

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ**

О.Г. Водолазська
Ю.О.Єрфорт
Л.В. Кутовий
В.М. Іскрицький
О.М. Стадник
Ю.С. Холодняк

ЗБІРНИК

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

(частина 1 “Статика і кінематика”)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів очної та заочної форм навчання
для механічних спеціальностей

КРАМАТОРСЬК 2004

ББК 22.21
УДК 531.
З-41

Рецензенти:

Л.І.СЕРДЮК, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою теоретичної механіки (Полтавський національний технічний університет);

О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою теоретичної механіки (Національний Технічний університет “ХП”);

А.Ф.ТАРАСОВ, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою інформаційних технологій (Донбаська державна машинобудівна академія).

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № _____ від “___” _____ 200 р.

З-41 Збірник розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки. Статика і кінематика / О.Г.Водолазська, Ю.О.Єрфорт, Л. В. Кутовий та ін. - Краматорськ: ДДМА, 2004. –Ч.1. – 128 с.

ISBN

Збірник вміщує розрахунково-графічні завдання з першого та другого розділів теоретичної механіки: “Статика та кінематика”, а саме: короткі відомості з теорії, умови, варіанти та схеми, а також приклад виконання кожного завдання .

ISBN

ББК 22.21

© О.Г.Водолазська, Ю.О. Єрфорт,
Л.В.Кутовий, В.М. Іскрицький,
О.М.Стадник, Ю.С. Холодняк, 2004
© ДДМА, 2004

ЗМІСТ

Вступ	4
1 С Т А Т И К А	5
1.1 Визначення зусиль у стрижнях просторової конструкції	5
1.2 Визначення реакцій опор і зусиль в стрижнях плоскої ферми способом вирізування вузлів і способом Ріттера	16
1.3 Визначення реакцій опор твердого тіла (плоска система сил)	36
1.4 Визначення реакцій опор складеної конструкції	47
1.5 Визначення реакцій опор твердого тіла	60
2 К І Н Е М А Т И К А	70
2.1 Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху	70
2.2 Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі	78
2.3 Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при його плоско-паралельному русі	96
2.4 Визначення абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки при складному русі	111
Рекомендована література	127

ВСТУП

Теоретична механіка містить багато наукових узагальнень, які допомагають майбутнім інженерам різних спеціальностей правильно розуміти ті явища, які вони спостерігають, і робити науково обґрунтовані висновки. Крім того, ця дисципліна є науковою базою багатьох галузей сучасної техніки. Вона є основою таких загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, гідравліка, деталі машин, динаміка машин та інші, що вивчаються у вузах. Знання теоретичної механіки потрібні студентам для успішного вивчення профільюючих предметів, а також для творчої інженерної діяльності на промисловому виробництві після закінчення вузу.

Запропоновані методичні вказівки складено відповідно до уніфікованого навчального плану програми та робочого плану з цього курсу. Курсові розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки спрямовані на розвиток у студентів уміння виконувати типові задачі. Крім того, ці роботи сприяють кращому засвоєнню теоретичного матеріалу й придбанню навичок самостійної практичної роботи.

Кожний із студентів отримує варіант, згідно з яким він протягом семестру виконує усі задачі завдань.

Номер варіанта складається із чотирьох цифр.

Перша цифра – це номер стовпчика (або рядка) із першої таблиці, друга цифра вибирається із другої таблиці, а третя і четверта цифри означають номер схеми (у загальному випадку номер схеми співпадає із порядковим номером студента у журналі академічної групи). Завдання видаються після вивчення відповідних тем і повинні бути виконаними у термін, визначений робочим планом, а також оформлені відповідно до вимог і здані на перевірку. Після перевірки (а при необхідності – після доопрацювання) студент захищає завдання у визначений термін.

1 С Т А Т И К А

1.1 ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ ПРОСТОРОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ

1.1.1 Короткі відомості з теорії

Завдання базується на теоретичних засадах статички твердого тіла, зокрема на умовах рівноваги просторової системи збіжних сил.

Зазначена система сил характеризується наявністю у всіх сил системи спільної точки перетину їх ліній дії, так званого вузла.

Для рівноваги збіжної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил системи на три взаємо перпендикулярних осі дорівнювали нулю:

$$\sum_{K=1}^N F_{kx}=0; \quad \sum_{K=1}^N F_{ky}=0; \quad \sum_{K=1}^N F_{kz}=0, \quad (1.1)$$

де $K=1,2,3,\dots,N$;

N – кількість сил у вузлі.

З рівнянь рівноваги (1.1) можна знайти не більше трьох невідомих сил. Тому при розрахунках конструкцій, утворених з довільно орієнтованих в просторі двохарнірних стрижнів, розрахунок починають з вузла, в якому з'єднані не більше трьох стрижнів. Вузол умовно вирізають, замінюючи стрижні відповідними силами – реакціями стрижнів. Як правило, вагою стрижнів нехтують. В такому разі реакції спрямовують уздовж лінії, яка з'єднує центри шарнірів на кінцях стрижня, а якщо він прямий – то уздовж його самого. Априорно стрижні вважають розтягненими і їх реакції спрямовують від вузла. Якщо ж в результаті розрахунку виявиться, що якась реакція має знак мінус, то це означає, що відповідний стрижень не розтягнений, а стиснутий.

Розрахувавши за допомогою рівнянь (див.1.1) зусилля в першому вузлі,

переходять до наступного, в якому невідомими в той час залишаються не більше трьох реакцій, і так далі, доки всі реакції не будуть визначені. При цьому слід зауважити, що сусідні вузли діють один на одній з рівними, протилежно спрямованими зусиллями.

1.1.2 Умови завдання

Знайти методом вирізання вузлів зусилля в шести стрижнях шарнірно-стрижневої конструкції (рис. 1.1). Сила \bar{P} у всіх схемах діє в напрямку AB , сила \bar{Q} - в напрямку DE . Необхідні дані взяти з таблиць 1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1

Величини, кН	Значення величин за варіантами									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
Q	6	5	3	4	2	5	6	2	3	4

Таблиця 1.2

Величини, м	Значення величин за варіантами									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	6	5	4	3	2	6	5	4	3	2
b	3	6	5	4	3	2	4	6	5	4
c	5	4	6	5	4	3	2	5	2	6
d	4	3	2	6	5	4	3	2	6	5

Примітка. Розміри a , b , c , d беруться з таблиці 1.2 тільки в тих випадках, коли вони позначені на розрахунковій схемі.

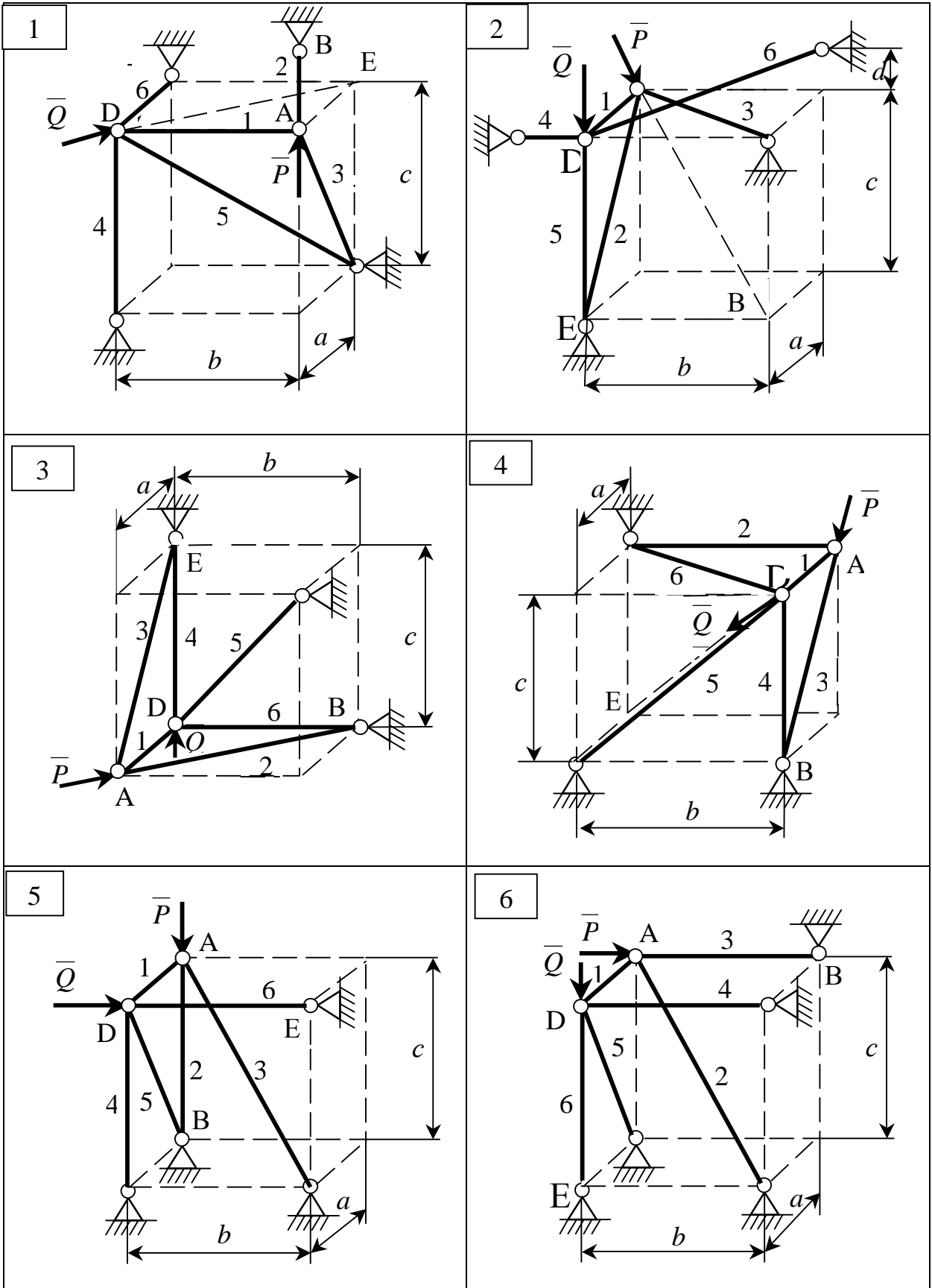


Рисунок 1.1 - Схеми до варіантів завдання

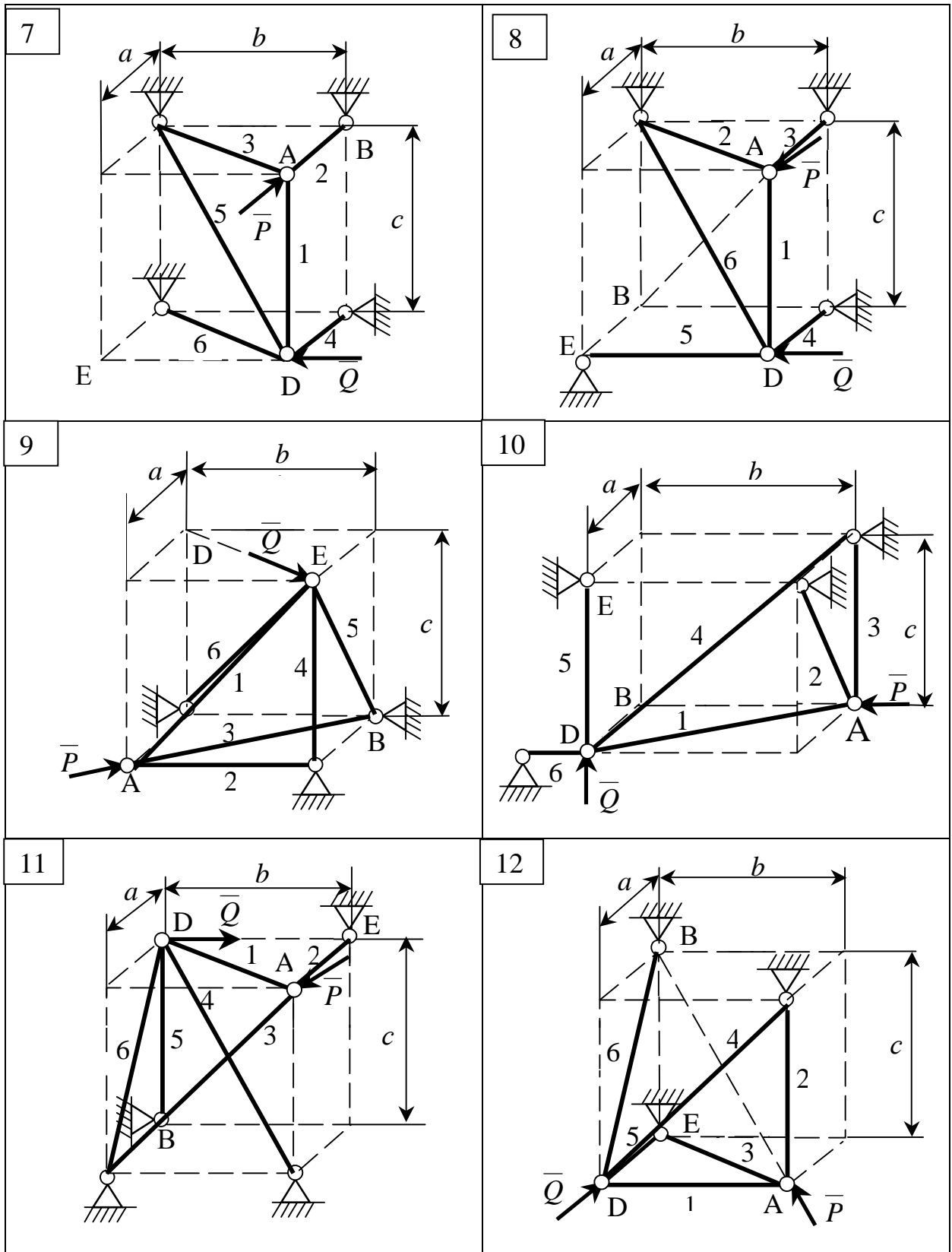


Рисунок 1.1, аркуш 2

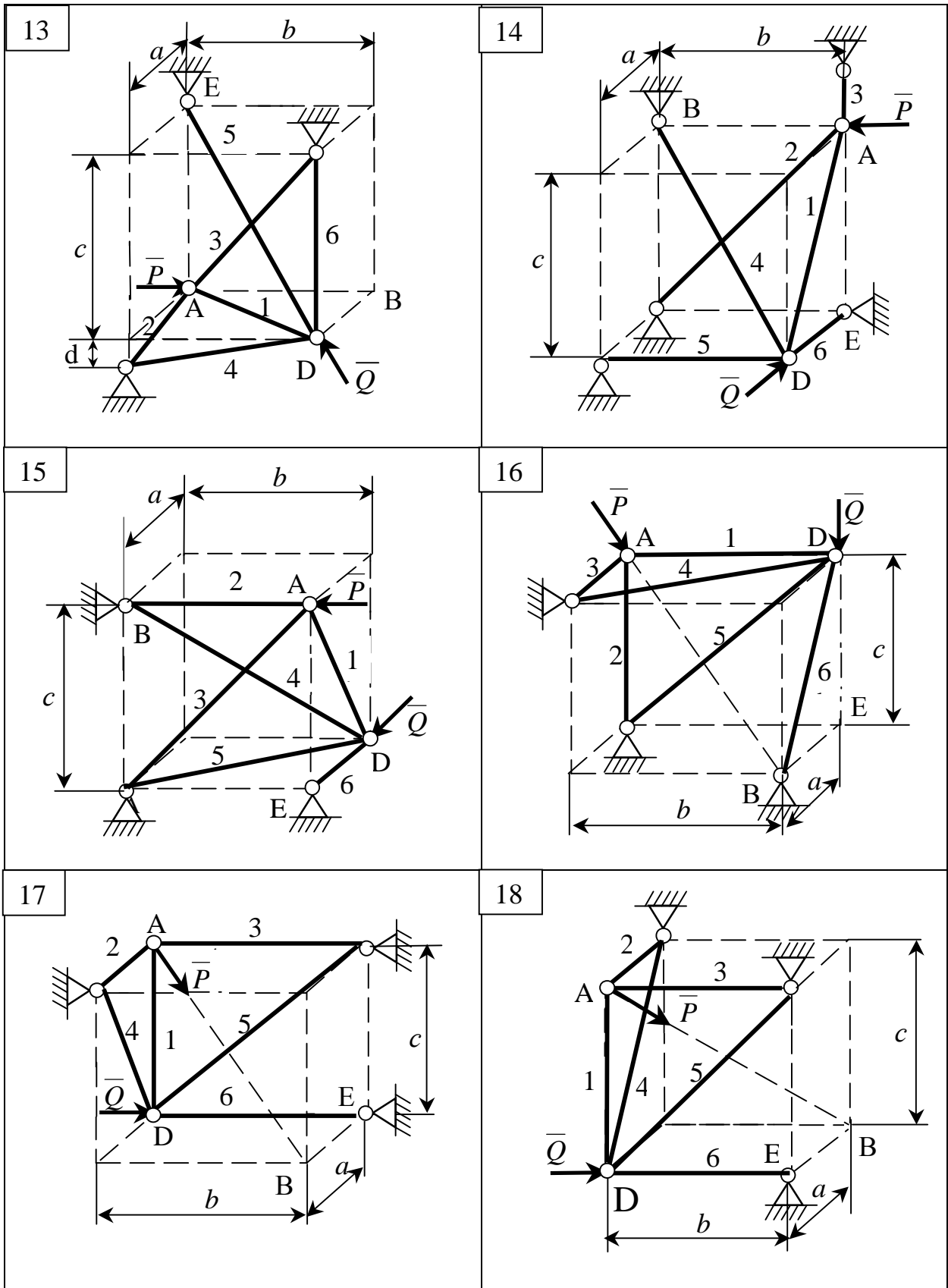


Рисунок 1.1, аркуш 3

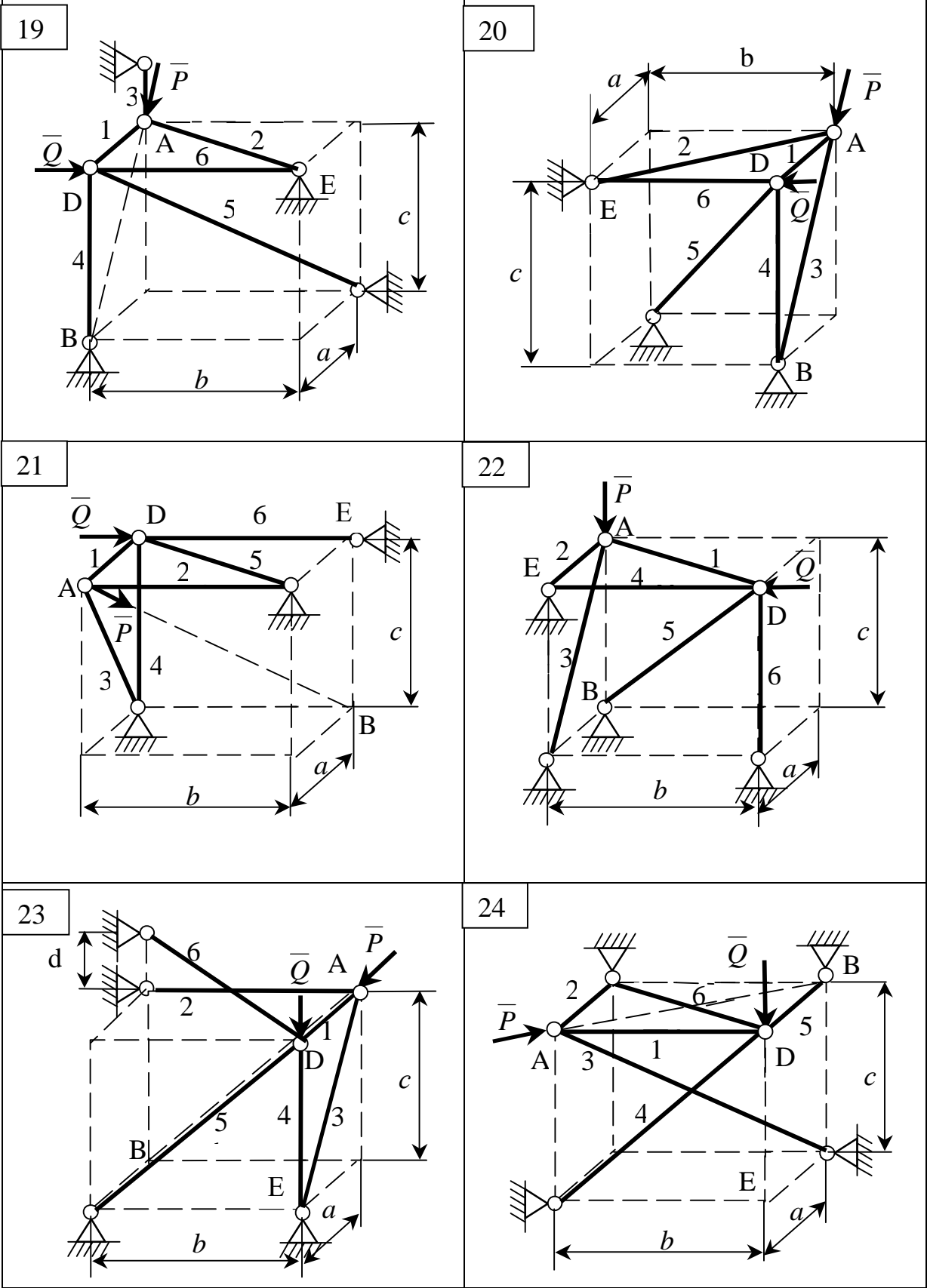


Рисунок 1.1, аркуш 4

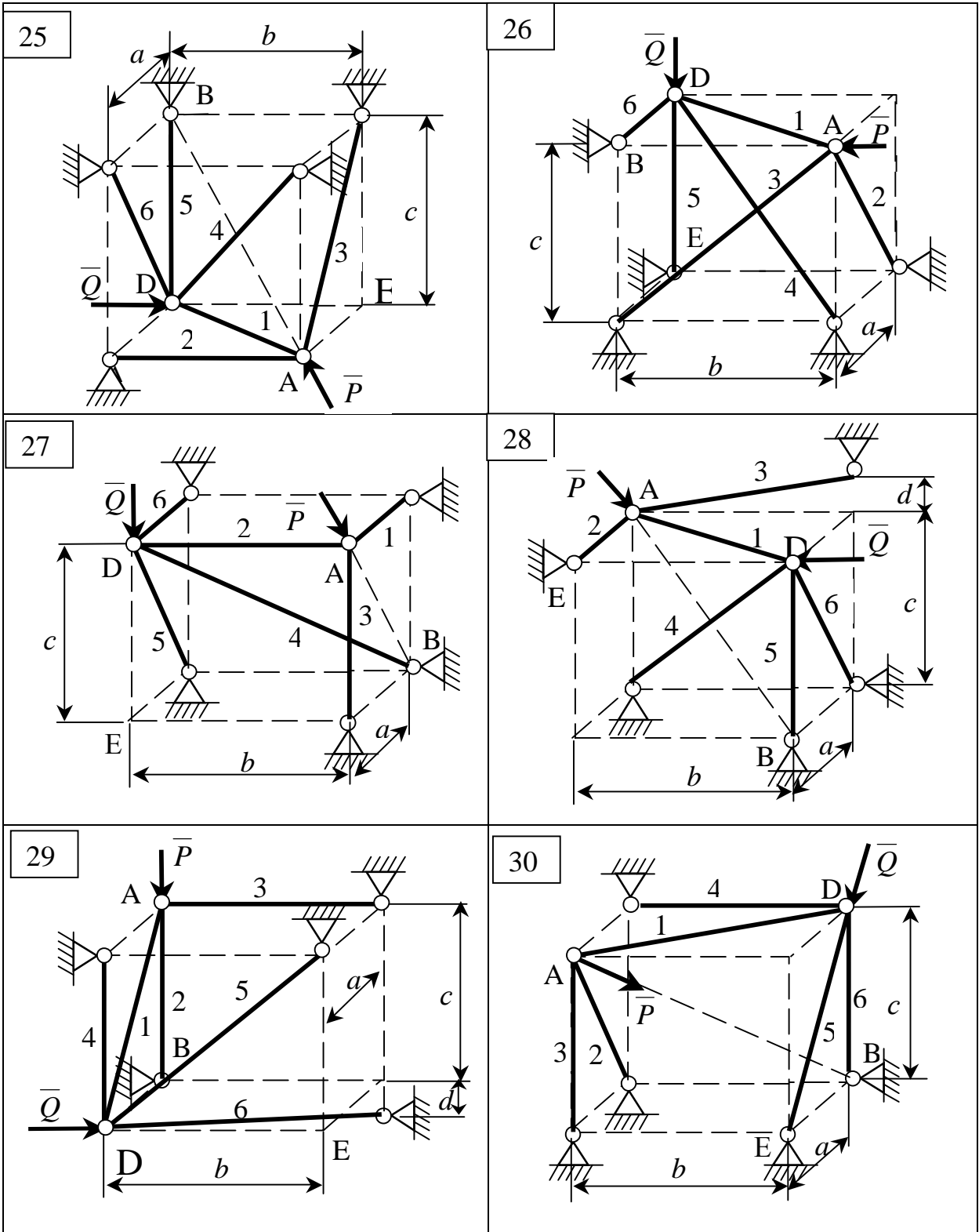


Рисунок 1.1, аркуш 5

1.1.3 Приклад виконання завдання

Дано: $P=4$ кН; $Q=6$ кН; $a=4$ м; $b=5$ м; $c=4$ м; $d=1$ м.

Знайти: зусилля в стрижнях для конструкції, зображеної на рис. 1.2

Рішення

Розглянемо спочатку вузол A (див.рис. 1.2, а), в якому з'єднані три стрижня.

На цей вузол діє сила \bar{P} (рис. 1.2, б). Припустимо, що всі стрижні розтягнені, і спрямуємо реакції $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ від вузла A . Сила та позначені реакції взаємно врівноважені.

Складаємо три рівняння рівноваги сил, що збігаються у вузлі A :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 F_{kx} = -P \cdot \cos y \cdot \sin j - S_1 \cdot \sin b - S_2 - S_3 \cdot \sin j = 0, \quad (1.2) \\ \sum_{k=1}^4 F_{ky} = -P \cdot \cos y \cdot \cos j - S_3 \cdot \cos j = 0, \quad (1.3) \\ \sum_{k=1}^4 F_{kz} = -P \cdot \sin y - S_1 \cdot \cos b = 0. \quad (1.4) \end{array} \right.$$

За заданими розмірами підрахуємо синуси та косинуси кутів φ, ψ, β :

$$\sin j = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$\cos j = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}},$$

$$\sin y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{57}},$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}}.$$

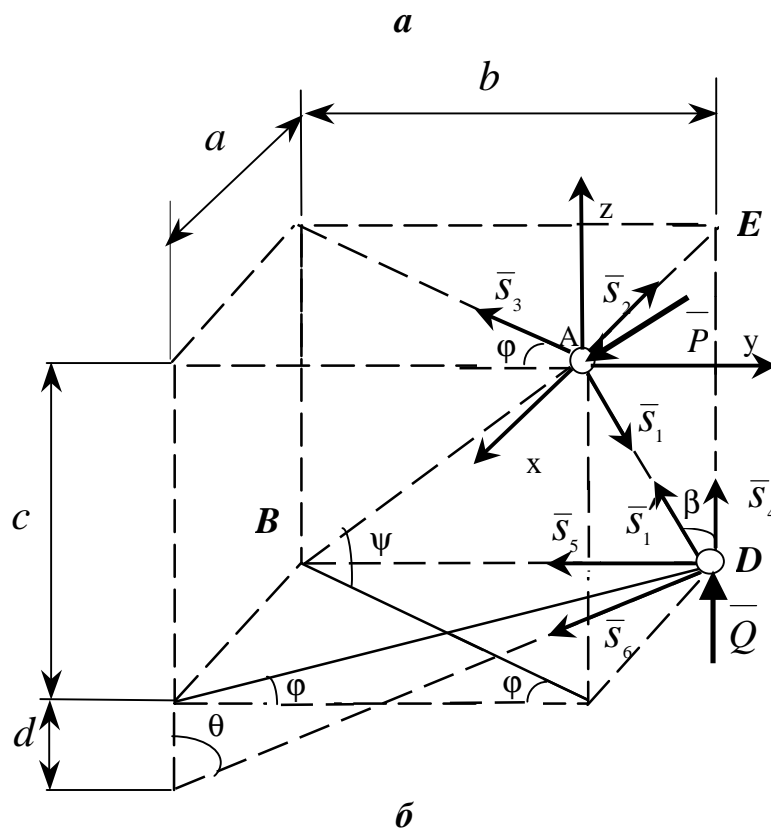
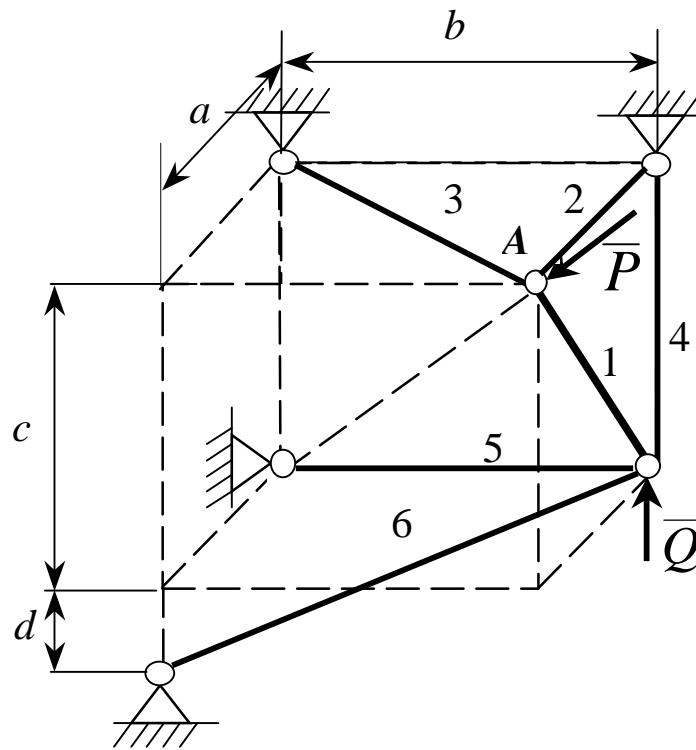


Рисунок 1.2- Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

$$\sin b = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos b = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

З рівняння (1.4):

$$S_1 = -P \cdot \frac{\sin \psi}{\cos \beta} = -4 \cdot \frac{4}{\sqrt{57}} \cdot \sqrt{2} = -3,00 \text{ кН.}$$

З рівняння (1.3):

$$S_3 = -P \cdot \cos \psi = -4 \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}} = -3,39 \text{ кН.}$$

З рівняння (1.2):

$$\begin{aligned} S_2 &= -P \cdot \cos \gamma \cdot \sin j - S_1 \cdot \sin b - S_3 \cdot \sin j = \\ &= -4 \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} - (-3,00) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - (-3,39) \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 2,12 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Перейдемо тепер до розгляду системи врівноважених сил, що збігаються у вузлі D : \bar{S}'_1 ($\bar{S}'_1 = -\bar{S}_1$), \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 , \bar{Q} .

Введемо кут q . Напрямки осей координат збережемо без змін.

Складемо три рівняння рівноваги сил, прикладених до вузла D :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^5 F_{kx} = S'_1 \cdot \sin b + S_6 \cdot \sin q \cdot \sin j = 0, & (1.5) \\ \sum_{k=1}^5 F_{ky} = -S_5 - S_6 \cdot \sin q \cdot \cos j = 0, & (1.6) \\ \sum_{k=1}^5 F_{kz} = Q + S'_1 \cdot \cos b + S_4 - S_6 \cdot \cos q = 0. & (1.7) \end{cases}$$

Підрахуємо синус та косинус кута θ :

$$\sin q = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{42}},$$

$$\cos q = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{42}}.$$

З рівняння (1.5):

$$S_6 = -S'_1 \cdot \frac{\sin b}{\sin q \cdot \sin j} = -(-3,00) \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{42} \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{41} \cdot 4} = 3,44 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.6):

$$S_5 = -S_6 \cdot \sin q \cdot \cos j = -3,44 \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{42}} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = -2,56 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.7):

$$S_4 = S_6 \cdot \cos q - S'_1 \cdot \cos b - Q = 3,44 \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} - (-3,00) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 6 = -3,35 \text{ кН}.$$

Результати підрахунків зведені до таблиці 1.3, де знак плюс відповідає розтягненню, а мінус стисканню.

Таблиця 1.3

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6
Знак зусилля	-	+	-	-	-	+
Зусилля, кН	3,00	2,12	3,39	3,35	2,65	3,44

Відповідь: $S_1 = -3$ кН, $S_2 = 2,12$ кН, $S_3 = -3,39$ кН, $S_4 = -3,35$ кН,
 $S_5 = -2,65$ кН, $S_6 = 3,44$ кН,

1.2 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР І ЗУСИЛЬ В СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ СПОСОБОМ ВИРІЗУВАННЯ ВУЗЛІВ І СПОСОБОМ РІТТЕРА

1.2.1 Короткі відомості з теорії

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами.

Ферми являють собою складові частини будівельних споруд, мостів тощо. За своїм виробничим призначенням ферми поділяють на такі типи: мостові, що застосовуються при будівництві мостів; що підтримують дахи в різних спорудах; кранові, які є деталями підйомних пристроїв, тощо.

Якщо осі стрижнів, які утворюють ферму, лежать в одній площині, то така ферма називається плоскою.

З'єднання стрижнів ферми між собою називається вузлами. Вертикальні стрижні називаються стояками. Стрижні, нахилені під кутами до горизонту, називаються розкосами. Стрижні зовнішнього контуру ферми утворюють відповідно верхній і нижній пояси ферми. Віддаль між опорами мостових ферм називається прогоном ферми.

Сили, які діють на ферму, мають різне походження. Наприклад, на мостову ферму можуть діяти вага транспорту, вага снігового покриття, тиск вітру та інші сили.

Розглянемо ферми, що мають найменшу можливу кількість стрижнів при заданій кількості вузлів. Такі ферми будемо називати простими.

Залежність між N кількістю вузлів та n стрижнів у простих фермах

$$N=2n-3.$$

Основна задача при розрахунку ферми полягає у визначенні внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми внаслідок дії активних зовнішніх навантажень і зовнішніх реакцій опор. Цю задачу розв'язуватимемо, спираючись на деякі спрощення в її постановці:

- 1) вважатимемо, що стрижні у вузлах з'єднані ідеальними шарнірами (без тертя);
- 2) усі стрижні вважатимемо абсолютно твердими и невагомими;
- 3) зовнішні сили, прикладені до ферми, вважатимемо прикладеними тільки у вузлах.

При цих припущеннях на підставі першої аксіоми статки можна вважати, що кожний стрижень ферми розтягнутий або стиснутий.

Метод вирізування вузлів

Перед тим як шукати зусилля у стрижнях ферми, слід знайти зовнішні реакції в'язей, розглядаючи рівновагу всієї ферми в цілому. Попереднє визначення реакцій дає змогу значно спростити розв'язування задачі.

Визначення зусиль у стрижнях методом вирізування вузлів треба почати з розгляду рівноваги вузла, в якому перетинаються два стрижня.

При визначенні зусиль у стрижнях ферми можна безпосередньо знайти стрижні з нульовими зусиллями. Це може трапитися в таких випадках:

а) коли до вузла, що з'єднує два стрижні ферми, не прикладені зовнішні сили;

б) коли до вузла, що з'єднує два стрижні ферми, прикладена зовнішня сила в напрямі одного з цих стрижнів (другий з цих стрижнів є нульовий);

в) коли до вузла, що з'єднує три стрижні ферми, не діють ніякі зовнішні сили, причому два з них знаходяться на одній прямій (рис. 1.3).

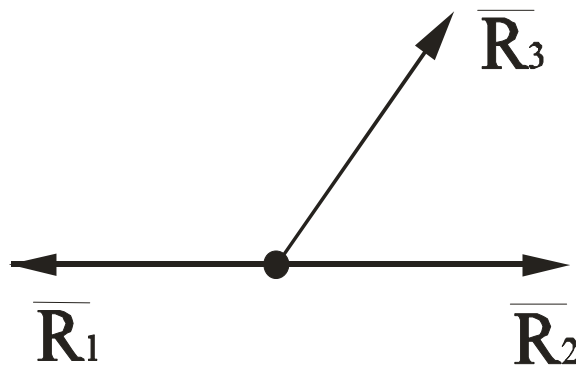


Рисунок 1.3

У цьому випадку $R_3=0$, а реакції стрижнів, що знаходяться на одній прямій, рівні за модулями та протилежні за напрямом.

Задачу визначення зусиль у стрижнях ферми за методом вирізування вузлів можна розв'язати аналітичним та графічним способами.

Метод Ріттера

Щоб знайти зусилля у стрижнях ферми, застосовують метод перерізів. Проведемо переріз так, щоб він, поділяючи ферму на дві частини, проходив не більше як через три стрижні.

Далі розглянемо рівновагу тієї частини ферми, до якої прикладена менша кількість сил. Відкидаючи другу частину ферми, заміняємо її дію реакціями, напрямленими по розрізаних стрижнях від вузлів, вважаючи стрижні розтягнутими. За такої умови знаки шуканих реакцій, знайдених з рівнянь рівноваги, мають фізичний зміст. Додатний знак означатиме, що відповідний стрижень розтягнуто, а від'ємний - що відповідний стрижень стиснуто.

Далі перейдемо до складання рівнянь рівноваги. Головною особливістю методу Ріттера є вимога окремого визначення всіх невідомих з рівнянь рівноваги. Отже, рівняння рівноваги треба складати так, щоб у кожному було лише одне невідоме. Для цього використовують рівняння рівноваги у формі трьох рівнянь моментів відносно трьох точок Ріттера. Точки Ріттера - це точки перетину ліній дій двох стрижнів попарно взятих з трьох стрижнів, що перетинаються. Може трапитися, що два з трьох стрижнів паралельні між собою. У цьому випадку точка Ріттера нескінченно віддаляється. Тоді замість одного рівняння моментів складають рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

В якому місці і в якій послідовності перерізати ферму, не має значення, але треба пам'ятати, що число перерізаних стрижнів з невідомими зусиллями в них не може перевищувати числа рівнянь рівноваги, які можна скласти для частини ферми, що розглядається.

За методом Ріттера кожне зусилля визначається незалежно від інших з одного рівняння. Це особливо відчутно в таких випадках, коли потрібно визначити не всі зусилля, а тільки деякі з них. У цьому перевага і одночасно недолік методу Ріттера, бо відпадає можливість помітити випадкові помилки, які можуть трапитись при обчисленні зусиль. Крім цього, при значній кількості стрижнів, у яких треба знаходити зусилля, метод Ріттера приводить до громіздких розрахунків. Його ефективно можна застосувати тоді, коли кількість зусиль, які треба визначити, порівняно невелика.

Найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягає у поєднанні методів Ріттера і вирізування вузлів.

1.2.2 Умови завдання

До одного з вузлів плоскої ферми прикладена сила P , а до іншого сила Q , під кутом γ до горизонту. Визначити реакції опор ферми і зусилля в п'яти або шести стрижнях методом вирізування вузлів, а в інших - методом перетинів. Вагу стрижнів не враховувати. Результати аналітичного розрахунку перевірити шляхом побудови силових багатокутників.

