{b+c}{2}\right) + R_B(a+b) = 0;$$

звідки $$R_B = \frac{1}{1+3}\left(12 + 9\cdot 1 + 2(3+2)\left(1+\frac{3+2}{2}\right)\right) = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B\left(\overline{P}_k\right) = 0: \quad -M - R_A(a+b) + P\cdot b + q\frac{b^2}{2} - q\frac{c^2}{2} = 0;$$

звідки $$R_A = \frac{1}{1+3}\left(-12 + 9\cdot 3 + 2\frac{3^2}{2} - 2\frac{2^2}{2}\right) = 5 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q\cdot(b+c) + R_B = 5 - 9 - 2\cdot(3+2) + 14 = 19 - 19 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо значення Q в характерних перерізах балки:

$Q_1 = R_A = 5\ кН$; $Q_2 = Q_1 = 5$ кН; $Q_3 = Q_2 - P = 5 - 9 = -4$ кН;
$Q_4 = Q_3 - q\cdot b = -4 - 2\cdot 3 = -10$ кН; $Q_5 = Q_4 + R_B = -10 + 14 = 4$ кН;
$Q_6 = Q_5 - q\cdot c = 4 - 2\cdot 2 = 0.$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 4.8, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Зробимо перевірку побудови епюри Q, для чого будемо "рухатись" з правого боку на лівий.

На ділянці 6...5 розподілене навантаження викликає зростання епюри Q від значення $Q_6 = 0$ до значення $Q_5 = q\cdot 2 = 4$ кН.

Відносно перерізу 3 реакція $R_B = 14\ кН$ повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має "стрибок" униз на величину $14\ кН$.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини $Q_3 = q\cdot 5 - R_B = 2\cdot 5 - 14 = -4$ кН.

При переході від перерізу 3 до перерізу 2 має місце ″стрибок″ уверх на величину сили P = 9 кН. Тому $Q_2 = Q_3 + P = -4 + 9 = 5$ кН.

На ділянці 2...1 змін не буде, тому $Q_2 = Q_1 = 5$ кН.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізах балки:

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M + R_A \cdot a = 12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M + R_A \cdot (a+b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = 12 + 5 \cdot (1+3) - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = -q \frac{c^2}{2} = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки значення моменту в перерізі 5 ліворуч і праворуч співпадають, то можна вважати, що епюра M побудована вірно. За визначеними даними побудуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 4.8, в).

Максимальне нормальне напруження σ_{max} можна знайти за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, y_{max}}{I_{x_c}},$$

де y_{max} – найбільш віддалена точка перерізу.

Згідно з умовами задачі знайдемо відстань від осі x_c до найбільш віддаленої точки перерізу (див. завдання 4.1). Найбільш віддаленою точкою перерізу (див. рис. 4.3) є найнижча точка перерізу, яка належить швелеру. Відстань до неї від осі x_c дорівнює:

$$y_{\max} = a_2 + \frac{h_{ДВ}}{2} + b_{ШВ} = 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 24 + 8{,}3 = 20{,}51 см.$$

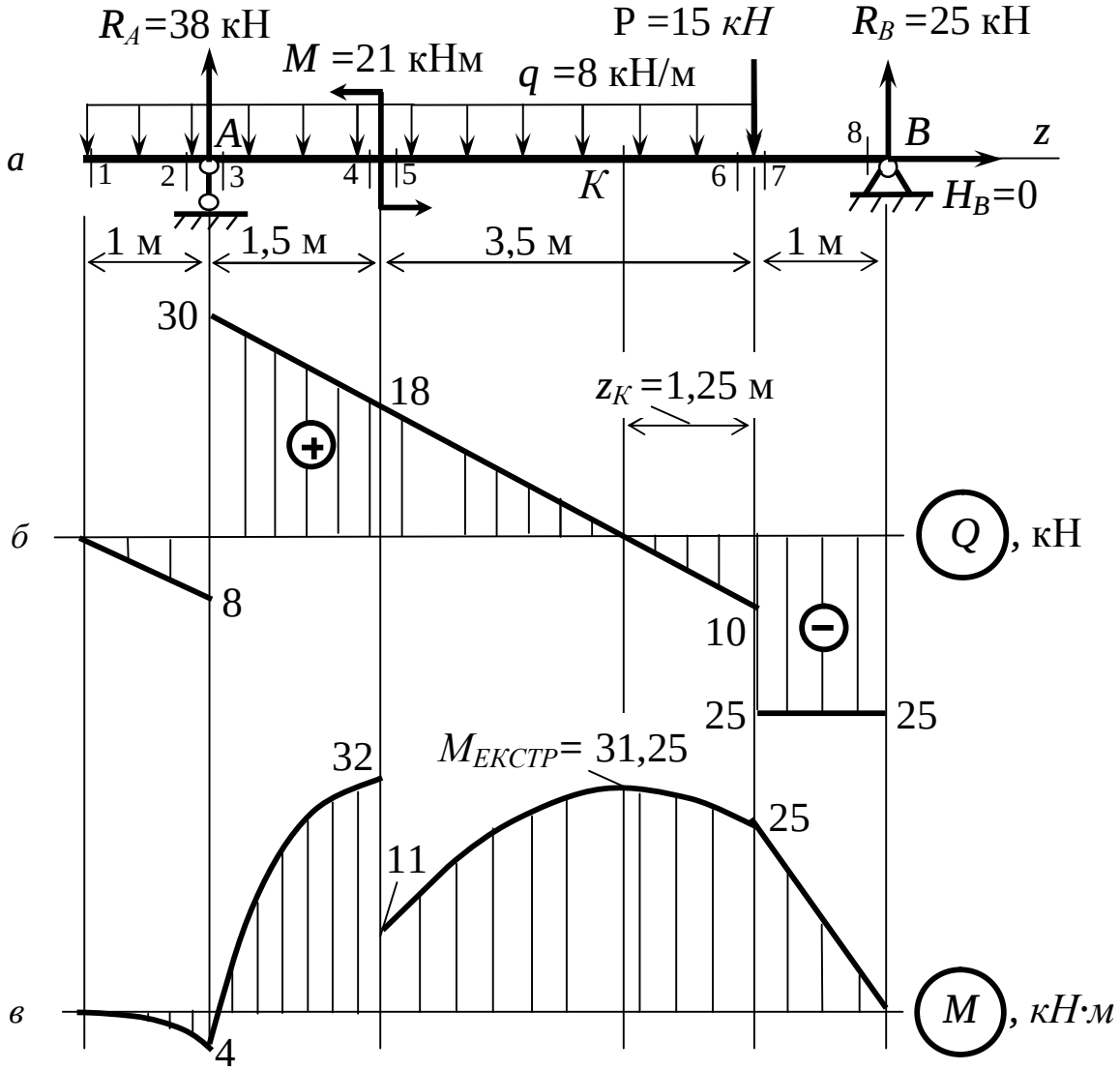
Таким чином, враховуючи найбільший згинальний момент $M_{max} = 17$ *кН*, визначимо максимальне нормальне напруження в перерізі:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, y_{max}}{I_{x_c}} = \frac{17 \cdot 10^{-3} \cdot 20{,}31 \cdot 10^{-2}}{14141{,}23 \cdot 10^{-8}} = 24{,}4 \, МПа.$$

Розв'язок: максимальне нормальне напруження $\sigma_{max} = 24{,}4 \, МПа$.

4.3.4 Приклад розв'язання задачі 4.3б (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки (рис. 4.9, а).



а - задана схема; б - епюра поперечних сил;
в - епюра згинальних моментів
Рисунок 4.9 – Двоопорна балка до задачі 4.3б

Розв'язання. Визначимо опорні реакції балки.

Оскільки на балку діють тільки вертикальні сили, то горизонтальна реакція відсутня: $H_B = 0$.

$$SM_A(P_k) = 0; \quad q \cdot 1 \cdot 0{,}5 - q \cdot 5 \cdot 2{,}5 + M - P \cdot 5 + R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{6}(15 \cdot 6 - 21 + 8 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 8 \cdot 1 \cdot 0{,}5) = 25\,\text{кН};$$

$$SM_B(P_k) = 0; \quad -R_B \cdot 6 + P \cdot 1 + M + q \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{2} + 1\right) = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{6}(15 \cdot 1 + 21 + 8 \cdot 6 \cdot 4) = 38 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot 6 + R_B = 63 - 63 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо значення Q в характерних перерізах балки:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 + R_A = -8 + 38 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_5 = R_A - q \cdot 2{,}5 = 38 - 8 \cdot 2{,}5 = 18 \text{ кН};$$

$$Q_6 = R_A - q \cdot 6 = 38 - 8 \cdot 6 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 - P = -10 - 15 = -25 \text{ кН}.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 4.9, б), з′єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Оскільки ми будували епюру *Q*, “рухаючись” зліва направо, то напрямок “стрибків” на епюрі співпадає з напрямком сил.

На ділянці 1...2 розподілене навантаження призводить до поступового зниження значень поперечних сил *Q* від значення $Q_1 = 0$ до значення $Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \text{ кН}$.

У перерізі 3 реакція R_A =38 кН забезпечує “стрибок” уверх до величини $Q_3 = 30 \text{ кН}$.

Далі під впливом розподіленого навантаження поперечна сила поступово зменшується до величини $Q_6 = -10 \text{ кН}$.

У перерізі 7 сила *P*=15 кН забезпечує “стрибок” униз до величини $Q_7 = -25 \text{ кН}$ і далі поперечна сила не змінюється $Q_8 = Q_7 = -25 \text{ кН}$.

Зробимо перевірку побудови епюри Q, для чого будемо “рухатись” справа наліво.

У перерізі 8 реакція R_B = 25 кН намагається повернути балку проти хода годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” униз до $Q_8 = -25$ кН і далі без змін до перерізу 7.

У перерізі 6 з′являється сила P = 15 кН, яка намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” уверх до значення $Q_6 = -10$ кН.

На ділянці 6...3 розподілене навантаження викликає зростання значень поперечних сил Q від значення $Q_6 = -10$ кН до значення $Q_3 = Q_6 + q \cdot 5 = 30$ кН. При цьому наявність згинального моменту M на епюрі Q не позначається.

Відносно перерізу 2 реакція R_A = 38 кН повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз до величини $Q_2 = -8$ кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини $Q_1 = Q_2 + q \cdot 1 = 0$.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0;\ M_2 = -q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -8 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_3 = M_2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 1{,}5 - q \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}25 = 38 \cdot 1{,}5 - 8 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}25 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 - M = 32 - 21 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = R_A \cdot 5 - q \cdot 6 \cdot 3 - M = 38 \cdot 5 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - 21 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 5...6 у перерізі K, де $Q = 0$, на епюрі M має бути максимум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{MAX}$:

$$z_K = \frac{Q_6}{q} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \text{ м};$$

$$M_K = M_{\max} = R_B(1+z_K) - P \cdot z_K - q \cdot \frac{z_K^2}{2} =$$
$$= 25 \cdot 2{,}25 - 15 \cdot 1{,}25 - 8 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}625 = 31{,}25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Останню частину епюри *M* побудуємо з правого кінця:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot 1 = 25 \cdot 1 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $M_6 = M_7$, то епюра M побудована вірно.

За цими даними будуємо епюру згинальних моментів (див.рис.4.6,в).

Максимальне нормальне напруження s_{max}, можна знайти за формулою

$$s_{max} = \frac{M_{max}\, y_{max}}{I_{x_c}},$$

де y_{max} – найбільш віддалена точка перерізу.

Згідно з умовами задачі знайдемо відстань від осі x_c до найбільш віддаленої точки перерізу (див. завдання 4.1). Найбільш віддаленою точкою перерізу (див. рис. 4.3) є найнижча точка перерізу, яка належить швелеру. Відстань до неї від осі x_c дорівнює

$$y_{max} = a_2 + \frac{h_{ДВ}}{2} + b_{ШВ} = 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 24 + 8{,}2 = 20{,}51 см.$$

Таким чином, враховуючи найбільший згинальний момент $M_{max} = 32$ *кН*, визначимо максимальне нормальне напруження в перерізі

$$s_{max} = \frac{M_{max}\, y_{max}}{I_{x_c}} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 20{,}51 \cdot 10^{-2}}{14141{,}23 \cdot 10^{-8}} = 46{,}41 МПа.$$

Розв’язок: максимальне нормальне напруження

$s_{max} = 46{,}41 МПа$.

4.4 Повна перевірка міцності балки

Для сталевої балки підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного (співвідношення сторін $h : b = 2$) перерізів, вибрати оптимальний варіант і провести повну перевірку на міцність за IV теорією міцності. Прийняти $[t] = 0{,}6 \cdot [s]$

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.5 та 4.6 і рисунку 4.10

Таблиця 4.5 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$[\sigma]$, *МПа*	150	160	170	220	140	180	200	120	210	190
M, кН·м	20	50	80	30	40	65	35	55	45	70
P, кН	30	40	60	70	20	35	65	25	45	55
q, кН/м	12	10	14	20	16	22	18	15	18	24

Таблиця 4.6 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a, м	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,1
b, м	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
c, м	1,6	1,4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d, м	1,4	1,8	2,2	1,6	1,8	2,0	2,6	1,8	1,6	1,8

4.4.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.4

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаємо опорні реакції балки.

2 Будуємо епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M.

3 З аналізу епюри згинальних моментів визначаємо максимальний згинальний момент M_{max}.

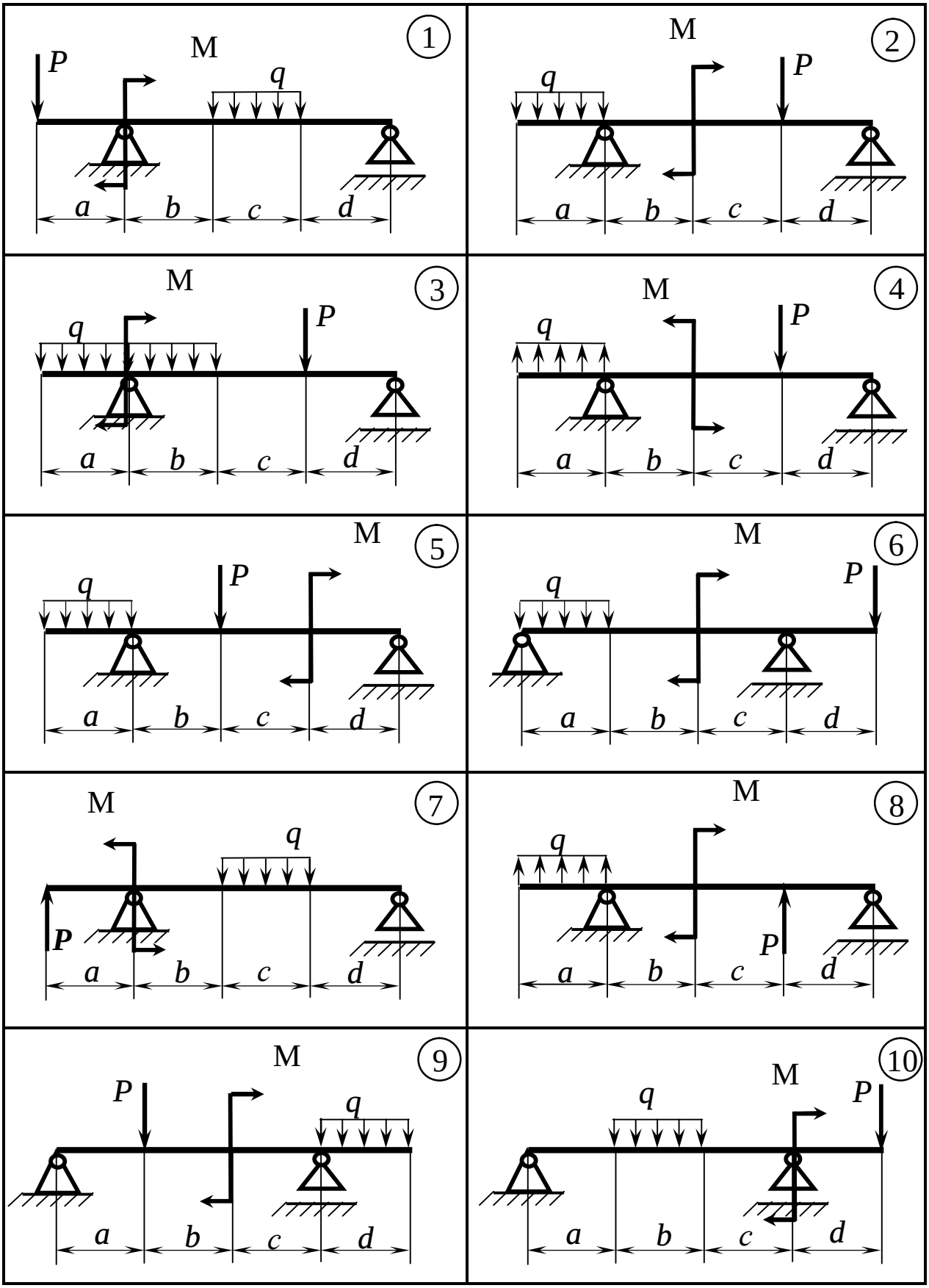


Рисунок 4.10 - Схеми до варіантів завдання 4.4

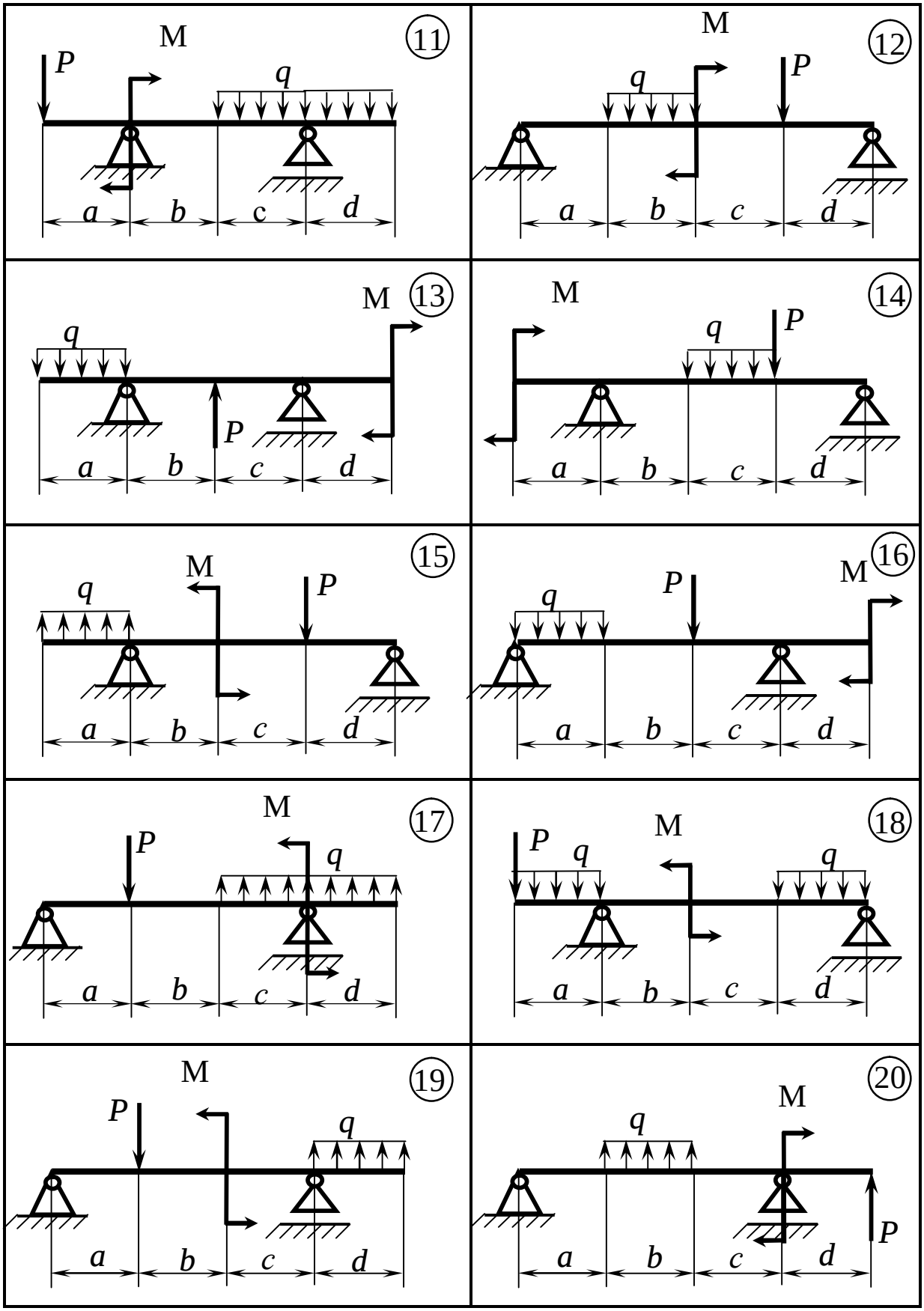


Рисунок 4.10, аркуш 2

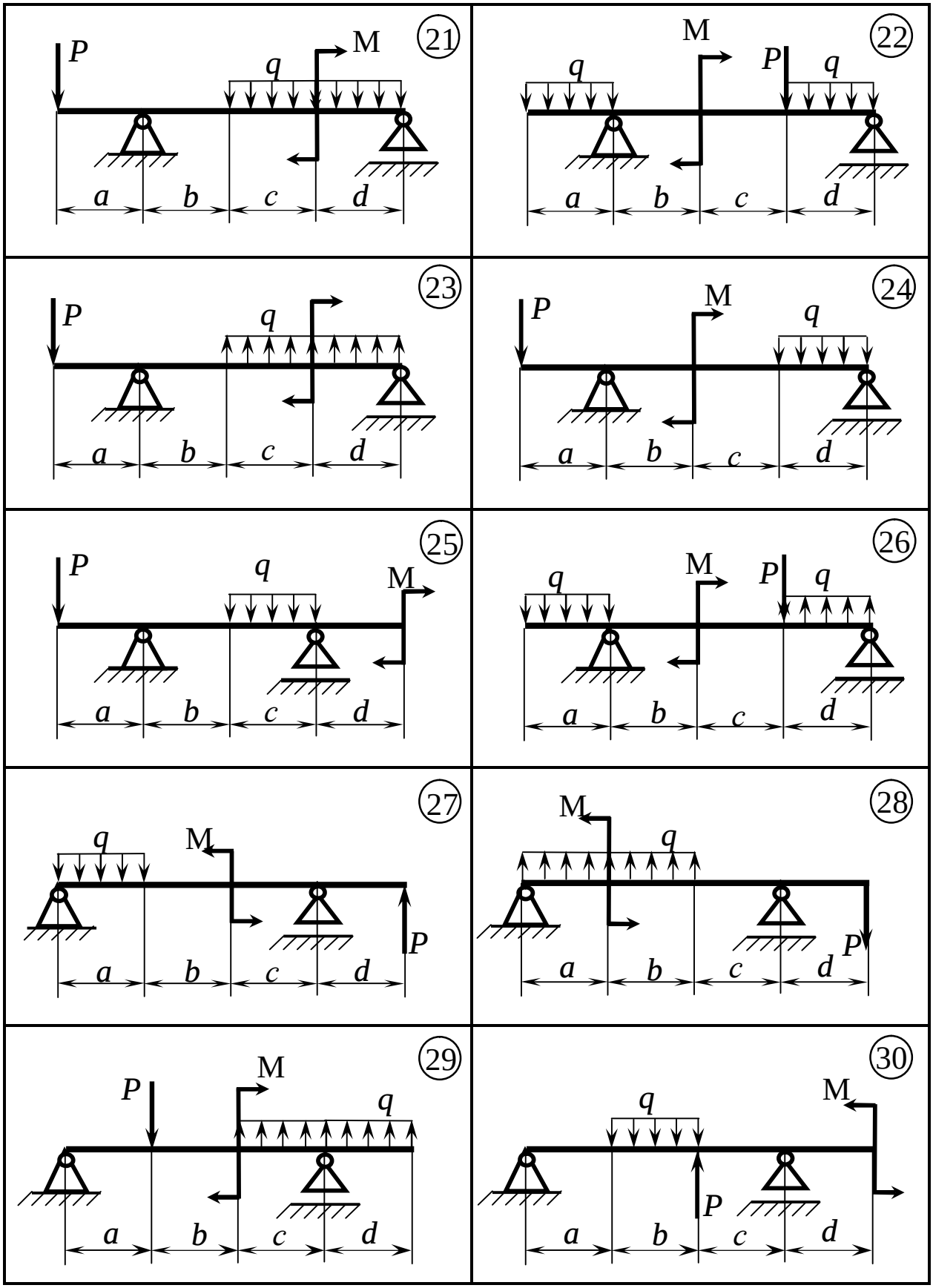


Рисунок 4.10, аркуш 3

4 З умови міцності за нормальними напруженнями

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_{x_c}} \le [s], \tag{4.8}$$

визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу W_{x_c}.

5 З сортаменту вибираємо номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, і виписуємо його основні характеристики.

6 Перевіряємо міцність за нормальними напруженнями відповідно до умови (4.8).

7 З аналізу епюри поперечних сил визначаємо максимальну поперечну силу Q_{max}.

8 Перевіряємо міцність за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$t_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_{x_c}} \le [t], \tag{4.9}$$

де S_x – статичний момент половини площини перерізу вибраного профілю відносно осі x;

d – ширина перерізу на осі x (рис. 4.11);

I_{x_c} – момент інерції перерізу відносно осі x.