Схеми ферм наведені на рисунках 1.4, а необхідні для розрахунків дані в таблицях 1.4 та 1.5

Таблиця 1.4

Величини	Значення величин за варіантом									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	0,5	2	4	5	3	0,5	2	4	5	3
$g, ^\circ$	60	30	120	150	60	30	120	150	60	30

Таблиця 1.5

Величини, кН	Значення величин за варіантом									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	20	15	10	5	25	30	40	50	60	80
Q	50	60	40	20	10	15	40	30	20	60

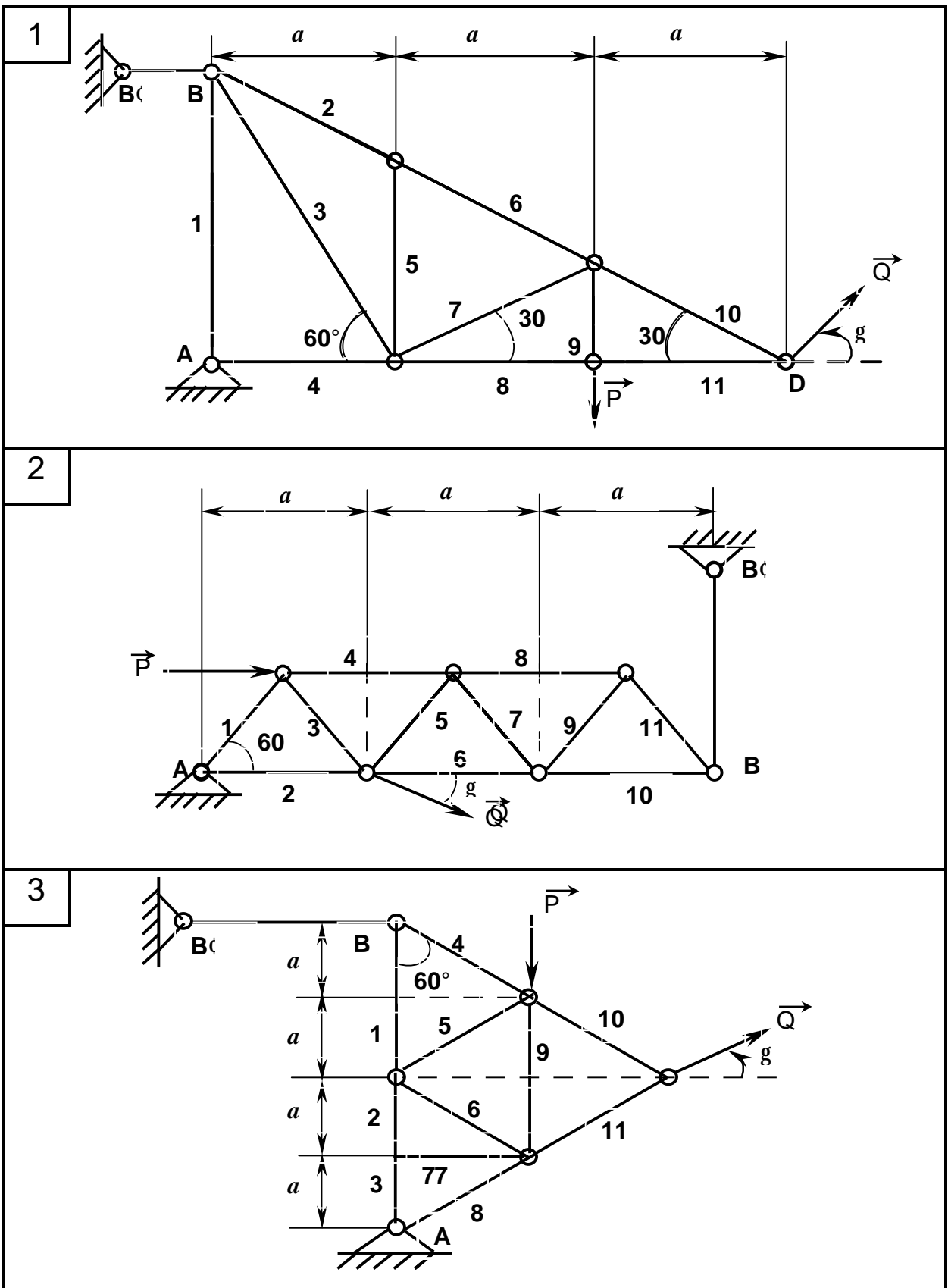


Рисунок 1.4 - Схеми до варіантів завдання

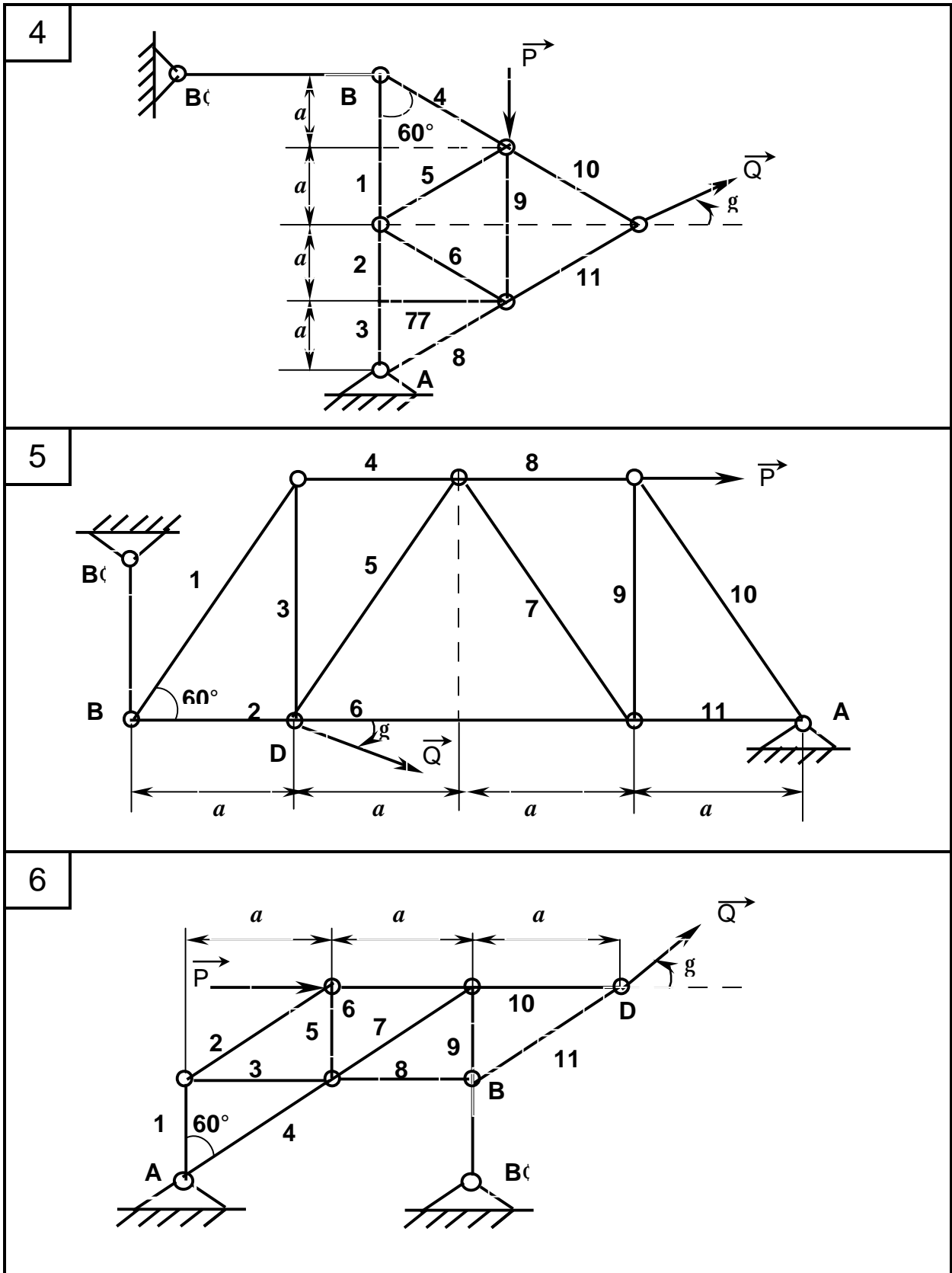


Рисунок 1.4, аркуш 2

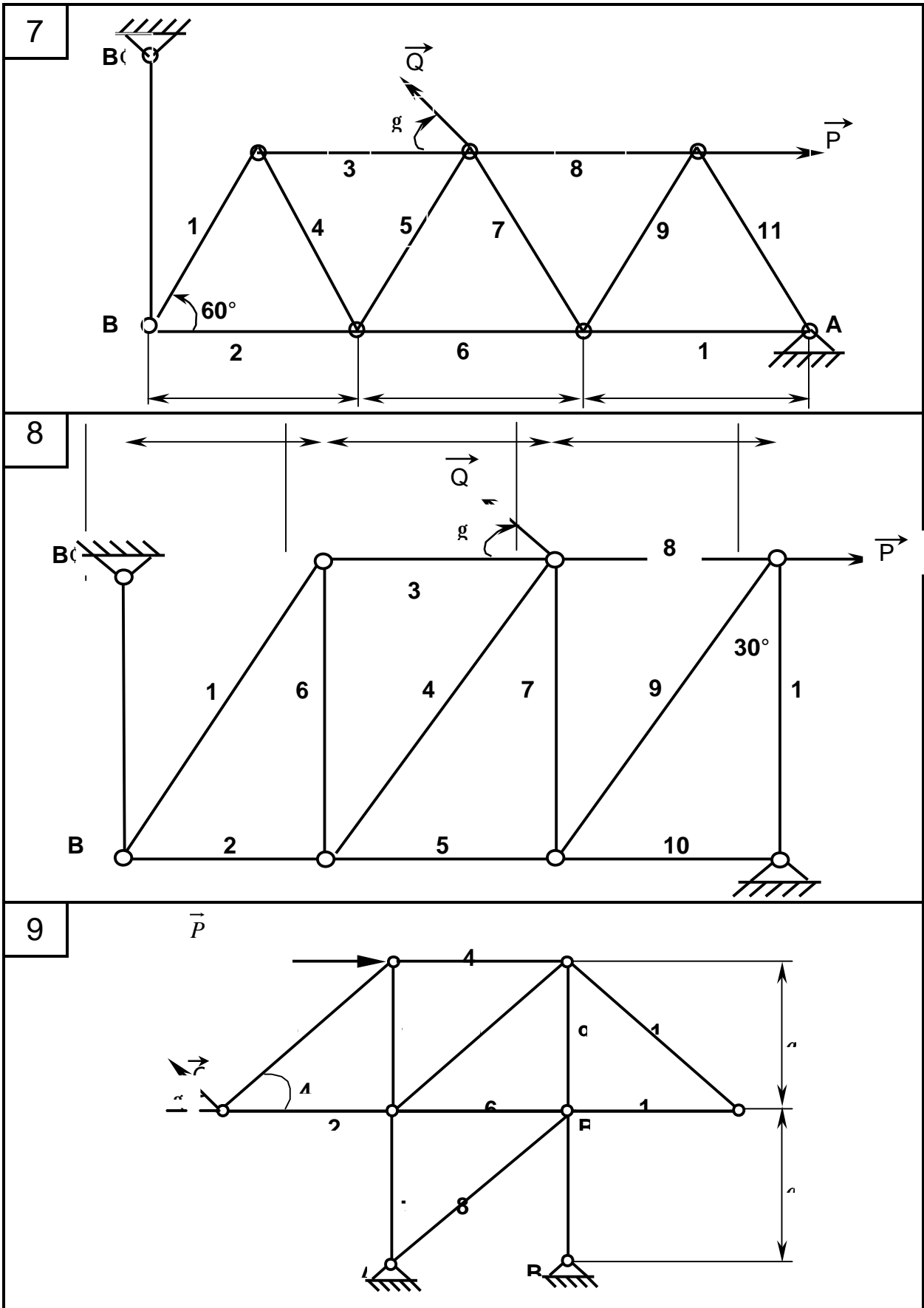
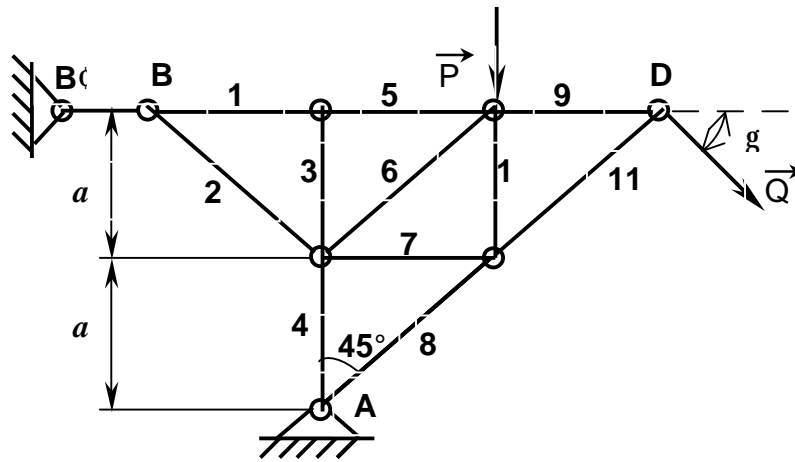
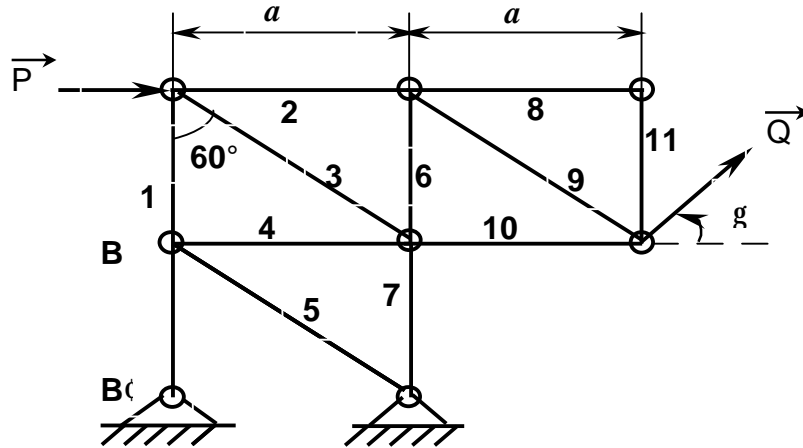


Рисунок 1.4, аркуш 3

10



11



12

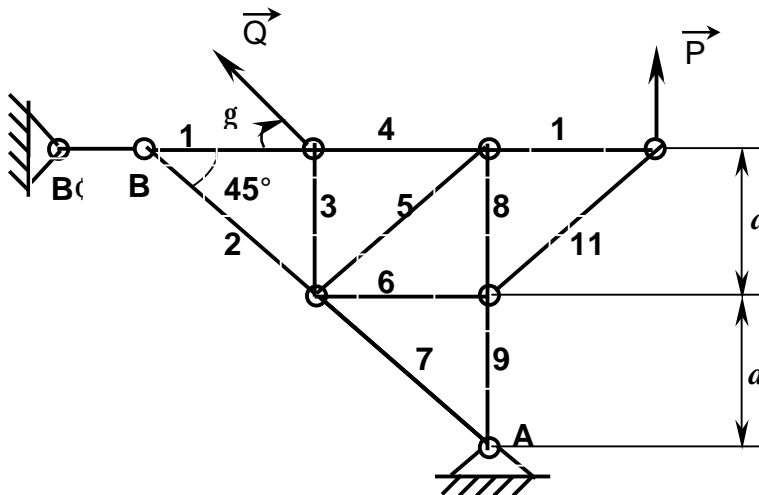
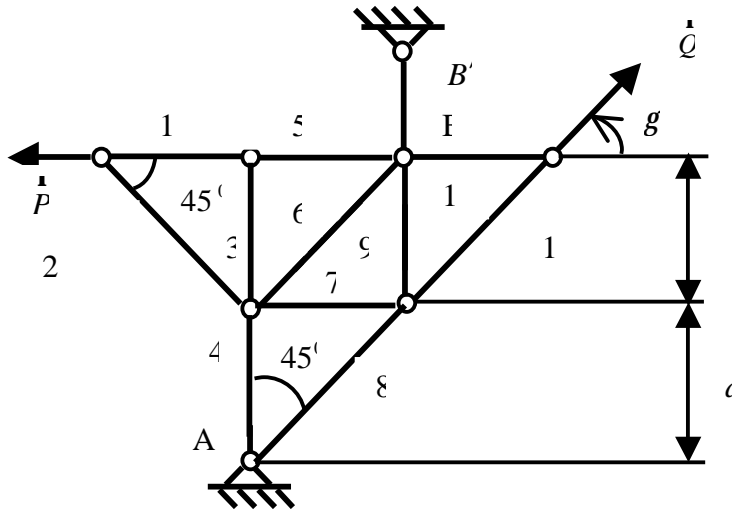
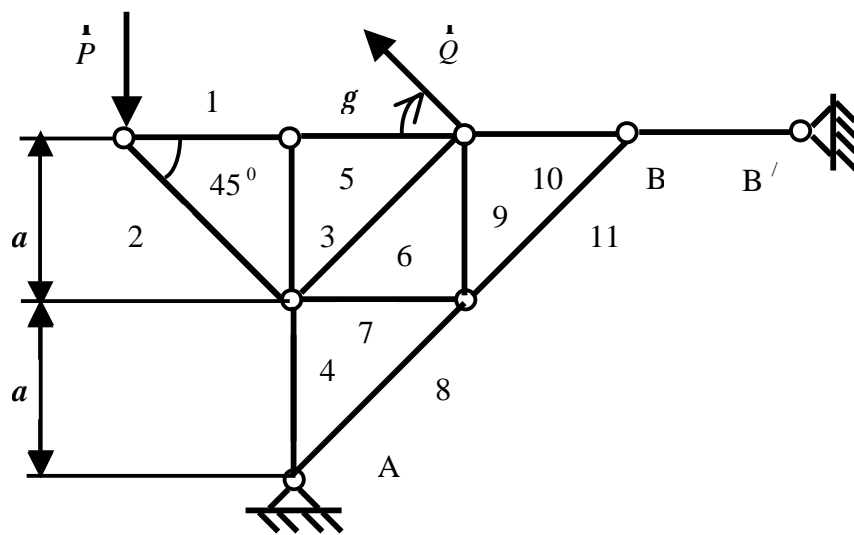


Рисунок 1.4, аркуш 4

13



14



15

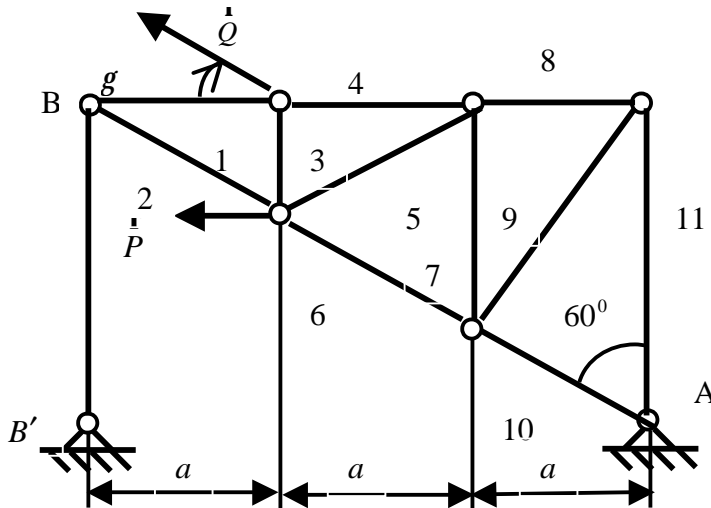
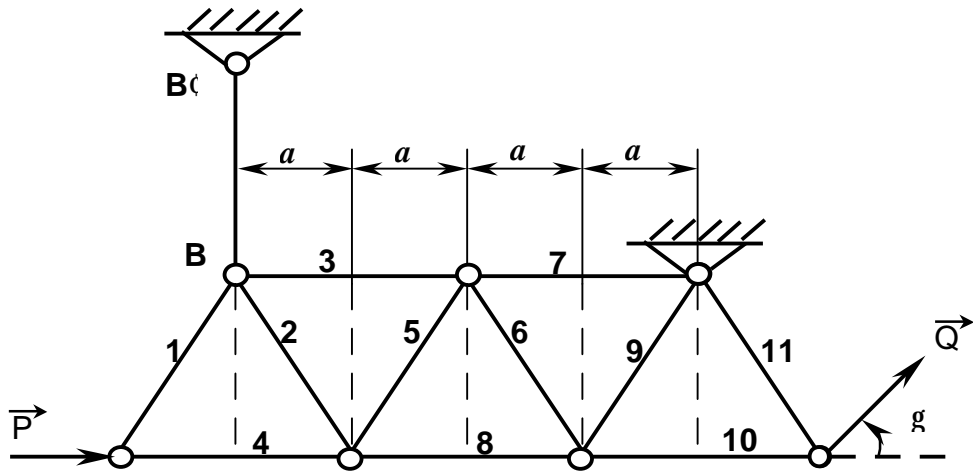
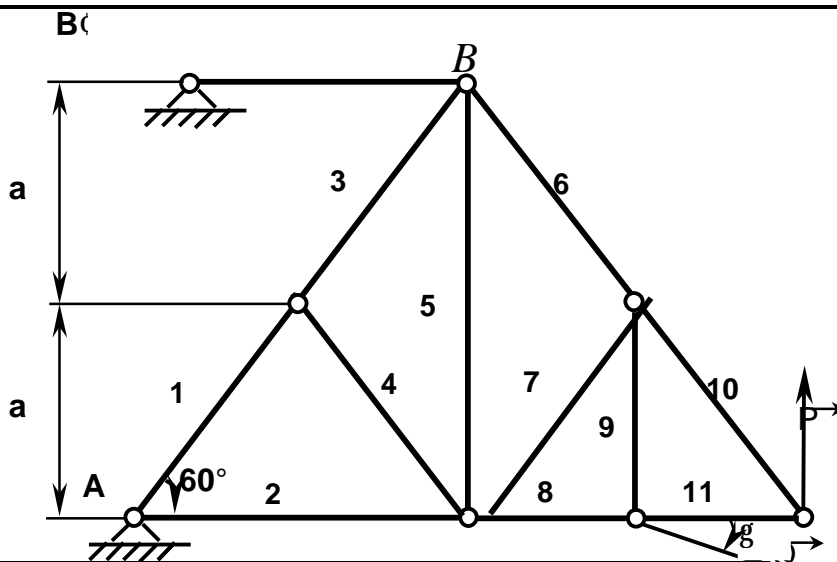


Рисунок 1.4, аркуш 5

16



17



18

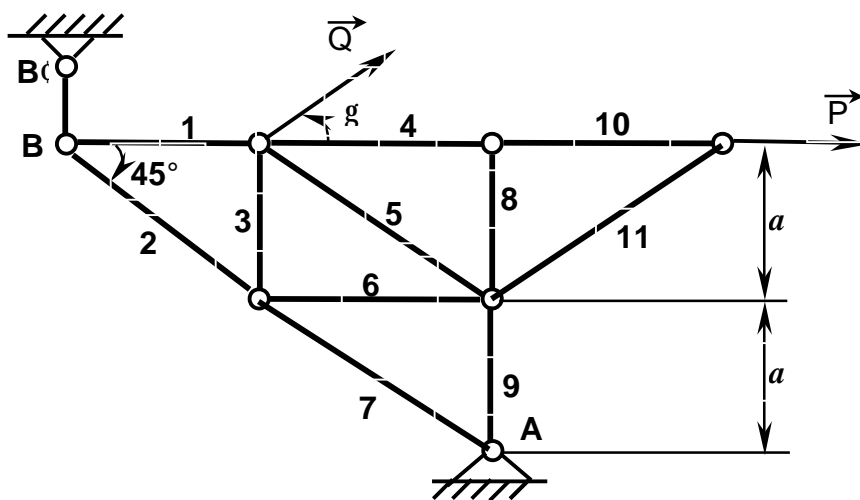


Рисунок 1.4, аркуш 6

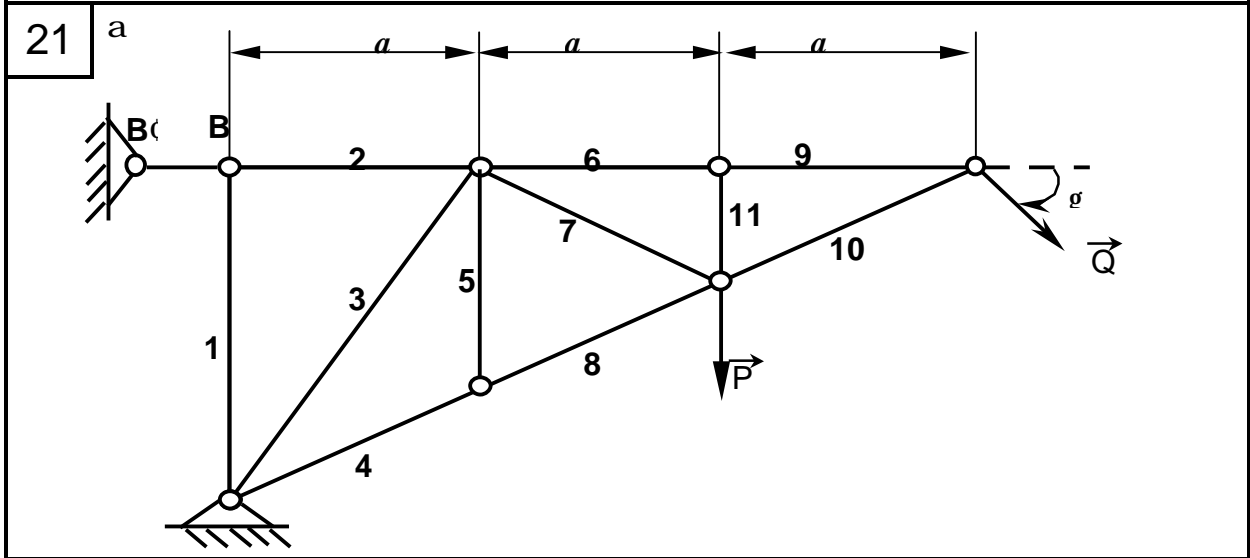
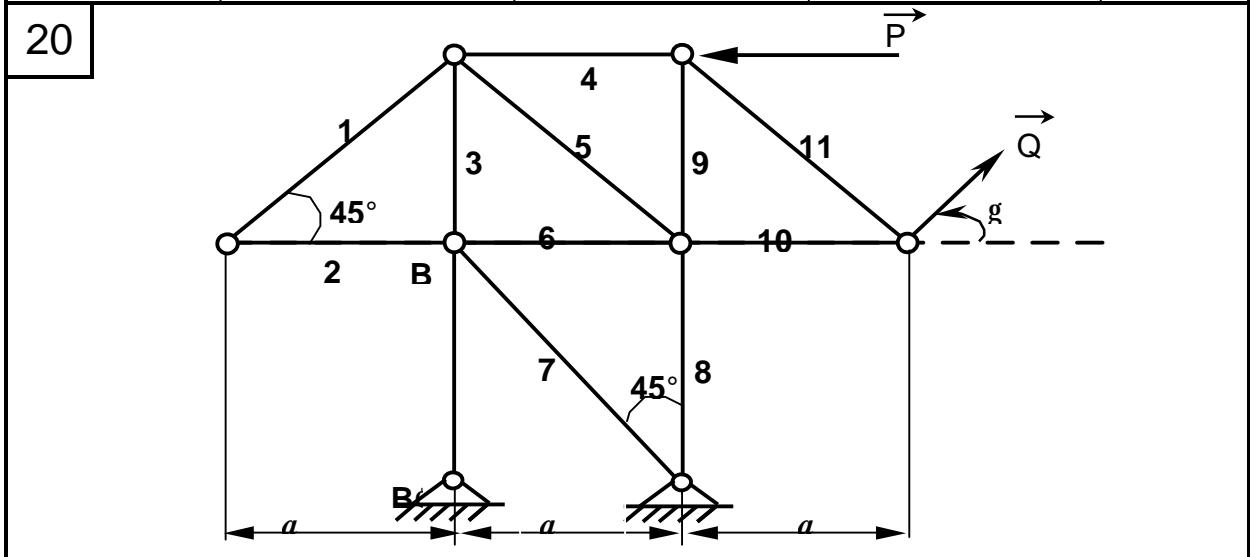
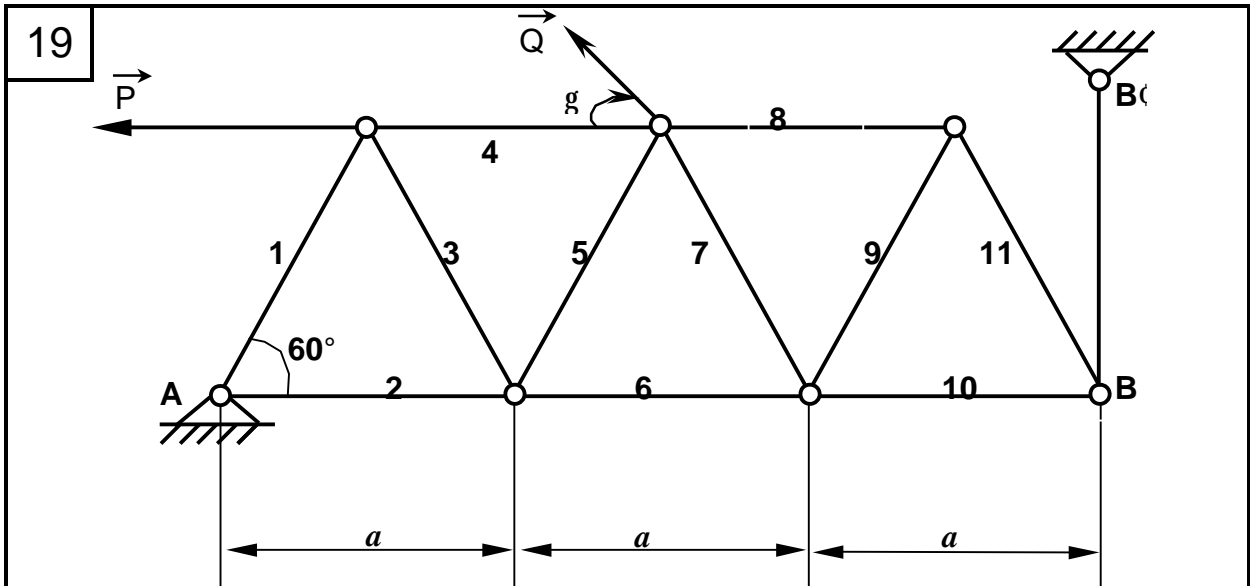
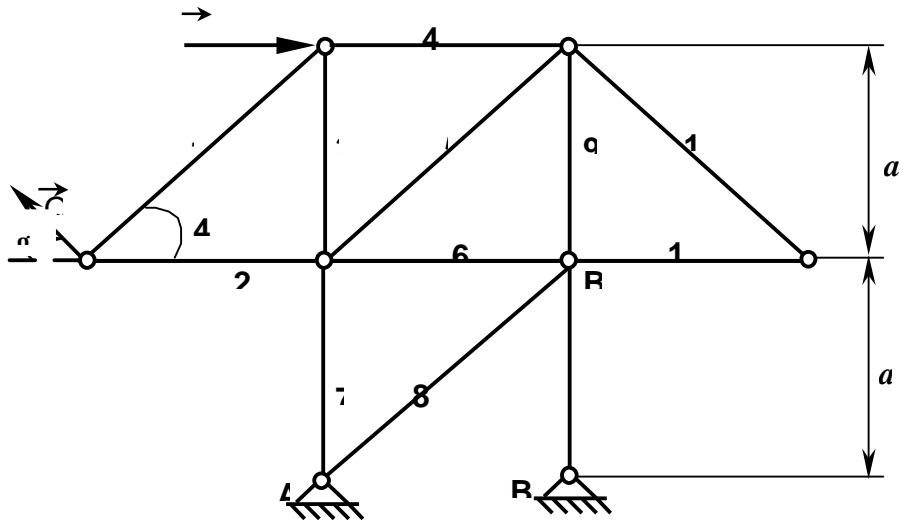
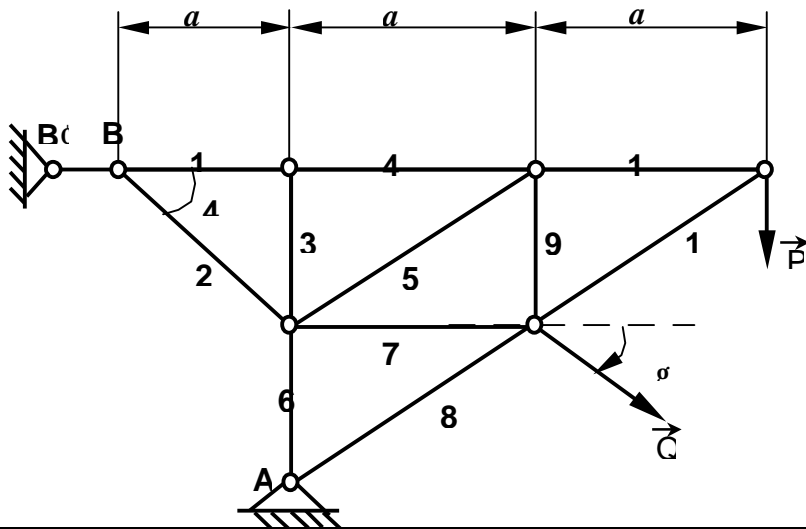


Рисунок 1.4, аркуш 7

22



23



24

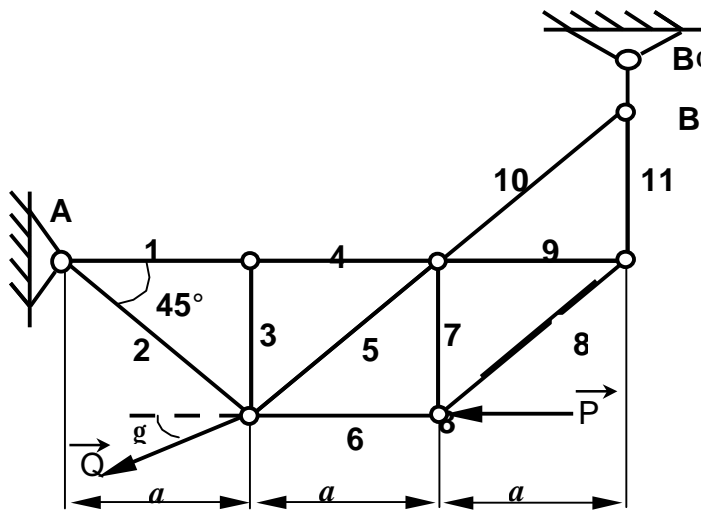
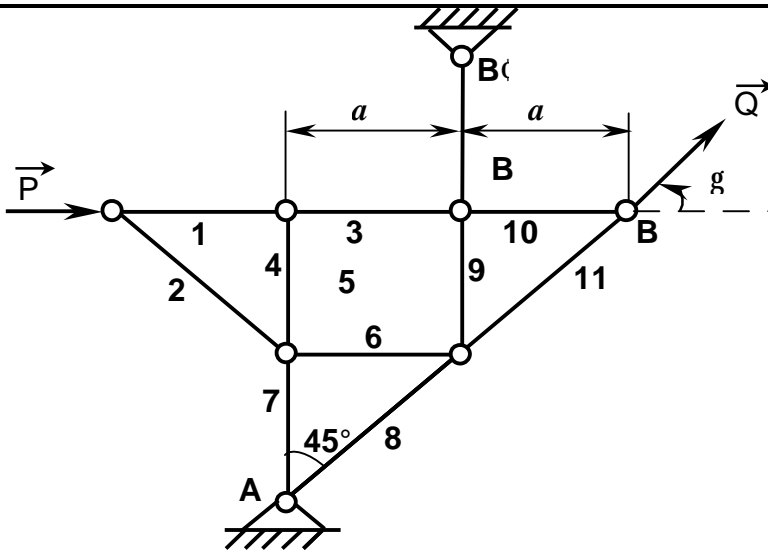
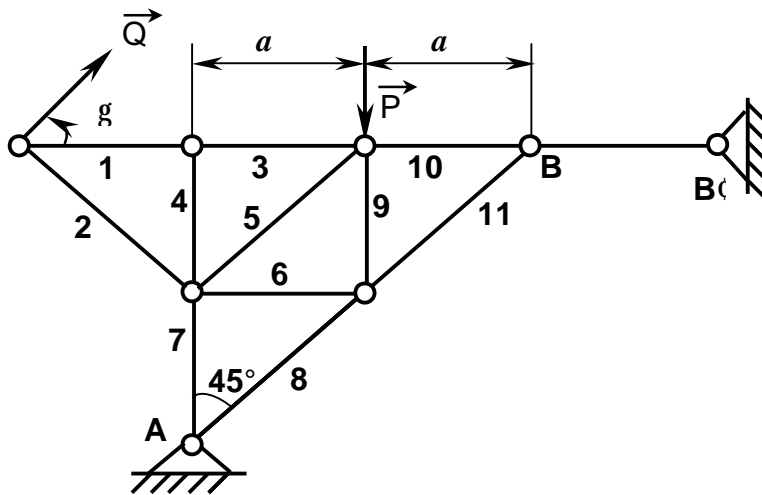


Рисунок 1.4, аркуш 8

25



26



27

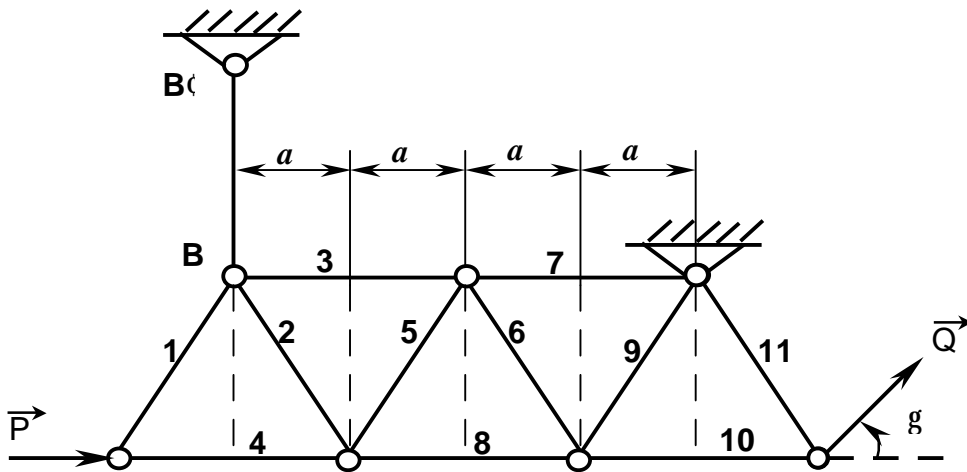
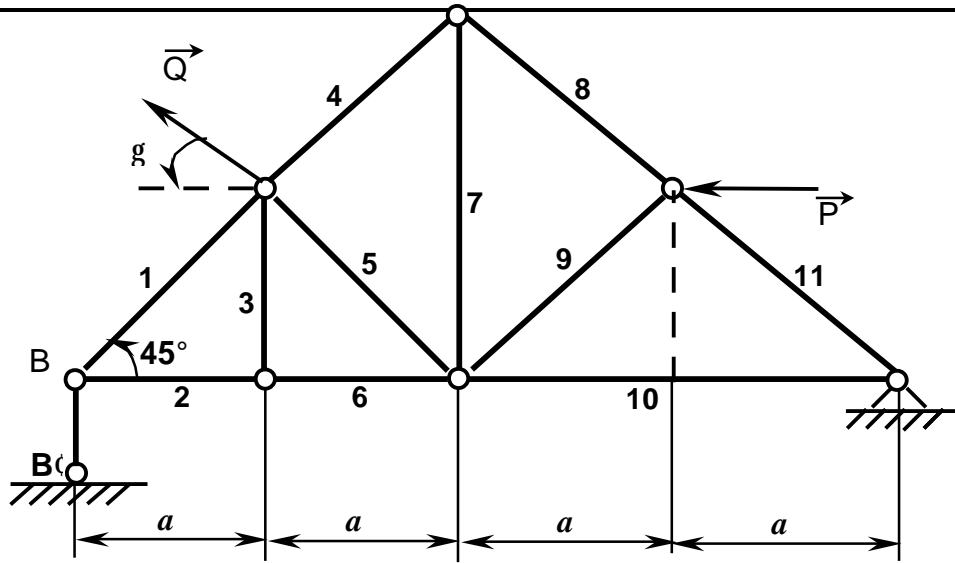
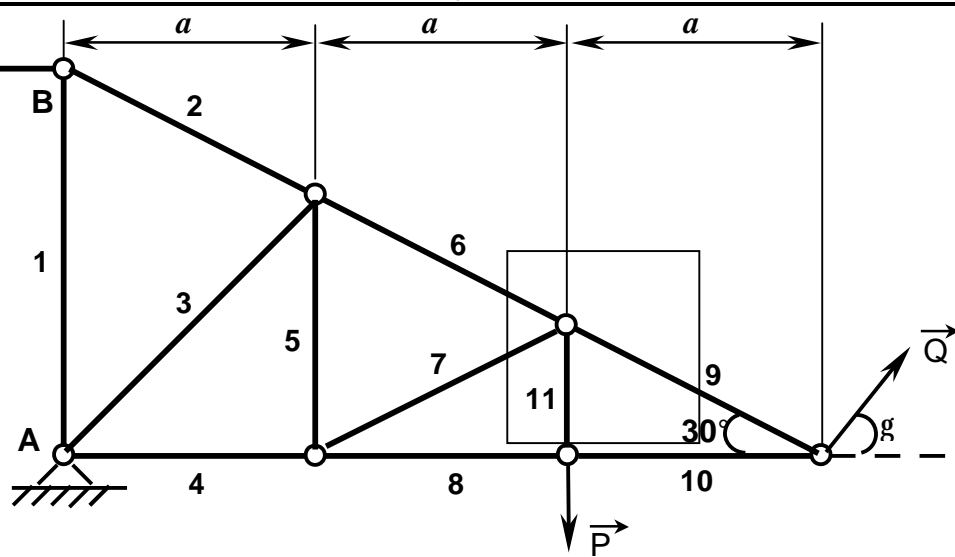


Рисунок 1.4, аркуш 9

28



29



30

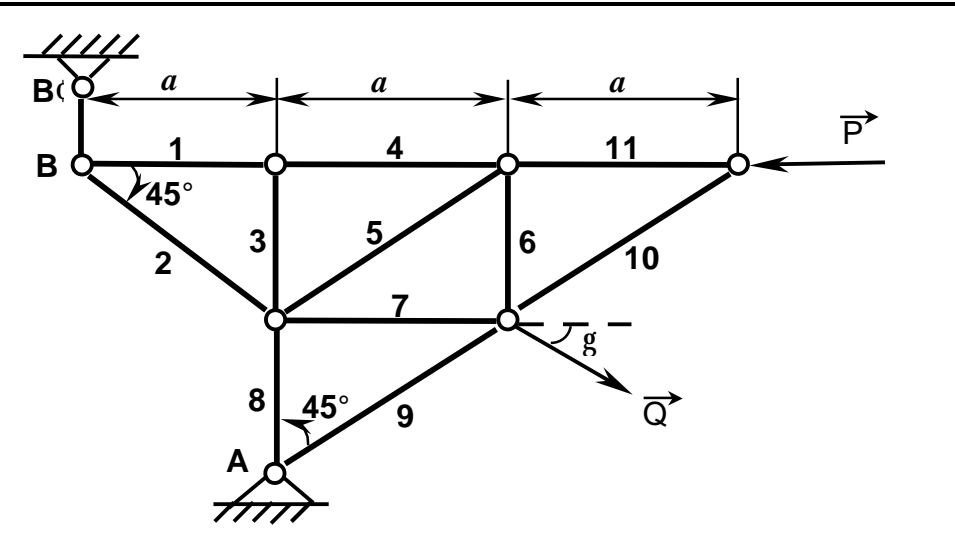


Рисунок 1.4, аркуш 10

1.2.3 Приклад виконання завдання

Дано: Рисунок 1.5 $P=10$ кН, $Q=20$ кН, $a=300$, $\alpha=10$ м.

Знайти: реакції R_A , R_B і зусилля в стрижнях.

Рішення

З рисунка виникає, що $h = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 100 \cdot 0,57 = 57$ м.

Визначення реакцій опор.

Розглянемо зовнішні сили, прикладені до ферми: задані сили P і Q , а також шукані реакції опор R_A і R_B . Оскільки опора BB' стрижнева, то лінія дії реакцій R_B відома. Вона направлена за віссю BB' . Лінія дії реакції R_A невідома, тому розкладемо її на дві невідомі складові: X_A і Y_A . Силу Q також розкладемо на дві, що складають:

$$\begin{aligned} Q_X &= Q \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,3 \text{ кН}, \\ Q_Y &= Q \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Складемо систему трьох рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum M_A(F_k) = 0, \\ \sum M_B(F_k) = 0, \end{cases} \begin{cases} X_A + P + Q \cos 30^\circ = 0, \\ R_B \cdot 10 - P \cdot 3 \cdot 5,7 - Q \cos 30^\circ \cdot 3 \cdot 5,7 - Q \sin 30^\circ \cdot 10 = 0, \\ Y_A \cdot 10 - P \cdot 3 \cdot 5,7 - Q \cos 30^\circ \cdot 3 \cdot 5,7 - Q \sin 30^\circ \cdot 20 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$X_A = -27,3 \text{ кН}; R_B = 56,7 \text{ кН}; Y_A = 66,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum M_D(F_k) = 0;$$

$$R_B \cdot 20 - Y_A \cdot 10 + X_A \cdot 17,1 = 56,7 \cdot 20 - 66,7 \cdot 10 + (-27,3) \cdot 17,1 = 1134 - 667 - 466,8 \approx 0.$$

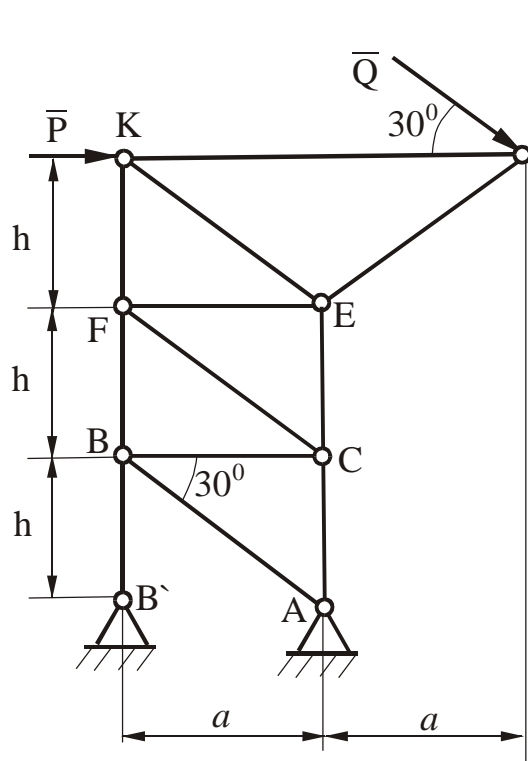


Рисунок 1.5 –Схема ферми

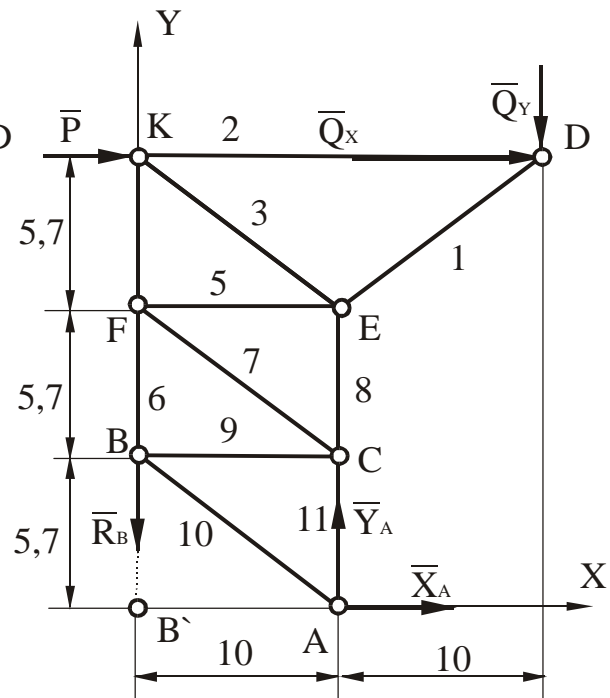


Рисунок 1.6 –Розрахункова схема

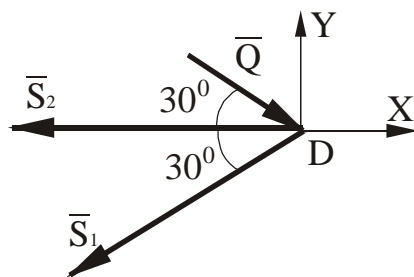


Рисунок 1.7

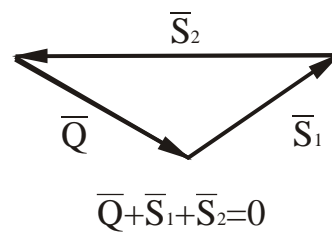


Рисунок 1.8

Для плоскої системи збіжних сил, діючих на вузол D складемо два рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} S F_{kX} = 0, \\ S F_{kY} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -S_2 - S_1 \cos 30^\circ + Q \cos 30^\circ = 0, \\ -S_1 \sin 30^\circ - Q \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Звідки $S_1 = -20$ кН - (стиснутий); $S_2 = 34,2$ кН - (розтягнутий).

Перевірку виконаємо методом побудови силового багатокутника (див. рис.1.8).

Розглянемо вузол A :

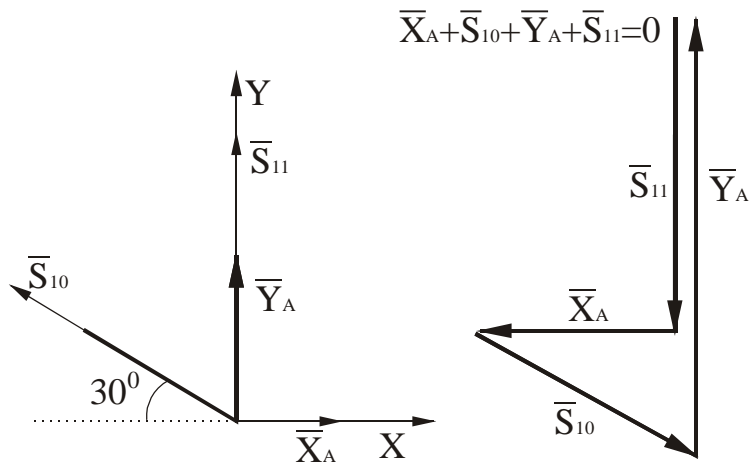


Рисунок 1.9

Рисунок 1.10

$$\begin{cases} SF_{kX} = 0, \\ SF_{kY} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -S_{10} \cos 30^\circ + X_A = 0; \\ S_{11} + Y_A + S_{10} \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Звідки $S_{10} = -31,5$ кН; $S_{11} = -51,2$ кН.

Перевірку виконаємо методом побудови силового багатокутника (рис.1.10)

Метод Ріттера

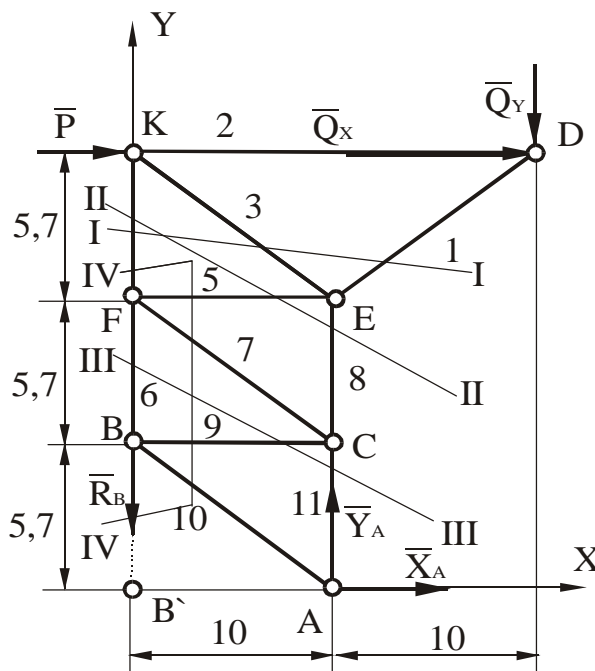


Рисунок 1.11

Проведемо переріз I-I і розглянемо рівновагу стрижня KD (рис.1.12).

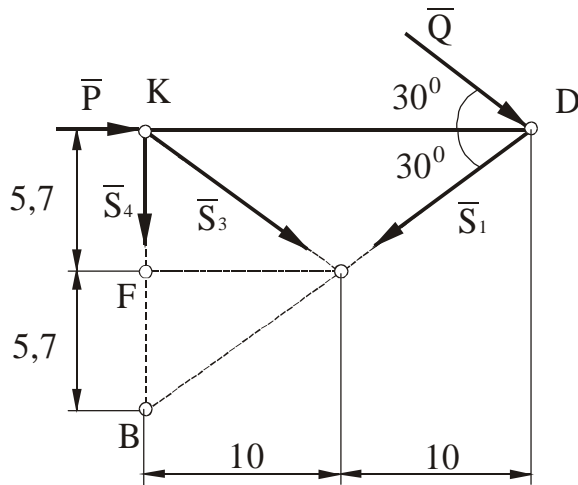


Рисунок 1.12

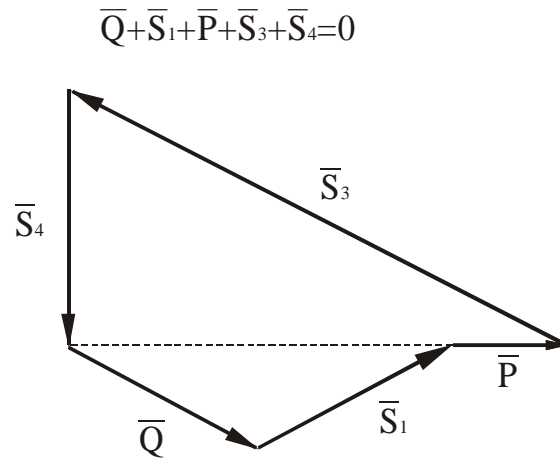


Рисунок 1.13

$$\begin{cases} SM_E(F_k) = 0, \\ SM_K(F_k) = 0, \\ SM_B(F_k) = 0, \end{cases} \begin{cases} -P \times 5,7 - Q \times \cos 30^\circ \times 5,7 - Q \times \sin 30^\circ \times 10 + S_4 \times 10 = 0, \\ -Q \times \sin 30^\circ \times 20 - S_1 \times \sin 30^\circ \times 20 = 0, \\ -S_3 \times \cos 30^\circ \times 5,7 - Q \times \cos 30^\circ \times 5,7 - Q \times \sin 30^\circ \times 20 - P \times 5,7 = 0. \end{cases}$$

Звідси: $S_3 = -50,8$ кН; $S_4 = 25$ кН; $S_1 = -20$ кН.

Перевірку виконаємо методом побудови силового багатокутника (рис.1.13).

Переріз II-II

Розглянемо рівновагу верхньої частини конструкції (рис.1.14).

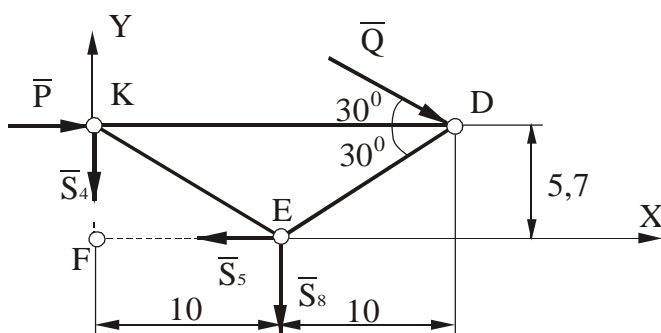
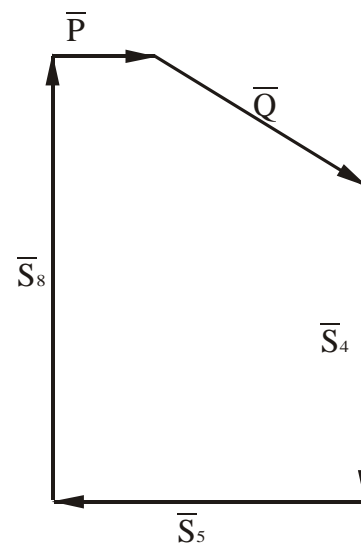


Рисунок 1.14



$$\bar{Q} + \bar{P} + \bar{S}_4 + \bar{S}_5 + \bar{S}_8 = 0$$

Рисунок 1.15

Три рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} SF_{kx}=0, \\ SM_E(F_k)=0, \\ SM_F(F_k)=0, \end{cases} \begin{cases} P+Q\cos 30^{\circ} - S_5 = 0, \\ -P \times 5,7 - Q\cos 30^{\circ} \times 5,7 - Q\sin 30^{\circ} \times 10 + S_4 \times 10 = 0, \\ -P \times 5,7 - Q\cos 30^{\circ} \times 5,7 - Q\sin 30^{\circ} \times 20 - S_8 \times 10 = 0. \end{cases}$$

Звідки $S_5 = 27,3$ кН; $S_4 = 25,4$ кН; $S_8 = -35,4$ кН.

Перевірку виконаємо методом побудови силового багатокутника (рис.1.15).

Переріз III-III

Розглянемо рівновагу верхньої частини конструкції (рис.1.16).

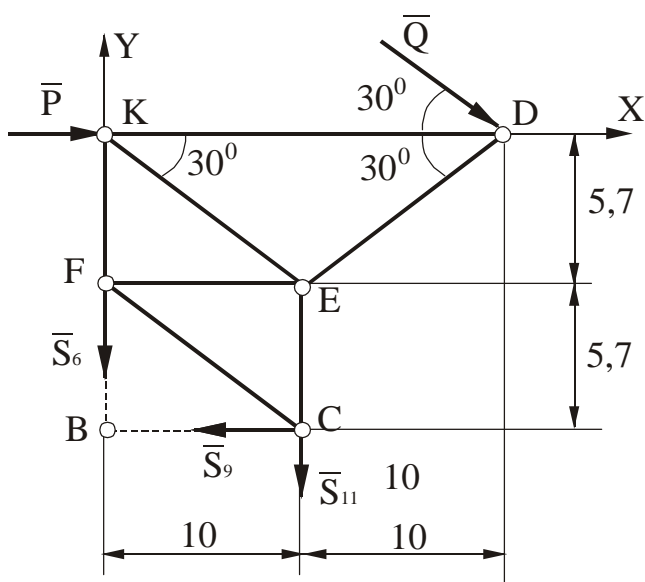
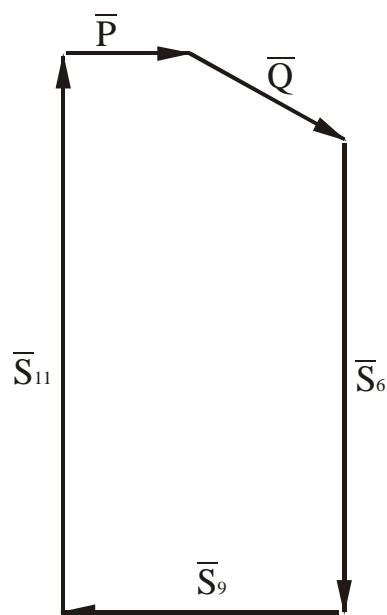


Рисунок 1.16



$$\bar{P} + \bar{Q} + \bar{S}_6 + \bar{S}_9 + \bar{S}_{11} = 0$$

Рисунок 1.17

Три рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} F_{kx}=0, \\ M_B(F_k)=0, \\ M_C(F_k)=0, \end{cases} \begin{cases} P+Q\cos 30^{\circ} - S_9 = 0, \\ -P \times 11,4 - Q\cos 30^{\circ} \times 11,4 - Q\sin 30^{\circ} \times 20 - S_{11} \times 10 = 0, \\ -P \times 11,4 - Q\cos 30^{\circ} \times 11,4 - Q\sin 30^{\circ} \times 10 + S_6 \times 10 = 0. \end{cases}$$

Звідки $S_9 = 27,3$ кН; $S_{11} = -51,2$ кН; $S_6 = 41,2$ кН.

Перевірку виконаємо методом побудови силового багатокутника (рис.1.17).

Переріз IV-IV

Розглянемо рівновагу стрижня FB (рис.1.18).

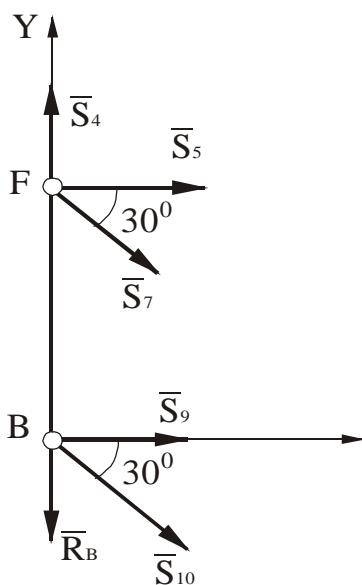
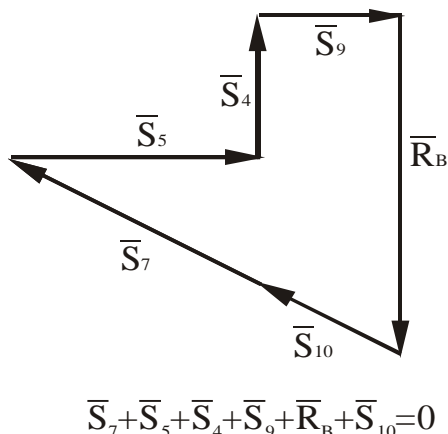


Рисунок 1.18



$$\bar{S}_7 + \bar{S}_5 + \bar{S}_4 + \bar{S}_9 + \bar{R}_B + \bar{S}_{10} = 0$$

Рисунок 1.19

Оскільки з всієї системи сил нам невідома лише одна S_7 (рис.1.19), то маємо:

$$F_{kx} = 0; \quad S_5 + S_7 \cos 30^\circ + S_{10} \cos 30^\circ + S_9 = 0.$$

Звідки $S_7 = -31,5$ кН.

Остаточний результат.

$$X_A = -27,3 \text{ кН}, \quad Y_A = 66,7 \text{ кН}, \quad R_B = 56,7 \text{ кН}.$$

Результати розрахунків зведені до таблиці 1.6, де знак плюс відповідає розтягненню, а мінус стисканню.

Таблиця 1.6

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
-20	-34,2	-50,8	25,4	27,3	41,2	-31,5	-35,4	27,3	-31,5	-51,2

Відповідь:

$$S_1 = -20 \text{ кН}, \quad S_2 = -34,2 \text{ кН}, \quad S_3 = -50,8 \text{ кН}, \quad S_4 = 25,4 \text{ кН}, \quad S_5 = 27,3 \text{ кН}, \\ S_6 = 41,2 \text{ кН}, \quad S_7 = -31,5 \text{ кН}, \quad S_8 = -35,4 \text{ кН}, \quad S_9 = 27,3 \text{ кН}, \quad S_{10} = -31,5 \text{ кН}, \\ S_{11} = -51,2 \text{ кН},$$

1.3 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА (ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ)

1.3.1 Короткі відомості з теорії

Завдання базується на теоретичних засадах статички твердого тіла, зокрема на умовах рівноваги довільної плоскої системи сил.

Зазначена система сил характеризується тим, що всі сили системи діють в одній площині, але не мають спільної точки перетину їх ліній дії і не паралельні одна одній.

Для рівноваги такої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил системи на дві взаємно перпендикулярні осі в площині дії сил дорівнювали нулю і щоб при цьому дорівнювала нулю сума алгебраїчних моментів сил відносно будь-якої точки цієї площини:

$$\sum_{K=1}^N F_{kx} = 0, \quad \sum_{K=1}^N F_{ky} = 0, \quad \sum_{K=1}^N m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.8)$$

де $K=1,2,3,\dots,N$;

N – кількість сил у системі;

A – довільна точка в площині дії сил.

Це перша (основна) форма аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил. Крім неї існують ще дві форми, а саме:

$$\sum_{K=1}^N F_{kx} = 0, \quad \sum_{K=1}^N m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{K=1}^N m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.9)$$

де A та B – довільні точки в площині дії сил;

X – вісь в площині дії сил, яка не перпендикулярна прямій AB ;

$$\sum_{K=1}^N m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{K=1}^N m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{K=1}^N m_C(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.10)$$

де A, B, C – точки в площині дії сил, які не лежать на одній прямій.

Застосувавши будь-яку з зазначених форм умов рівноваги, можна визначити не більше трьох невідомих опорних реакцій твердого тіла, навантаженого тією чи іншою заданою системою сил, довільно розташованих в одній площині.

1.3.2 Умови завдання

Визначити опорні реакції твердого тіла, зображеного на рис. 1.20.

Необхідні дані взяти з таблиць 1.7 та 1.8

Таблиця 1.7

Величини	Значення величини за варіантами									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	4	8	12	16	20	4	8	12	16	20
q , кН/м	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1
P , кН	2	6	10	14	18	2	6	10	14	18

Таблиця 1.8

Величини	Значення величини за варіантами									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
b , м	2	3	4	5	1	5	4	3	2	1
c , м	3	4	5	1	2	4	3	2	1	5
α , °	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30

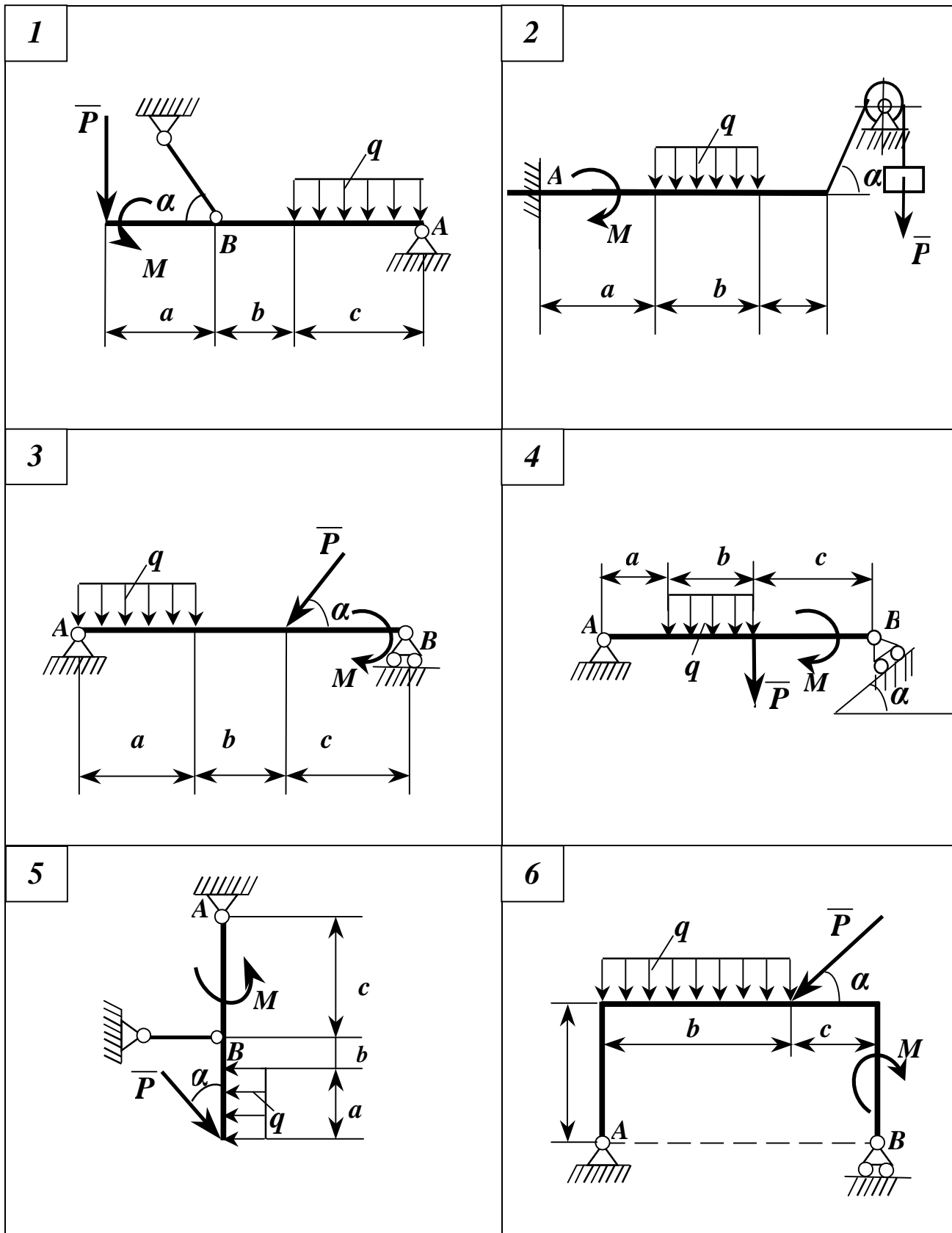


Рисунок 1.20 - Схеми до варіантів завдання

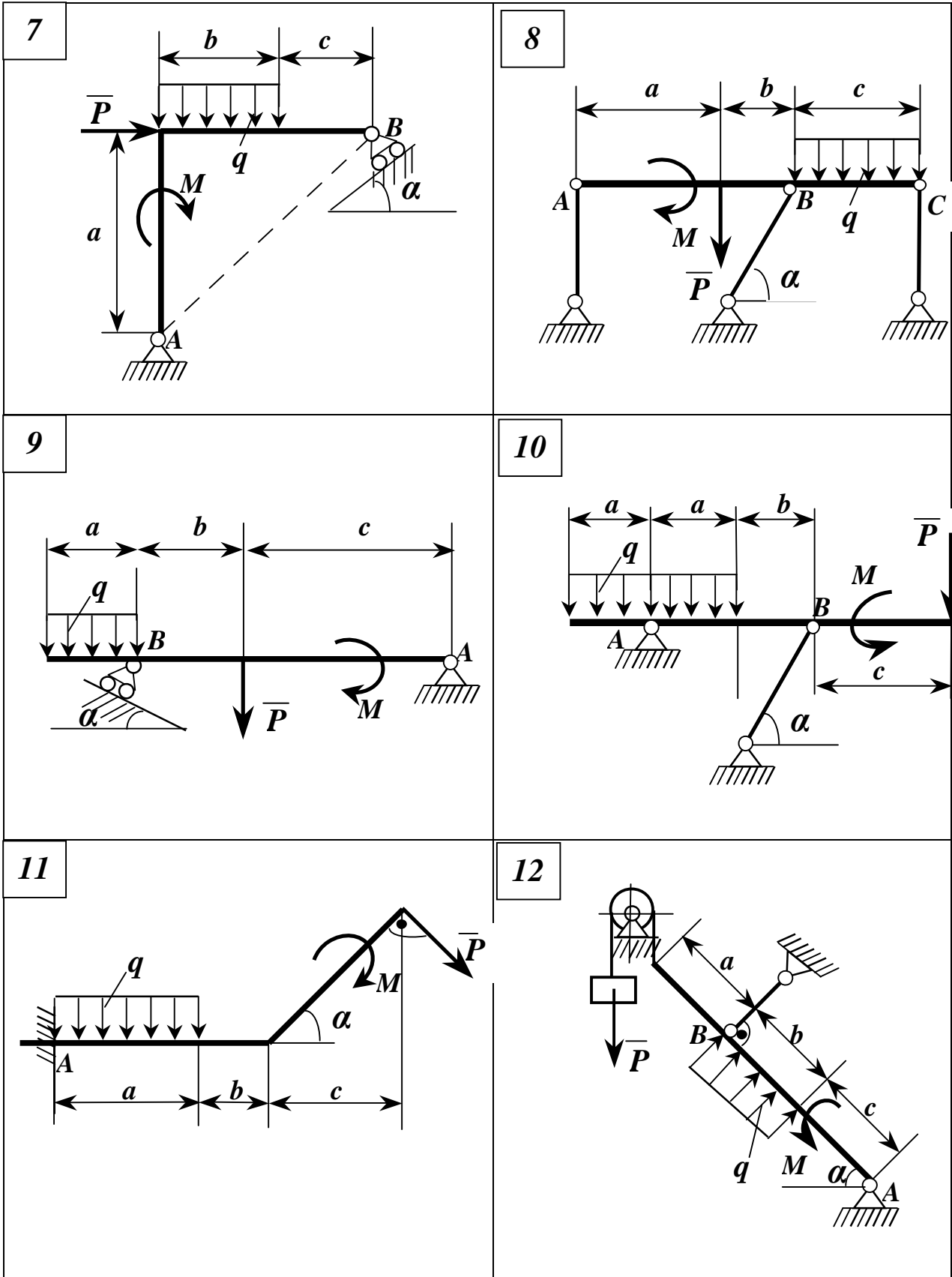
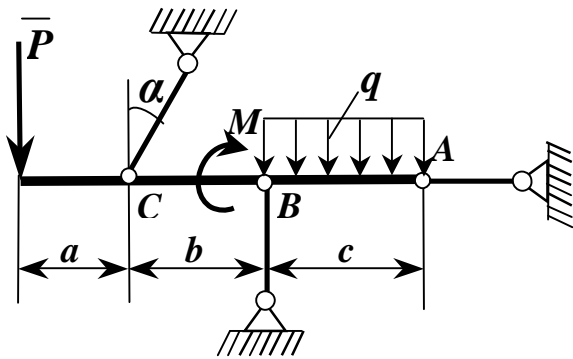
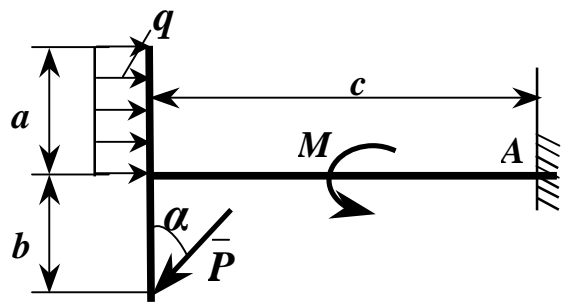


Рисунок 1.20, аркуш 2

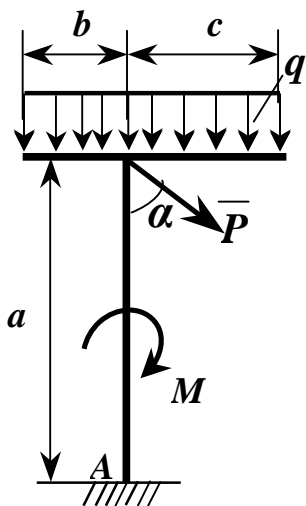
13



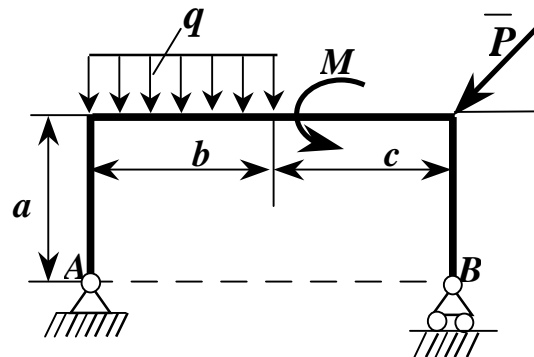
14



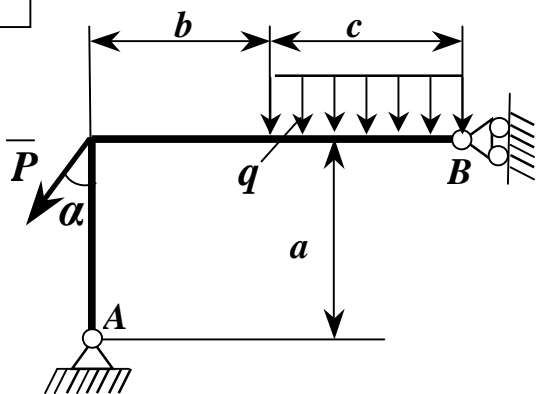
15



16



17



18

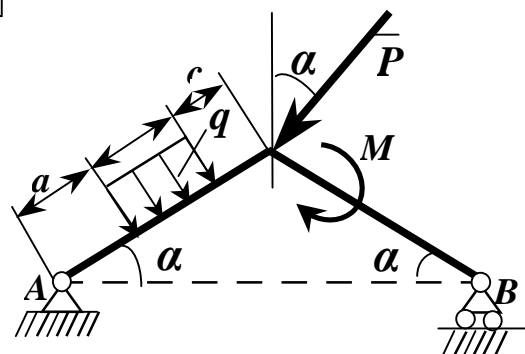
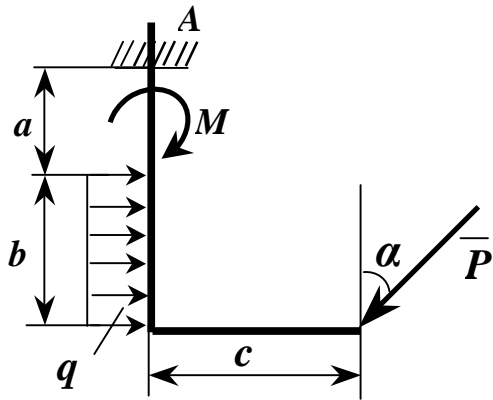
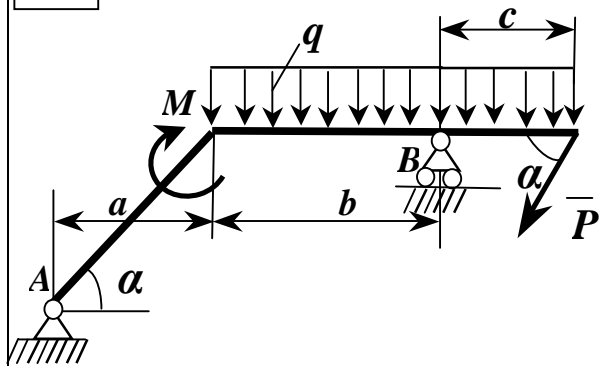


Рисунок 1.20, аркуш 3

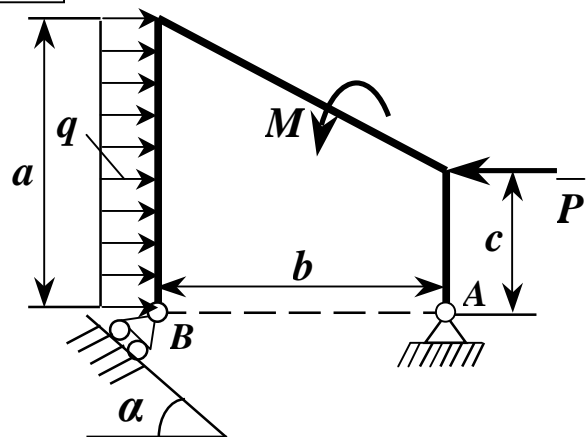
19



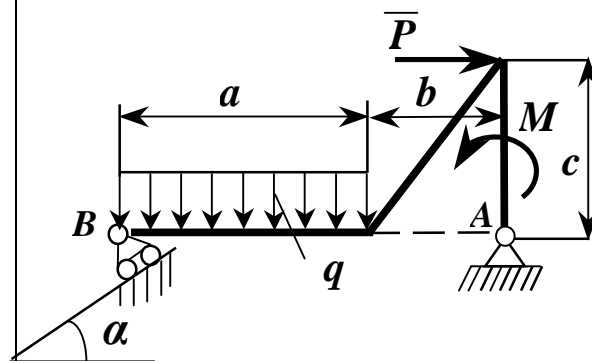
20



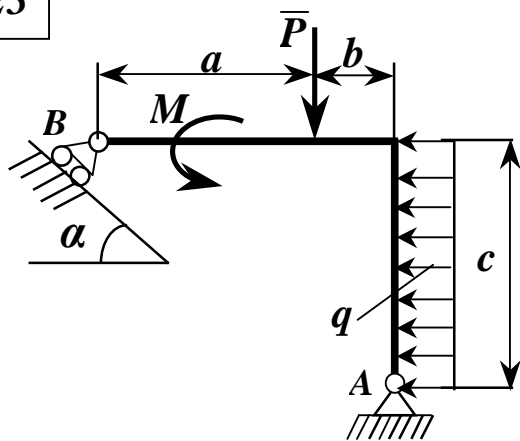
21



22



23



24

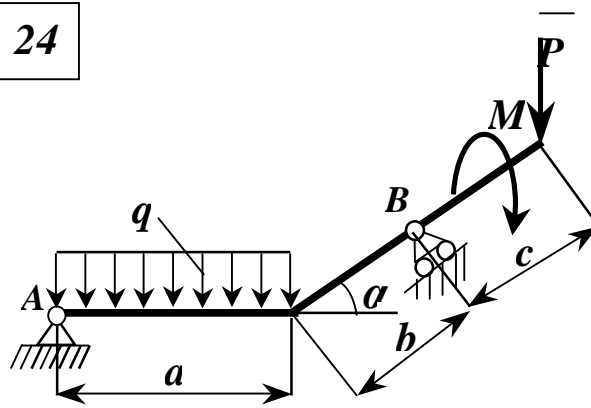


Рисунок 1.20, аркуш 4

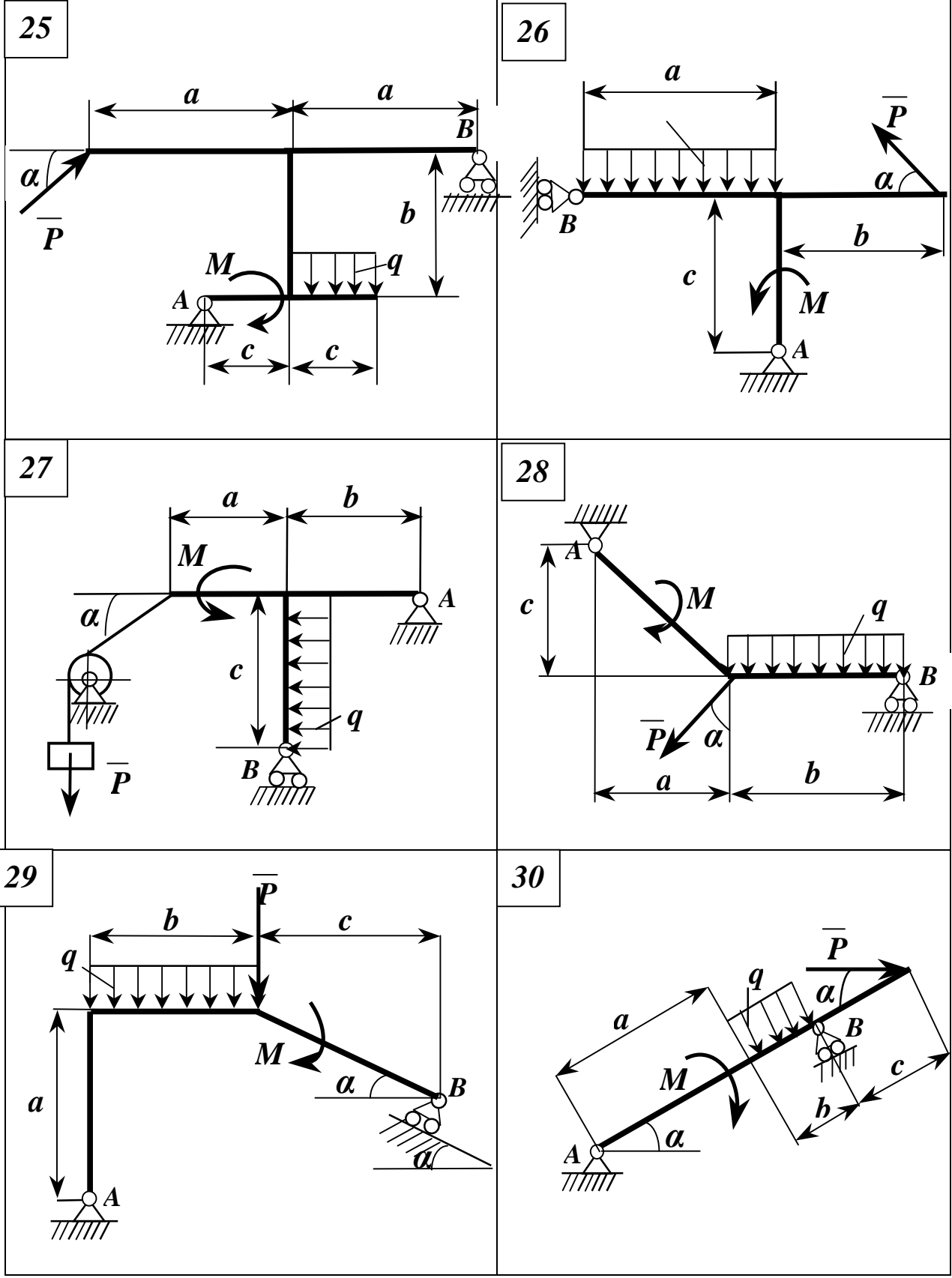


Рисунок 1.20, аркуш 5

1.3.3 Приклад виконання завдання

Дано: $M=10\text{кНм}$; $q=2\text{кН/м}$; $a=3\text{м}$; $b=2\text{м}$; $c=2\text{м}$; $\alpha=45^\circ$.