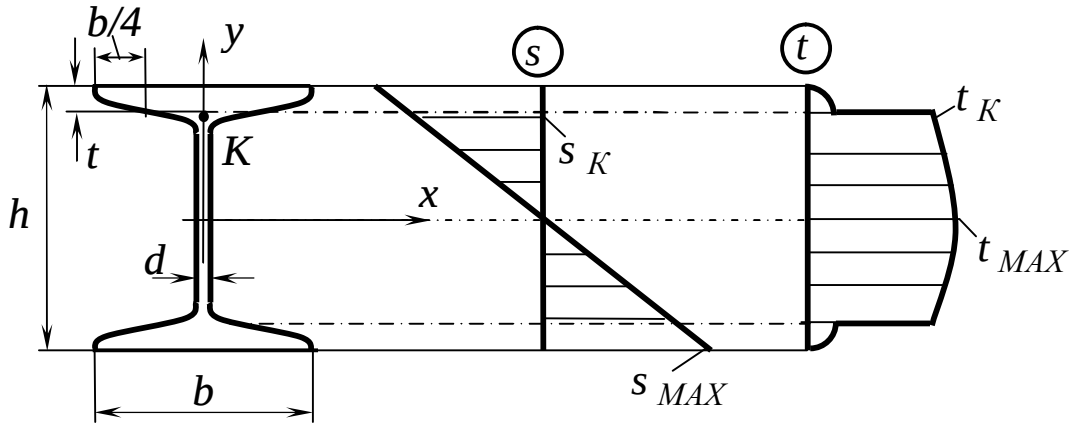


Рисунок 4.11 – Епюри нормальних (s) *та дотичних* (t) *напружень у поперечних перерізах балки*

9 Перевіряється міцність за еквівалентними напруженнями відносно до умови:

$$s_{екв}^{max} \le [s], \tag{4.10}$$

де $s_{екв}^{max}$ - найбільше зі значень еквівалентних напружень у точках K (див. рис. 4.11) небезпечних перерізів балки, тобто у таких перерізах: $M = M_{max}$ і $Q \neq 0$, або $Q = Q_{max}$ і $M \neq 0$, або де M і Q хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках K зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$s_{к}^{екв} = \sqrt{s_{к}^{2} + 3t_{к}^{2}} \tag{4.11}$$

$$s_{K} = \frac{M}{J_{x_c}} \cdot y_K \tag{4.12}$$

$$t_{K} = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot I_x} \tag{4.13}$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

y_K – відстань точки K до осі x (див. рис. 4.11):

$$y_K = \frac{h}{2} - t \tag{4.14}$$

S_x^* – статичний момент відносно осі x частини перерізу, яка розташована вище точки K:

$$S_x^* = 0{,}5 \cdot b \cdot t(h - t). \tag{4.15}$$

Підрахунок $s_{к}^{екв}$ у найбільш навантаженому (небезпечному) перерізі супроводжується рисунком, на якому проставляються конкретні значення розмірів перерізу та підраховані величини $s_к$ і $t_к$.

4.4.2 Приклад розв'язання задачі 4.4

Для сталевої балки (рис. 4.12) підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного (співвідношення сторін $h : b = 2$) перерізів, вибрати оптимальний варіант і провести повну перевірку на міцність за IV теорією міцності, якщо $[s] = 150$ *МПа*, а $[t] = 90$ *МПа*.

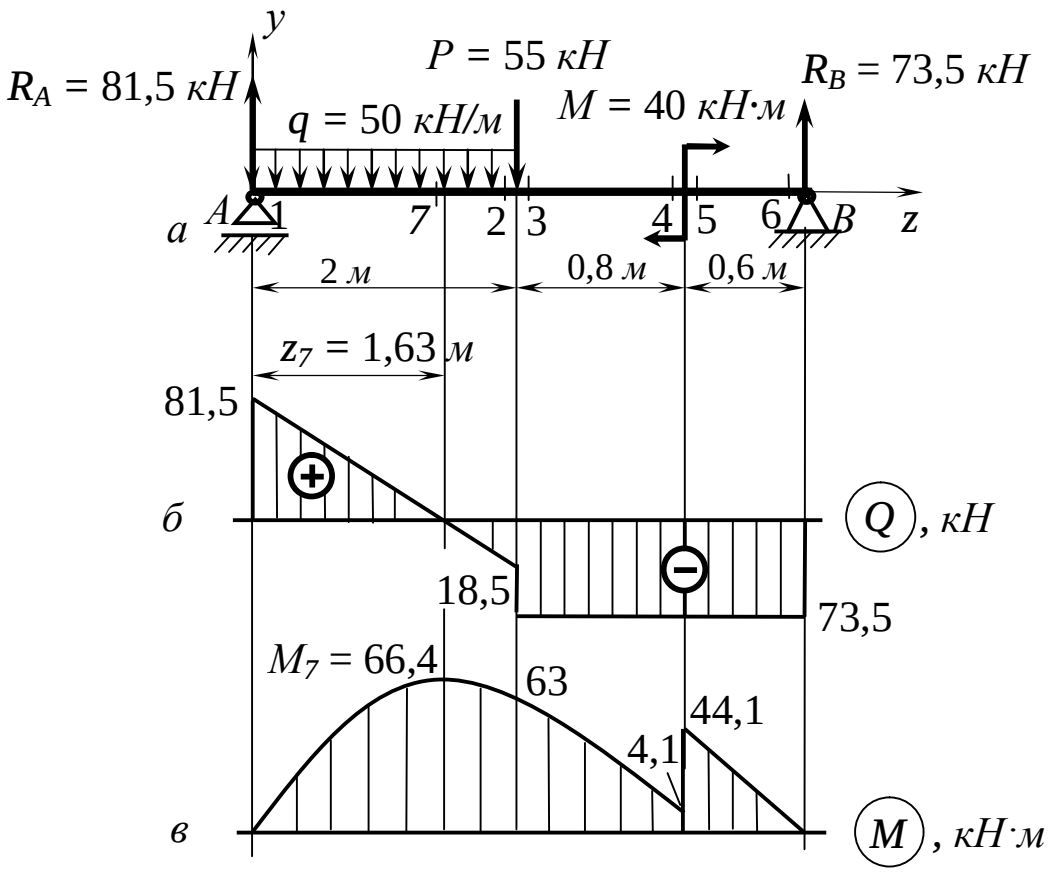


Рисунок 4.12 – Схема балки і основні графічні побудови до задачі 4.4

Розв'язання:

1 З умов рівноваги визначимо опорні реакції балки:

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3{,}4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3{,}4} = 73{,}5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \; q \cdot 2 \cdot 2{,}4 + P \cdot 1{,}4 - M - R_A \cdot 3{,}4 = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2{,}4 + 55 \cdot 1{,}4 - 40}{3{,}4} = 81{,}5\ кН\ .$$

Перевірка:

$$\sum P_Y = 0;\ R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0;$$

$$81{,}5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73{,}5 = 0;\ 155 - 155 = 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

2 Визначимо величини поперечних сил Q у характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 81{,}5\ кН\ ; \qquad Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 81{,}5 - 50 \cdot 2 = -18{,}5\ кН\ ;$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 81{,}5 - 50 \cdot 2 - 55 = -73{,}5\ кН\ ;$$

$$Q_4 = Q_3 = -73{,}5\ кН\ ;\ Q_5 = Q_4 = -73{,}5\ кН\ ;\ Q_6 = Q_5 = -73{,}5\ кН\ .$$

На ділянці 1-2 епюра Q змінює знак. Визначимо відстань z_7 до перерізу, де $Q = 0$ і де на епюрі M буде екстремум:

$$z_7 = \frac{Q_1}{q} = \frac{81{,}5}{50} = 1{,}63\ м\ .$$

Побудуємо епюри поперечних сил Q (рис. 4.12, б).

Визначимо величини згинальних моментів M у характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 81{,}5 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 63\ кН \cdot м;$$

$$M_3 = M_2 = 63\ кН \cdot м; \quad M_4 = R_B \cdot 0{,}6 - M = 73{,}5 \cdot 0{,}6 - 40 = 4{,}1\ кН \cdot м;$$

$$M_5 = R_B \cdot 0{,}6 = 73{,}5 \cdot 0{,}6 = 44{,}1\ кН \cdot м; \quad M_6 = 0;$$

$$M_7 = R_A \cdot 1{,}63 - 50 \cdot 1{,}63 \cdot \frac{1{,}63}{2} = 66{,}4\ кН \cdot м.$$

Побудуємо епюри згинальних моментів M (рис. 4.12, в).

3 На епюрі згинальних моментів знаходимо максимальний за модулем згинальний момент: $M_7 = M_{max} = 66{,}4\ кН{\cdot}м.$

4 З умови міцності за нормальними напруженнями знаходимо необхідний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[s]} = \frac{66{,}4 \cdot 10^{-3}}{150} \cdot 10^6 = 443\ см^3.$$

5 Переходимо до підбору перерізів.

а) Двотавровий переріз

За таблицею сортаменту (див., наприклад, [9], або додаток А) підбираємо необхідний номер двотавра (небагато більший або рівний одержаному $W_x = 443\ см^3$).

Приймаємо (ГОСТ8239-89) двотавр 30, який має $W_x = 472\ см^3$, $h = 30\ см$; $b = 13{,}5\ см$; $d = 0{,}65\ см$, $t = 1{,}02\ см$, $F = 46{,}5\ см^2$, $I_x = 7080\ см^4$, $S_x = 268\ см^3$.

б) Круглий переріз

Момент опору для круга $W_x = \frac{pd^3}{32} \approx 0{,}1d^3$.

Ми з'ясували, що момент опору перерізу балки повинен бути не менш $W_x = 443\ см^3$.

Звідки $d = \sqrt[3]{\frac{443}{0{,}1}} = \sqrt[3]{4430} = 17{,}7\ см$.

Приймаємо стрижень діаметром $d = 180\ мм$, площа якого

$$F = \frac{p\ d^2}{4} = \frac{p}{4} \cdot 18^2 = 252{,}7\ см^2.$$

в) Прямокутний переріз

Момент опору для прямокутника: $W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$,

де $h = 2b$.

Звідки $b = \sqrt[3]{\frac{443 \cdot 3}{2}} = \sqrt[3]{669} = 8{,}7\ см.$

Приймаємо $h = 2b = 2 \cdot 8{,}7 = 17{,}4\ см$,

тоді $F = b \cdot h = 8{,}7 \cdot 17{,}4 = 151{,}4\ см^2$.

Аналізуючи три типи перерізів: двотаврове, кругле і прямокутне, бачимо, що найбільш раціональним є двотаврове, оскільки при однаковій міцності балки його площа найменша. Тому далі будемо розглядати двотавр.

6 Перевіримо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$s_{max} \geq \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{66{,}4 \cdot 10^{-3}}{472 \cdot 10^{-6}} = 141 МПа < [s].$$

Ця умова міцності є забезпеченою.

7 На епюрі поперечних сил (див. рис. 4.12, б) знаходимо максимальну за модулем поперечну силу: $Q_{max} = 81{,}5$ *кН*.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$t_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} = \frac{81{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{0{,}65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 41{,}5 МПа \ \mathbf{р} \ [t] = 90 МПа.$$

Таким чином, і ця умова міцності є забезпеченою.

8 Аналізуючи епюри Q та M, бачимо, що найбільш небезпечним перерізом з точки зору еквівалентних напружень є переріз 3, в якому величини Q і M хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі: $Q_3 = Q_{НЕБ} = 73{,}5$ *кН*; $M_3 = M_{НЕБ} = 63$ *кН·м*.

А в цьому небезпечному перерізі найбільш небезпечною точкою є точка K, де з'єднуються полиця і ребро двотавра (рис. 4.13). Тому будемо визначати максимальні еквівалентні напруження в точці K перерізу двотавра.

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{s_K^2 + 3t_K^2};$$

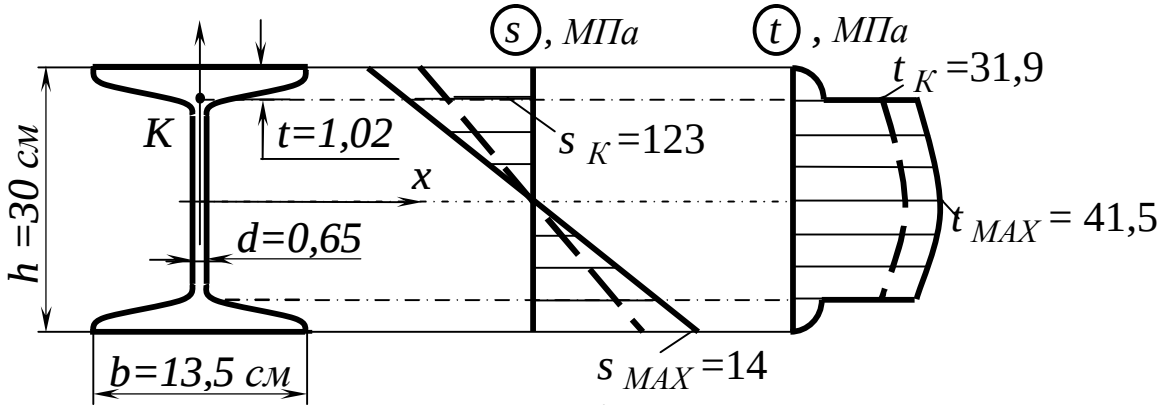


Рисунок 4.13 – Схема до визначення еквівалентних напружень у небезпечному перерізі балки

$$s_K = \frac{M_{НЕБ}}{I_x} \cdot y_K = \frac{63 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}98 \cdot 10^{-2}}{7080 \cdot 10^{-8}} = 123\,МПа,$$

де $y_K = \frac{h}{2} - t = \frac{30}{2} - 1{,}02 = 13{,}98\,см.$

$$t_K = \frac{Q_{НЕБ} \cdot S_X^{отс}}{d \cdot I_X} = \frac{73{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{0{,}65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 31{,}9\,МПа\ ,$$

де $S_X^{отс} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 13{,}5 \cdot 1{,}02 \left(\frac{15}{2} - \frac{1{,}02}{2} \right) = 200\ см^3.$

Таким чином, остаточно маємо

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{123^2 + 3 \cdot 31{,}9^2} = 135\,МПа < [s] = 150\,МПа.$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями також забезпечена.