Знайти: опорні реакції балки (рис. 1.21, а).

Рішення

Розглянемо систему врівноважених сил, діючих на балку.

Відкинемо в'язі: шарнірно-нерухому опору A та невагомий двохшарнірний стрижень BC . Дію в'язей замінимо їх реакціями (1.21, б).

Зважаючи на те, що реакція опори A невідома не лише за величиною, але і за напрямком, розкладемо її на складові уздовж осей координат, що визначають площину дії сил, \bar{X}_A та \bar{Y}_A .

Вважаючи стрижень BC розтягненим, спрямуємо його реакцію \bar{S} уздовж стрижня в напрямку від B до C .

Спростимо систему сил, діючих на балку.

Розподілене навантаження з інтенсивністю q , що діє на частину балки довжиною a , замінимо рівнодійною Q , прикладеною посередині навантаженого відрізка балки. Її модуль визначаємо як площу епюри розподіленого навантаження:

$$Q = q \cdot a = 2 \cdot 3 = 6\text{кН}.$$

Силу \bar{P} розкладаємо на складові – \bar{P}_X та \bar{P}_Y , визначимо їх модулі:

$$P_X = P \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,23 \text{ кН}; \quad P_Y = P \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,23 \text{ кН}.$$

Реакцію \bar{S} також розкладаємо на складові – \bar{S}_X та \bar{S}_Y . Їх величини виразимо через S :

$$S_X = S \cdot \cos \alpha = S \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \cdot S; \quad S_Y = S \cdot \sin \alpha = S \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \cdot S.$$

Для плоскої довільної системи сил, діючих на балку, запишемо три рівняння рівноваги, з яких визначаємо три невідомих – X_A , Y_A , S . Для спрощення цих рівнянь виберемо другу форму умов рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kx} = X_A - S_X - P_X = 0; \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_A(\bar{F}_k) = -Q \cdot \frac{a}{2} + S_Y \cdot (a+b) - M - P_Y(a+b+c) = 0; \end{array} \right. \quad (1.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_B(\bar{F}_k) = -Y_A \cdot (a+b) + Q \cdot \left(a+b - \frac{a}{2} \right) - M - P_Y \cdot c = 0; \end{array} \right. \quad (1.13)$$

або з урахуванням значень S_X та S_Y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kx} = X_A - 0,71 \cdot S - P_X = 0; \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_A(\bar{F}_k) = -Q \cdot \frac{a}{2} + 0,71 \cdot S \cdot (a+b) - M - P_Y(a+b+c) = 0; \end{array} \right. \quad (1.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_B(\bar{F}_k) = -Y_A \cdot (a+b) + Q \cdot \left(a+b - \frac{a}{2} \right) - M - P_Y \cdot c = 0; \end{array} \right. \quad (1.16)$$

З рівняння (1.15):

$$S = \frac{M + P_Y(a+b+c) + Q \cdot \frac{a}{2}}{0,71(a+b)} = \frac{10 + 4,23 \cdot 7 + 6 \cdot 1,5}{0,71 \cdot 5} = 13,69 \text{ кН.}$$

З рівняння (1.14):

$$X_A = P_x + 0,71 \cdot S = 4,23 + 0,71 \cdot 13,69 = 13,95 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.16):

$$Y_A = \frac{Q\left(\frac{a}{2} + b\right) - M - P_y \cdot c}{(a+b)} = \frac{6 \cdot 3,5 - 10 - 4,23 \cdot 2}{5} = 0,51 \text{ кН}.$$

Знак плюс при значенні S вказує на те, що вектор в дійсності спрямований саме так, як зображено на рисунку 1.21,б, тобто стрижень BC в дійсності є розтягненим.

Маючи значення X_A та Y_A , можна визначити модуль та напрямок реакції \overline{R}_A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{13,95^2 + 0,51^2} = 13,96 \text{ кН},$$

$$\cos(\overline{R}_A; \hat{X}) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{13,95}{13,96} = 0,999 \text{ (кут } \approx 2^\circ),$$

$$\cos(\overline{R}_A; \hat{Y}) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{0,51}{13,96} = 0,036 \text{ (кут } \approx 88^\circ).$$

Таким чином, вектор \overline{R}_A і за величиною, і за напрямком майже співпадає з вектором \overline{X}_A , тому на рисунку 1.21,б він не зображений.

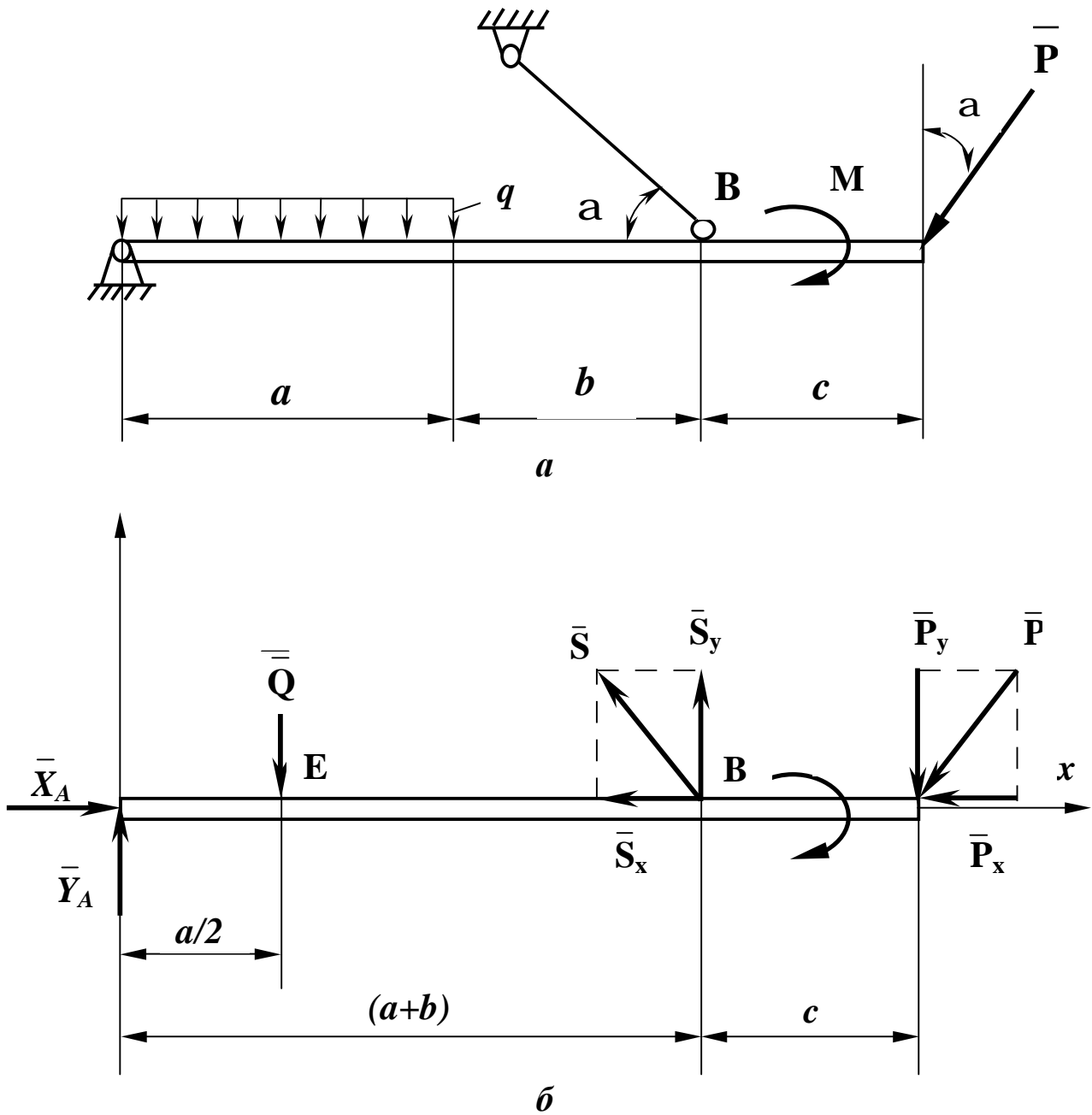


Рисунок 1.21- Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Відповідь:

$$S = 13,69 \text{ кН};$$

$$X_A = 13,95 \text{ кН};$$

$$Y_A = 0,51 \text{ кН.}$$

1.4 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

1.4.1 Короткі відомості з теорії

Статичний розрахунок інженерних споруд в багатьох випадках зводиться до розгляду умов рівноваги конструкції, що складається з тіл, з'єднаних будь-якими в'язями. В'язі, які з'єднують частини даної конструкції, будемо називати внутрішніми, на відміну від зовнішніх в'язей, які закріплюють конструкцію з тілами, котрі конструкції не належать (наприклад, реакції опор являються зовнішніми в'язями). Якщо після відкидання зовнішніх в'язей конструкція залишається жорсткою, тоді для неї задача статички вирішуються як для абсолютно твердого тіла. Однак можуть зустрічатися такі інженерні конструкції, які після відкидання зовнішніх в'язей не залишаються жорсткими. Прикладом такої конструкції являється тришарнірна арка (рис. 1.22).

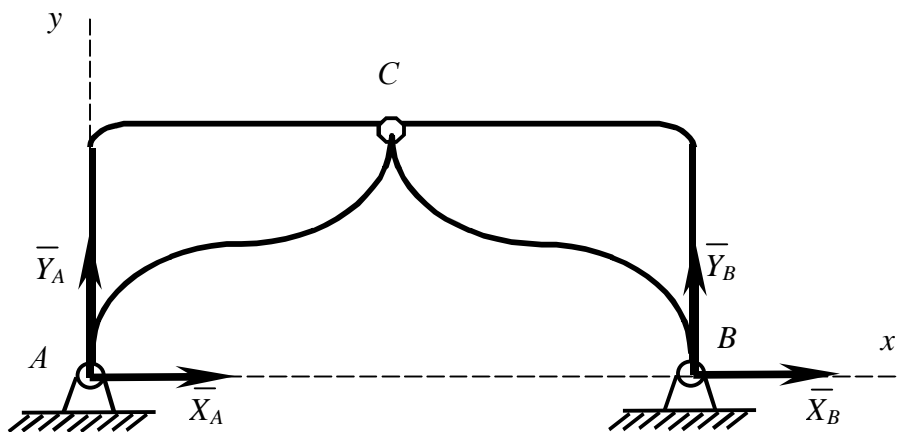


Рисунок 1.22 – Приклад складеної конструкції

Якщо відкинути опори A і B , тоді арка не буде жорсткою: її частини можуть повертатися навколо шарніра C . На основі принципу затвердження система сил, діючих на таку конструкцію, повинна при рівновазі задовольняти

умовам рівноваги твердого тіла. Але ці умови, будучи необхідними, не будуть являтися достатніми, тому з них не можна буде визначити усі невідомі величини.

Для вирішення задача необхідно буде додатково розглянути рівновагу будь-якої однієї або кількох частин конструкції. Наприклад, складаючи умови рівноваги для сил, діючих на трьохшарнірну арку (див. рис. 1.22), ми отримаємо три рівняння з чотирма невідомими X_A , Y_A , X_B , Y_B .

$$\dot{a} Fkx = 0,$$

$$\dot{a} Fky = 0,$$

$$\dot{a} M_A(\bar{Fk}) = 0.$$

Розглянувши додатково умови рівноваги лівої (рис. 1.23, а), або правої (рис. 1.23, б) її половини, ми отримаємо ще три рівняння, які включають дві нові невідомі величини X_C , Y_C (див. рис. 1.23). Вирішуючи отриману систему рівнянь, знайдемо усі шість невідомих величин.

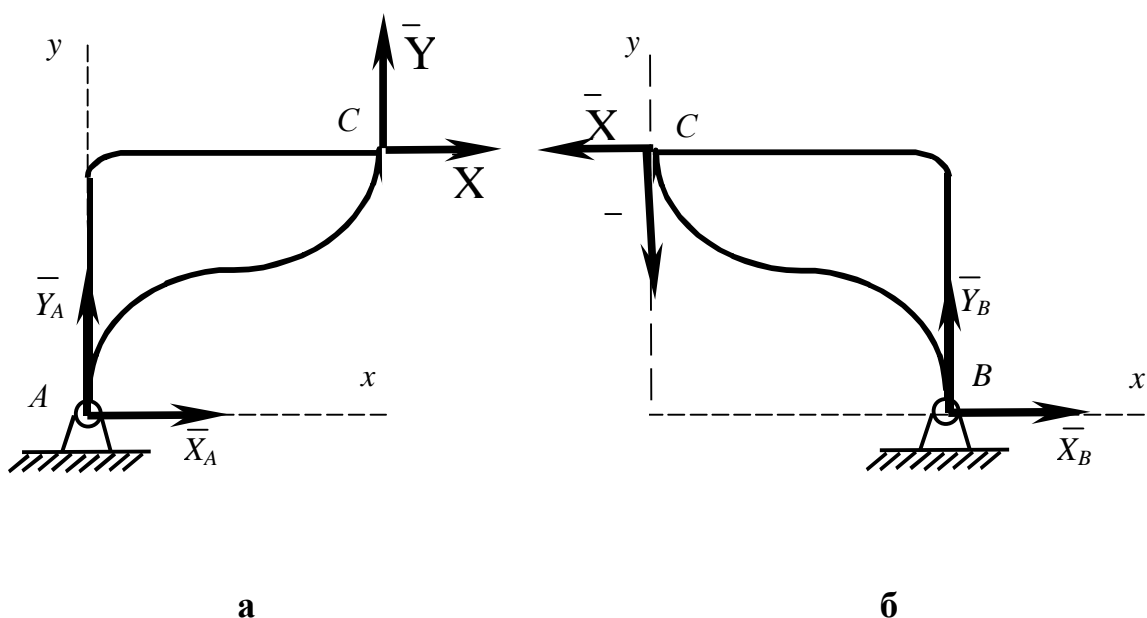


Рисунок 1.23 – Схема розрахунку зовнішніх і внутрішніх в'язей

Інший спосіб вирішення подібних задач складається з того, що конструкцію одразу розділяють на окремі тіла і складають умови рівноваги кожного з них, розглядаючи ці тіла як вільні. При цьому реакції внутрішніх в'язей будуть попарно дорівнювати одна одній за модулем і протилежні за напрямком. Для конструкції з n тіл, на кожне з яких діє довільна плоска система сил, будемо мати $3n$ рівнянь, які дозволяють знайти $3n$ невідомих. Якщо для даної конструкції число усіх реакцій в'язей буде більше числа рівнянь, до яких ці реакції входять, то конструкція буде статично невизначена. Задачі з такими конструкціями в теоретичній механіці не вирішують. Їх розв'язують за допомогою методів опору матеріалів.

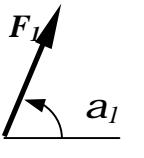
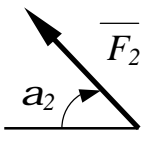
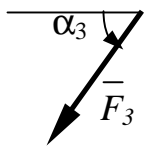
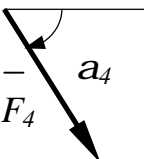
1.4.2 Умови завдання

Конструкція (рис. 1.24) складається з двох тіл: з жорсткого трикутника і стрижня, які в точці C вільно опитаються одне на друге (схеми 7, 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20), або в цій же точці C з'єднані за допомогою циліндричного шарніра (всі інші схеми).

На кожну конструкцію діють пара сил з моментом M , рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q та ще дві сили із чотирьох $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, $\overline{F_4}$. Ці сили, їх напрямки та точки прикладення вказані в таблиці 1.9, а в таблиці 1.10 наведені їх значення, та величини моменту і інтенсивності розподіленого навантаження, та довжина a (згідно заданої схеми).

Визначити реакції зовнішніх в'язей у точках A , B , C , D , викликані заданими навантаженнями.

Таблиця 1.9

Величини		Значення величин за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Точка прикладення сили	К	—	L	—	L	—	E	—	—	Н
	Значення кута a_1 ,	60	—	15	—	30	—	60	—	—	30
	Точка прикладення сили	—	L	—	К	—	L	—	Н	К	—
	Значення кута a_2 ,	—	60	—	30	—	75	—	60	30	—
	Точка прикладення сили	Н	—	К	—	E	—	К	L	—	—
	Значення кута a_3 ,	30	—	60	—	60	—	75	30	—	—
	Точка прикладення сили	—	E	—	Н	—	К	—	—	E	L
	Значення кута a_4	—	30	—	60	—	30			15	60

Таблиця 1.10

Величина		Значення величин за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F , кН	F_1	10	20	30	40	50	50	60	70	80	90
	F_2	90	10	20	30	40	60	50	80	50	70
	F_3	80	70	60	50	10	40	50	30	90	20
	F_4	20	50	10	50	90	80	30	40	70	60
M , кН·м		100	200	60	50	90	80	70	150	180	120
q , кН/м		4	8	6	2	10	8	4	2	6	8
a , м		1	1	2	2	1	1	3	3	1	2

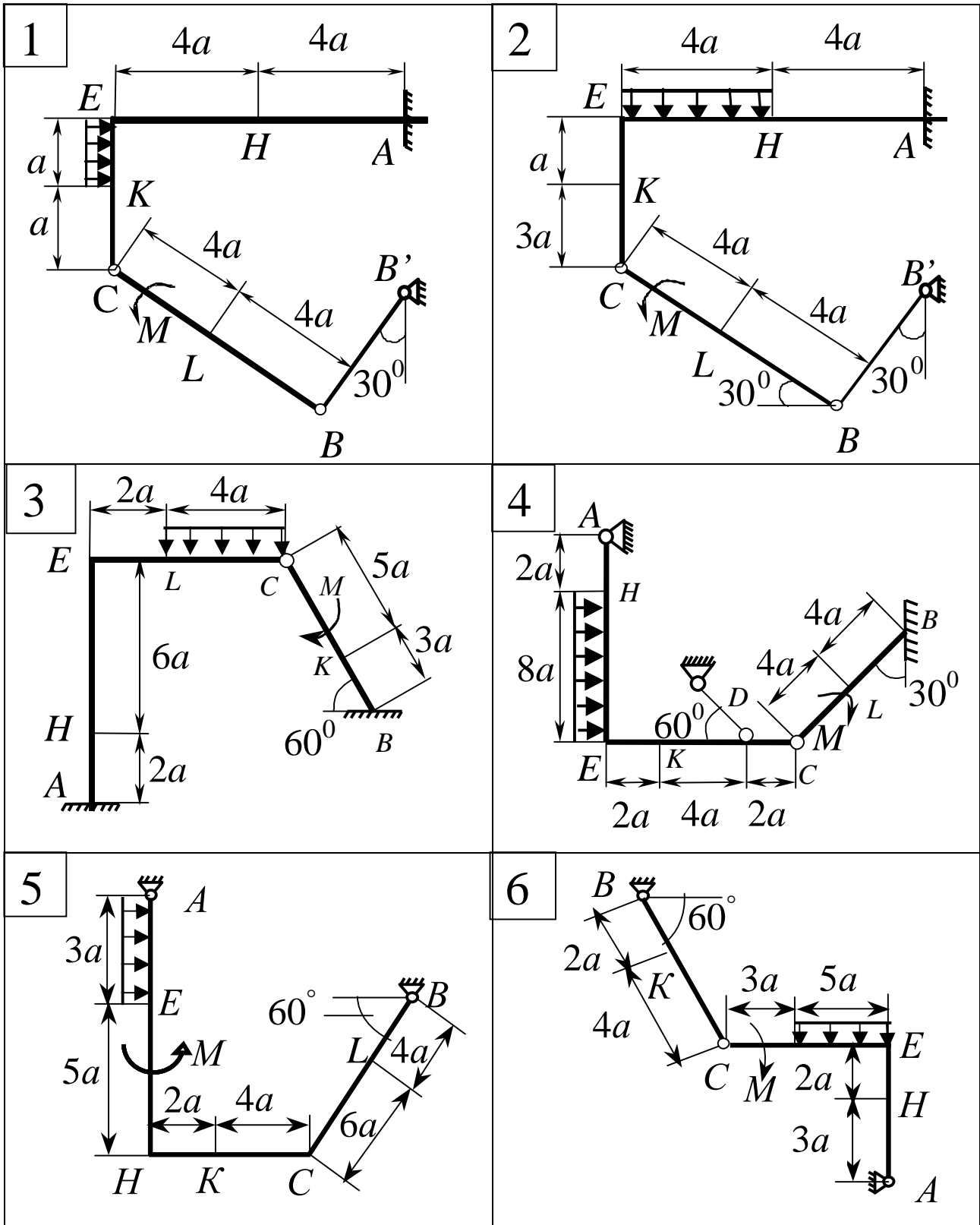


Рисунок 1.24 – Схеми до варіантів завдання

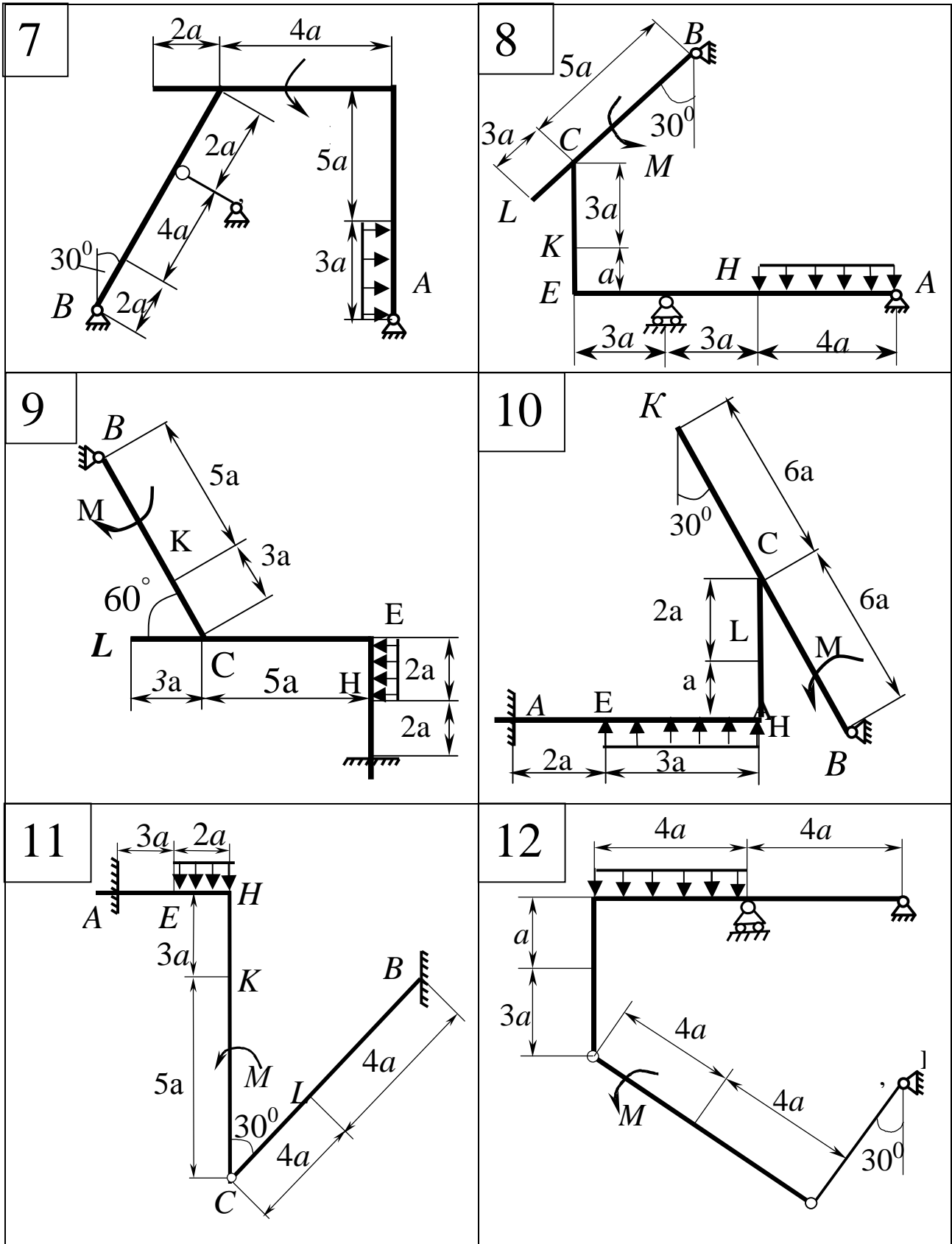


Рисунок 1.24, аркуш 2

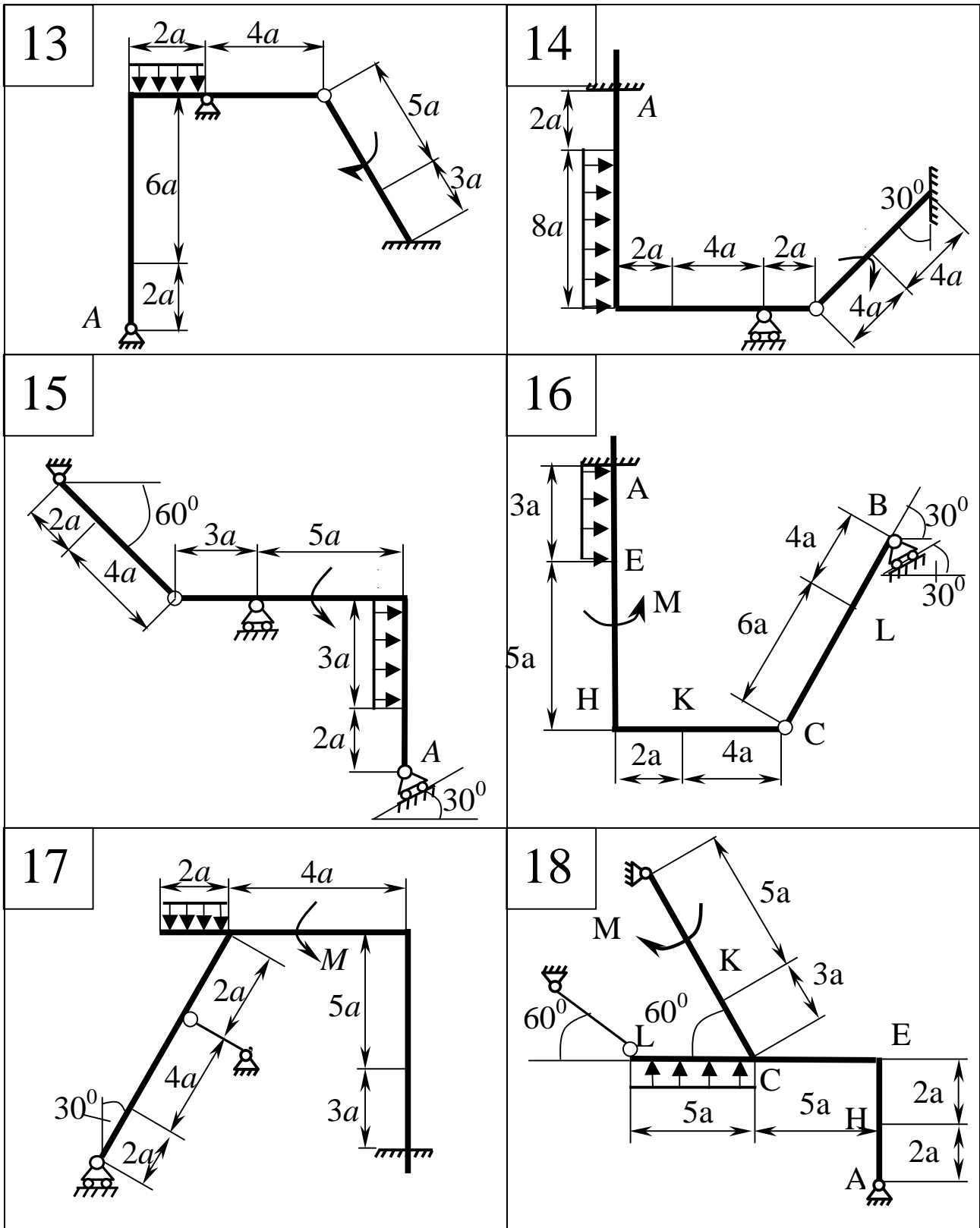


Рисунок 1.24, аркуш 3

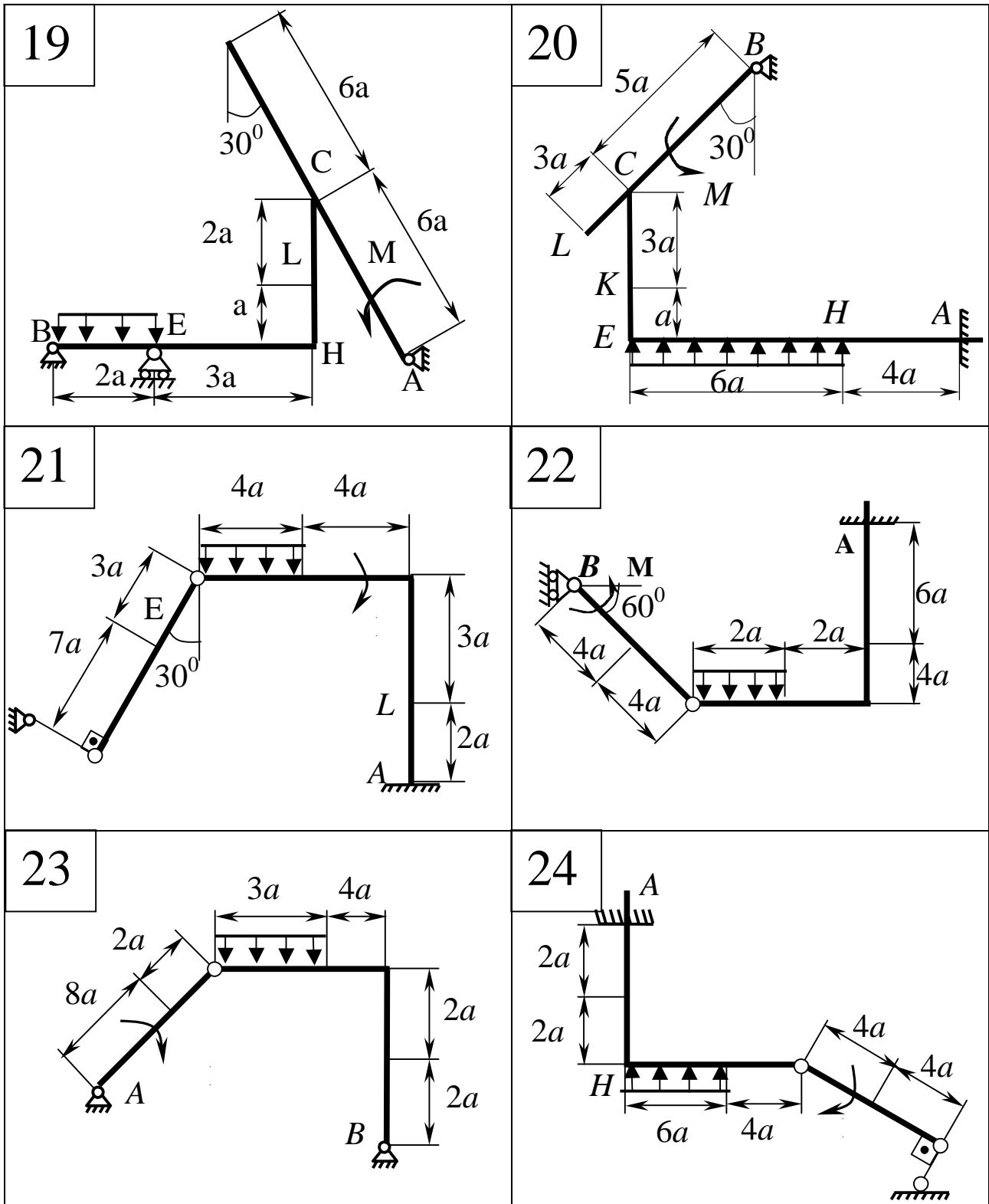


Рисунок 1.24, аркуш 4

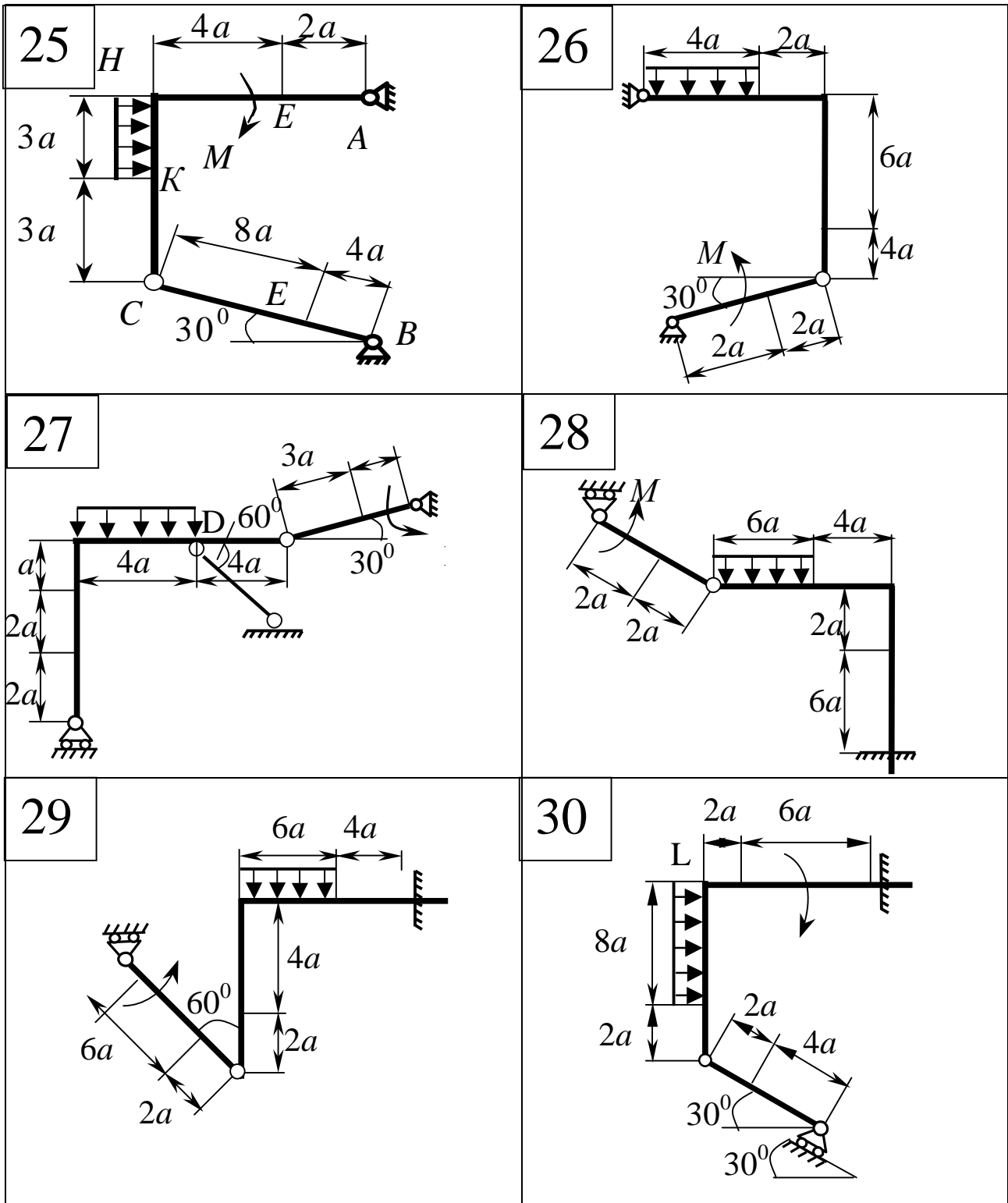


Рисунок 1.24, аркуш 5

1.4.3 Приклад виконання завдання

Дано: $F = 10$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 20$ кН/м; $a = 0,2$ м.

Знайти: реакції в точках A , C , D , які визвані заданими навантаженнями.

На трикутник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), кінець A якого жорстко затиснутий, в точці C опирається стрижень DE (рис.1.25, а). Стрижень має в точці D нерухому шарнірну опору, та до нього прикладена сила горизонтальна F , а до кутника - рівномірно розподілене на ділянці KB навантаження інтенсивності q та пара з моментом M .

Рішення

1 Для визначення реакцій поділимо систему на складові частини та розглянемо спочатку рівновагу стрижня DE (див. рис. 1.25, б). Проведемо координатні осі x , y та зобразимо діючі на стрижень сили: \vec{F} силу F , реакцію N , спрямовану перпендикулярно до стрижня, та складові X_D і Y_D реакції шарніра D . Для отриманої плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_D + F - N \sin 60 = 0, \quad (1.17)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_D + N \cos 60 = 0, \quad (1.18)$$

$$\sum M_D(F_k) = 0, \quad N 2a - F 5a \sin 60 = 0. \quad (1.19)$$

2 Тепер розглянемо рівновагу кутника (див. рис. 1.25, в). На нього діють сили тиску стрижня \vec{N}' , спрямована протилежно реакції \vec{N} , рівномірно розподілене навантаження, яке замінюємо силою Q , прикладеного у середину ділянки KB (кількісно $Q = q 4a = 16$ кН), пара сил з моментом M .