Значення всіх визначених напружень покажемо на рис. 4.13. При цьому епюри нормальних напружень для перерізів 3 та 7 накладемо один на одний. Теж саме зробимо для епюр дотичних напружень 1- та 3-го перерізів.

Розв’язок: переріз балки – двотавр 30 – забезпечує всім умовам міцності.

4.5 Згинання з крученням

Виходячи з III теорії міцності, визначити діаметр d проміжного вала редуктора. У задачі означено: K – потужність, що передається валом; n – частота обертання вала; D_1 та D_2 – діаметри зубчатих колес.

Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0{,}324P_i$; $S_i = 0{,}4P_i$. Допустиме напруження $[s] = 80\,МПа$.

Вихідні дані вибрати за таблицями 4.7 та 4.8 і рисунком 4.14

Таблиця 4.7 – Вихідні дані до задачі 4.5

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
K, кВт	10	35	20	45	15	25	50	30	55	40
D_1, м	0,5	0,9	0,6	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8
D_2, м	0,4	0,6	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,4	0,6

Таблиця 4.8 – Вихідні дані до задачі 4.5

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n, об/хв	100	350	200	450	300	150	500	250	400	350
a, м	0,7	0,5	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,5
b, м	0,5	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,7	0,6
c, м	0,3	0,5	0,7	0,5	0,6	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7

4.5.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.5

Розв'язання задачі здійснюємо в такій послідовності:

1 Визначаємо крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{p \cdot n}, \tag{4.16}$$

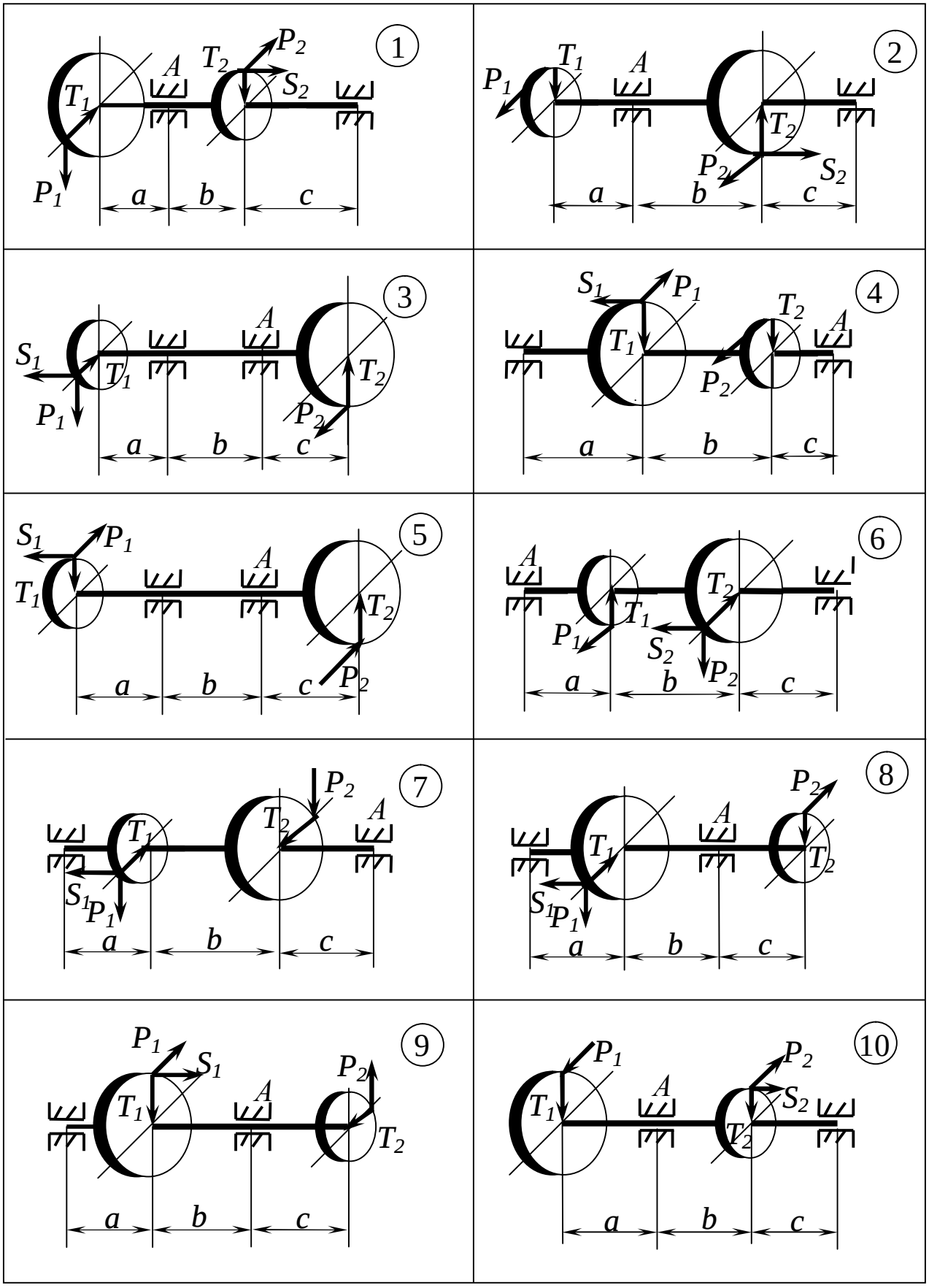


Рисунок 4.14 - Схеми до варіантів завдання 4.5

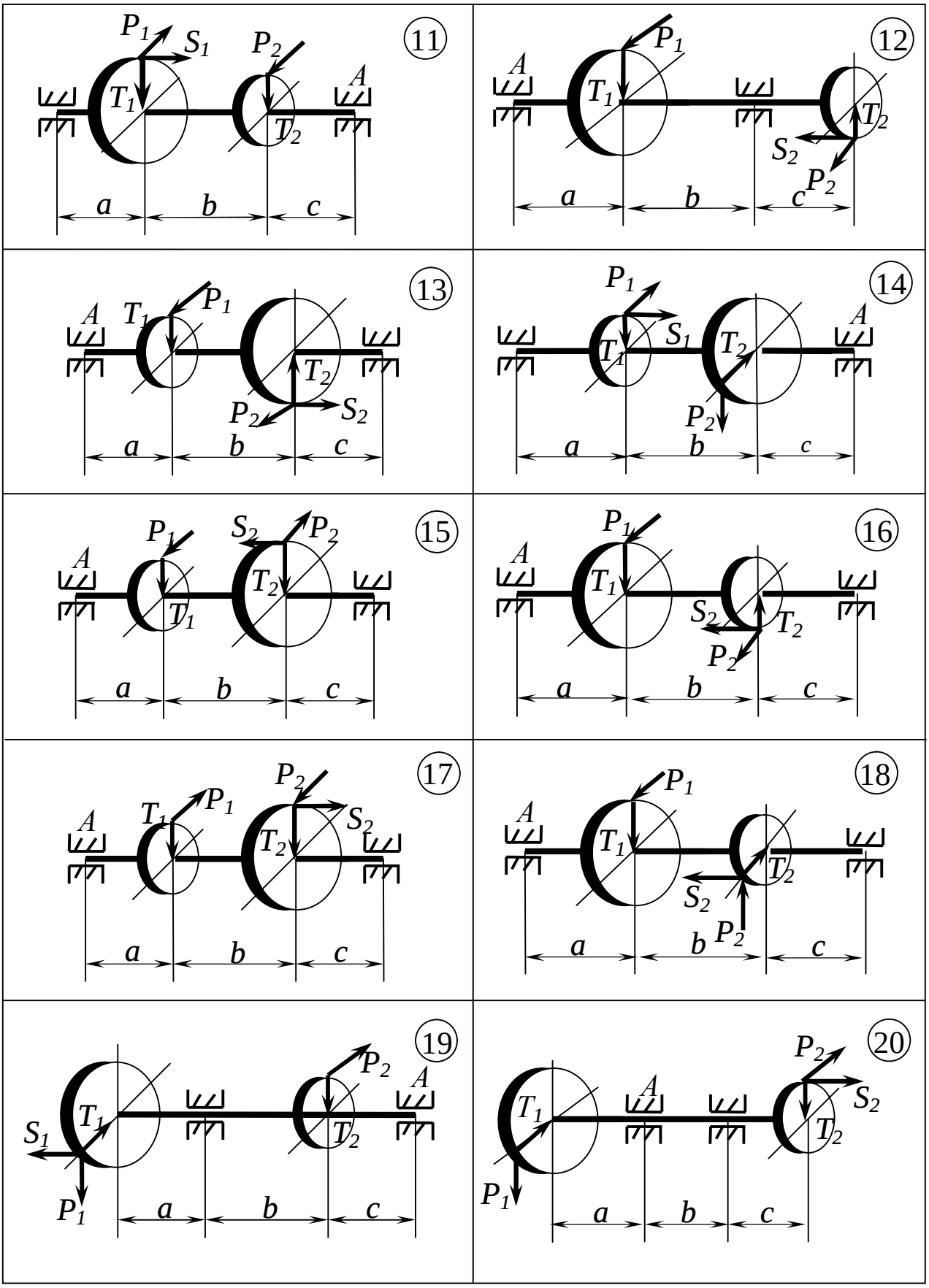


Рисунок 4.14, аркуш 2

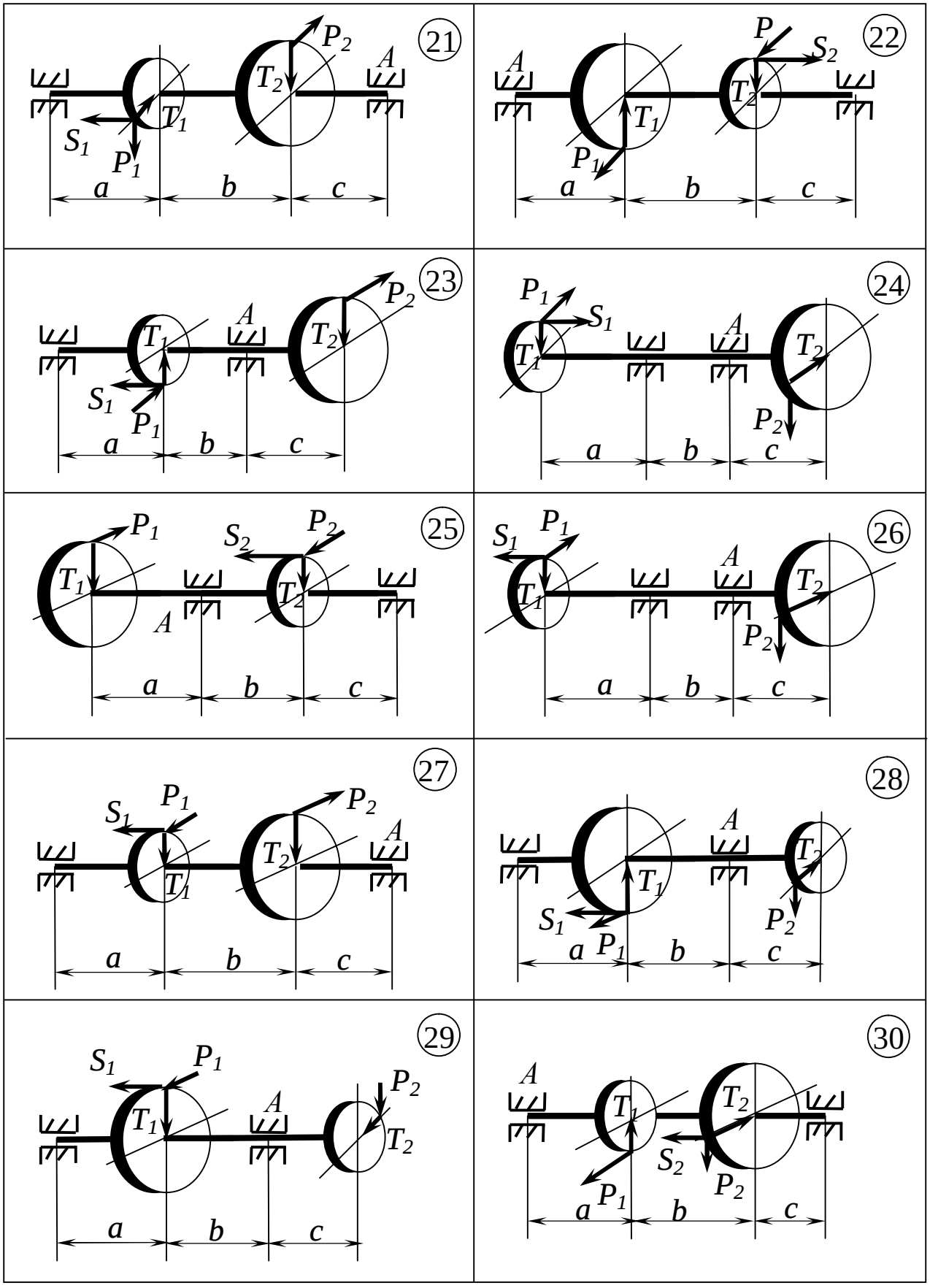


Рисунок 4.14, аркуш 3

$$P_i = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_i}, \tag{4.17}$$

$$T_i = 0{,}324 P_i, \tag{4.18}$$

$$S_i = 0{,}4 P_i. \tag{4.19}$$

2 Усі зазначені сили прикладаємо безпосередньо до вала з додаванням відповідних моментів, які виникають, коли лінія дії сили не перетинає осі вала.

3 Визначаємо опорні реакції вала у вертикальній площині та будуємо епюру згинальних моментів M_x.

4 Визначаємо опорні реакції вала у горизонтальній площині та будуємо епюру згинальних моментів M_y.

5 Будуємо епюру крутних моментів – $M_{кр}$.

6 Визначаємо величини приведених моментів у характерних перерізах вала:

$$M_{пр} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} \tag{4.20}$$

і будуємо їх епюру та визначаємо найбільше їх значення – $M_{пр}^{max}$.

7 Визначаємо необхідний осьовий момент опору перерізу:

$$W_O \geq \frac{M_{пр}}{[s]}.$$

Для круглого перерізу осьовий момент опору дорівнює: $W_O = \frac{pd^3}{32}$

8 Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_O}{p}}. \tag{4.21}$$

Остаточне значення d беремо з нормального ряду (ГОСТ 6636-69).

4.5.2 Приклад розв'язання задачі 4.5

Виходячи з III теорії міцності, визначити діаметр d проміжного вала редуктора (рис.4.15). Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0{,}324P_i$; $S_i = 0{,}4P_i$. Допустиме напруження $[s] = 80\,МПа$.

Дано: a = 0,2 *м*; b = 0,3 *м*; c = 0,1 *м*; D_1 = 0,9 *м*; D_2 = 0,3 *м*; K = 75 *кВт*; n = 450 *об/хв*.

Розв'язання: 1 Визначимо крутний момент, який діє на вал:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{p \cdot n} = \frac{30 \cdot 75}{3{,}14 \cdot 450} = 1{,}592\,кН \cdot м.$$

з умови рівноваги (сума моментів всіх сил відносно осі вала, яка повинна дорівнювати нулю) маємо: $M_{кр} = P_1 \cdot \frac{D_1}{2} = P_2 \cdot \frac{D_2}{2}$.

Звідки $$P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1{,}592}{0{,}9} = 3{,}537\,кН;$$

$$P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 1{,}592}{0{,}3} = 10{,}613\,кН.$$

Тоді $$T_1 = 0{,}324 \cdot P_1 = 0{,}324 \cdot 3{,}537 = 1{,}146\,кН;$$

$$T_2 = 0{,}324 \cdot P_2 = 0{,}324 \cdot 10{,}613 = 3{,}439\,кН;$$

$$S_2 = 0{,}4 \cdot P_2 = 0{,}4 \cdot 10{,}613 = 4{,}245\,кН.$$

2 Прикладемо усі зазначені сили (див. рис. 4.15, б) безпосередньо до осі вала. Зважаючи на те, що сили P_1 та P_2 не перетинають осі вала, то при їх паралельному перенесенні до них треба додати відповідно добутки $P_1 \cdot \frac{D_1}{2}$ та $P_2 \cdot \frac{D_2}{2}$, які дорівнюють крутному моменту – $M_{кр}$.

З тієї ж причини дію подовжньої сили S_2 замінюємо згинальним моментом $$M_S = S_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 4{,}245 \cdot \frac{0{,}3}{2} = 0{,}637\,кН \cdot м.$$

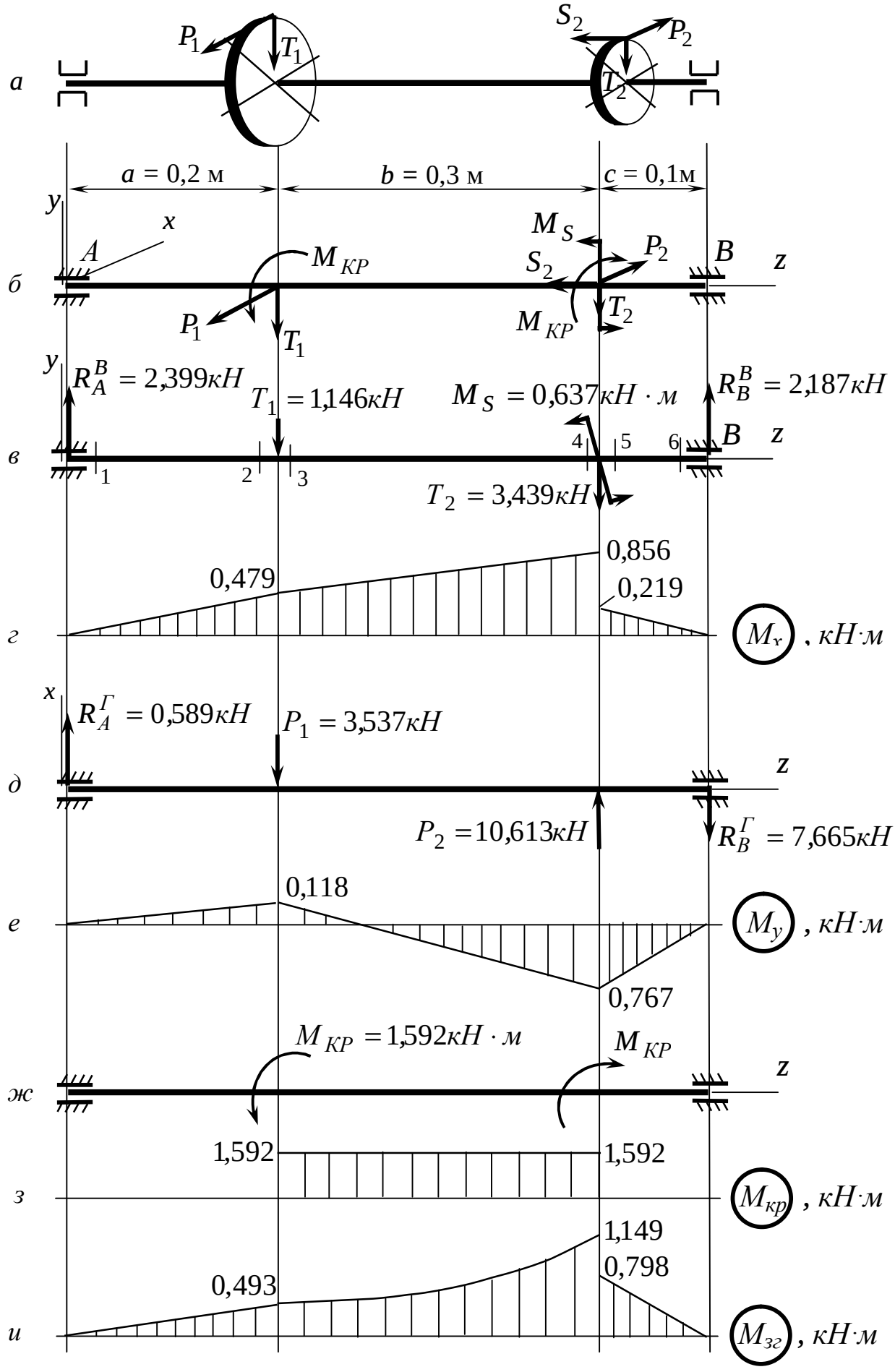


Рисунок 4.15 – Графічні побудови до прикладу розв'язання задачі 4.5

3 Прикладемо до вала всі сили, які діють на нього у вертикальній площині (див. рис. 4.15, в) та визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A^B = 0; \quad R_B^B \cdot 0{,}6 + M_S - T_1 \cdot 0{,}2 - T_2 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$R_B^B = \frac{1}{0{,}6} \cdot (-M_S + T_1 \cdot 0{,}2 + T_2 \cdot 0{,}5) =$$

$$= \frac{1}{0{,}6} \cdot (-0{,}637 + 1{,}146 \cdot 0{,}2 + 3{,}439 \cdot 0{,}5) = 2{,}187\ кН;$$

$$\sum M_B^B = 0; \quad -R_A^B \cdot 0{,}6 + M_S + T_1 \cdot 0{,}4 + T_2 \cdot 0{,}1 = 0;$$

$$R_A^B = \frac{1}{0{,}6} \cdot (T_1 \cdot 0{,}4 + M_S + T_2 \cdot 0{,}1) =$$

$$= \frac{1}{0{,}6} \cdot (1{,}146 \cdot 0{,}4 + 0{,}637 + 3{,}439 \cdot 0{,}1) = 2{,}399\ кН;$$

Зробимо перевірку: $\sum P_{ky} = 0:$ $R_A^B - T_1 - T_2 + R_B^B = 0;$

$$2{,}399 - 1{,}146 - 3{,}439 + 2{,}187 = 0;$$

$4{,}586 - 4{,}585 \approx 0;$ Реакції знайдено вірно.

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A^B \cdot 0{,}2 = 2{,}399 \cdot 0{,}2 = 0{,}479\ кН \cdot м;$$

$$M_3 = M_2 = 0{,}479\ кН \cdot м;$$

$$M_4 = R_A^B \cdot 0{,}5 - T_1 \cdot 0{,}3 = 2{,}399 \cdot 0{,}5 - 1{,}146 \cdot 0{,}3 = 0{,}856\ кН \cdot м.$$

Згинальний момент в 5-му перерізі визначимо, «рухаючись» від перерізу 6: $M_6 = 0;$ $M_5 = R_B^B \cdot 0{,}1 = 2{,}187 \cdot 0{,}1 = 0{,}219\ кН \cdot м.$

Як і очікувалось, $M_4 - M_5 = M_S;$ $0{,}856 - 0{,}219 = 0{,}637\ кН \cdot м.$

За визначеними згинальними моментами будуємо епюру згинальних моментів M_x (див. рис. 4.15, г).

4 Прикладемо до вала всі сили, які діють на нього в горизонтальній площині (див. рис. 4.15, д), та визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0: \quad -P_1 \cdot 0{,}2 + P_2 \cdot 0{,}5 - R_B^Г \cdot 0{,}6 = 0;$$

$$R_B^Г = \frac{1}{0{,}6} \cdot (-P_1 \cdot 0{,}2 + P_2 \cdot 0{,}5) =$$
$$= \frac{1}{0{,}6} \cdot (-3{,}537 \cdot 0{,}2 + 10{,}613 \cdot 0{,}5) = 7{,}665\,кН;$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A^Г \cdot 0{,}6 + P_1 \cdot 0{,}4 - P_2 \cdot 0{,}1 = 0;$$

$$R_A^Г = \frac{1}{0{,}6} \cdot (P_1 \cdot 0{,}4 - P_2 \cdot 0{,}1) =$$
$$= \frac{1}{0{,}6} \cdot (3{,}537 \cdot 0{,}4 - 10{,}613 \cdot 0{,}1) = 0{,}589\,кН.$$

Зробимо перевірку:

$$\sum P_{kx} = 0: \quad R_A^Г - P_1 + P_2 - R_B^Г = 0;$$

$$0{,}589 - 3{,}537 + 10{,}613 - 7{,}665 = 0;$$

$$11{,}202 - 11{,}202 = 0; \qquad \text{Реакції знайдено вірно.}$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = R_A^Г \cdot 0{,}2 = 0{,}589 \cdot 0{,}2 = 0{,}118\,кН \cdot м;$$

Згинальний момент в 5-му перерізі визначимо, «рухаючись» від перерізу 6: $M_6 = 0;$ $M_5 = R_B^Г \cdot 0{,}1 = 7{,}665 \cdot 0{,}1 = 0{,}767\,кН \cdot м.$

За визначеними згинальними моментами будуємо епюру згинальних моментів M_y (див. рис. 4.15, е).

5 Прикладемо крутні моменти до вала (див. рис. 4.15, ж) та визначимо крутні моменти у характерних перерізах:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = 0; \quad M_3 = M_{кр} = 1{,}592\,кН \cdot м;$$

$$M_4 = M_{кр} = 1{,}592\,кН \cdot м; \quad M_5 = 0; \quad M_6 = 0.$$

За визначеними моментами будуємо епюру $M_{кр}$ (рис. 4.15, з).

6 Для побудови сумарної епюри згинальних моментів визначимо величини згинальних моментів у характерних перерізах балки за формулою

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2};$$

$$M_{зг\,1} = \sqrt{M_{x1}^2 + M_{y1}^2} = 0;$$

$$M_{зг\,2–3} = \sqrt{M_{x2}^2 + M_{y2}^2} = \sqrt{0{,}479^2 + 0{,}118^2} = 0{,}493\,кН \cdot м;$$

$$M_{зг\,4} = \sqrt{M_{x4}^2 + M_{y4}^2} = \sqrt{0{,}856^2 + 0{,}767^2} = 1{,}149\,кН \cdot м;$$

$$M_{зг\,5} = \sqrt{M_{x5}^2 + M_{y5}^2} = \sqrt{0{,}219^2 + 0{,}767^2} = 0{,}798\,кН \cdot м;$$

$$M_{зг\,6} = \sqrt{M_{x6}^2 + M_{y6}^2} = 0.$$

За визначеними моментами будуємо епюру $M_{зг}$ (рис. 4.15, и).