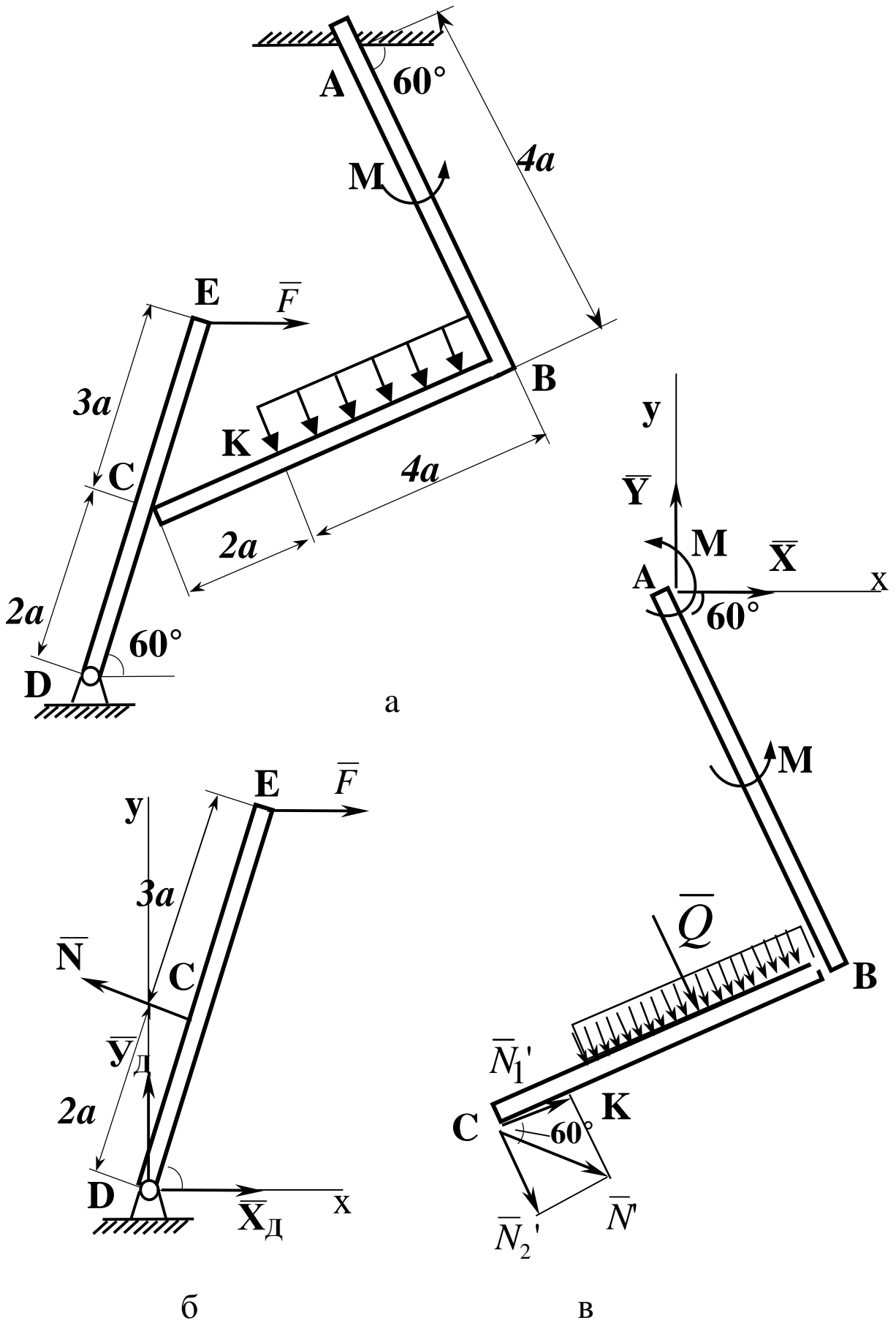


Рисунок 1.25 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Реакція жорсткого закріплення розкладається на три складові частини, дві з яких спрямовані вздовж координатних осей: \bar{X}_A , Y_A та пари сил з реактивним моментом M_A . Для отриманої плоскої системи сил теж складемо три рівняння рівноваги :

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + Q \cos 60 + N' \sin 60 = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q \sin 60 - N' \cos 60 = 0, \quad (1.21)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M_A + M + Q2a + N' \cos 60 4a + N' \sin 60 6a = 0. \quad (1.22)$$

При розрахунку моменту сили \bar{N}' поділяємо її на складові \bar{N}'_1 і \bar{N}'_2 та застосовуємо теорему Варіньона, згідно якої: момент рівнодіючої сили дорівнює сумі моментів сил, які складають цю рівнодіючу. Підставив у складені рівняння кількісні значення заданих величин та вирішив систему рівнянь (1.17...1.22), знайдемо шукані реакції. При рішенні враховуємо, що кількісно $N' = N$ згідно з принципом рівності дії та протидії. А саме: за формулою 1.19 знаходимо N ; за 1.18 – реакцію Y_D , за 1.17 – X_D . Тоді за формулою 1.20 знаходимо X_A ; за 1.21 – Y_A , а за рівнянням 1.22 обчислимо реактивний момент M_A .

Відповідь:

$$N = 21,7 \text{ кН}; \quad Y_D = - 10,8 \text{ кН}; \quad X_D = 8,8 \text{ кН}; \quad X_A = -26,8 \text{ кН},$$

$$Y_A = 24,7 \text{ кН}; \quad M_A = - 42,6 \text{ кНм}.$$

Знаки вказують, що сили \bar{Y}_D , X_A та момент M_A спрямовані протилежно напрямкам, зображеним на схемах.

1.5 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА

1.5.1 Короткі відомості з теорії

Для знаходження реакцій опор вільного твердого тіла, на яке діє просторова довільна система сил, необхідно і достатньо мати такі умови рівноваги,

$$\begin{aligned}\sum_{K=1}^n F_{KX} &= 0 & \sum_{K=1}^n M_X(\bar{F}_K) &= 0 \\ \sum_{K=1}^n F_{KY} &= 0 & \sum_{K=1}^n M_Y(\bar{F}_K) &= 0 \\ \sum_{K=1}^n F_{KZ} &= 0 & \sum_{K=1}^n M_Z(\bar{F}_K) &= 0\end{aligned}\quad (1.23)$$

які можна сформулювати так: абсолютно тверде тіло перебуватиме в рівновазі лише тоді, коли алгебраїчні суми проекцій усіх сил на координатні осі і алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно координатних осей дорівнюють нулю.

1.5.2 Умови завдання

Дві однорідні прямокутні плити, які зварені під прямим кутом, утримуються в стані рівноваги за допомогою шарнірів і стрижнів, як це зображено на рисунку 1.26. Вага більшої плити $P_1 = 4$ кН, вага меншої плити $P_2 = 2$ кН.

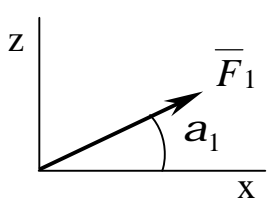
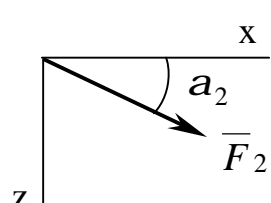
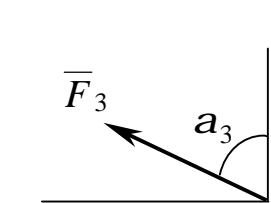
На плити діють дві сили \bar{F}_i і \bar{F}_k і пара сил з моментом M . Величини сил і моменту, напрямлення сил і точка їх прикладення приведені в таблицях 1.1.1 і 1.1.2. Точки прикладення сил K , L і H розміщені на серединах відповідних сторін плит. При розрахунках вважати $a = 0,8$ м.

Визначити реакції в'язів в точках A і B та зусилля в стрижнях.

Таблиця 1.1.1

Величини		Значення величин за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F, \text{кН}$	F_1	2	4	6	8	10	11	10	8	6	4
	F_2	3	5	7	9	7	3	5	9	11	3
	F_3	12	1	10	7	8	9	6	7	8	9
$M_1, \text{кНжм}$		10	12	8	6	12	10	6	8	12	10

Таблиця 1.1.2

Величини сил і точки їх прикладення		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		К	-	Л	К	-	Л	Н	-	К	Н
	$\alpha_{1,0}$	30	-	45	60	-	45	30	-	45	60
		Л	Н	-	-	Л	Н	К	Л	-	К
	$\alpha_{2,0}$	45	60	-	-	45	30	45	60	-	45
		-	Л	Н	Л	К	-	-	Н	Л	-
	$\alpha_{3,0}$	-	45	30	45	60	-	-	45	30	-

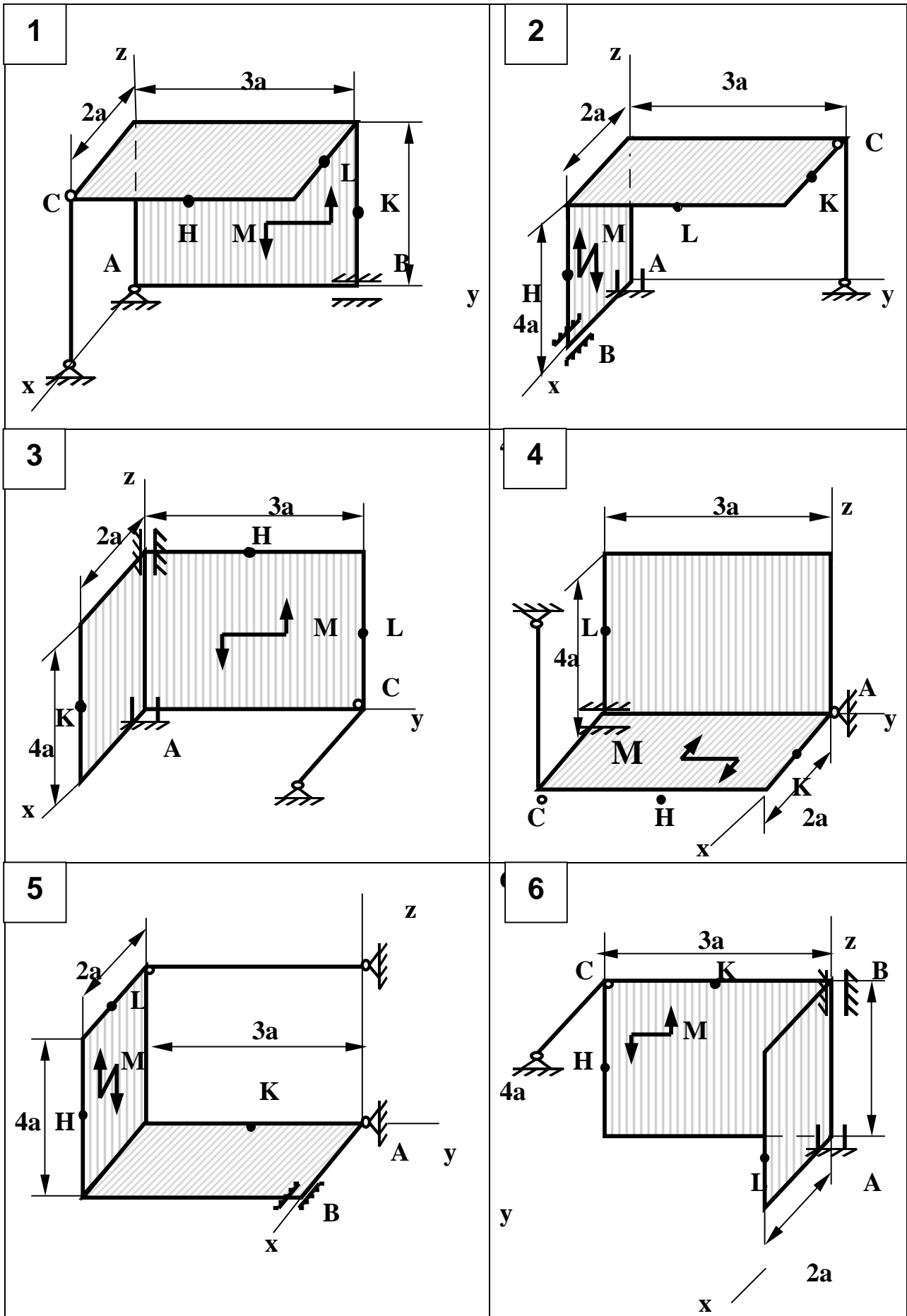


Рисунок 1.26 – Схеми до варіантів завдань

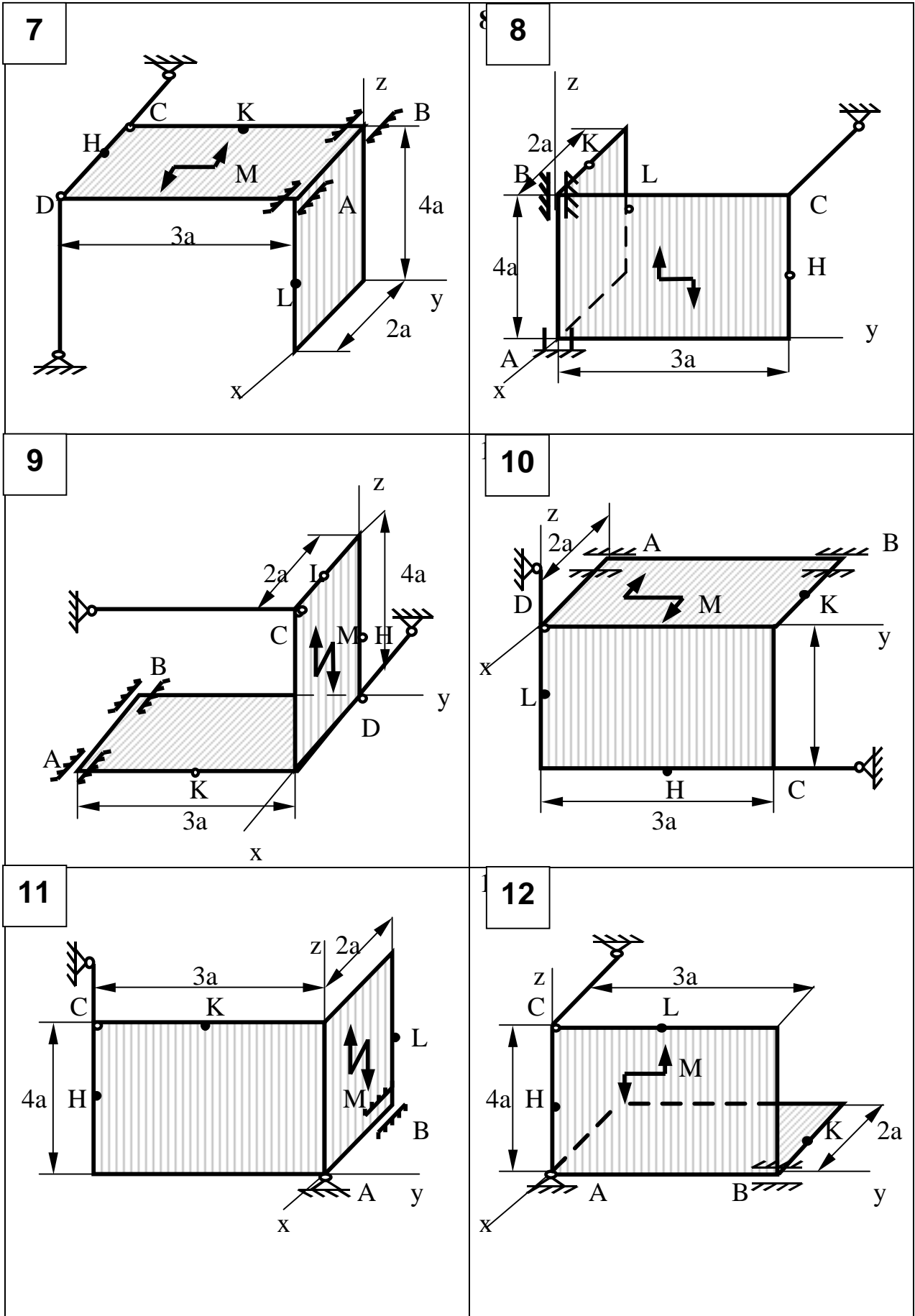


Рисунок 1.26, аркуш 2

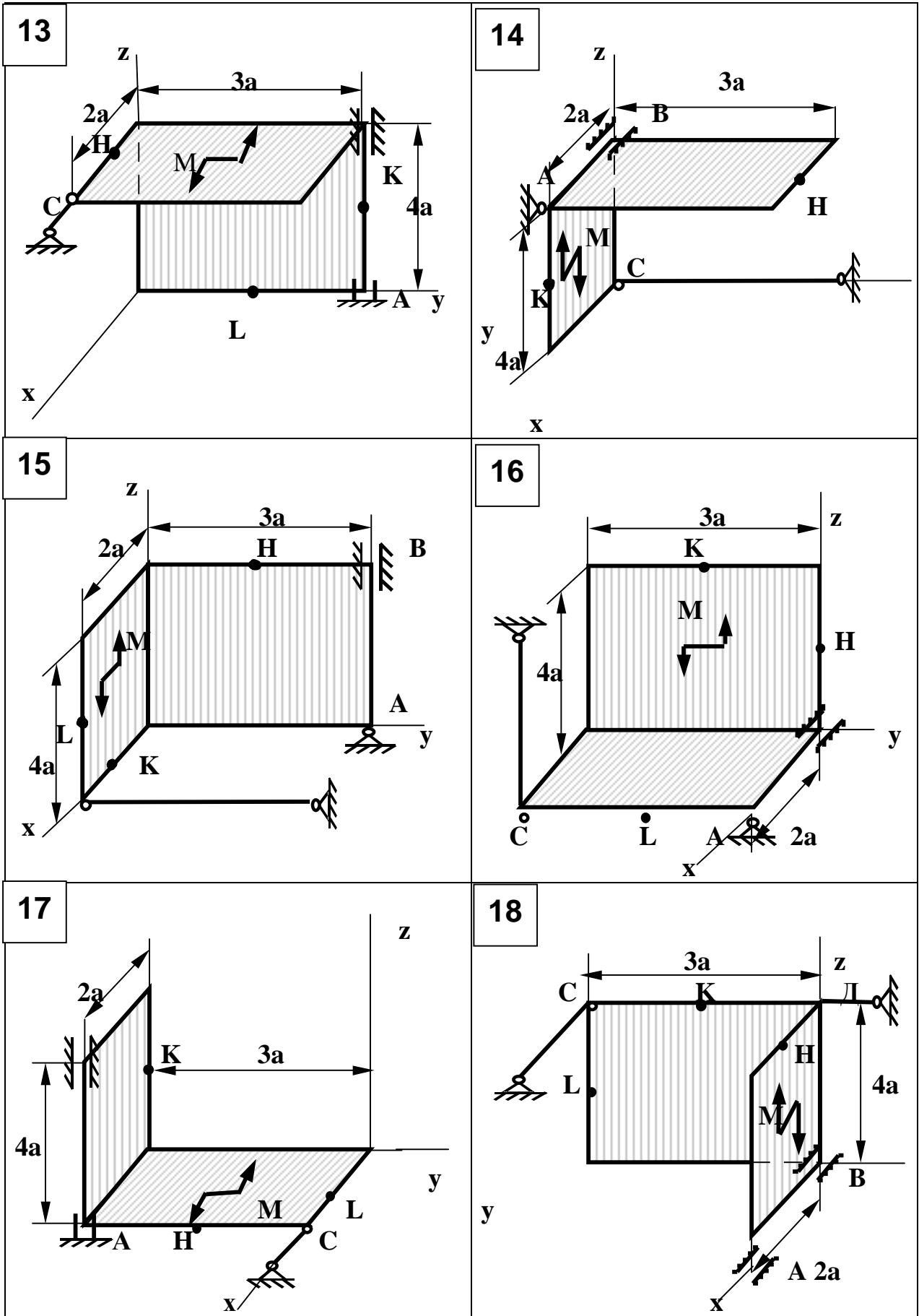


Рисунок 1.26, аркуш 3

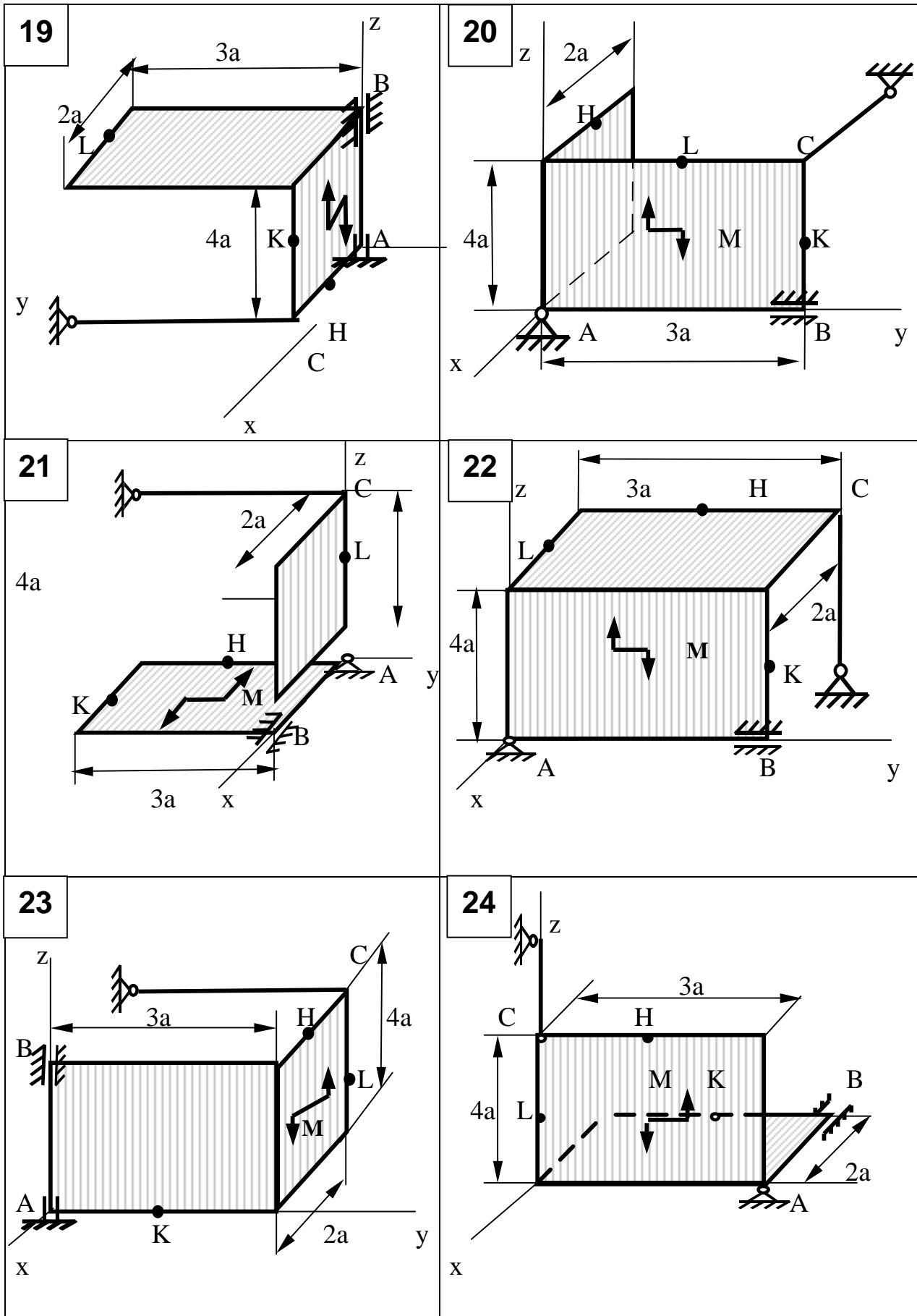


Рисунок 1.26, аркуш 4

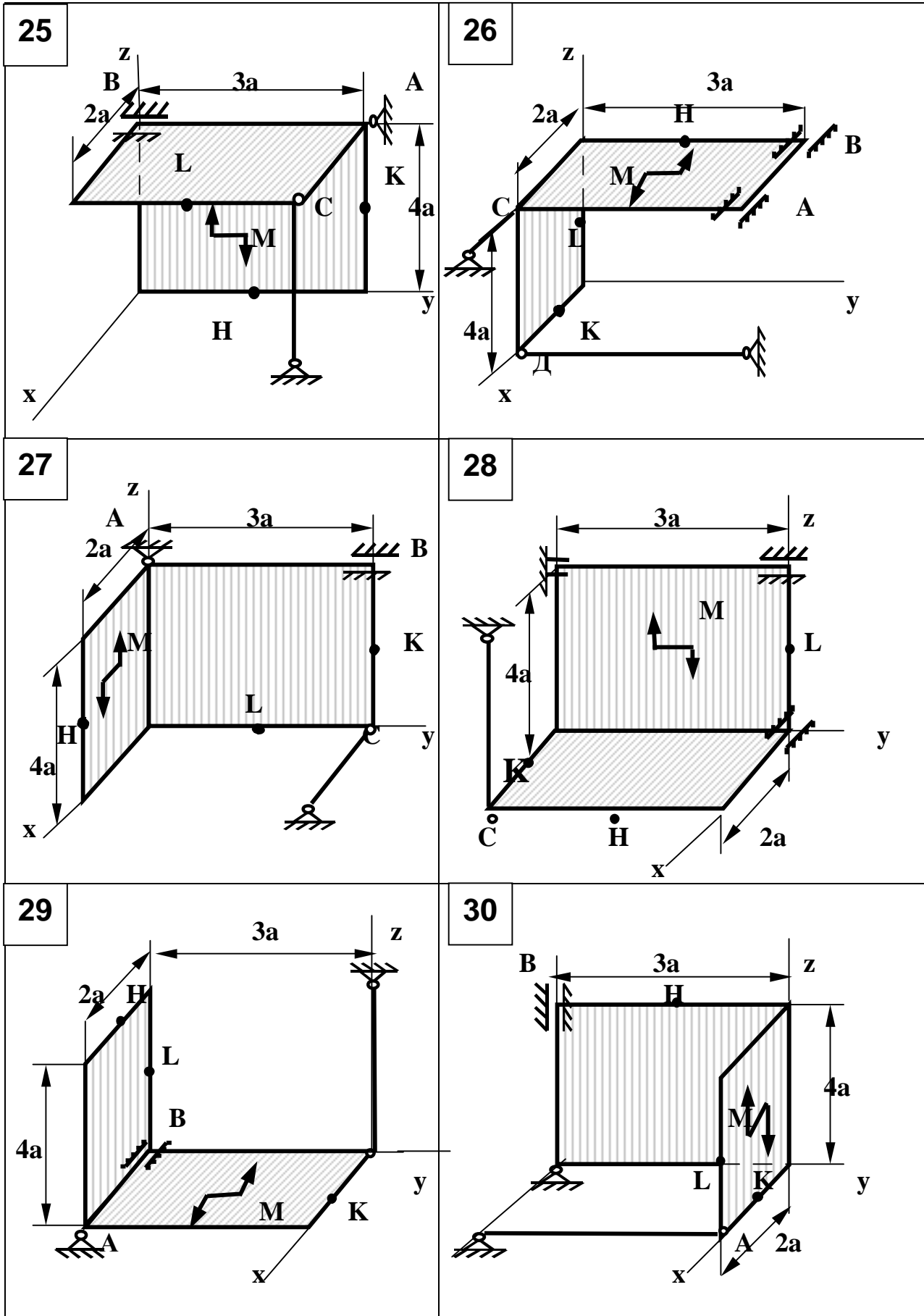


Рисунок 1.26, аркуш 5

1.5.3 Приклад виконання завдання

Дві плити закріплені за допомогою підшипників А і В та стрижнів, які шарнірно з'єднані з точками С і D, як показано на рисунку 1.27.

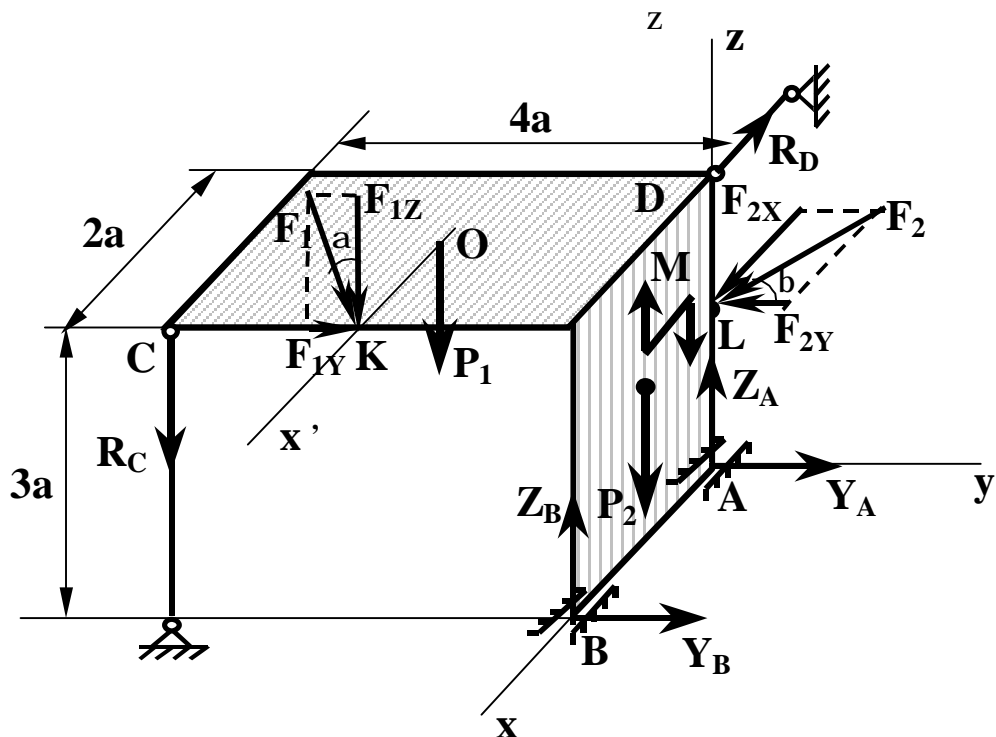


Рисунок 1.27 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Дано: більшої плити $P_1 = 4$ кН, вага меншої плити $P_2 = 2$ кН. Сили $F_1 = 3$ кН і $F_2 = 5$ кН прикладені відповідно до точок К і L, які розміщені у серединах відповідних сторін плит. Кути $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. На вертикальну плиту діє момент $M = 10$ кН·м. При розрахунках вважати $a = 0,8$ м.

Знайти реакції опор.

Рішення

Розглянемо рівновагу плит. Початок координат виберемо в точці А, а осі направимо вздовж сторін плит, як показано на рисунку 1.27.

На плити окрім сил ваги \bar{P}_1 і \bar{P}_2 та зовнішніх сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 і моменту M діють також реакції підшипників А і В, які мають по дві сили ($\bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$)

і реакції стрижнів, які направлені вздовж відповідних осей шарнірів С і D (\bar{R}_C, \bar{R}_D). Тим самим до розв'язку задачі припускається, що кожний із стрижнів розтягнутий.

Плити знаходяться в рівновазі під дією довільної просторової системи сил. Задача визначення опор є статично означеною оскільки кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь рівноваги.

Складаємо систему рівнянь рівноваги:

$$\Sigma F_{KX} = 0, \quad F_2 \sin b - R_D = 0, \quad (1.24)$$

$$\Sigma F_{KY} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_1 \sin a - F_2 \cos b = 0, \quad (1.25)$$

$$\Sigma F_{KZ} = 0, \quad Z_A + Z_B - R_C - P_1 - P_2 - F_1 \cos a = 0, \quad (1.26)$$

$$\Sigma M_X(\bar{F}_K) = 0;$$

$$R_C 4a + P_1 2a + F_1 \cos a \cdot 2a - F_1 \sin a \cdot 3a + F_2 \cos b \cdot 1,5a = 0 \quad (1.27)$$

$$\Sigma M_X(\bar{F}_K) = 0; R_C 2a + F_1 \cos a \cdot 2a - Z_B 2a + P_1 a + P_2 a + F_2 \sin b \cdot 1,5a - R_D 3a - M = 0, \quad (1.28)$$

$$\Sigma M_Z(\bar{F}_K) = 0; Y_B 2a + F_1 \sin a 2a = 0. \quad (1.29)$$

З рівняння (1.29) знаходимо, що:

$$Y_B = -F_1 \sin a = -1,5 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.25) далі знаходимо:

$$Y_A = F_2 \cos b - F_1 \sin a - Y_B = 2,5 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.27) після скорочування на a одержуємо:

$$R_C = \frac{1}{4} (F_1 \sin a \cdot 3 - F_1 \cos a \cdot 2 - P_1 \cdot 2 - F_2 \cos b \cdot 1,5) = -3,11 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.24) знаходимо:

$$R_D = F_2 \sin b = 4,33 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.28) одержуємо:

$$Z_B = \frac{1}{2a} (R_C \cdot 2a + F_1 \cos a \cdot 2a + P_1 a + P_2 a + F_2 \sin b \cdot 1,5a - R_D \cdot 3a - M) = -7,0 \text{ кН}.$$

З рівняння (1.26) знаходимо:

$$Z_A = R_C + P_1 + P_2 + F_1 \cos a - Z_B = 12,49 \text{ кН}.$$

Для перевірки розв'язку складемо суму моментів відносно осі X' , яка проходить через точки К і О.

$$\Sigma M_{X'}(\bar{F}_K) = 0,$$

$$R_C 2a + Z_B 2a + Z_A 2a - P_2 2a - F_2 \cos b 1,5a + Y_A 3a + Y_B 3a = 0.$$

Скоротимо це рівняння на a і підставимо сили:

$$-3,11 \cdot 2 - 7 \cdot 2 + 12,49 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 2,5 \cdot 3 - 1,5 \cdot 3 = 0.$$

Маємо $32,476 - 32,42 \approx 0.$

Перевірка довела, що реакції опор знайдені вірно.

Відповідь:

$$\begin{aligned} \text{Реакції опор дорівнюють } & Y_A=2,5 \text{ кН}; \quad Z_A=5,99 \text{ кН}; \\ & Y_B=-1,5 \text{ кН}; \quad Z_B=-0,51 \text{ кН}; \quad R_C=-3,11 \text{ кН}; \quad R_D=4,33 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Згідно із знаками реакцій можна стверджувати, що стрижень, який з'єднаний з шарніром С, працює на тиск, а реакції Y_B і Z_B мають напрямок, протилежний показаному на рисунку 1.27.

2 КІНЕМАТИКА

2.1 ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ ЗА ЗАДАНИМИ РІВНЯННЯМИ ЇЇ РУХУ

2.1.1 Короткі відомості з теорії

Завдання базується на теоретичних засадах кінематики точки.

У разі, коли рух точки задається координатним способом, відомі закони, за якими змінюються в часі t координати точки X, Y, Z :

$$X = X(t); \quad Y = Y(t); \quad Z = Z(t). \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричному вигляді. Щоб одержати рівняння траєкторії у звичайній (геометричній) формі, з рівнянь (див.2.1) треба вилучити параметр t .

Точка починає рухатись в момент часу $t = 0$. Її вихідні координати визначаються шляхом підстановки в рівняння (див.2.1) зазначеного часу.

Координати точки в якій-небудь інший момент часу можна підрахувати, підставляючи в рівняння (див.2.1) задане значення t .

Вектори швидкості \bar{u} та прискорення \bar{a} точки визначається через їхні проекції на осі нерухомої системи координат - $OXYZ$:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \\ v_x &= \dot{x}, \\ v_y &= \dot{y}, \\ v_z &= \dot{z}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cos(\bar{u}; \wedge X) &= \frac{u_x}{u}, \\ \cos(\bar{u}; \wedge Y) &= \frac{u_y}{u}, \\ \cos(\bar{u}; \wedge Z) &= \frac{u_z}{u}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \dot{x}, & \cos(\bar{a}; \wedge X) &= \frac{a_x}{a}, \\ a_y &= \dot{y}, & \cos(\bar{a}; \wedge Y) &= \frac{a_y}{a}, \\ a_z &= \dot{z}, & \cos(\bar{a}; \wedge Z) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

У рівняннях (2.2) та (2.3) однією чи двома крапками над змінними величинами позначенні відповідно перша чи друга похідні від цих величин за часом.

Вектор прискорення точки можна розкласти на складові уздовж осей координат, що рухаються разом з точкою, - дотичну a_t та нормаль a_n :

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n. \quad (2.4)$$

У цьому разі вектори дотичного \bar{a}_t та нормального \bar{a}_n прискорень можна визначити таким чином:

$$\bar{a}_t = a_t \cdot \bar{t}, \quad (2.5)$$

$$\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n}, \quad (2.6)$$

де a_t та a_n - проекції вектора \bar{a} відповідно на дотичну і нормаль;

\bar{t} та \bar{n} - орти відповідно дотичної та нормалі.

Будемо вважати дотичну спрямованою в бік руху точки, а саме в напрямку її швидкості. В такому разі проекція вектора \bar{u} на дотичну \bar{t} та його модуль u збігаються. Тому

$$a_t = \bar{u} \cdot \bar{t} = \frac{\mathbf{u}_x \cdot a_x + \mathbf{u}_y \cdot a_y + \mathbf{u}_z \cdot a_z}{u}. \quad (2.7)$$

Модуль вектора \bar{a}_t дорівнює модулю a_t , а його напрямок визначається

знаком a_t . Якщо $a_t > 0$, вектор \overline{a}_t спрямований як і дотична (тобто в напрямку швидкості точки), і рух є прискореним. Якщо ж $a_t < 0$, вектор \overline{a}_t спрямований в протилежний бік і рух точки є уповільненим.

Вектор нормального прискорення за напрямком завжди збігається з нормаллю, яка в свою чергу спрямована під прямим кутом в бік увігнутості траєкторії. Модуль цього вектора дорівнює значенню a_n , яке в даному випадку може бути підраховане за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}. \quad (2.8)$$

Маючи значення швидкості та нормального прискорення, можна знайти радіус кривизни траєкторії в місці знаходження точки

$$r = u^2 / a_n. \quad (2.9)$$

2.1.2 Умови завдання

За заданими рівняннями руху точки, що відбувається в площині XOY (табл. 2.1), визначити вид та рівняння траєкторії, початкові координати точки, також її координати в заданий момент часу і відповідні вектори швидкості, повного, дотичного та нормального прискорень, радіус кривизни траєкторії в місці знаходження точки. Необхідні значення коефіцієнтів для рівнянь руху і момент часу взяти з таблиці 2.2, 2.3. Результати розрахунків зобразити на рисунку.

Таблиця 2.1

Номер схеми	$X=X(t), \text{см}$	$Y=Y(t), \text{см}$
1	$a \cdot t^2 + b \cdot t + c$	$d \cdot t + f$
2	$a \cdot t + b$	$c / (d \cdot t + f)$
3	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot \cos(b \cdot \pi t) + f$
4	$a \cdot \sin^2(b \cdot \pi t^2) + c$	$d \cdot \cos^2(b \cdot \pi t^2) + f$
5	$a \cdot e^{b \cdot t} + c$	$d \cdot t + f$
6	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot \cos(2b \cdot \pi t) + f$
7	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t^2) + c$	$d \cdot \sin(b \cdot \pi t^2) + f$
8	$a \cdot t$	$(b \cdot t + c) / (d \cdot t + f)$
9	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$	$a \cdot \cos(2b \cdot \pi t) + f$
10	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot t + f$
11	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$
12	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t^c) + d$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t^c) + f$
13	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t^2) + c$	$d \cdot \cos(b \cdot \pi t^2) + f$
14	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$
15	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$	$d \cdot t + f$
16	$d \cdot t + f$	$a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
17	$c / (d \cdot t + f)$	$a \cdot t + b$
18	$d \cdot \cos(b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$
19	$d \cdot \cos^2(b \cdot \pi t^2) + f$	$a \cdot \sin^2(b \cdot \pi t^2) + c$
20	$d \cdot t + f$	$a \cdot e^{b \cdot t} + c$
21	$d \cdot \cos(2b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$
22	$d \cdot \sin(b \cdot \pi t^2) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t^2) + c$
23	$(b \cdot t + c) / (d \cdot t + f)$	$a \cdot t$
24	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$
25	$d \cdot t + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$
26	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$
27	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t^c) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t^c) + d$
28	$d \cdot \cos(b \cdot \pi t^2) + f$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t^2) + c$
29	$d \cdot \sin(2b \cdot \pi t) + f$	$a \cdot \sin(b \cdot \pi t) + c$
30	$d \cdot t + f$	$a \cdot \cos(b \cdot \pi t) + c$

Таблиця 2.2

Величини	Значення безрозмірних коефіцієнтів до варіантів завдань									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>a</i>	-4	2	-3	4	-2	3	-4	2	-3	4
<i>b</i>	3	-4	2	-3	4	-2	3	-4	2	-3
<i>c</i>	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2

Таблиця 2.3

Величини	Значення безрозмірних коефіцієнтів та моменту часу <i>t</i> до варіантів завдань									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>d</i>	4	-2	3	-4	2	-3	4	-2	3	-4
<i>f</i>	-3	4	-2	3	-4	2	-3	4	-2	3
<i>t, c</i>	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4

2.1.3 Приклад виконання завдання

Дано: $X = 2t, \text{см}; Y = t^2, \text{см}; t = 1 \text{с}.$

Знайти: траєкторію руху точки, швидкість і прискорення точки у заданий момент часу та радіус кривизни траєкторії в заданій точці.