7 Аналізуючи епюру сумарних згинальних моментів $M_{зг}$, бачимо, що небезпечним є переріз 4, в якому $M_{зг} = 1{,}149\,кН \cdot м$.

Визначимо в цьому перерізі приведений момент, який за III теорією міцності дорівнює

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0{,}856^2 + 0{,}767^2 + 1{,}592^2} = 1{,}963\,кН \cdot м$$

Із умови міцності при згинанні $s_{екв}^{III} = \dfrac{M_{пр}^{III}}{W_o} \le [s]$,

визначимо осьовий момент опору вала

$$W_o \ge \frac{M_{пр}^{III}}{[s]} = \frac{1{,}963 \cdot 10^{-3}}{80} 10^6 = 24{,}5\,см^3.$$

8 Знаючи, що осьовий момент опору круглого перерізу дорівнює

$$W_o = \frac{pd^3}{32},$$

визначаємо необхідний діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_o}{p}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 24.5 \cdot 10^3}{3{,}14}} = 62{,}97\,мм.$$

З нормального ряду (ГОСТ6636-69) приймаємо діаметр проміжного вала редуктора d = 63 мм.

Розв’язок: приймаємо діаметр проміжного вала редуктора d = 63 мм.

ЛІТЕРАТУРА

1 **Сапрыкин, В.Н.** Техническая механика / В.Н.Сапрыкин. – Ростов н/Д: Феникс; Харьков : Торсинг, 2003. – 560 с. – ISBN 5-222-03585-9 (Феникс). – ISBN 966-693-224-5 (Торсинг)

2 **Никитин, Н.Н.** Курс теоретической механики/ Н.Н.Никитин. – М.: Высш. школа, 1990. – 607 с.

3 **Никитин, Н. Н.** Теоретична механіка: підручник/ Н.Н.Никитин. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0

4 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике/ И.В.Мещерский. – М.: Наука, 1983. – 480 с.

5 Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / под ред. С. М. Тарга. – М.: Высш. школа, 1989. – 111 с.

6 **Писаренко, Г. С.** Опір матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко, О. А. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.

7 **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 612 с.

8 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. школа , 1989. – 624 с.

9 Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев и др. – Киев: Наук. думка, 1988. – 704 с.

10 Методические указания к оформлению РГР по дисциплине ”Теоретическая механика”/сост.: Ю. А. Ерфорт. – Краматорск: КИИ,1992. – 19 с.

11 Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів»: навчальний посібник /В.А.Овчаренко, Л.В. Кутовий, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. – Краматорськ: ДДМА 2004. – 208 с. – ISBN 966-7851-27-3

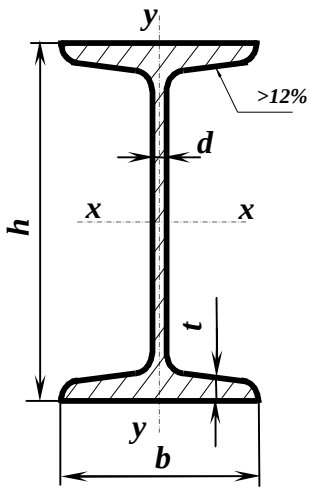
12 Конспект лекций по теоретической механике. Часть 1.Статика и кинематика (для студентов заочной формы обучения) / сост.: С. В. Подлесный, Ю. А. Ерфорт. – 2-е изд., стер – Краматорск: ДГМА, 2005. – 200 с.

13 Конспект лекций по теоретической механике. Часть 1.Динамика (для студентов заочной формы обучения) / сост.: С. В. Подлесный, Ю. А. Ерфорт. – 2-е изд., стер. – Краматорск: ДГМА, 2005. – 248 с.

14 Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). – Часть 1 / сост.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2004. – 172 с.

15 Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). – Часть 2 / сост.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2005. – 176 с.

16 Методические указания и контрольные задания по дисциплине “Теоретическая механика” (для студентов всех технических специальностей заочной формы обучения) /сост.: С. В. Подлесный, А. Н. Стадник, Ю. А. Ерфорт, Д. Г. Сущенко. – Краматорск: ДГМА, 2005. –108 с.



Додаток А

ДВ0ТАВРИ
стальні гарячекатані
(ГОСТ 8239-89)

Приклад позначення:

Двотавр 30 ГОСТ 8239-89

Таблиця А.1

Номер профі-лю	Розмір, мм				F, $см^2$	J_X, $см^4$	W_X, $см^3$	i_X, см	S_X, $см^3$	J_Y, $см^4$	W_Y, $см^3$	i_X, см
	h	*b*	*d*	*t*								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

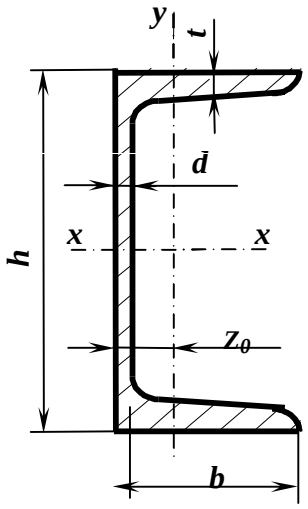
Додаток Б

Нормальні лінійні розміри, мм (ГОСТ 6636-69)

Таблиця Б.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900

Додаток В



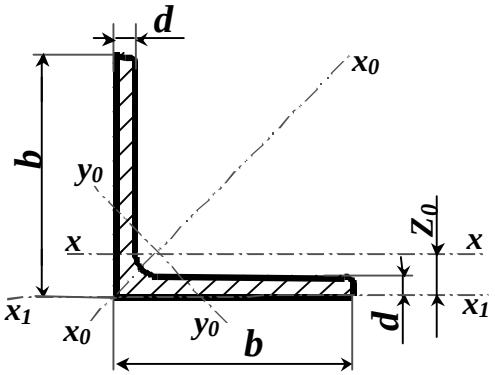
ШВЕЛЕРИ
стальні гарячекатані
(ГОСТ 8240-97 або ДСТУ 3436-96)

Приклад позначення:

Швелер 30 *ГОСТ 8240-97*

Таблиця В.1

Номер профі-лю	Розмір, мм				F, $см^2$	J_X, $см^4$	W_X, $см^3$	i_X, см	S_X, $см^3$	J_Y, $см^4$	W_Y, $см^3$	i_X, см	Z_0, см
	h	*b*	*d*	*t*									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Додаток Г

КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОСМУЖНІ

(ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)

Приклад позначення:

Кутик 50х50х3 *ГОСТ 8509-93*

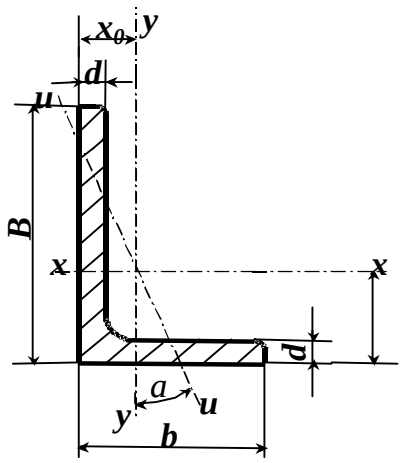
Таблиця Г.1

Номер кутика	Розмір, мм		F, см^2	I_x, см^4	i_x, см	I_{x_0} max, см^4	i_{x_0} max, см	I_{y_0} min, см^4	i_{y_0} min, см	z_0, см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02

Продовження таблиці Г.1

Номер кутика	Розмір, мм		F, см^2	I_x, см^4	i_x, см	I_{x_0} max, см^4	i_{x_0} max, см	I_{y_0} min, см^4	i_{y_0} min, см	z_0, см
	b	d								
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	3,06
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Додаток Д



КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАННІ НЕРІВНОСМУЖНІ
(ГОСТ 8510-93)

Приклад позначення:

Кутик 50х32х3 *ГОСТ 8510-93*

Таблиця Д.1

Номер кутика	Розмір, мм			F, см^2	J_X, см^4	i_X, см	J_Y, см^4	i_Y, см	J_Y min, см^4	i_U min, см	x_0, см	y_0, см	J_{XY}, см^4	Кут нахилу осі *u*, *tg a*
	B	***b***	***d***											
2,5/1,6	**25**	**16**	**3**	**1,16**	**0,70**	**0,78**	**0,22**	**0,44**	**0,13**	**0,34**	**0,42**	**0,86**	**0,22**	**0,392**
3/2	**30**	**20**	**3**	**1,43**	**1,27**	**0,94**	**0,45**	**0,56**	**0,26**	**0,43**	**0,51**	**1,00**	**0,43**	**0,427**
			4	**1,86**	**1,61**	**0,93**	**0,56**	**0,55**	**0,34**	**0,43**	**0,54**	**1,04**	**0,54**	**0,421**
3,2/2	**32**	**20**	**3**	**1,49**	**1,52**	**1,01**	**0,46**	**0,55**	**0,28**	**0,43**	**0,49**	**1,08**	**0,47**	**0.382**
			4	**1,94**	**1,93**	**1,00**	**0,57**	**0,54**	**0,35**	**0,43**	**0,53**	**1,12**	**0,59**	**0,374**
4/2,5	**40**	**25**	**3**	**1,89**	**3,06**	**1,27**	**0,93**	**0,70**	**0,56**	**0,54**	**0,59**	**1,32**	**0,96**	**0,385**
			4	**2,47**	**3,93**	**1,26**	**1,18**	**0,69**	**0,71**	**0,54**	**0,63**	**1,37**	**1,22**	**0,381**
			5	**3,03**	**4,73**	**1,25**	**1,41**	**0,68**	**0,86**	**0,53**	**0,66**	**1,41**	**1,44**	**0,374**
4/3	**40**	**39**	**4**	**2,67**	**4,18**	**1,25**	**2,01**	**0,87**	**1,09**	**0,64**	**0,78**	**1,28**	**1,68**	**0,544**
			5	**3,28**	**5,04**	**1,24**	**2,41**	**0,86**	**1,33**	**0,64**	**0,82**	**1,32**	**2,00**	**0,539**
4,5/2,8	**45**	**28**	**3**	**2,14**	**4,41**	**1,43**	**1,32**	**0,79**	**0,79**	**0,61**	**0,64**	**1,47**	**1,38**	**0,382**
			4	**2,80**	**5,68**	**1,42**	**1,69**	**0,78**	**1,02**	**0,60**	**0,68**	**1,51**	**1,77**	**0,379**
5/3,2	**50**	**32**	**3**	**2,42**	**6,18**	**1,60**	**1,99**	**0,94**	**1,18**	**0,70**	**0,72**	**1,60**	**2,01**	**0,403**
			4	**3,17**	**7,98**	**1,59**	**2,56**	**0,90**	**1,52**	**0,69**	**0,76**	**1,65**	**2,59**	**0,401**
5,6/3,6	**56**	**36**	**4**	**3,58**	**11,4**	**1,78**	**3,7**	**1,02**	**2,19**	**0,78**	**0,84**	**1,82**	**3,74**	**0,406**
			5	**4,41**	**13,8**	**1,77**	**4,48**	**1,01**	**2,66**	**0,78**	**0,88**	**1,86**	**4,50**	**0,404**
6,3/4	**63**	**40**	**4**	**4,04**	**16,3**	**2,01**	**5,16**	**1,13**	**3,07**	**0,87**	**0,91**	**2,03**	**5,25**	**0,397**
			5	**4,98**	**19,9**	**2,00**	**6,26**	**1,12**	**3,72**	**0,86**	**0,95**	**2,08**	**6,41**	**0,396**
			6	**5,90**	**23,3**	**1,99**	**7,28**	**1,11**	**4,36**	**0,86**	**0,99**	**2,12**	**7,44**	**0,393**
			8	**7,68**	**29,6**	**1,96**	**9,15**	**1,09**	**5,58**	**0,85**	**1,07**	**2,20**	**9,27**	**0,386**
6,5/5	**65**	**50**	**5**	**5,56**	**23,41**	**2,05**	**12,08**	**1,47**	**6,41**	**1,07**	**1,26**	**2,00**	**9,77**	**0,576**
			6	**6,60**	**27,46**	**2,04**	**14,12**	**1,46**	**7,52**	**1,07**	**1,30**	**2,04**	**11,46**	**0,575**
			7	**7,62**	**31,32**	**2,03**	**16,05**	**1,45**	**8,60**	**1,06**	**1,34**	**2,08**	**12,94**	**0,571**
			8	**8,62**	**35,00**	**2,02**	**18,88**	**1,44**	**9,65**	**1,06**	**1,37**	**2,12**	**13,61**	**0,570**
7/4,5	**70**	**45**	**5**	**5,59**	**27,76**	**2,23**	**9,05**	**1,27**	**5,34**	**0,98**	**1,05**	**2,28**	**9,12**	**0,406**
7,5/5	**75**	**50**	**5**	**6,11**	**34,81**	**2,39**	**12,47**	**1,43**	**7,24**	**1,09**	**1,17**	**2,39**	**12,00**	**0,436**
			6	**7,25**	**40,92**	**2,38**	**14,60**	**1,42**	**8,48**	**1,08**	**1,21**	**2,44**	**14,10**	**0,435**
			7	**8,37**	**46,77**	**2,36**	**16,61**	**1,41**	**9,69**	**1,08**	**1,25**	**2,48**	**16,18**	**0,435**
			8	**9,47**	**52,38**	**2,35**	**18,52**	**1,40**	**10,87**	**1,07**	**1,29**	**2,52**	**17,80**	**0,430**
8/5	**80**	**50**	**5**	**6,36**	**41,64**	**2,56**	**12,68**	**1,41**	**7,57**	**1,09**	**1,13**	**2,60**	**13,20**	**0,387**
			6	**7,55**	**48,98**	**2,55**	**14,85**	**1,40**	**8,88**	**1,08**	**1,17**	**2,65**	**15,50**	**0,386**