Рішення

Виражаючи t з першого рівняння (2.1) маємо:

$$t = X / 2.$$

Підставивши t в такому вигляді в друге рівняння (2.2) руху, отримаємо рівняння параболи

$$Y = X^2 / 4.$$

Початкові координати точки:

$$X_0 = 2 \cdot 0 = 0 \text{ см}; \quad Y_0 = 0^2 = 0 \text{ см}.$$

Зауважимо, що точка рухається в такому напрямку, де її координати завжди більше нуля. Таким чином, траєкторією точки є не вся парабола, а тільки її права половина.

У заданий момент часу точка має координати

$$X = 2 \cdot 1 = 2 \text{ см}; \quad Y = 1^2 = 1 \text{ см}.$$

Визначимо модуль та напрямок швидкості точки:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2,8 \text{ см/с},$$

$$v_x = \dot{x} = 2 \text{ см/с (const)},$$

$$v_y = \dot{y} = 2t; \quad t = 1 \text{ с}; \Rightarrow u_y = 2 \text{ см/с},$$

$$\cos(\bar{v}; \wedge X) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (кут } 45^\circ),$$

$$\cos(\bar{v}; \wedge Y) = \frac{v_y}{v} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (кут } 45^\circ).$$

Визначимо модуль та напрямок прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ см/с}^2,$$

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = 2 \text{ см/с}^2,$$

$$\cos(\bar{a} \wedge X) = \frac{a_x}{a} = \frac{0}{2} = 0 \text{ (кут } 90^\circ),$$

$$\cos(\bar{a}; \wedge Y) = \frac{a_Y}{a} = \frac{2}{2} = 1 (\text{кут } 90^\circ).$$

Визначимо дотичне та нормальне прискорення точки:

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки $a_\tau > 0$, рух точки - прискорений і вектори \bar{a}_τ та \bar{U} за напрямком збігаються. Підрахуємо радіус кривизни траєкторії

$$r = \frac{u^2}{a_n} = \frac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \approx 5,6 \text{ см.}$$

Результати розрахунків зведені в таблиці 2.4 і зображені на рисунку 2.1.

Таблиця 2.4

Координати , см				Швидкість, см/с			Прискорення, см/с ²					r, см
X ₀	Y ₀	X	Y	v _x	v _y	v	a _x	a _y	a	a _τ	a _n	
0	0	2	1	2	2	2,8	0	2	2	1,4	1,4	5,6

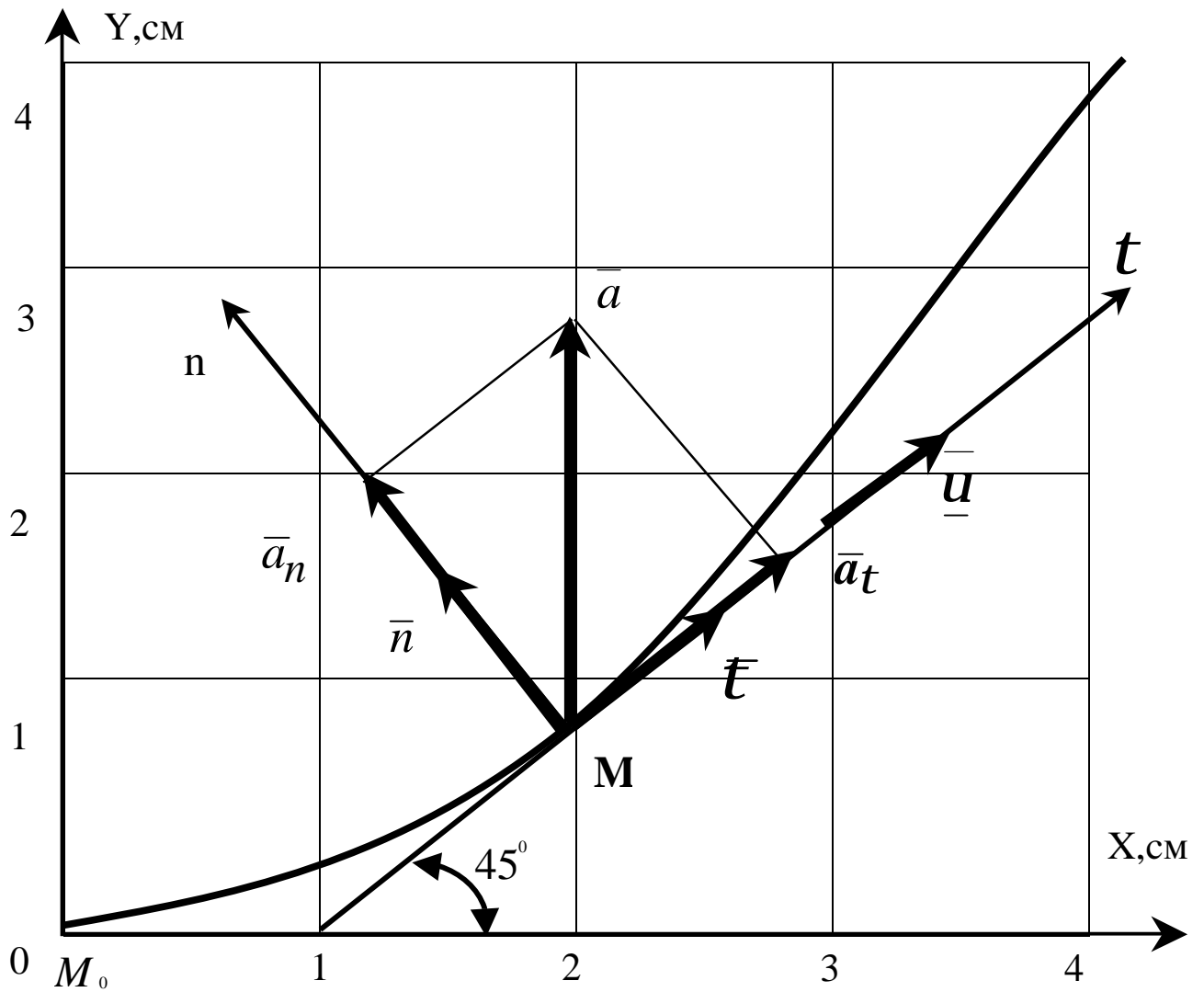


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема до виконання завдання

Відповідь:

$$u=2,8 \text{ см/с}, a= 2\text{см/с}^2, r= 5,6 \text{ см.}$$

2.2 ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧОК І ТІЛ ПРИ ПОСТУПАЛЬНОМУ ТА ОБЕРТАЛЬНОМУ РУСІ

2.2.1 Короткі відомості з теорії

У кінематиці твердого тіла вивчається рух абсолютно твердого тіла відносно вибраної системи відліку.

Вивчення руху твердого тіла означає вміння знаходити:

- 1) траєкторію кожної точки тіла на заданому проміжку часу;
- 2) положення тіла відносно вибраної системи координат у будь-який момент часу;
- 3) швидкість і прискорення точок тіла в будь-який момент часу.

Задати рух твердого тіла - значить вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти для будь-якого моменту часу положення тіла відносно вибраної системи координат.

Для визначення положення тіла в кожний момент часу досить задати деяке число незалежних величин, які однозначно залежать від часу. Мінімальне число цих величин залежить від характеру руху тіла. Ці величини вибирають так, щоб вони в умовах даної задачі найпростішим способом описували рух тіла. Якщо величини, які визначають положення тіла, задані як функції часу, то ці функції і є рівняннями руху тіла.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла:

- 1) поступальний;
- 2) обертальний навколо нерухомої осі;
- 3) плоско-паралельний;
- 4) обертальний рух навколо нерухомої точки;
- 5) рух вільного твердого тіла.

Поступальний і обертальний рухи навколо нерухомої осі належать до простих рухів. Інші види руху твердого тіла можна звести до одного із цих ру-

хів або їх сукупності.

Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається рух твердого тіла, при якому відрізок прямої, що з'єднує будь-які дві його точки, рухається паралельно самому собі.

Теорема 1. При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії.

Теорема 2. При поступальному русі твердого тіла вектори швидкостей усіх його точок рівні між собою в кожний момент часу.

Теорема 3. При поступальному русі твердого тіла вектори прискорень усіх його точок рівні між собою в кожний момент часу.

Отже, при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, а вектори швидкостей і вектори прискорень усіх його точок відповідно однакові в кожний момент часу.

Поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки залишаються нерухомими. Пряма, проведена через ці дві нерухомі точки, називається віссю обертання. При обертальному русі навколо нерухомої осі положення твердого тіла визначається кутом повороту j , де $j = j(t)$. Це співвідношення називається рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі (рис. 2.2).

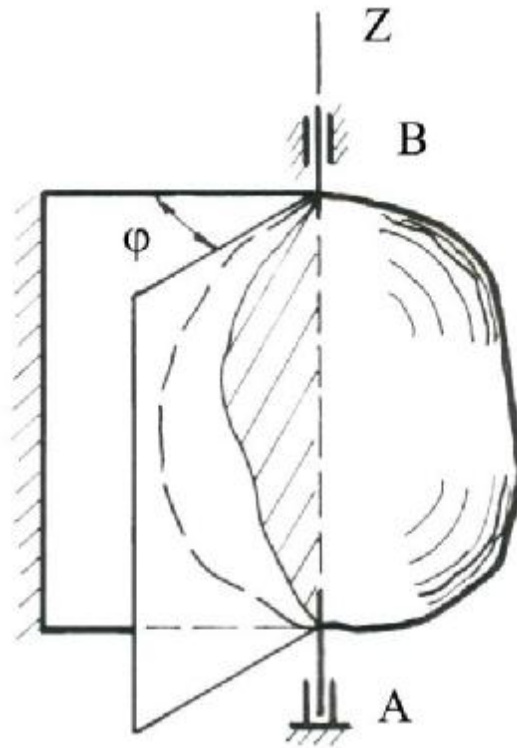


Рисунок 2.2 – Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Для вимірювання кута \dot{j} беруть дві напівплощини (див. рис. 2.2), які проходять через вісь обертання, причому одна з них нерухома, а друга незмінно зв'язана з тілом, яке обертається. Тоді двогранний кут між цими двома площинами називається кутом повороту тіла. Напрямок відліку кута повороту протилежний руху стрілки годинника, якщо дивитися з додатного кінця осі обертання.

Зміну кута повороту тіла j з часом характеризує фізична величина — кутова швидкість ω , яка дорівнює похідній за часом від кута повороту j , тобто $\omega = \dot{j}$. Кутова швидкість — це вектор, напрямлений за віссю обертання в той бік, з якого бачимо обертання, яке відбувається проти руху стрілки годинника (для правої системи осей координат). В міжнародній системі одиниць СІ кутова швидкість має розмірність рад/с. У техніці кутову швидкість часто визначають кількістю обертів за хвилину (n обертів за хвилину). Зв'язок між цими одиницями вимірювання задається формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1}.$$

Зміну кутової швидкості в часі характеризує фізична величина — кутове прискорення. Кутове прискорення — це вектор, який збігається з напрямом вектора кутової швидкості, якщо обертальний рух прискорений, і протилежний йому, якщо обертальний рух сповільнений. Кутове прискорення дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту тіла за часом, тобто

$$e = \dot{w} = \ddot{\varphi}.$$

Задачі, в яких йдеться про обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, можна розділити на три основних типи:

- 1) визначення кутового переміщення, кутової швидкості і кутового прискорення тіла;
- 2) визначення швидкостей і прискорень точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі;
- 3) передача обертального руху від одного тіла до другого.

Розв'язуючи задачі першого типу, треба розрізняти три випадки обертального руху тіла: рівномірний, рівнозмінний і нерівномірний. При цьому слід користуватися такими формулами:

– для рівномірного руху:

$$e = 0; \quad w = \text{const}; \quad j = j_0 + wt;$$

– для рівнозмінного:

$$e = \text{const}; \quad w = w_0 + et; \quad j = j_0 + w_0t + \frac{et^2}{2};$$

– для нерівномірного:

$$j = f(t).$$

$$w = \frac{dj}{dt} = \dot{j}; \quad e = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2j}{dt^2} = \ddot{j}$$

При розв'язанні задач другого типу застосовуємо такі формули:

$$s = Rj ,$$

$$u = R\omega ,$$

$$a_t = R\dot{\omega}; \quad a_n = R\omega^2; \quad a = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} ,$$

де R – радіус обертання точки.

Вектори швидкості \mathbf{v} і тангенціальне прискорення a_t напрямлені за дотичною до кола, яке описує дана точка тіла, а вектор нормального прискорення a_n напрямлений за радіусом цього кола до його центру.

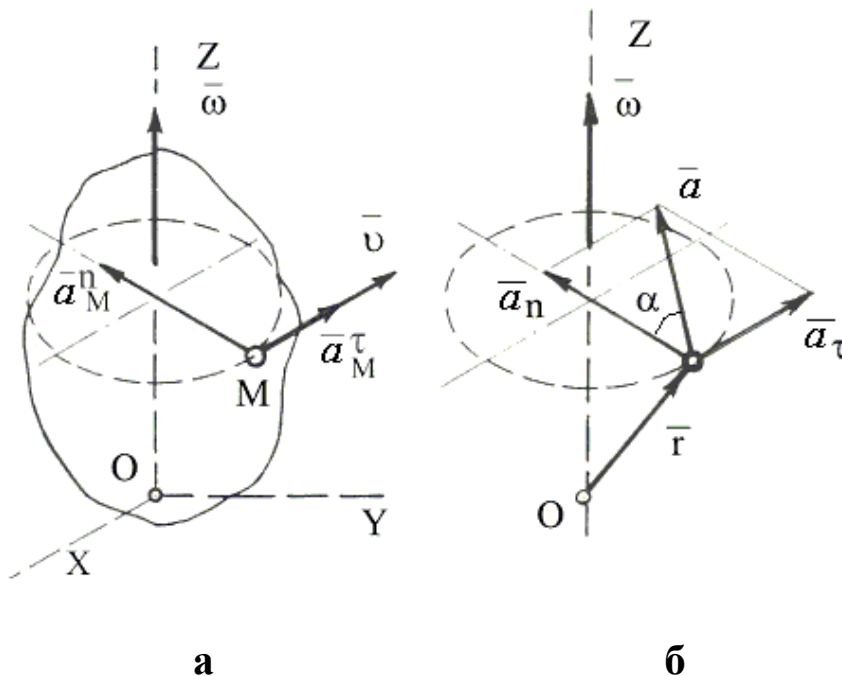


Рисунок 2.3 – Напрямок векторів прискорення точки M

Якщо обертальний рух тіла прискорений, то вектори \mathbf{u} і a_t мають однаковий напрям, якщо рух сповільнений – то напрями протилежні (див. рис. 2.3, а).

Повне прискорення утворює з перпендикуляром, опущеним з точки на вісь обертання, кут α , який відлічується від вектора повного прискорення до нормального прискорення (див. рис. 2.3, б).

Передача обертання від одного твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, до другого твердого тіла, яке обертається навколо другої нерухомої осі, здійснюється за допомогою зубчастого або фрикційного зачеплення двох коліс (рис.2.4), або за допомогою ремінної передачі (рис.2.5).

При внутрішньому зачепленні (див.рис.2.4, а) і не перехресній пасовій

передачі (див.рис.2.5, а) напрями обертань обох коліс збігаються. При зовнішньому зачепленні (див.рис.2.4, б) і перехресній пасовій передачі (див.рис.2.5, б) напрями обертань коліс протилежні.

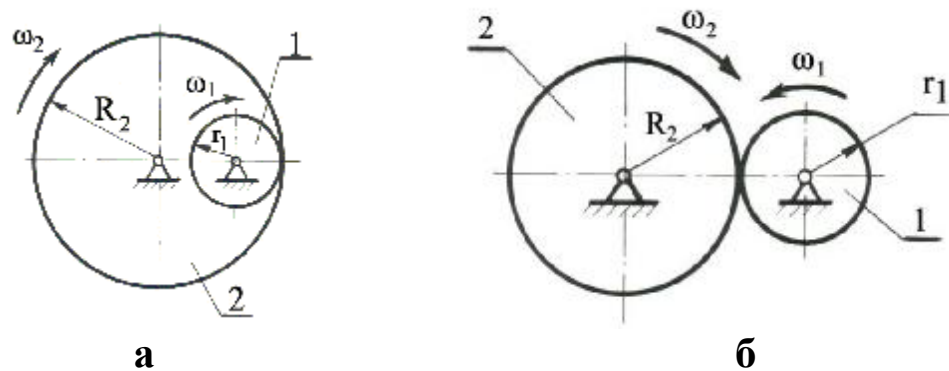


Рисунок 2.4 – Приклад зубчастого зачеплення

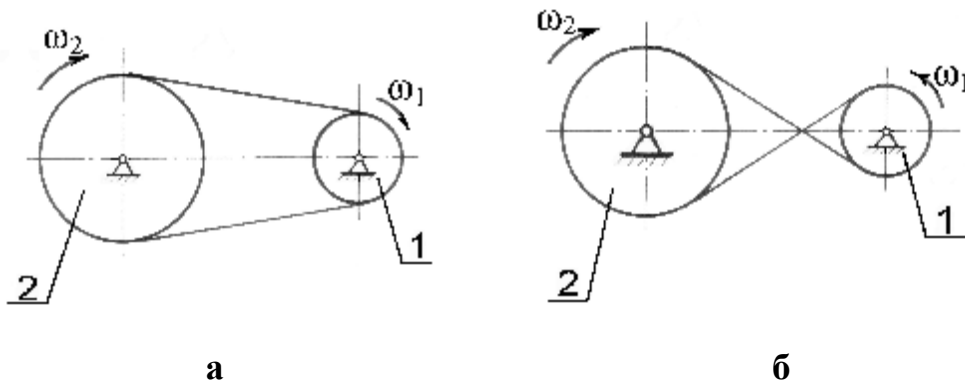


Рисунок 2.5 – Приклад ремінної передачі

Величини швидкостей на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зачепленні, однакові. Однакові за модулем і швидкості на ободі шківів пасової передачі, якщо немає ковзання паса по шківу. Кутові швидкості коліс обернено пропорційні кількості зубців, радіусам, або діаметрам коліс:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1},$$

де w_1 і w_2 — модулі кутових швидкостей;

r_1, r_2 — радіуси коліс;

d_1, d_2 — діаметри коліс;

z_1, z_2 — кількість зубців відповідно першого і другого коліс.

2.2.2 Умови завдання

Механізм складається із ступінчатих коліс 1...3, які знаходяться в зачепленні або зв'язані між собою ремінною передачею, зубчатої рейки 4 і тягаря 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на циліндричний барабан одного із коліс (див. рис. 2.6).

На ободі коліс позначені точки А, В і С.

У стовпці «Задано» таблиці 2.4 указані рівняння руху ведучого тіла механізму, а також лінійні і кутові переміщення одного із тіл системи.

де $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – закон обертання коліс, відповідно 1,2,3, радіан;

$\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ – закон зміни їх кутових швидкостей, c^{-1} ;

$S_4(t)$, $S_5(t)$ – закони руху відповідно зубчатої рейки і тягаря, (см);

$v_4(t)$, $v_5(t)$ – закони зміни лінійних швидкостей зубчатої рейки і тягаря.

Додатні спрямування для φ і ω – проти руху стрілки годинника, для S_4 , S_5 , v_4 , v_5 - в бік додатних спрямувань осей, відповідно X,Z.

Завдання. Згідно з заданим рівнянням руху ведучого тіла механічної системи визначити кінематичні характеристики вказаних точок і тіл, а також лінійні і кутові переміщення зазначених тіл згідно із заданим переміщенням одного із тіл системи.

Примітки.

1 Для схем 1...3 повинна виконуватись умова складення механізму, наприклад для схеми 1:

$$R_1 = R_2 + 2R_3.$$

З умови складення механізму можна знайти відсутній розмір одного із коліс механізму.

2 Якщо у кінематичній схемі механізму застосовується не ступінчатий блок коліс, а колесо одного розміру, то цей розмір вважається як більший радіус ступінчатого тіла.

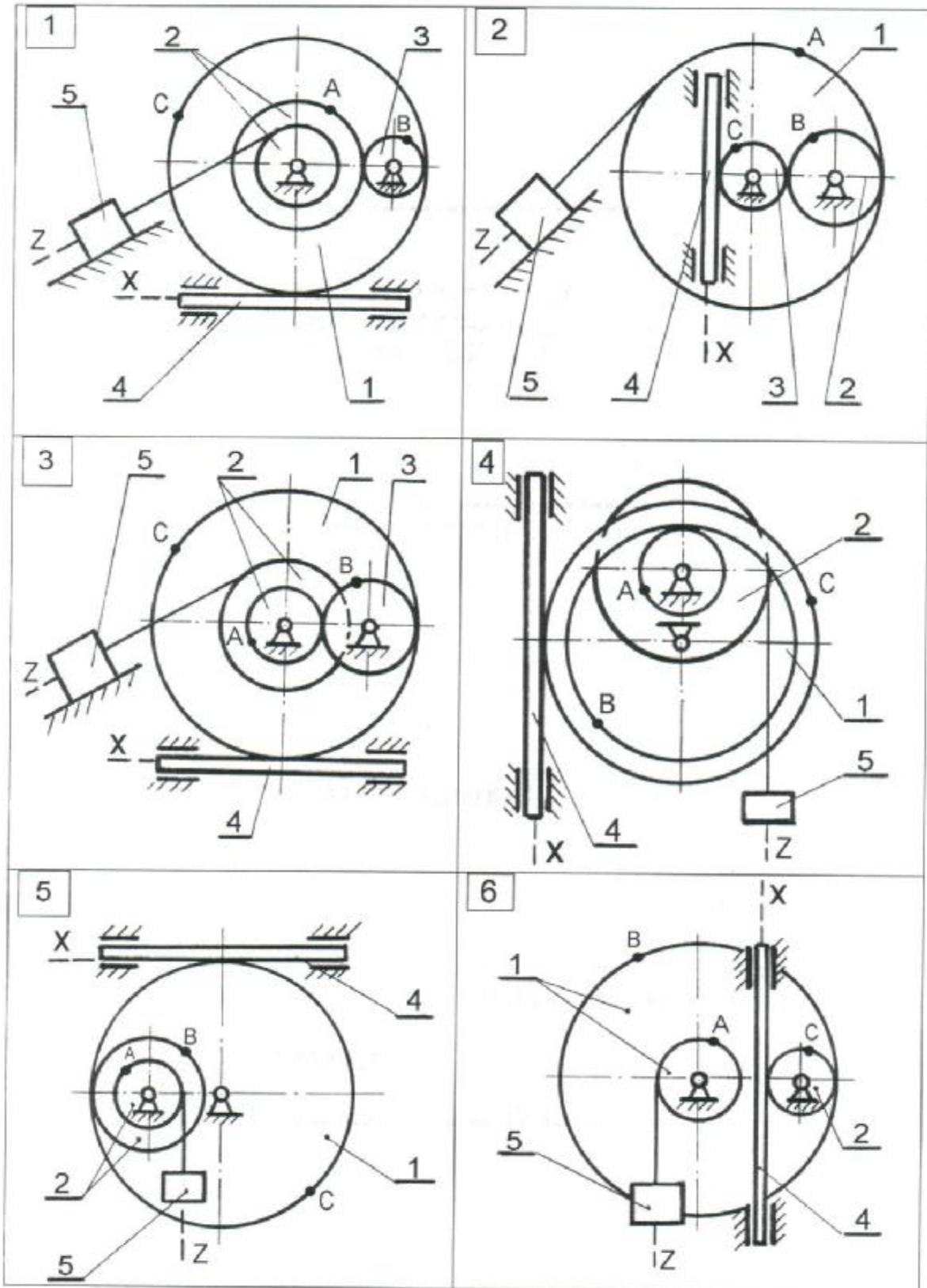


Рисунок 2.6 – Схеми до варіантів завдання

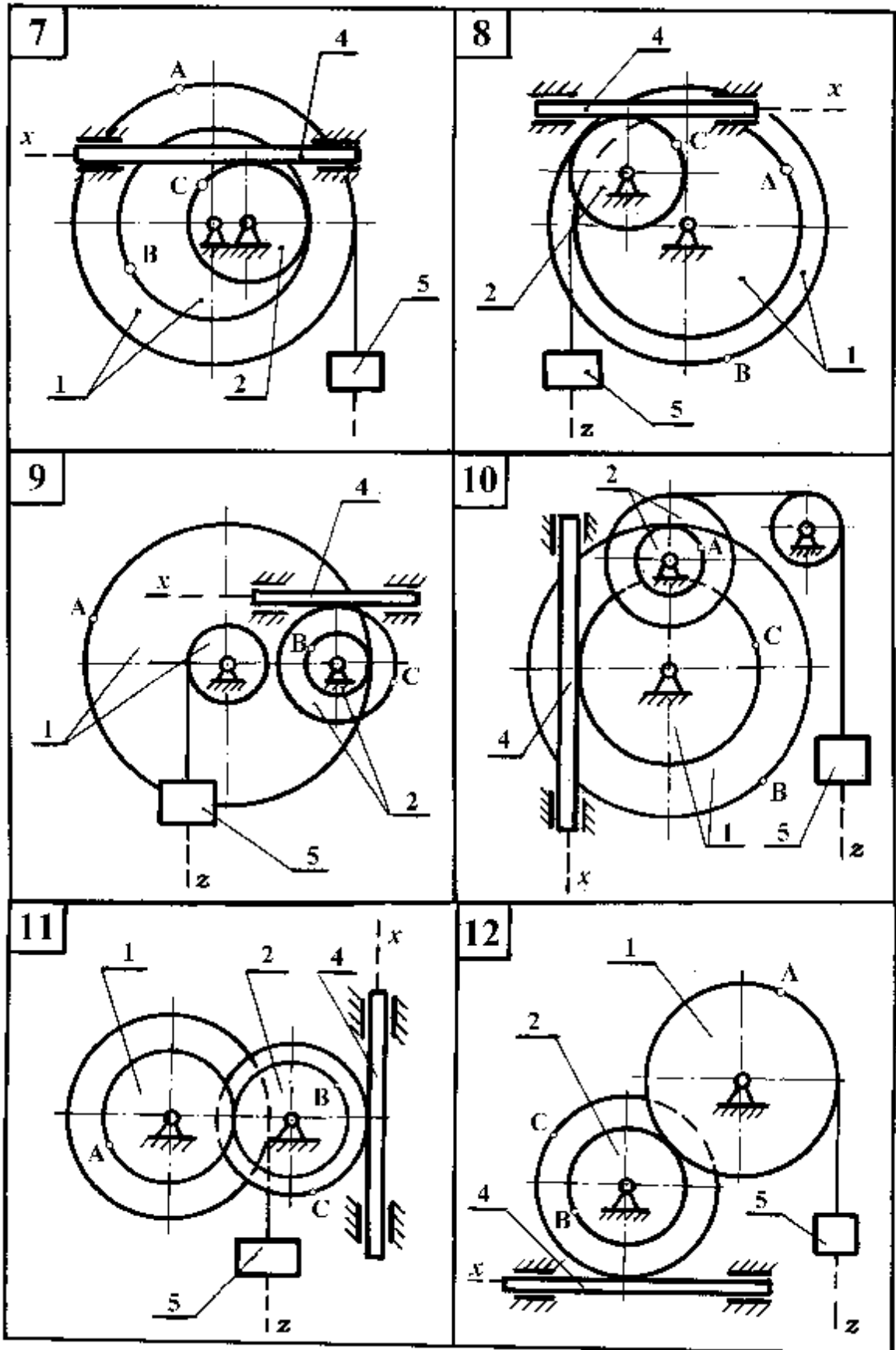


Рисунок 2.6, аркуш 2

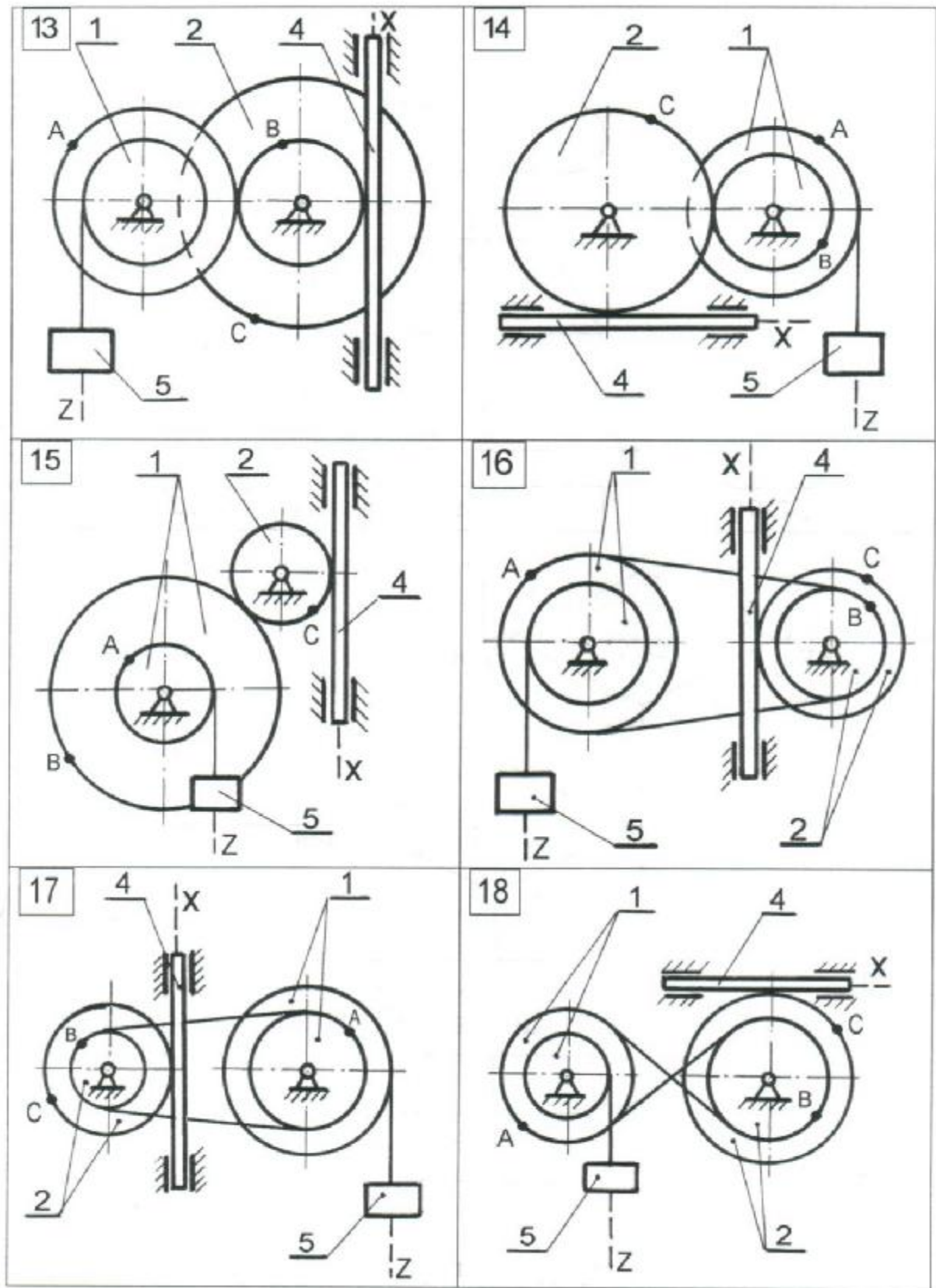


Рисунок 2.6, аркуш 3

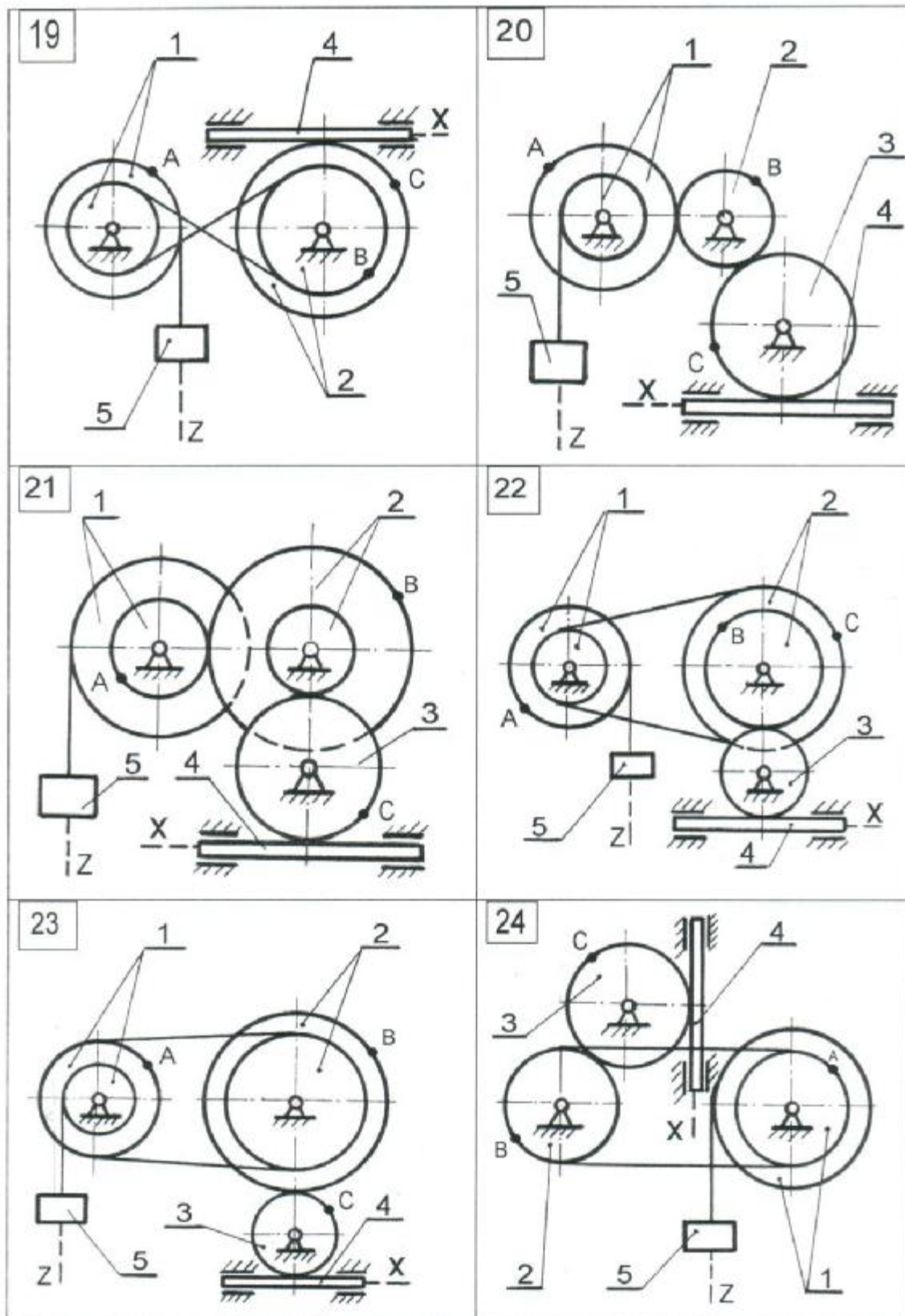


Рисунок 2.6, аркуш 4

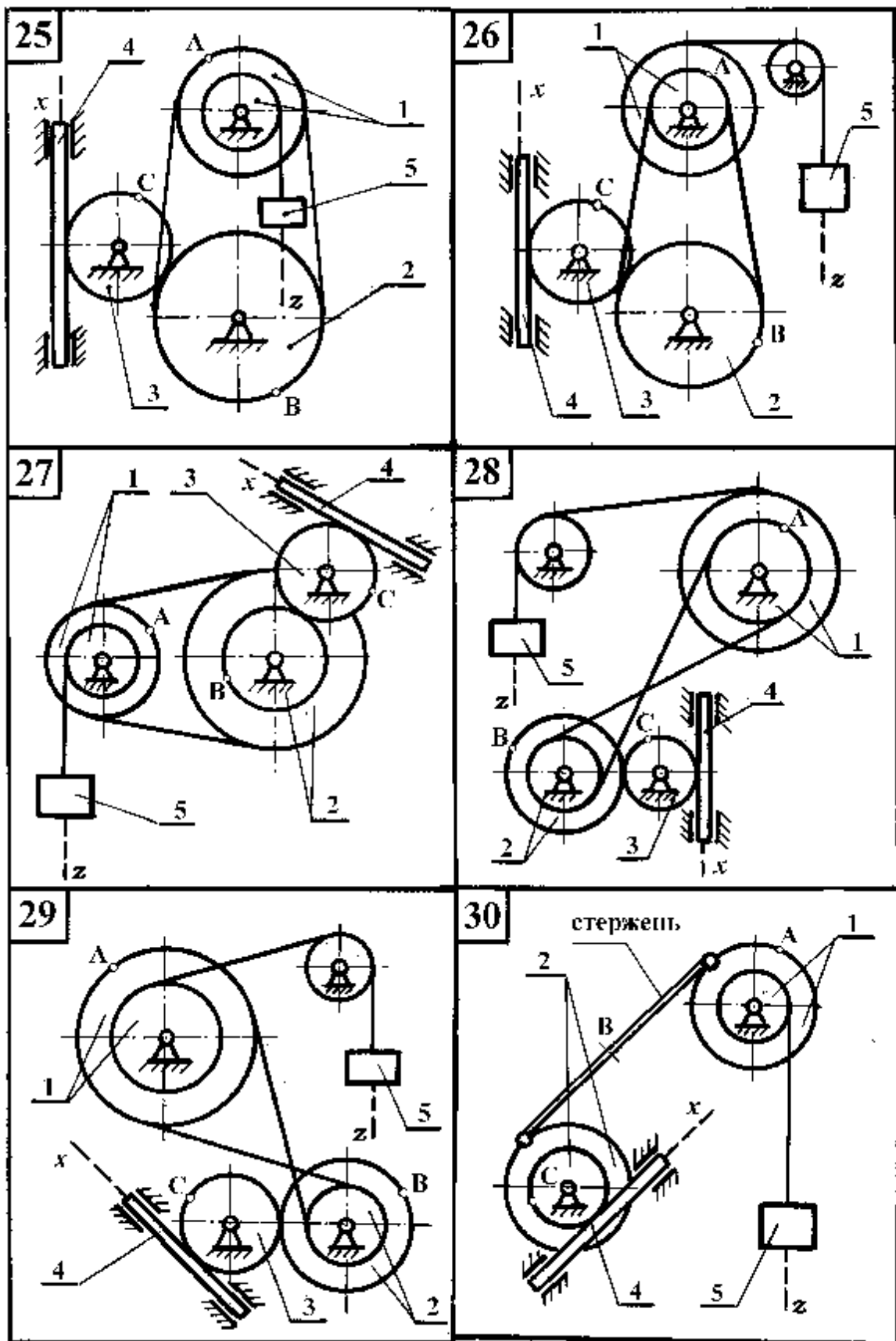


Рисунок 2.6, аркуш 5

Таблиця 2.4 (для схем 1...10)

Індекс шифру	Розміри коліс, см				
	Колесо 1		колесо 2		Колесо 3
	R_1	r_1	R_2	r_2	R_3
0	80	60	45	25	Для кінематичних схем 1...3 Розмір колеса підлягає знаходженню із умови складання механізму
1	85	62	48	26	
2	90	64	50	28	
3	95	68	52	30	
4	100	70	54	28	
5	105	72	52	25	
6	110	70	50	26	
7	115	68	48	28	
8	120	66	46	20	
9	125	64	44	22	

Таблиця 2.5 (для схем 11...30)

Індекс шифру	Розміри коліс, см				
	колесо 1		колесо 2		колесо 3
	R_1	r_1	R_2	r_2	R_3
0	40	20	30	15	24
1	45	22	32	18	26
2	50	24	36	20	28
3	55	28	42	22	30
4	60	30	40	24	32
5	65	32	50	26	34
6	70	34	54	28	36
7	75	36	58	30	38
8	80	38	62	32	40
9	85	40	66	34	42

Таблиця 2.6 (для схем 1...30)

Індекс шифру	Задано		Знайти	
	Рівняння руху, см, рад	Переміщення лінійне, см, кутове, оберти	Швидкості, см/с	Прискорення, см/с ²
0	$S_4 = 8 + 40t^2$	$\varphi_1 = 0,8$	v_A, v_5 ω_1, ω_2	ε_1, a_5 a_B
1	$S_5 = 7 + 90t^2$	$\varphi_2 = 1,5$	v_c, v_4 ω_1, ω_2	ε_2, a_4 a_B
2	$\varphi_1 = 0,5 + t^2$	$S_4 = 200$	v_c, v_4 ω_1, v_5	ε_1, a_4 a_B
3	$\varphi_2 = 1 + 1,5t^2$	$S_5 = 150$	v_A, v_4 ω_1, v_5	ε_1, a_5 a_A
4	$S_4 = 10 + 100t^2$	$\varphi_2 = 2$	v_B, v_5 ω_1, ω_2	ε_2, a_5 a_A
5	$S_5 = 5 + 40t^2$	$\varphi_1 = 0,6$	v_c, v_4 ω_1, ω_2	ε_2, a_4 a_C
6	$\varphi_1 = 1 + 0,5t^2$	$\varphi_2 = 1,8$	v_B, v_4 ω_2, v_5	ε_2, a_4 a_C
7	$\varphi_2 = 2 + 0,5t^2$	$\varphi_1 = 1,2$	v_A, v_4 ω_1, v_5	ε_1, a_5 a_B
8	$S_4 = 5 + 60t^2$	$S_5 = 180$	v_A, v_5 ω_1, ω_2	ε_1, a_5 a_A
9	$S_5 = 18 + 70t^2$	$S_4 = 220$	v_B, v_4 ω_1, ω_2	ε_2, a_4 a_c

2.2.3 Приклад виконання завдання

Дано: схема механізму (див. рис. 2.7); рівняння поступального руху тягаря 5 $Z_5 = 10 + 100t^2$, см.

Розміри коліс механізму $R_1 = 50$ см; $r_1 = 30$ см;

$R_2 = 60$ см; $r_2 = 40$, см;

Знайти:

- 1) закони зміни кутових швидкостей коліс 1 і 2: $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$;
- 2) кутову швидкість и кутове прискорення колеса 2: ω_2, ϵ_2 ;
- 3) лінійну швидкість і прискорення точки В : v_B, a_B^{τ}, a_B^n ;
- 4) швидкість зубчатої рейки 4: v_4 .

Усі обчислення виконати для моменту часу, коли кут повороту ступінчатого колеса 2

$$\varphi_2 = 0,7 \text{ оберту.}$$

Рішення

1 Знайдемо момент часу τ , для якого кут повороту ступінчатого колеса 2, φ_2 становить $\varphi_2 = 0,7$ оберту при заданому русі тягаря 5 $Z_5 = 10 + 100t^2$, см. Для цього установимо залежність кута повороту колеса 2 – φ_2 від переміщення тягаря 5 – Z_5

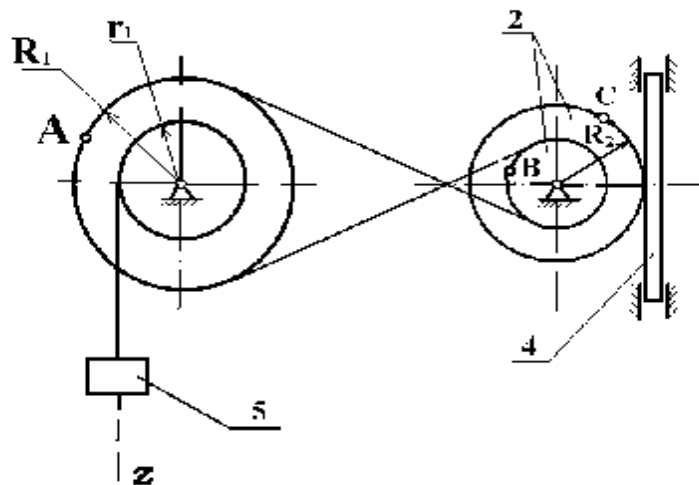


Рисунок 2.7 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

$$\varphi_1(t) = Z_5(t)/r_1 ; \varphi_1(t) = (10+100t^2)/30; \varphi_2(t) \cdot r_2 = \varphi_1(t) \cdot R_1;$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot R_1/r_2, \quad (2.10)$$

$$\varphi_2(t) = Z_5(t) \cdot R_1/r_1 \cdot r_2 \quad (2.11)$$

Співвідношення (2.11) установлює зв'язок між лінійними переміщеннями тягара 5 і кутом повороту колеса 2.

Згідно умови задачі $\varphi_2 = 0,7$ оберту,

$$\varphi_2 = 0,7 \cdot 2 \cdot 3,14 = 4,39 \text{ рад.}$$

Цей кут повороту відповідає моменту часу τ , який можна знайти із співвідношення $\varphi_2 = \varphi_{2(t=\tau)} - \varphi_{2(t=0)}$.

$$\varphi_2 = (10+100\tau^2) \cdot 50/30 \cdot 40 - 10 \cdot 50/30 \cdot 40 = 25/6\tau^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{6 \cdot 4,39}{25}} = 1,02 \text{ с.}$$

2 Знайдемо кутові швидкості усіх колес механізму як функції часу t .

Оскільки закон руху тягара 5 заданий умовою задачі, знаходимо його швидкість

$$v_5 = \dot{z}(t) = 200t \text{ см/с.}$$

Тягар 5 ниткою зв'язаний з циліндричною поверхнею радіуса r_1 ступінчатого колеса 1.

$$v_5 = \omega_1 r_1, \quad \omega_1 = v_1/r_1, \quad \omega_1 = 200t/30 \text{ с}^{-1}.$$

Ступінчаті колеса 1 і 2 зв'язані між собою перехресною передачею. Напрями обертань коліс протилежні $\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2$.

$$\omega_2 = \omega_1 R_1 / r_2 = 200t \cdot 50 / 30 \cdot 40 = 25t/3, \text{ c}^{-1}.$$

Отже, $\omega_1 = 20 \cdot t/3 \text{ (c}^{-1}\text{)}$, $\omega_2 = 25t/3, \text{ c}^{-1}$.

Для заданого моменту часу $\omega_1 = 6,85, \text{ c}^{-1}$; $\omega_2 = 6,55, \text{ c}^{-1}$.

3 Знаходимо швидкість переміщення зубчатої рейки 4.

$$v_4 = v_k = \omega_2 R_2,$$

коли $t = \tau = 1,02, \text{ c}$.

$$v_4 = 6,55 \cdot 60 = 393 \text{ см/с}.$$

4 Знаходимо кутове прискорення ступінчатого колеса 2.

$$e_2 = d\omega_2 / dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{25}{3} t \right) = 25/3 = 8,33 \text{ c}^{-2}.$$

5 Знаходимо швидкість точки В:

$$v_B = \omega_2 r_2 = 6,55 \cdot 40 = 262 \text{ см/с}$$

6 Знаходимо прискорення точки В.

Для точки В $\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$, де $a_B^n = \omega_2^2 r_2$, $a_B^\tau = \varepsilon_2 r_2$.

Тоді для моменту часу $t = \tau = 1,02 \text{ c}$ маємо:

$$a_B^n = 6,55^2 \cdot 40 = 1716,1 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B^t = 8,33 \cdot 40 = 333,2 \text{ см/с}^2$$

Модуль повного прискорення точки В

$$7 a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^t)^2} = \sqrt{1716,1^2 + 333,2^2} = 1748,14 \text{ см/с}^2.$$

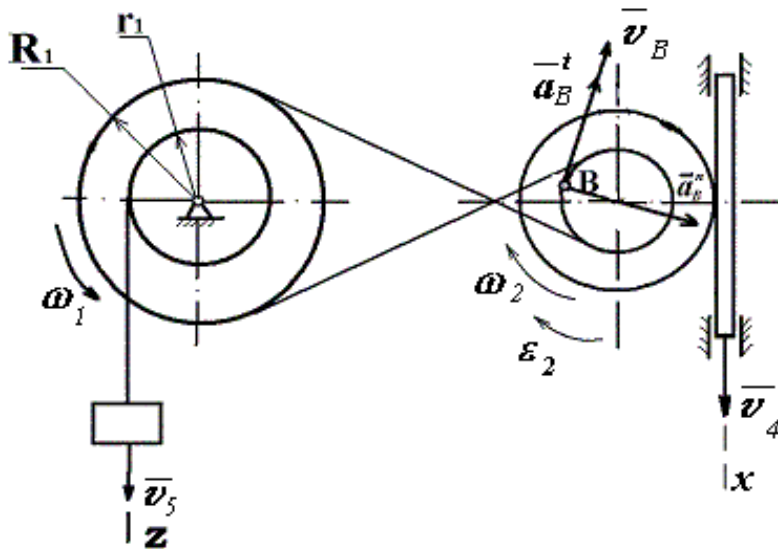


Рисунок 2.8 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Усі швидкості і прискорення точок, а також напрямки кутових швидкостей показані на рис. 2.8.

Відповідь:

$$\omega_1 = 20t/3 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 25t/3 \text{ с}^{-1}; \omega_{2(t=\tau)} = 6,55 \text{ с}^{-1}; \varepsilon_2 = 8,33 \text{ с}^{-2};$$

$$v_B = 262 \text{ см/с}; a_B = 1748,14 \text{ см/с}^2; v_4 = 393 \text{ см/с}.$$

2.3 ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ЙОГО ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ

2.3.1 Короткі відомості з теорії

Плоско-паралельний (плоский) рух твердого тіла зводиться до руху проєкції (плоскої фігури) цього тіла на площину, паралельну площинам, в яких рухаються його точки.

Рух плоскої фігури в її площині складається з поступального руху разом з довільною точкою (полюсом) і обертального руху навколо полюса.

Кінематичними характеристиками такого руху є кутова швидкість w та кутове прискорення e плоскої фігури.

Крім того, рух плоскої фігури в кожний момент часу зводиться до миттєвого обертального руху навколо певної точки, що називається миттєвим центром обертання.

Виходячи з цього, швидкість v_B довільної точки B плоскої фігури визначається за формулою:

$$\bar{u}_B = \bar{u}_A + \bar{u}_{BA}, \quad (2.12)$$

де \bar{u}_A - вектор швидкості полюса A ,

\bar{u}_{BA} - вектор швидкості точки B в обертальному русі плоскої фігури

навколо полюса A . При цьому вектор \bar{u}_{BA} - перпендикулярний до лінії AB , і його числове значення:

$$\bar{u}_{BA} = w_{AB} AB \quad (2.13)$$

де w_{AB} - кутова швидкість плоскої фігури.

Крім того, швидкість довільної точки B можна знайти, використовуючи теорему: проєкції швидкостей двох довільних точок A і B на напрям відрізка AB , що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній, тобто:

$$(\mathbf{u}_A)_{npAB} = (\mathbf{u}_B)_{npAB}. \quad (2.14)$$

Але найбільш універсальним є спосіб знаходження швидкостей довільних точок плоскої фігури за допомогою поняття миттєвого центру швидкостей-точки плоскої фігури, швидкість якої в розглядуваний момент часу дорівнює нулю, і яка є також миттєвим центром обертання.

Отже швидкість точок плоскої фігури можна розглядати як швидкість обертального руху навколо миттєвого центру швидкостей. Тому швидкості всіх точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей і напрямлені в бік обертання фігури, а модулі швидкостей пропорційні відстаням точок до миттєвого центру швидкостей-точки P .

$$\frac{\mathbf{u}_A}{AP} = \frac{\mathbf{u}_B}{BP} = \dots = \frac{\mathbf{u}_K}{KP} = \mathbf{W}_{AB}. \quad (2.15)$$

Знаючи положення миттєвого центру швидкостей і швидкість однієї з точок, можна за допомогою формули (2.15) знайти швидкість всіх інших точок та кутову швидкість плоскої фігури.

Прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорень полюса і цієї точки в обертальному русі фігури навколо полюса, тобто:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.16)$$

Тут дотичне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^t = e_{AB} AB \dots i \dots \bar{a}_{BA}^t \perp \overline{AB}, \quad (2.17)$$

а нормальне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB} AB \quad (2.18)$$

і напрямлене від точки **B** до точки **A**.

2.3.2 Умови завдання

Плоский механізм, представлений на рисунку 2.3.1, складається із декількох стрижнів, повзунів та коліс, які перекочуються по нерухомій поверхні без ковзання. Довжини стрижнів дорівнюють відповідно:

$$l_1=0,6 \text{ М}, l_2=1,8 \text{ М}, l_3=2,0 \text{ М}, l_4=0,8 \text{ М}, \text{ а радіуси коліс } R=0,3 \text{ М}.$$

Один із стрижнів в схемах 1...21,23 поділений шарніром приєднання на дві рівні частини. Положення механізму визначається кутами a, b, g, q . Значення цих кутів і інших заданих величин вказані в таблицях 2.7 і 2.8. Знайти швидкості і прискорення точок, кутові швидкості і кутові прискорення точок, кутові швидкості і кутові прискорення ланок, вказаних в стовпцях (див.табл.2.8).

Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатись відповідні кути. Побудову механізму слід починати із стрижня, напрям якого визначається кутом a .

Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати напрямленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість U_B і прискорення a_B від точки **B** до **b**.

Таблиця 2.7

Величина	Значення величини за варіантами									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Кути $\alpha, ^\circ$	90	120	0	30	60	45	150	240	135	75
Кути $\gamma, ^\circ$	60	150	30	120	45	60	90	30	120	45

Таблиця 2.8

Величина		Значення величини за варіантами										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Кінематичні характеристики задані	Кути	$q, ^\circ$	120	45	90	150	60	45	120	30	135	30
		$b, ^\circ$	30	120	150	60	45	30	135	60	90	120
	Для схем 1,2,4...8, 10...14, 16...25,26	w_1	6	-	5	-	2	-	8	-	4	-
		w_4	-	4	-	3	-	5	-	6	-	2
	Для схем 3,9,15,19...24, 27...30.	w_1	2	-	3	-	4	-	5	-	6	-
		e_1	4	-	5	-	6	-	8	-	10	-
		u_B	-	4	-	6	-	2	-	3	-	5
		a_B	-	6	-	8	-	5	-	6	-	4
	Невідомі (треба знайти)	u точок, м/с	В,Е	А,Е	В,Е	А,Е	В,Е	Д,Е	В,Е	А,Е	В,Е	Д,Е
		w ланки, 1/с	ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_3	ω_2	ω_3
a точок, м/с ²		В	А	В	А	В	А	В	А	В	А	
e ланки, 1/с ²		ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	

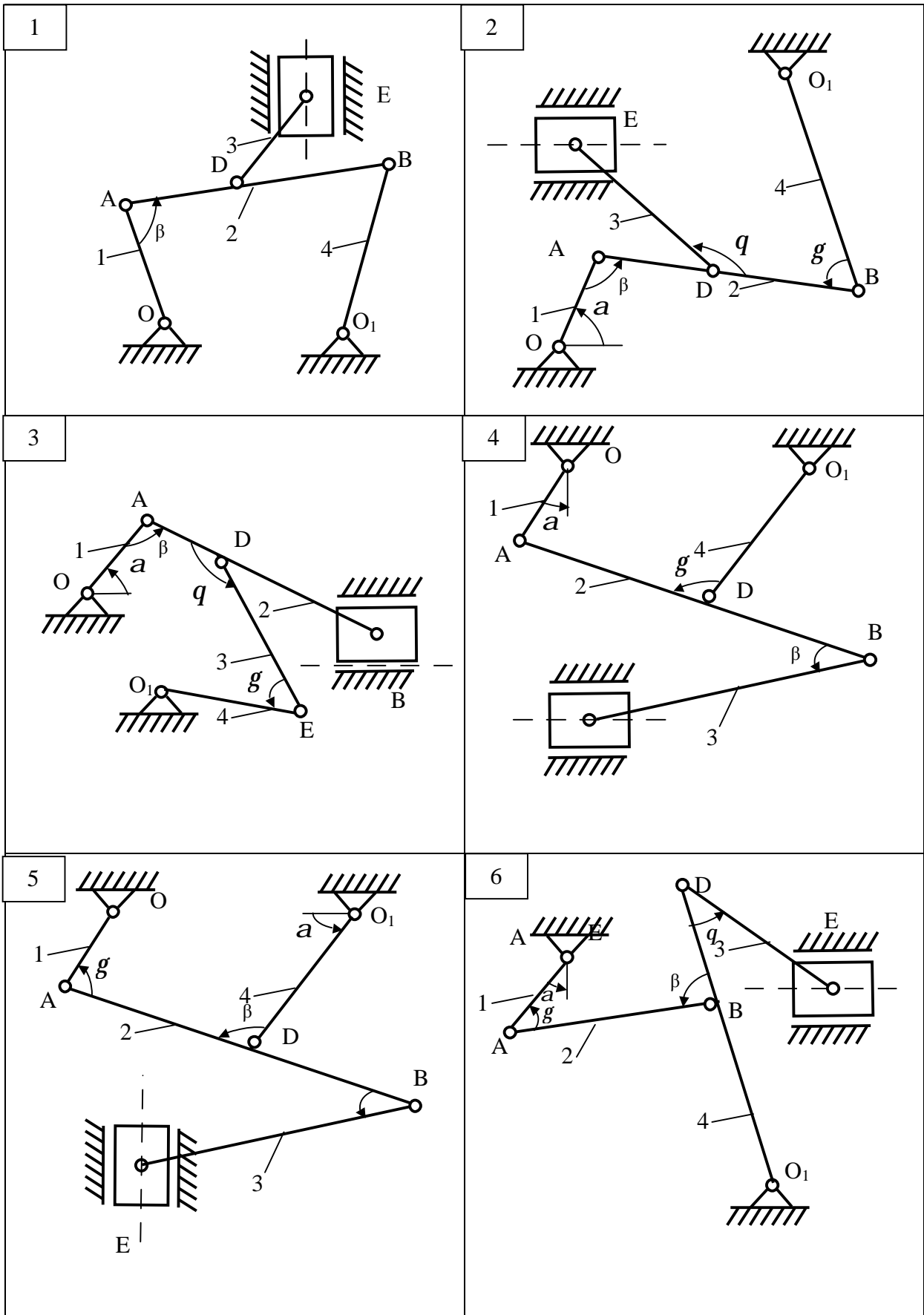


Рисунок 2.9 – Схеми до варіантів завдання

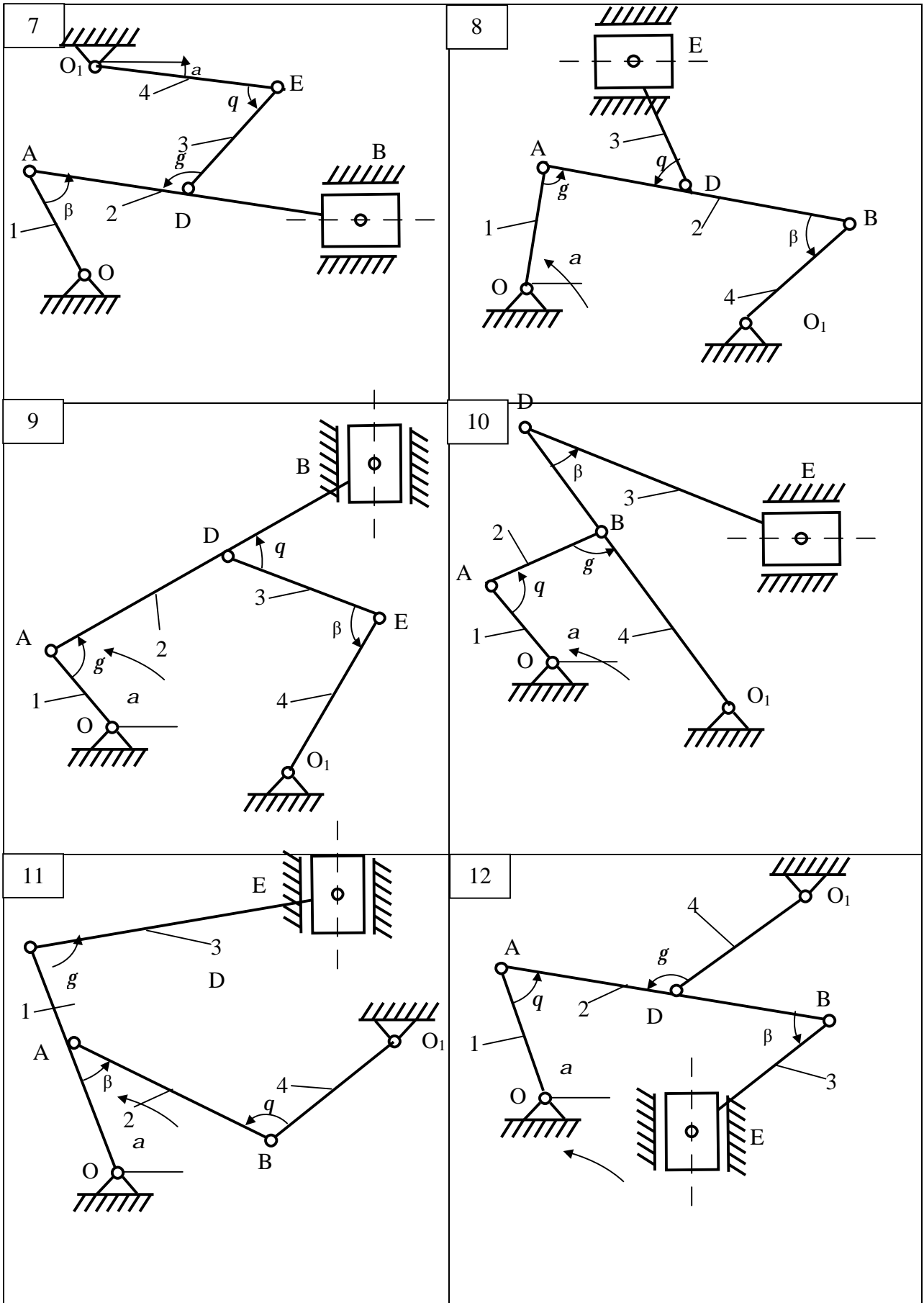


Рисунок 2.9, аркуш 2

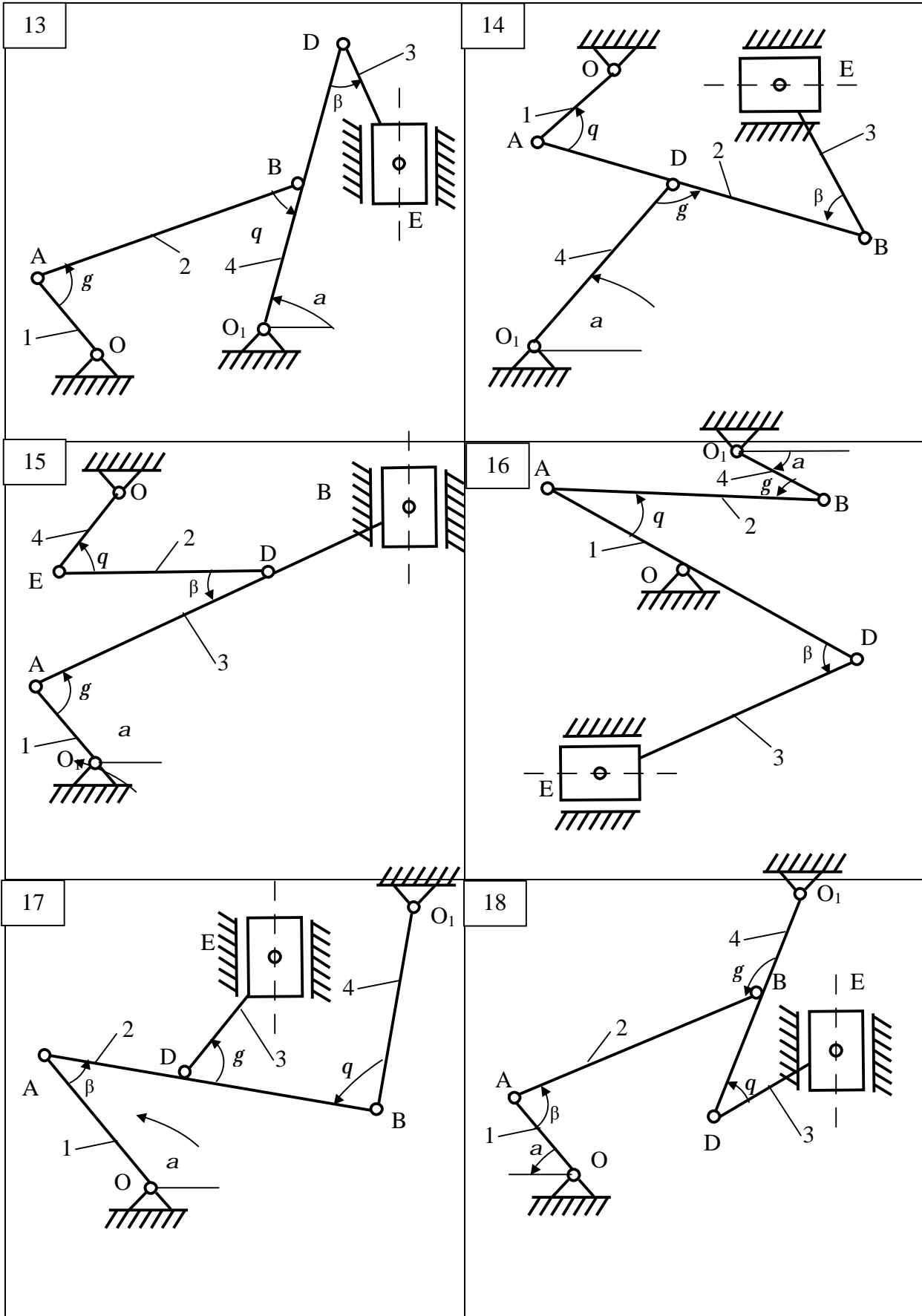


Рисунок 2.9, аркуш 3

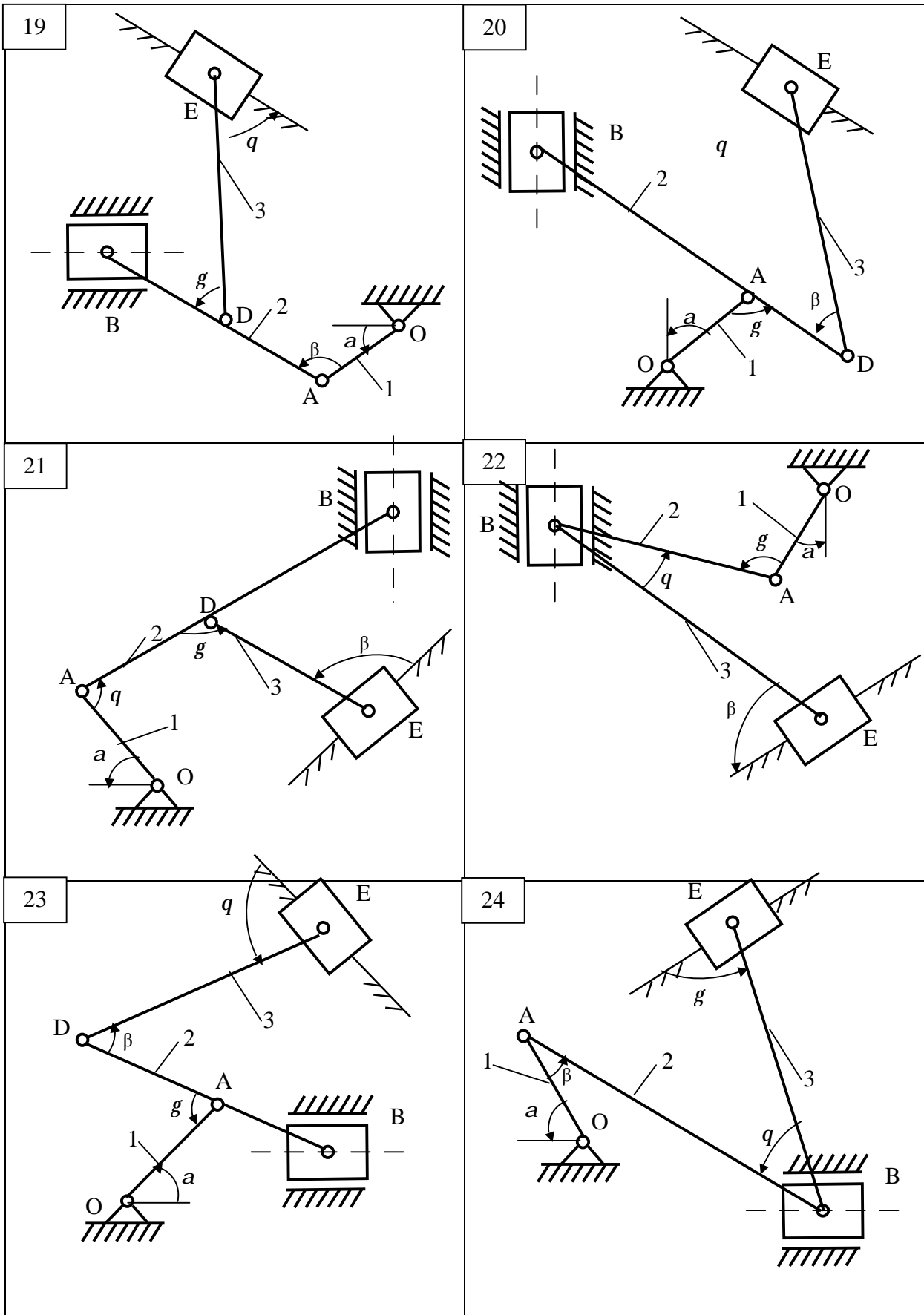


Рисунок 2.9, аркуш 4

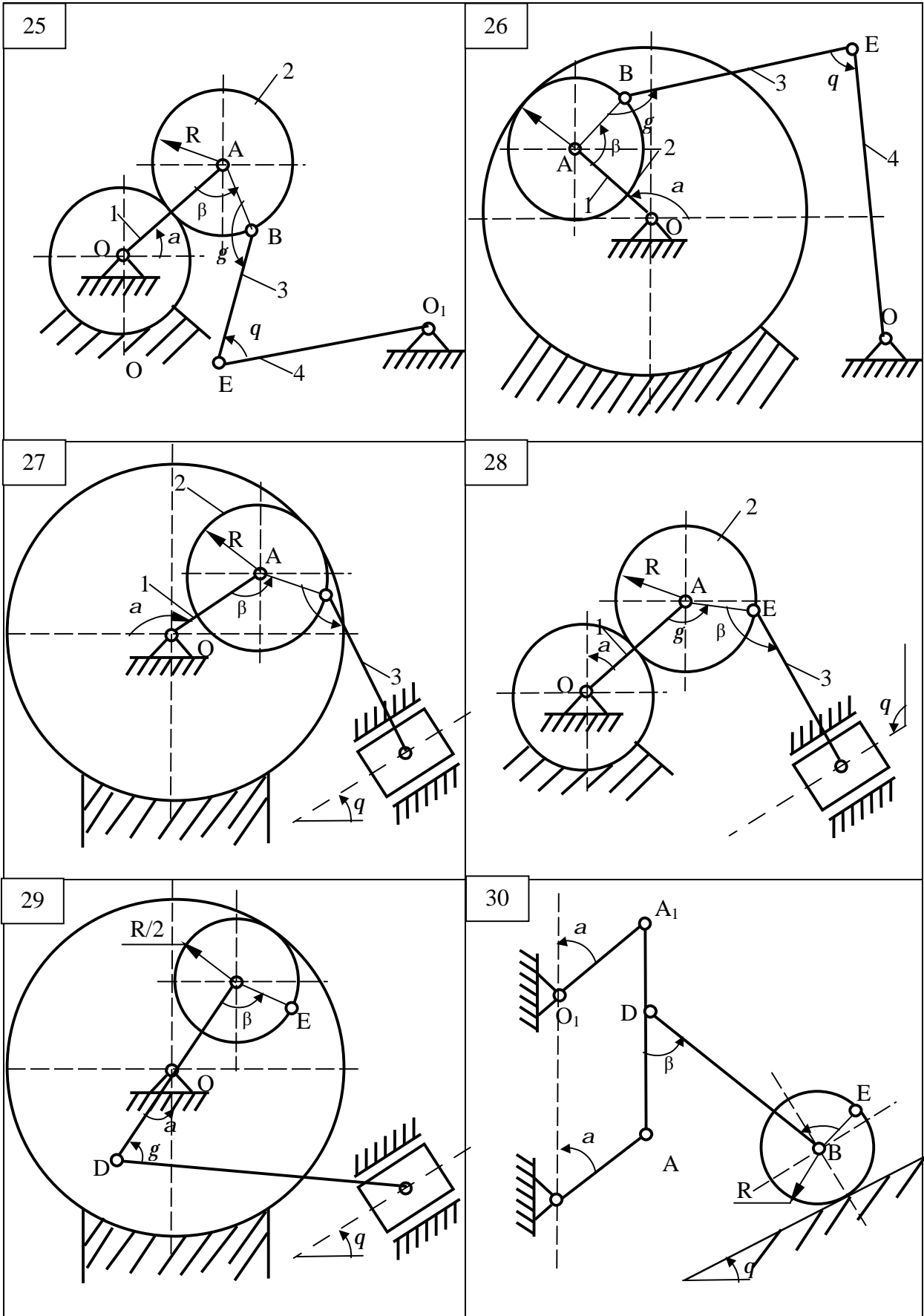


Рисунок 2.9, аркуш 5

2.3.3 Приклад виконання завдання

Дано: $a=60^\circ$, $b=90^\circ$, $g=45^\circ$, $q=120^\circ$, $l_1=OA=0.6$ м, $l_2=AB=1.8$ м, $l_3=O_1B=2.4$ м, $O_1D=0.8$ м, $l_4=DE=1.2$ м, $w_1=6$ с⁻¹, $e_1=10$ с⁻² (напряв w_1 і e_1 -проти ходу годинникової стрілки). Для механізму, зображеного на рис 2.10,

Знайти: u_B , u_E , w_2 , w_4 , a_B , e_2 .

Рішення

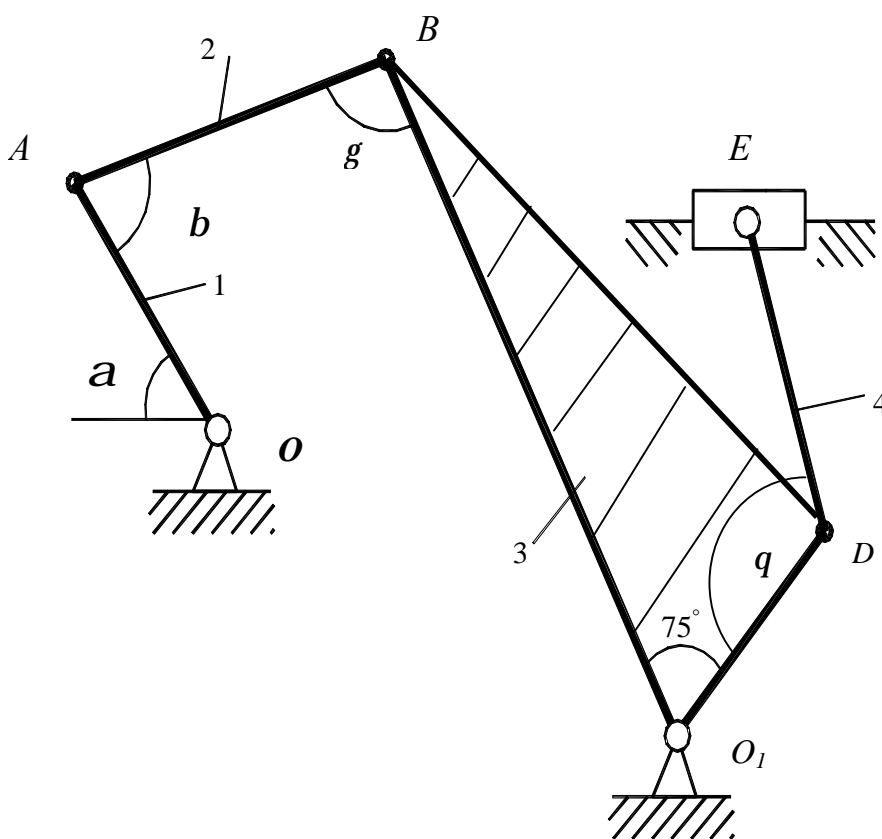


Рисунок 2.10 – Початкова схема до прикладу виконання завдання

Будуємо положення механізму у відповідності з заданими кутами (рис.2.11). Визначаємо швидкість точок. Швидкість точки A перпендикулярна до кривошипа OA .

Її модуль

$$u_A = w_1 l_1 = 6 \cdot 0,6 = 3,6 \text{ м/с}, \quad (2.19)$$

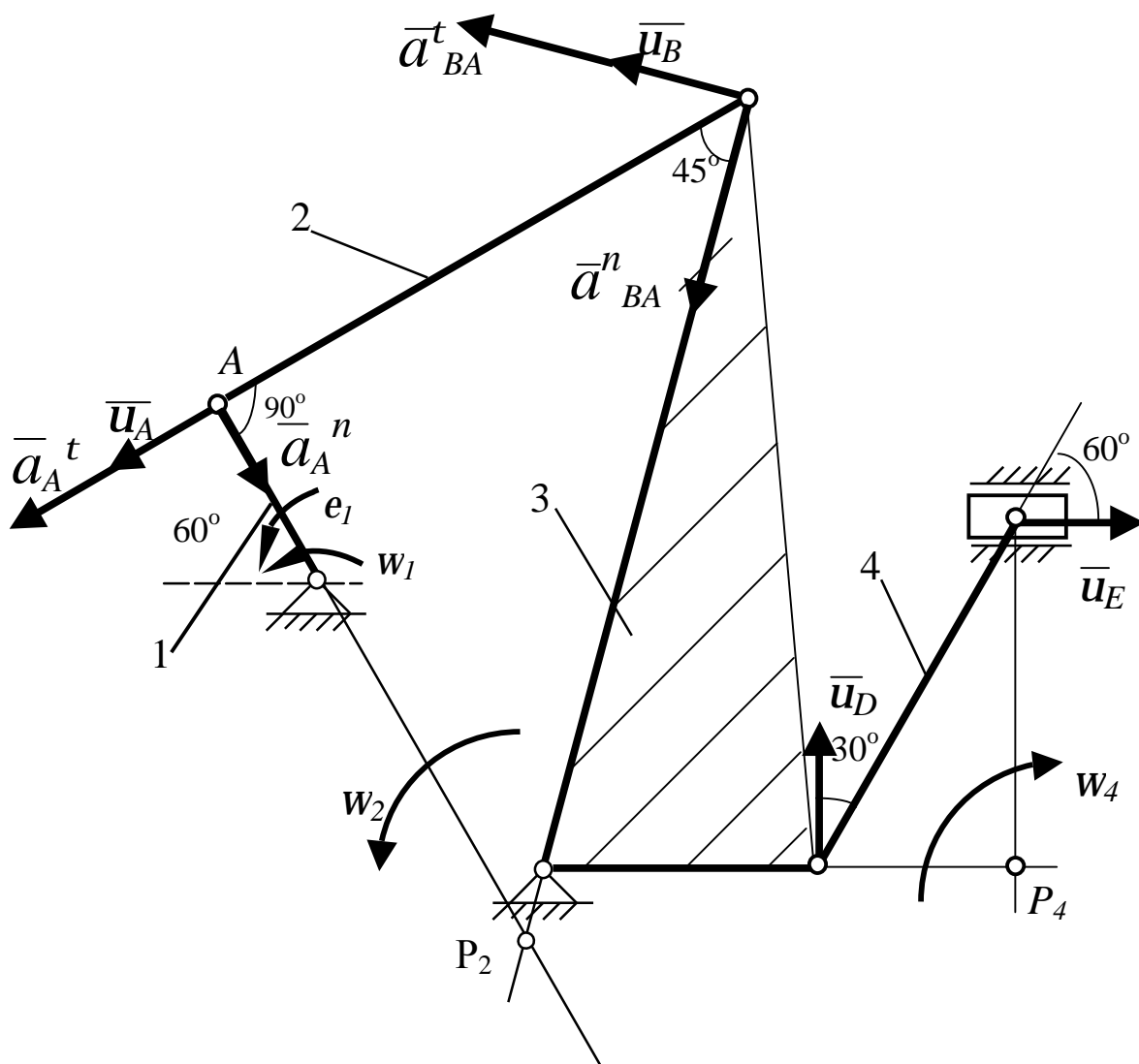


Рисунок 2.11 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Швидкість точки B , яка одночасно належить шатуну AB і кривошипу O_1B , перпендикулярна до кривошипа O_1B . Миттєвий центр швидкостей P_2 стрижня AB знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до їх швидкостей. Швидкості точок стрижня AB (ланки 2) та його кутова швидкість зв'язані залежністю

$$w_2 = \frac{u_A}{AP_2} = \frac{u_B}{BP_2}. \quad (2.20)$$

Як видно з рисунка 2.11, трикутник ABP_2 прямокутний і рівнобедрений, тому: $AP_2 = AB = l_2 = 1,8$ м

$$BP_2 = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{18}{0,707} = 2,55 \text{ м},$$

Отже

$$w_2 = \frac{u_A}{AP_2} = \frac{3,6}{1,8} = 2 \text{ с}^{-1}; u_B = w_2 BP_2 = 2 \cdot 2,25 = 5,1 \text{ м}.$$

Для визначення швидкості точки E , яка належить стрижню DE , треба спочатку знайти швидкість точки D . Так як точка D разом з точкою B належить до ланки 3, яка обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю w_3 , то швидкість точки D знайдемо з пропорції:

$$w_3 = \frac{u_B}{BO_1} = \frac{u_D}{DO_1}, \quad (2.21)$$

$$w_3 = \frac{u_B}{BO_1} = \frac{5,1}{2,4} = 2,125 \text{ с}^{-1};$$

$$u_D = u_B \frac{DO_1}{BO_1} = 5,1 \frac{0,8}{2,4} = 1,7 \text{ м/с}$$

Вектор u_D направлений перпендикулярно до стрижня DO_1 так, щоб кутова швидкість w_3 була направлена проти ходу годинникової стрілки відповідно до напрямку u_B .