Продовження таблиці Д.1

Номер кутика	Розмір, мм			F, см^2	J_X, см^4	i_X, см	J_Y, см^4	i_Y, см	J_Y min, см^4	i_U min, см	x_0, см	y_0, см	J_{XY}, см^4	Кут нахилу осі *u*, *tg a*
	B	***b***	***d***											
8/6	**80**	**60**	**6**	**8,15**	**52,06**	**2,53**	**25,18**	**1,76**	**13,61**	**1,29**	**1,49**	**2,47**	**20,98**	**0,547**
			7	**9,42**	**59,61**	**2,52**	**28,74**	**1,75**	**15,58**	**1,29**	**1,53**	**2,52**	**24,01**	**0,546**
			8	**10,67**	**66,88**	**2,50**	**32,15**	**1,74**	**17,49**	**1,28**	**1,57**	**2,56**	**26,83**	**0,544**
9/5,6	**90**	**56**	**5,5**	**7,86**	**65,3**	**2,88**	**19,7**	**1,58**	**11,8**	**1,22**	**1,26**	**2,92**	**20,54**	**0,384**
			6	**8,54**	**70,6**	**2,88**	**21,2**	**1,58**	**12,7**	**1,22**	**1,28**	**2,95**	**22,23**	**0,384**
			8	**11,2**	**90,9**	**2,85**	**27,1**	**1,56**	**16,3**	**1,21**	**1,36**	**3,04**	**28,33**	**0,380**
10/6,3	**100**	**63**	**6**	**9,59**	**98,3**	**3,2**	**30,6**	**1,79**	**18,20**	**1,38**	**1,42**	**3,23**	**31,50**	**0,393**
			7	**11,1**	**113,0**	**3,19**	**35,0**	**1,78**	**20,83**	**1,37**	**1,46**	**3,28**	**36,10**	**0,392**
			8	**12,6**	**127,0**	**3,18**	**39,2**	**1,77**	**23,38**	**1,36**	**1,50**	**3,32**	**40,50**	**0,391**
			10	**15,5**	**154,0**	**3,15**	**47,1**	**1,75**	**28,34**	**1,35**	**1,58**	**3,40**	**48,60**	**0,387**
10/6,5	**100**	**65**	**7**	**11,2**	**114,0**	**3,19**	**38,3**	**1,85**	**22,77**	**1,41**	**1,52**	**3,24**	**38.00**	**0,415**
			8	**12,7**	**138,3**	**3,18**	**43,0**	**1,84**	**25,24**	**1,41**	**1,56**	**3,28**	**42,64**	**0,414**
			10	**15,7**	**155,5**	**3,15**	**51,7**	**1,82**	**30,60**	**1,40**	**1,64**	**3,37**	**51,18**	**0,410**
11/7	**110**	**70**	**6,5**	**11,4**	**142**	**3,53**	**45,6**	**2,00**	**26,9**	**1,53**	**1,58**	**3,55**	**46,80**	**0,402**
			8	**13,9**	**172**	**3,51**	**54,6**	**1,98**	**32,3**	**1,52**	**1,64**	**3,61**	**55,90**	**0,400**
12,5/8	**125**	**80**	**7**	**14,1**	**227**	**4,01**	**73,7**	**2,29**	**43,4**	**1,76**	**1,80**	**4,01**	**74,0**	**0,407**
			8	**16,0**	**256**	**4,00**	**83,0**	**2,28**	**48,8**	**1,75**	**1,84**	**4,05**	**84,1**	**0,406**
			10	**19,7**	**312**	**3,98**	**100,0**	**2,26**	**59,3**	**1,74**	**1,92**	**4,14**	**102**	**0,404**
			12	**23,4**	**365**	**3,95**	**117,0**	**2,24**	**69,5**	**1,72**	**2,00**	**4,22**	**118**	**0,400**
14/9	**140**	**90**	**8**	**18,0**	**364**	**4,49**	**120**	**2,58**	**70,3**	**1,98**	**2,03**	**4,49**	**121**	**0,411**
			10	**22,2**	**444**	**4,47**	**146**	**2,56**	**85,5**	**1,96**	**2,12**	**4,58**	**147**	**0,409**
16/10	**160**	**100**	**9**	**22,9**	**606**	**5,15**	**186**	**2,85**	**110**	**2,20**	**2,23**	**5,19**	**194**	**0,391**
			10	**25,3**	**667**	**5,13**	**204**	**2,84**	**121**	**2,19**	**2,28**	**5,23**	**213**	**0,390**
			12	**30,0**	**784**	**5,11**	**239**	**2,82**	**142**	**2,18**	**2,36**	**5,32**	**249**	**0,388**
			14	**34,7**	**897**	**5,08**	**272**	**2,80**	**162**	**2,16**	**2,43**	**5,40**	**282**	**0,385**
18/11	**180**	**110**	**10**	**28,3**	**952**	**5,80**	**276**	**3,12**	**165**	**2,42**	**2,44**	**5,88**	**295**	**0,375**
			12	**33,7**	**1123**	**5,77**	**324**	**3,10**	**194**	**2,40**	**2,52**	**5,97**	**348**	**0,374**
20/12,5	**200**	**125**	**11**	**34,9**	**1449**	**6,45**	**446**	**3,58**	**264**	**2,75**	**2,79**	**6,50**	**465**	**0,392**
			12	**37,9**	**1568**	**6,43**	**482**	**3,57**	**285**	**2,74**	**2,83**	**6,54**	**503**	**0,392**
			14	**43,9**	**1801**	**6,41**	**551**	**3,54**	**327**	**2,73**	**2,91**	**6,62**	**575**	**0,390**
			16	**49,8**	**2026**	**6,38**	**617**	**3,52**	**367**	**2,72**	**2,99**	**6,71**	**643**	**0,388**
25/16	**250**	**160**	**12**	**48,3**	**3147**	**8,07**	**1032**	**4,62**	**604**	**3,54**	**3,53**	**7,97**	**1043**	**0,410**
			16	**63,6**	**4091**	**8,02**	**1333**	**4,58**	**781**	**3,50**	**3,69**	**8,14**	**1350**	**0,408**
			18	**71,1**	**4545**	**7,99**	**1475**	**4,56**	**896**	**3,49**	**3,77**	**8,23**	**1485**	**0,407**
			20	**78,5**	**4987**	**7,97**	**1613**	**4,53**	**949**	**3,48**	**3,85**	**8,31**	**1635**	**0,405**

Додаток Е

ПИТАННЯ

з теорії

Розділ «**СТАТИКА»**

І Загальні поняття

1 Що вивчає розділ механіки «Статика»?
2 Що таке абсолютно тверде тіло?
3 Що таке сила? Як її можна визначити та виміряти?
4 Якими трьома основними параметрами повинна володіти сила як вектор?
5 Чому дорівнює момент сили відносно точки? Одиниця його вимірювання?
6 У яких випадках момент сили відносно точки дорівнює нулю?
7 Чому дорівнює момент сили відносно осі? Одиниця його вимірювання?
8 В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
9 Сформулюйте правило знаків для моменту.
10 Яка одиниця вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження ***q***? Чому дорівнює момент розподіленого навантаження відносно точки? Наведіть приклад.
11 Що таке пара сил? Де вона зустрічається на практиці?
12 Чому дорівнює момент пари сил? Одиниця його вимірювання? Правило знаків для моменту?
13 Як основна властивість моменту пари сил?

ІІ Зв'язки і їх реакції

14 Що в механіці називають в’яззю?
15 Перелічите основні види в'язів.
16 Що називають реакцією в'язі?
17 Як направлена реакція гладкої поверхні?
18 Як направлена реакція нитки?
19 Як направлена реакція стрижня (зокрема криволінійного)?
20 Сформулюйте правило знаків для реакції стрижня.
21 Як направлена реакція нерухомої опори (нерухомого підшипника)?

22 Як направлена реакція рухомої опори (рухомого підшипника)?
23 З чого складається реакція защемлення?

III Системи сил

24 Наведіть основні системи сил.
25 Які системи сил називають еквівалентними?
26 Які системи сил називають еквівалентними нулю?
27 Які системи сил називають такими, що врівноважують?
28 Які системи сил називають збіжними?
29 Які системи сил називають паралельними?
30 Які системи сил називають довільними?
31 Які системи сил називають плоскими?
32 Чому дорівнює рівнодіюча системи сил?
33 Чому дорівнює головний момент системи сил?
34 Сформулюйте теорему про момент рівнодіючою (теорему Варіньона).
35 Сформулюйте теорему Варіньона.

IV Рівновага систем сил

36 Яка умова рівноваги системи пар сил?
37 Як зміниться дія сили на тіло при перенесенні сили уздовж лінії її дії?
38 Як зміниться дія сили на тіло при паралельному перенесенні сили?
39 Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
40 Сформулюйте основну теорему статики (теорему Пуансо).
41 Сформулюйте умову рівноваги просторової довільної системи сил.
42 Сформулюйте умову рівноваги плоскої довільної системи сил.
43 Сформулюйте умову рівноваги просторової збіжної системи сил.
44 Сформулюйте умову рівноваги просторової паралельної системи сил.
45 Сформулюйте умову рівноваги плоскої збіжної системи сил.
46 Сформулюйте умову рівноваги плоскої паралельної системи сил.
47 Наведіть формулу визначення центра тяжіння (центру мас).
48 Наведіть способи визначення центра тяжіння тіла.
49 Як при визначенні центра тяжіння використовується поняття негативної маси (площі)?

50 Чому дорівнює сила тертя ковзання? До чого вона прикладена?
51 У яких випадках сила тертя є корисною? У яких – шкідливою?
52 Чим відрізняються реакції ідеального і реального в'язей?
53 Що таке коефіцієнт тертя і від чого він залежить?
54 Що таке коефіцієнт кочення і від чого він залежить?
55 Що таке кут тертя? Як його можна визначити на практиці?
56 Що таке конус тертя? Як його можна визначити на практиці?
57 Чому дорівнює момент тертя кочення? У який бік він направлений?
58 Для чого в шарикопідшипниках поверхні кульок і доріжки гартують?

Розділ «**КІНЕМАТИКА»**

I Загальні поняття

1 Що вивчає розділ механіки «Кінематика»?
2 Що таке система відліку?
3 Які види систем відліку ви знаєте?
4 Які види систем координат ви знаєте?
5 Що називають траєкторією точки?
6 Що необхідно знати для завдання руху точки природним способом?
7 Що необхідно знати для завдання руху точки координатним способом?
8 Що необхідно знати для завдання руху точки векторним способом?
9 Які види завдання руху точки ви знаєте?
10 Які рівняння називають параметричними? Чому?
11 Що називають швидкістю точки?
12 Що називають прискоренням точки?
13 Зазначте основні види рухів твердого тіла?
14 Який рух називають поступальним?
15 Який рух називають обертальним?
16 Який рух називають плоско-паралельним?
17 Що називають миттєвим центром швидкостей?
18 Який рух називають миттєво-поступальним?

19 Чому дорівнює середня швидкість точки?

20 Як визначають швидкість точки при координатному способі завдання руху?

21 Як направлена швидкість точки?

22 Як визначають швидкість точки при природному способі завдання руху?

23 Як визначають прискорення точки при координатному способі завдання руху?

24 Як визначають прискорення точки при природному способі завдання руху?

25 Назвіть, опишіть і зобразіть природні осі координат.

26 Назвіть, опишіть і зобразіть площини, утворені природними осями координат.

27 Чому дорівнює дотичне прискорення точки?

28 Чому дорівнює нормальне прискорення точки?

29 Що характеризує дотичне прискорення? Наведіть приклади.

30 Що характеризує нормальне прискорення? Наведіть приклади.

31 Який рух здійснює точка, якщо a_t **f** 0; a_n **f** 0?

32 Який рух здійснює точка, якщо a_t **p** 0; $a_n = 0$?

33 Який рух здійснює точка, якщо a_t **p** 0; $a_n = 0$?

34 Який рух здійснює точка, якщо a_t **f** 0; a_n **p** 0?

35 Як визначають повне прискорення точки при природному способі завдання руху?

III Поступальний та обертальний рухи

36 Скільки і яких рівнянь необхідно знати для завдання поступального рухи твердого тіла?

37 Скільки і яких рівнянь необхідно знати для завдання обертального рухи твердого тіла?

38 Чому дорівнює кутова швидкість обертального руху твердого тіла?

39 Яке правило знаків кутової швидкості обертального руху твердого тіла?

40 Чому дорівнює кутове прискорення обертального руху твердого тіла?

41 Що визначає знак кутового прискорення обертального руху твердого тіла?

42 Як визначають швидкість точки тіла, що обертається?

43 Як визначають швидкість точки тіла, що рухається поступально?

44 Як визначають і як направлено дотичне прискорення точки тіла, що обертається?

45 Як визначають і як направлено нормальне прискорення точки тіла, що обертається?

46 Як визначають і як направлено повне прискорення точки тіла, що обертається?

IV Плоско-паралельний рух

47 Скільки і яких рівнянь необхідно знати для завдання плоско-паралельного руху твердого тіла?

48 На які види рухів можна розкласти плоский рух твердого тіла?

49 Що таке полюс плоскої фігури, яку точку можна прийняти за полюс?

50 Чи залежить обертальна частина плоского руху від вибору полюса? Обґрунтуйте.

51 Як визначають швидкості точок плоскої фігури?

52 Чому дорівнює обертальна складова швидкості точки плоскою фігури?

53 Сформулюйте теорему про проекцію швидкостей точок плоскої фігури

54 Чому дорівнює відстань від даної точки до МЦШ?

55 Назвіть способи визначення МЦШ?

56 Чому дорівнює кутова швидкість плоскої фігури при миттєво поступальному русі? Обґрунтуйте.

57 Де розташований МЦШ колеса, що котиться нерівною поверхнею?

58 Як визначити кутову швидкість плоскої фігури?

59 Чому пропорційні швидкості точок плоскої фігури?

60 Як визначають прискорення точок плоскої фігури?

61 Чому дорівнює і як направлена дотична складова прискорення точки плоскої фігури?

62 Чому дорівнює і як направлена нормальна складова прискорення точки плоскої фігури?

V Складний рух точки

63 Який рух точки називають відносним?
64 Який рух точки називають абсолютним?
65 Сформулюйте теорему про суму швидкостей точки.
66 Чому дорівнює абсолютне прискорення точки?
67 Сформулюйте теорему про суму прискорень (теорему Коріоліса).
68 Що характеризує прискорення Коріоліса?
69 Сформулюйте правило Жуковського.
70 Як визначити напрям прискорення Коріоліса за допомогою правила Жуковського?
71 У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
72 Чому дорівнює абсолютна швидкість точки?
73 Чому дорівнює модуль прискорення Коріоліса?
74 Який рух точки називають переносним?
75 Чому дорівнює вектор прискорення Коріоліса?

Розділ «**ДИНАМІКА»**

I Основні положення і відносний рух

1 Сформулюйте першу аксіому механіки (закон інерції).
2 Сформулюйте другу аксіому механіки (основний закон динаміки).
3 Сформулюйте третю аксіому механіки (закон сил дії і протидії).
4 Запишіть диференціальне рівняння руху точки в декартовій системі координат.
5 Запишіть диференціальне рівняння руху точки в натуральній рухомій системі координат.
6 Сформулюйте пряму (першу) основну задачу динаміки точки.
7 Сформулюйте протилежну основну задачу динаміки точки.
8 Що таке «початкові умови» і на що вони впливають?
9 Запишіть і сформулюйте рівняння відносного руху точки.
10 Запишіть і сформулюйте рівняння відносного руху точки за інерцією.
11 Запишіть і сформулюйте рівняння відносної рівноваги точки.
12 Чому дорівнює і як направлена переносна сила інерції?
13 Чому дорівнює і як направлена коріолісова сила інерції?
14 Як направлена сила Коріоліса в північній півкулі і на що вона впливає?

15 За якими формулами визначають координати центра мас?
16 Що є мірою інертності тіла при поступальному русі? Наведіть приклад.
17 Що є мірою інертності тіла при обертальному русі? Наведіть приклад.
18 Що називають осьовим моментом інерції тіла і чому він дорівнює?
19 Що називають полярним моментом інерції тіла і чому він дорівнює?
20 Що називають радіусом інерції тіла і що він характеризує?
21 Як визначають момент інерції тіла складної форми?
22 Чи можна зміряти радіус інерції тіла? Чому?
23 Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
24 Щодо якої осі тіло має найменший момент інерції? Чому?
25 Чому дорівнює момент інерції стрижня щодо осі, яка проходить через один з його кінців?
26 Чому дорівнює момент інерції стрижня щодо осі, яка проходить через його центр мас?
27 Чому дорівнює момент інерції пластини щодо осі, яка проходить через її центр мас?
28 Чому дорівнює момент інерції круглого диска щодо осі, яка проходить через його центр мас?
29 Чому дорівнює момент інерції кільця щодо осі, яка проходить через його центр мас?
30 Чому дорівнює момент інерції суцільного тіла складної форми щодо осі, яка проходить через його центр мас?

III Загальні теореми динаміки

31 Які сили називають внутрішніми? Які – зовнішніми?
32 Яка система називається механічною? Наведіть приклади
33 Чому дорівнює головний вектор внутрішніх сил? Чому?
34 Чому дорівнює головний момент внутрішніх сил? Чому?
35 Що називають кількістю руху матеріальної точки?
36 Що називають кількістю руху матеріальної системи?
37 Чому дорівнює кількість руху матеріальної системи?
38 Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.

39 Сформулюйте теорему про зміну кількості руху системи.

40 Що називають кінетичним моментом матеріальної точки щодо центра?

41 Що називають кінетичним моментом системи щодо центра?

42 Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла при його обертанні?

43 Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної точки.

44 Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту системи.

45 Сформулюйте закон збереження кінетичних моментів.

IV Теорема про зміну кінетичній енергії

46 Чому дорівнює елементарна робота сили?

47 Чому дорівнює повна робота сили?

48 Чому дорівнює повна робота сили, яка постійна за величиною?

49 Чому дорівнює робота сили тяжіння?

50 Чим відрізняється робота сили тяжіння від біологічної роботи?

51 Чому дорівнює робота лінійної сили пружності?

52 Як визначають знак роботи сили? Наведіть приклади.

53 Чому дорівнює робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається?

54 Чому дорівнює кінетична енергія матеріальної точки? Запишіть символами і словами.

55 Чому дорівнює кінетична енергія тіла при поступальному русі? Запишіть символами і словами.

56 Чому дорівнює кінетична енергія тіла при обертальному русі? Запишіть символами і словами.

57 Чому дорівнює кінетична енергія тіла при плоскому русі? Запишіть символами і словами.

58 Сформулюйте теорему про зміну кінетичній енергії матеріальної точки. Запишіть символами і словами.

59 Сформулюйте теорему про зміну кінетичній енергії механічної системи. Запишіть символами і словами.

60 Сформулюйте теорему про зміну кінетичній енергії абсолютно твердого тіла. Запишіть символами і словами.

61 Чому дорівнює і як направлена сила інерції точки?
62 Сформулюйте принцип Даламбера для матеріальної точки.
63 Сформулюйте принцип Даламбера для механічної системи.
64 До чого приводяться сили інерції тіла при його поступальному русі?
65 До чого приводяться сили інерції тіла при його обертальному русі?
66 До чого приводяться сили інерції тіла при його плоскому русі?
67 Дайте визначення в'язям і вкажіть їх класифікацію.
68 Які в'язі називають стаціонарними (нестаціонарними)?
69 Які в'язі називають геометричними (кінематичними)?
70 Які в'язі називають голономними (неголономними)?
71 Які в'язі називають стримуючими (нестримуючими)?
72 Які переміщення називають можливими? Чим вони відрізняються від реальних переміщень?
73 Чому дорівнює елементарна робота сили на можливому переміщенні?
74 Які в'язі називають ідеальними?
75 Сформулюйте і запишіть загальне рівняння динаміки.

Розділ «**ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**

I Основні поняття опору матеріалів

1 Що вивчає наука «Опір матеріалів»?
2 Що називається міцністю, жорсткістю і стійкістю?
3 Що таке розрахункова схема?
4 Що таке стрижень і його вісь? Пластинка? Оболонка?
5 Що є поняттям «суцільне середовище» і її властивостями?
6 Які деформації називаються пружними? Пластичними?
7 Які матеріали називаються анізотропними?
8 У чому полягає метод перерізів?
9 Як направлена, як позначається і який вид деформації викликає:
а) подовжня сила; б) поперечна сила; в) згинальний момент;
г) крутний момент?
10 Чому дорівнює і як визначається в перетині: а) подовжня сила;
б) поперечна сила; в) згинальний момент; г) крутний момент?

II Розтягання-стискання

11 Чому дорівнює подовжня сила в перерізі стрижня?
12 Що називається розтяганням (стисканням)?
13 Як визначається знак подовжньої сили в перерізі?
14 Що таке абсолютне подовження, відносне?
15 Який вигляд має закон Гука: а) для абсолютної деформації;
б) для відносної деформації?
16 Що таке модуль пружності першого роду і чому він дорівнює для сталі?
17 Як зв'язані між собою подовжня і поперечна деформації стрижня?
18 Що характеризує коефіцієнт Пуассона? Чому він дорівнює для сталі?
19 Як розподіляється нормальне напруження за перерізом стрижня при розтяганні-стисканні та як воно визначається?
20 Що таке допустиме напруження і як воно вибирається (визначається)?

III. Згинання. Побудова епюр. Розрахунки на міцність

21 Що називається згинанням? Які види згинань бувають?
Яке згинання називають чистим?
22 Що називається балкою? Консоллю?
23 Які внутрішні зусилля виникають в балці при згинанні?
24 Чому дорівнює поперечна сила в перерізі? Правило знаків.
25 Чому дорівнює згинальний момент в поперечному перерізі?
Правило знаків.
26 Що таке характерні перерізи? Як вони вибираються?
27 Які диференціальні залежності між **q, Q** і **M** при згинанні?
Як вони використовуються при побудові епюр?
28 Які особливості побудови епюр **Q** і **M** на ділянках, де є рівномірно розподілене навантаження **q**?
29 Які особливості побудови епюр **Q** і **M** в точках прикладення:
а) зосереджених сил; б) зосереджених моментів?
30 За яких умов на епюрі **M** виникає екстремум? Як він визначається?
31 У яких випадках епюра згинальних моментів **M**: а) убуває; б) зростає?
32 Що називається нейтральним шаром? нейтральною лінією?
33 Як визначається нормальне напруження при згинанні?
34 Який вигляд мають епюри нормального напруження?

35 У яких точках перерізу нормальне напруження дорівнює нулю? Максимальне? Чому?

36 Як визначається дотичне напруження при згинанні (формула Журавського)?

37 Який вигляд мають епюри дотичного напруження при згинанні? Наведіть приклади.

38 У яких точках дотичне напруження дорівнює нулю? Максимальне? Чому?

39 Покажіть епюру зміни дотичного напруження за висотою поперечного перерізу двотаврової балки

40 Які перерізи є раціональними при згинанні? Чому?

41 Запишіть умову міцності при згинанні для балки довільного поперечного перерізу

42 Запишіть умову міцності при згинанні для балки симетричного довільного перерізу

43 Який переріз вважається небезпечним?

IV Напружений стан в точці і геометричні характеристики плоских перерізів

44 Сформулюйте умови міцності за I теорією міцності. Її застосування і недоліки.

45 Сформулюйте умови міцності за II теорією міцності. Її застосування і недоліки.

46 Сформулюйте умови міцності за III теорією міцності. Її застосування і недоліки.

47 Сформулюйте умови міцності за IV теорією міцності. Її застосування і недоліки.

48 Сформулюйте і запишіть формули для знаходження: а) статичних моментів поперечного перерізу; б) осьових моментів інерції поперечного перерізу; в) полярного і відцентрового моментів інерції.

49 Чому дорівнюють осьові моменти інерції: а) прямокутника; б) кола; в) кільця?

50 Укажіть залежності між моментами інерції щодо осей, паралельних центральним. Як визначаються моменти інерції для складного поперечного перерізу?

51 Які осі називаються головними? Центральними?

52 Для яких осей відцентрові моменти інерції завжди дорівнюють нулю? Чому?

53 Як визначається положення центра тяжіння складного поперечного перерізу?

54 Чому дорівнює сума осьових моментів інерції ($I_x + I_y$) відносно двох будь-яких взаємно-перпендикулярних осей? Доведіть це.

V Кручення і складне згинання

55 Що називається крученням?

56 Який зв'язок між потужністю і крутним моментом?

57 Який вигляд має умова міцності при крученні?

58 Що таке жорсткість при крученні? Чому вона дорівнює?

59 Яке напруження виникає в поперечному перерізі стрижня при крученні?

60 Як визначити напруження при крученні суцільного вала в довільній точці?

61 Що таке полярний момент інерції, як він пов'язаний з осьовим моментом інерції?

62 Що таке полярний момент опору?

63 Як визначають напруження при крученні вала?

64 Як визначається кут закручування вала?

66 Що називається складним опором? Які види складного опору ви знаєте?

67 Що називається складним і косим згинанням?

68 Що називається складним згинанням з розтягуванням?

69 Що називається позацентровим розтягуванням?

70 Як визначається напруження при складному згинанні з розтяганням?

71 Який вид має умова міцності круглого вала при згинанні з крученням?

72 Як визначається еквівалентне напруження за III теорією міцності?

73 Як визначається еквівалентне напруження за IV теорією міцності?

74 Як визначаються еквівалентні розрахункові моменти за III теорією міцності?

75 Як визначаються еквівалентні розрахункові моменти за IV теорією міцності?

Навчальне видання

КУТОВИЙ Леонід Володимирович
ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович

ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

для студентів денної форми навчання
спеціальності
«Інформаційні технології проектування»

Редактор І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

180/2007. Підп. до друку 29.10.08. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 10,35.
Тираж 125 прим. Зам. № 250.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003