Напрямок вектора \bar{u}_E визначимо виходячи з того, що точка E належить одночасно повзуну, який рухається вздовж направляючих поступально. Тепер, знаючи \bar{u}_D і напрям \bar{u}_E , скористаємось теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стрижня DE) на пряму, яка з'єднує ці точки. Спочатку за цією

теоремою встановимо, в який бік напрямлений вектор \bar{u}_E (проекції швидкостей повинні мати однакові знаки). Потім обчислюючи ці проекції, знаходимо:

$$u_D \cos 30^\circ = u_E \cos 60^\circ, \quad (2.22)$$

звідки
$$u_E = u_D \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7 \frac{0,866}{0,5} = 2,85, \text{ м.}$$

Для визначення кутової швидкості стрижня DE (ланки 4), знайдемо положення миттєвого центру швидкостей P_4 , в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок D і E до їх швидкостей. Тоді:

$$\omega_4 = \frac{u_D}{DP_4} = \frac{u_E}{EP_4}. \quad (2.23)$$

З прямокутного трикутника DEP_4 знайдемо:

$$DP_4 = DE \sin 30^\circ = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6, \text{ м.}$$

Отже
$$\omega_4 = \frac{u_D}{DP_4} = \frac{1,7}{0,6} = 2,83 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точок. Прискорення точки A складається з дотичного і нормального прискорень

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n, \quad (2.24)$$

де
$$a_A^t = \varepsilon_1 \mathbf{l}_1 = 10 \cdot 0,6 = 6, \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \mathbf{l}_1 = 6^2 \cdot 0,6 = 21,6, \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_A^t направлений перпендикулярно до OA , а вектор \bar{a}_A^n направлений від точки A до точки O .

Для визначення прискорення точки B скористуємося рівнянням:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.25)$$

Так як точка B належить не тільки стрижню AB , а і стрижню BO_1 (ланки 4), який обертається навколо нерухомої точки O_1 , то прискорення також складається з дотичного і нормального прискорень, тобто

$$\bar{a}_B^t + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.26)$$

Вектор \bar{a}_B^t направляємо перпендикулярно до стрижня OB в той чи інший бік. Його обчислення за формулою

$$a_B^t = \varepsilon_3 \mathbf{l}_3 \quad (2.27)$$

неможливо, так як значення ε_3 невідомо. Нормальне прискорення точки B

$$a_B^n = \omega_3^2 \mathbf{l}_3 = 2,125^2 \cdot 2,4 = 10,85 \text{ м/с}^2$$

і вектор \bar{a}_B^n направляємо від точки B до точки O_1 .

Вектор \bar{a}_{BA}^t направляємо перпендикулярно до стрижня AB в будь-яку сторону, а вектор \bar{a}_{BA}^n – вздовж AB від точки A до точки B , і знаходимо числове значення:

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \mathbf{l}_2 = 2^2 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, у величинах, які входять до рівняння (2.26) невідомі тільки числові значення a_B^t і a_{BA}^t . Щоб знайти ці величини, запроєкуємо обидві ча-

стини рівняння (див.2.26) на дві довільно вибрані перпендикулярні осі X та Y . Направляємо одну з осей (вісь X) вздовж стрижня AB і в результаті проектування одержимо:

$$-a_B^t \cos 45^\circ - a_B^n \cos 45^\circ = -a_A^\tau - a_{BA}^n, \quad (2.28)$$

$$a_B^t \sin 45^\circ - a_B^n \sin 45^\circ = -a_A^n + a_{BA}^\tau. \quad (2.29)$$

З рівняння (2.28) знаходимо:

$$a_B^t = \frac{a_A^\tau}{\cos 45^\circ} + \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} - a_B^n = \frac{6}{0,707} + \frac{7,2}{0,707} - 10,85 = 7,8 \frac{m}{c^2}.$$

З рівняння (2.29) знаходимо:

$$a_{BA}^\tau = a_A^n + a_B^t \sin 45^\circ - a_B^n \sin 45^\circ = 21,6 + 7,8 \cdot 0,707 - 10,85 \cdot 0,707 = 19,5 \frac{m}{c^2}$$

Тоді прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{7,8^2 + 10,85^2} = 13,4 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення стрижня AB :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{19,5}{2,4} = 8,1 \text{ с}^{-2}.$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_B &= 5,1 \text{ м/с} ; \quad \mathbf{u}_E = 2,85 \text{ м/с} ; \quad w_2 = 2 \text{ с}^{-1} ; \quad w_4 = 2,83 \text{ с}^{-1} ; \\ a_B &= 13,4 \text{ м/с}^2 ; \quad e_2 = 8,1 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

2.4 ВИЗНАЧЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ ШВИДКОСТІ Й АБСОЛЮТНОГО ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ ПРИ СКЛАДНОМУ РУСІ

2.4.1 Короткі відомості з теорії

При складному русі точки її абсолютна швидкість знаходиться за формулою

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r, \quad (2.30)$$

де \bar{V}_e – вектор переносної швидкості точки;

\bar{V}_r – вектор відносної швидкості точки.

Модуль абсолютної швидкості точки розраховується за формулою

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos a}, \quad (2.31)$$

де a - кут між векторами \bar{V}_e і \bar{V}_r .

Абсолютне прискорення точки при складному русі визначається за формулою Коріоліса:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k, \quad (2.32)$$

де \bar{a}_e - вектор переносного прискорення;

\bar{a}_r - вектор відносного прискорення;

\bar{a}_k - вектор коріолісового прискорення, який визначається формулою:

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r). \quad (2.33)$$

Тут $\bar{\omega}_e$ - вектор переносної кутової швидкості, який направлений вздовж осі обертання тіла туди, звідки видно обертання таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки. Відносне прискорення, оскільки при його знаходженні рух рухомих осей до уваги не береться, обчислюється звичайними ме-

тодами кінематики точки. Переносне прискорення обчислюється як прискорення точки, незмінно зв'язаної з рухомими силами, тобто як прискорення точки твердого тіла, яка співпадає з точкою, що рухається по тілу.

Модуль коріолісового прискорення, якщо кут між векторами \overline{w}_e і \overline{V}_r позначити через b , буде дорівнювати

$$\overline{a}_k = 2|\overline{w}_e||\overline{V}_r|\sin b. \quad (2.34)$$

З цієї формули видно, що коріолісове прискорення буде дорівнювати нулю в таких випадках:

1) коли, $w_e = 0$, тобто коли переносний рух є поступальним, або коли переносна кутова швидкість в дану мить дорівнює нулю;

2) коли $\overline{V}_r = 0$, тобто коли рух точки не є складним, або коли відносна швидкість в даний момент часу дорівнює нулю;

3) коли $b = 0$, або $b = 180^\circ$, тобто коли вектор відносної швидкості паралельний осі обертання тіла.

Направлений вектор \overline{a}_k так, як і вектор $\overline{w}_e \times \overline{V}_r$, тобто перпендикулярно площині, яка проходить через вектор \overline{w}_e і \overline{V}_r в той бік, звідки найкоротше сполучення \overline{w}_e з \overline{V}_r видно таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Напрямок вектора \overline{a}_k можна визначити, запроектувавши вектор \overline{V}_r на площину, перпендикулярну вектору \overline{w}_e і повернувши цю проекцію на 90° в напрямі переносного обертання.

2.4.2 Умови завдання

Пластина D (див. рис. 2.12) обертається навколо нерухомої осі за законом $j_e = f_1(t)$ (додатковий напрям відрахування кута j_e показаний на схемах дуговою стрілкою). На схемах 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 21, 23, 25,

26, 27, 28, 29 вісь обертання перпендикулярна площині пластини і проходить через точку O_1 (пластина обертається в своїй площині). На інших схемах вісь обертання лежить в площині пластини (пластина обертається в просторі).

По пластині по дуговому жолобу радіуса R (схеми 1...10), або вздовж прямолінійного жолоба (11...30) рухається точка M відповідно закону $S = OM = f_2(t)$.

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = t_1$.

Необхідні для розрахунків дані подані в таблицях 2.9 і 2.10.

Таблиця 2.9

Коефіцієнт	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
d	2	4	2	3	0,5	5	1	2	1	3
b	1	1	2	2	5	2	6	3	4	1
c	2	3	6	4	8	9	12	10	16	14

Таблиця 2.10

Варіант	Рівняння обер- тального руху тіла $j_e = f_I(t)$, рад	Рівняння відносного руху точки М $S = OM = f_2(t)$			t_1 , с	R, см	h, см
		Для схем 1...10	Для схем 11...20	Для схем 21...30			
1	$b t^2 + c t$	$d p (4t^2 - 2t^3)$	$d \sin \frac{pt}{3}$	$d (4t^3 + 2t)$	1/2	9	24
2	$b t^3 + c t^2$	$d p \cos \frac{pt}{6}$	$d \cos \frac{pt}{6}$	$d (1,5t^2 + 2t)$	2	6	32
3	$b t + c t^2$	$d p (t^3 - 0,5t^2)$	$d \sin \frac{pt}{6}$	$d (2t^2 - 4t)$	3/2	27	16
4	$b t^3 + c t$	$d p \sin \frac{4pt}{9}$	$d \sin \frac{pt}{2}$	$d (6t - 8t^3)$	3/4	9	18
5	$b t + c t^3$	$2d p (t^2 + t)$	$d \cos 2pt$	$d (16t^2 + 4t)$	1/4	13,5	36
6	$b t^2 + c t^2$	$d p \cos \frac{pt}{4}$	$d \cos \frac{pt}{4}$	$d (3t^3 - 2,5t^2)$	4/3	12	40
7	$b t^3 + c t^2$	$d p (9t^4 - t^2)$	$d \sin \frac{pt}{4}$	$d (6,5t - 5t^2)$	2/3	16	48
8	$b t^3 + c t$	$d p \sin 2pt$	$d \sin pt$	$d (2t - 3t^2)$	1/6	$6\sqrt{3}$	64
9	$b t^3 + c t^3$	$d p (5t - 3t^2)$	$d \cos \frac{pt}{2}$	$d (4t - 3t^2)$	1/3	20	20
0	$b t + c t^2$	$d p (3t^2 - t)$	$d \cos \frac{pt}{3}$	$d (2t^2 + 3t^3)$	1	24	48

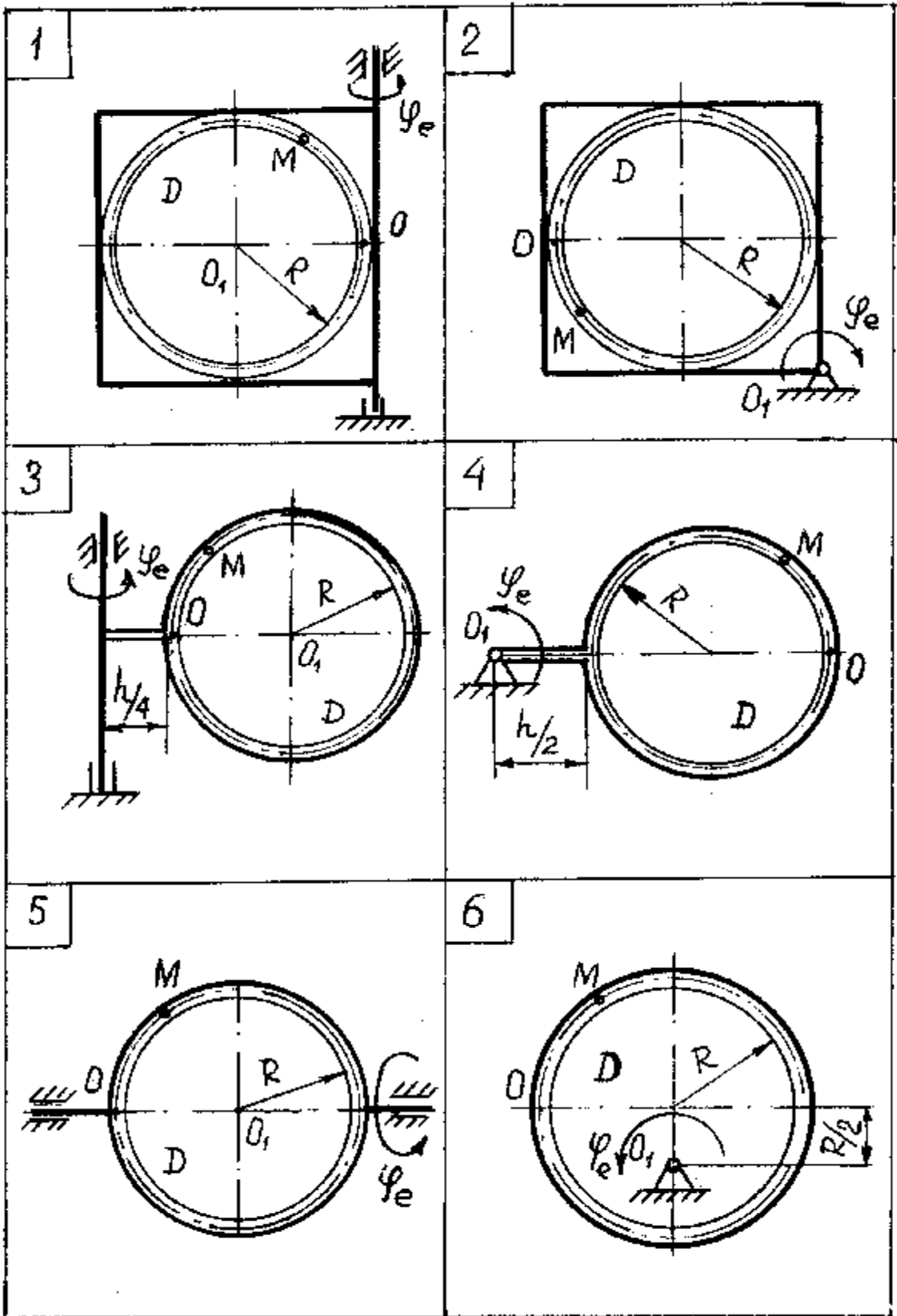


Рисунок 2.12 – Схеми до варіантів завдання

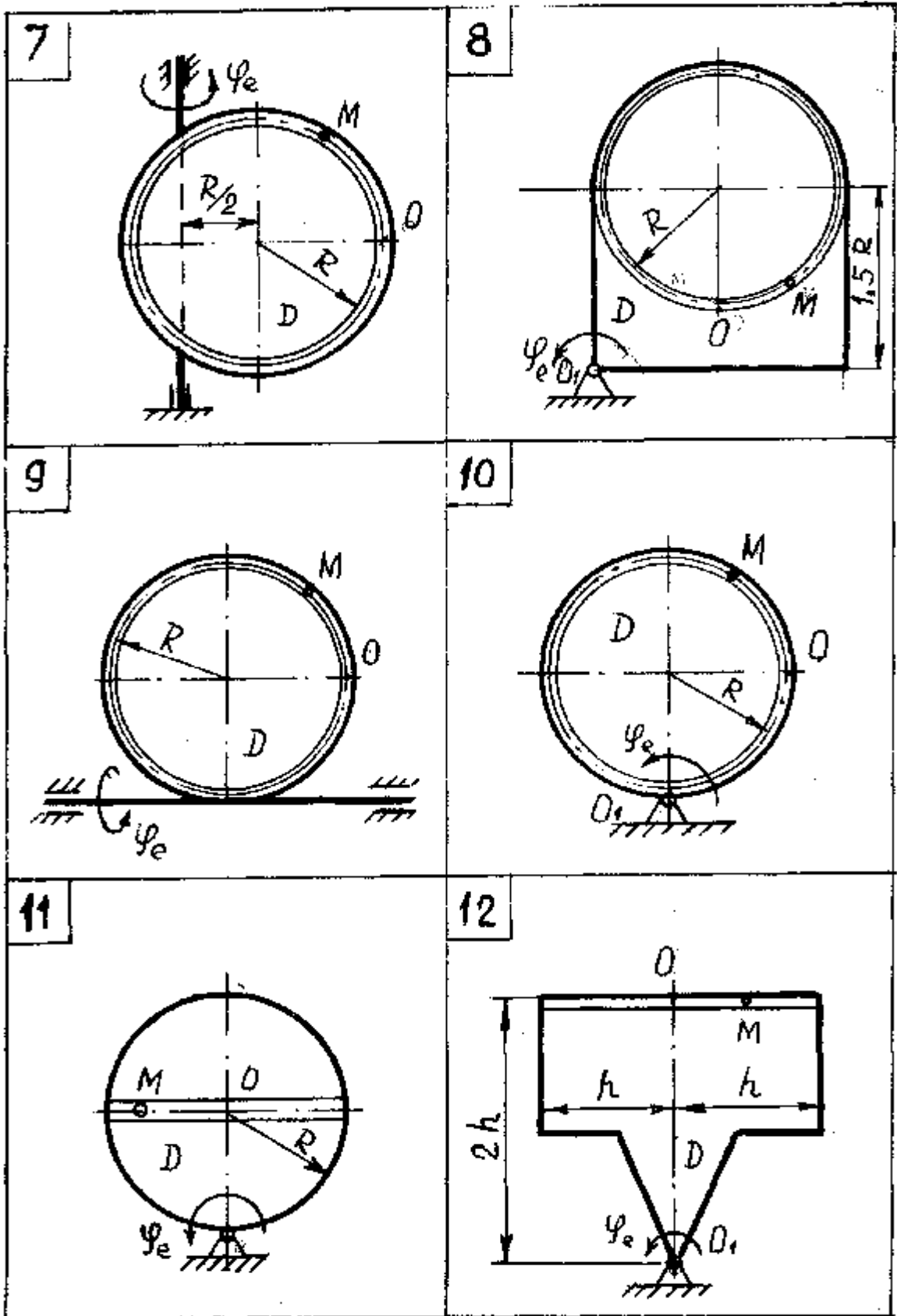


Рисунок 2.12, аркуш 2

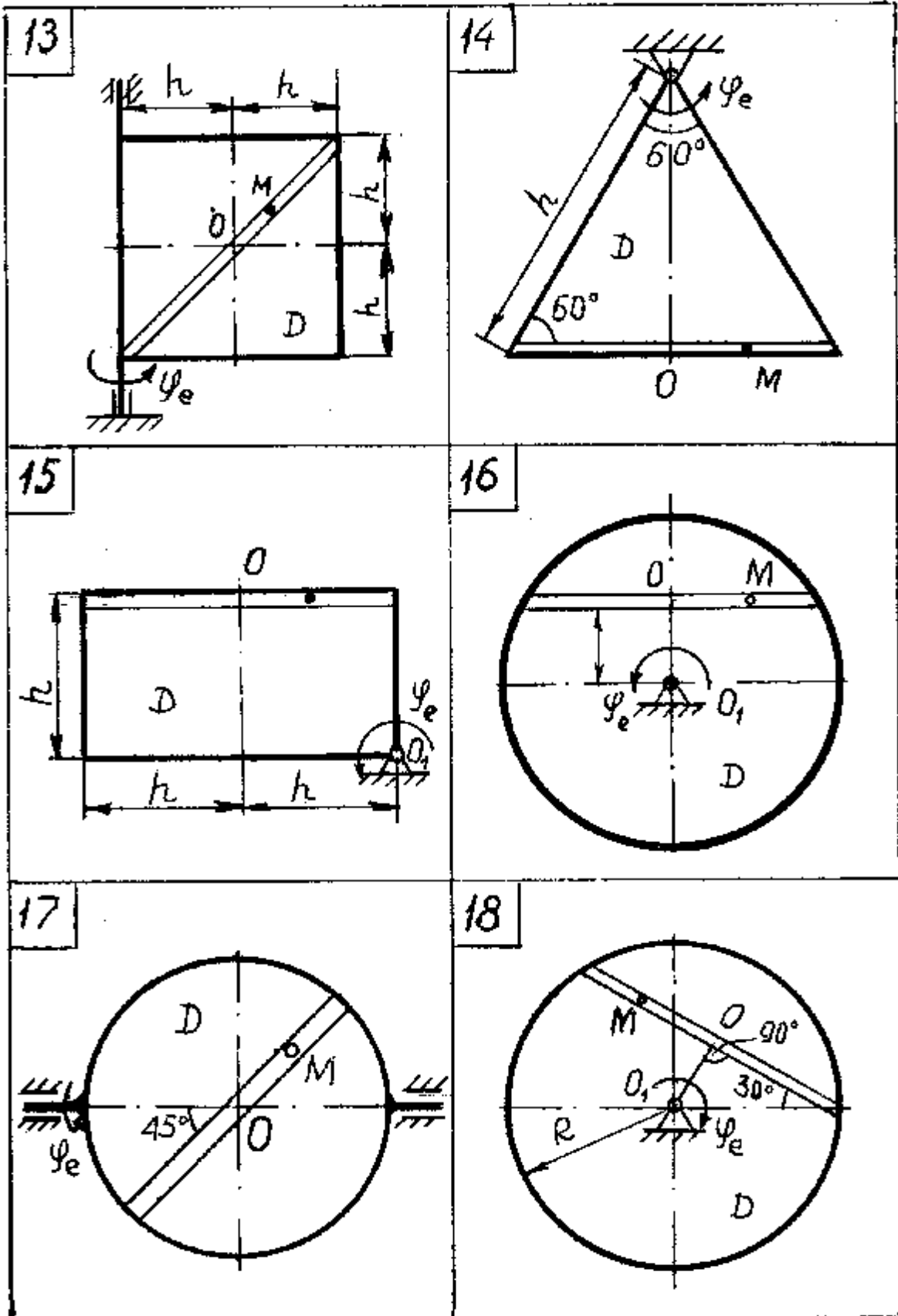


Рисунок 2.12, аркуш 3

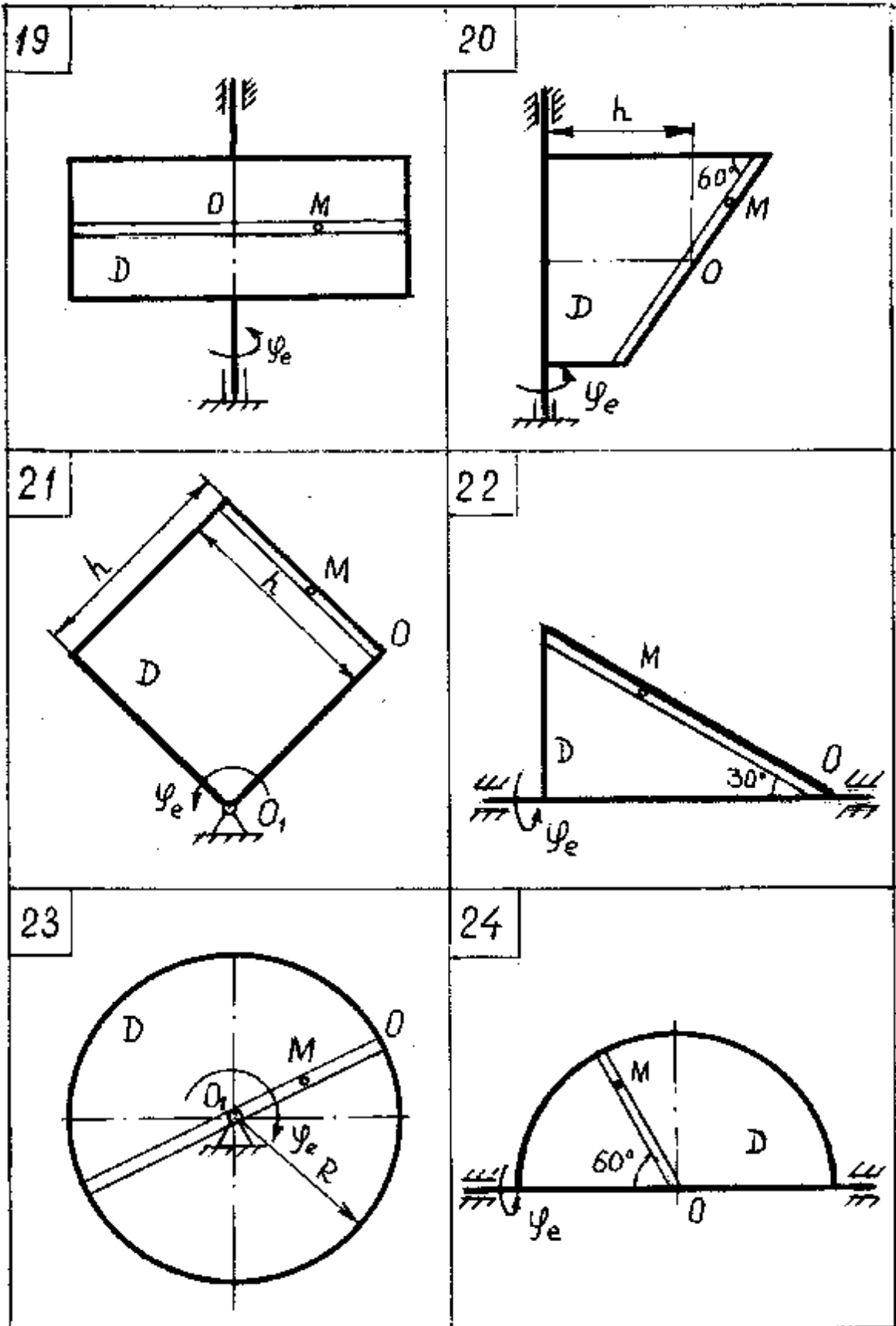


Рисунок 2.12, аркуш 4

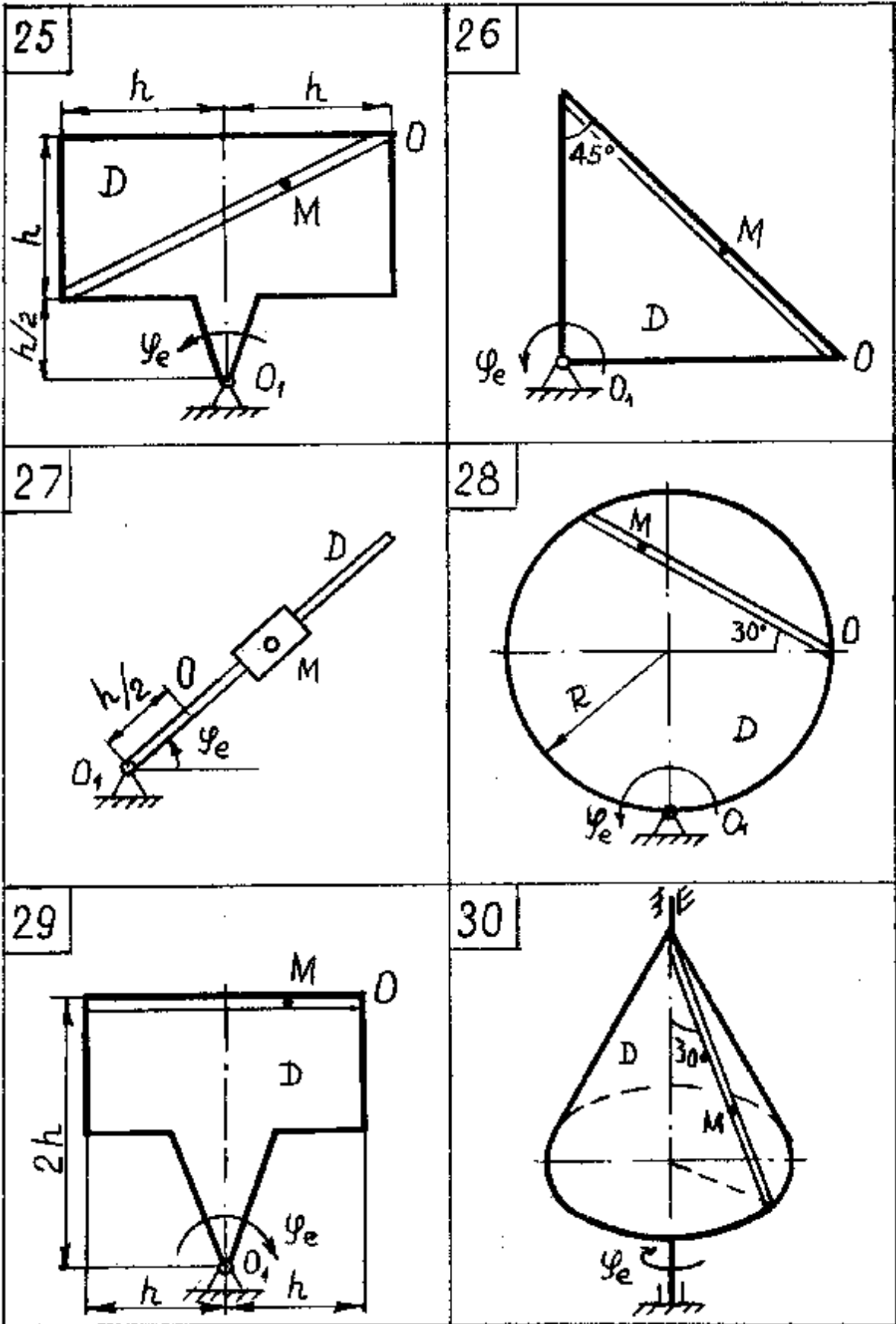


Рисунок 2.12, аркуш 5

2.4.3 Приклад виконання завдання

Пластина D (рис. 2.13) обертається навколо нерухомої осі за законом $j_e = f_1(t)$. По пластині вздовж прямолінійного жолоба рухається точка M відповідно закону $S = OM = f_2(t)$.

Дано: $j_e = b t^2 - c t^3$, рад; $S_r = OM = 16 - d \cos 3p t$, см; $t_1 = \frac{2}{9}$ с;

$b = 0,9$; $c = 9$; $d = 8$.

Знайти: абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = t_1$.

Рішення

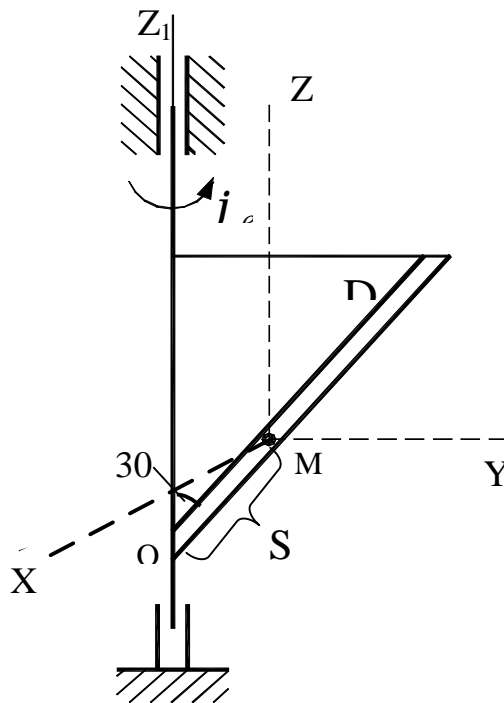


Рисунок 2.13 - Початкова схема до прикладу виконання завдання

Будемо вважати, що в розрахунковий момент часу площина креслення (див. рис. 2.13) співпадає з площиною трикутника D. Положення точки M на пластині D визначається відстанню

$$S_r = OM, \text{ при } t = \frac{2}{9} \text{ с; } S_r = 16 - 8 \cos\left(3p \frac{2}{9}\right) = 16 + 4 = 20,0 \text{ см.}$$

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму швидкостей:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Відносна швидкість:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 24p \sin 3pt; \text{ при } t = \frac{2}{9} \text{ с маємо: } V_r = 24p \frac{\sqrt{3}}{2} = 65,2 \text{ см/с.}$$

Додатній знак величини V_r показує, що вектор \bar{V}_r (рис.2.14) направлений в бік зростання S_r .

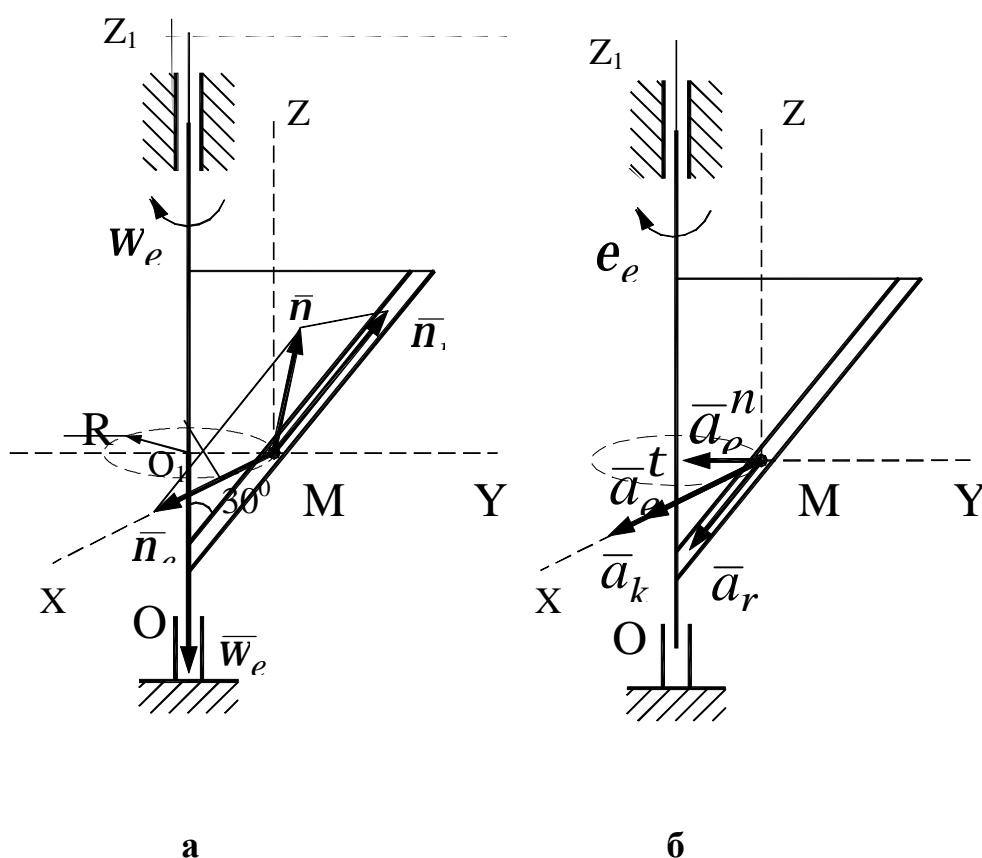


Рисунок 2.14 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Переносна швидкість:

$$\bar{V}_e = R\mathbf{v}_e,$$

де $R = S_r \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10$ см – радіус кола, яке описує та точка тіла, з якою в дану мить співпадає точка М:

$$a \quad w_e = \frac{dj_e}{dt} = 1,8t - 27t^2 \text{ – кутова швидкість тіла,}$$

$$\text{при } t = \frac{2}{9} \text{ с} \quad w_e = 1,8 \frac{2}{9} - 27 \frac{4}{81} = -0,93 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Остаточно} \quad V_e = 10 \cdot 0,93 = 9,3 \text{ м/с}.$$

Від'ємний знак у величині w_e означає, що обертання трикутника навколо осі O_z відбувається протилежно напрямку відліку кута j_e , тому вектор \overline{w}_e направлений вздовж осі O_z вниз (див. рис.2.14, а). Вектор \overline{V}_e направлений за дотичною до кола радіуса R в бік обертання тіла.

Так як \overline{V}_e і \overline{V}_r взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M :

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9,3^2 + 65,2^2} = 65,9 \text{ см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорення:

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k,$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\overline{a} = \overline{a}_r^t + a_r^n + \overline{a}_e^t + a_e^n + \overline{a}_k.$$

Модуль відносного дотичного прискорення:

$$\overline{a}_r^t = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = 72p \cos 3pt.$$

$$\text{При } t = \frac{2}{9} \text{ с}; \quad a_r^t = -72p^2 \cos \frac{2}{3} p = -355 \text{ см/с}^2.$$

Від'ємний знак a_r^t свідчить, що вектор \overline{a}_r^t направлений в сторону від'ємних значень S_r (див. рис.2.14, б).

Відносне нормальне прискорення:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = 0,$$

так як відносний рух точки прямолінійний.

Переносне дотичне прискорення:

$$a_e^t = R \cdot e_e,$$

де e_e - кутове прискорення тіла D:

$$e_e = \frac{dw_e}{dt} = 1,8 - 54 t.$$

При $t = \frac{2}{9} \text{ с}$,

$$e_e = 1,8 - 54 \frac{2}{9} = -10,2 \text{ с}^{-2}.$$

Однакові знаки e_e і w_e вказують на те, що обертання тіла D прискорене.

Тоді:

$$a_e^t = 10 \cdot 10,2 = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e^t}$ направлений в той же бік, що і вектор $\overline{V_e}$.

Переносне нормальне прискорення:

$$a_e^n = R w_e^2 = 10 \cdot 0,93^2 = 8,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e^n}$ направлений до осі обертання тіла D, тобто до центра O_1 кола радіуса R.

Прискорення Коріоліса:

$$\overline{a_k} = 2(\overline{w_e} \times \overline{V_r}).$$

Модуль прискорення Коріоліса:

$$a_k = 2 w_e V_r \sin(\overline{w_e}, \overline{V_r}).$$

Так як $\sin(\overline{w_e}, \overline{V_r}) = \sin 150^\circ = 0,5$,

то $a_k = 2 \times 0,95 \times 65,2 \times 0,5 = 61 \text{ см/с}^2.$

Відповідно до правила векторного добутку вектор $\overline{a_k}$ направлений перпендикулярно до площини трикутника D в тому напрямі, що і вектори $\overline{V_e}$ і $\overline{a_e^t}$.

Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо способом проєкцій векторного рівняння:

$$a_x = a_e^t + a_k = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -a_e^n - a_r^n \cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0,5 = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = -a_r^t \cos 30^\circ = -355 \frac{\sqrt{3}}{2} = -308 \text{ см/с}^2.$$

Остаточно $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{163^2 + 186^2 + 308^2} = 395 \text{ см/с}^2.$

Відповідь:

У момент часу $t = t_1 = \frac{2}{9} \text{ с}$ абсолютна швидкість точки **М** дорівнює

$V = 65,9 \text{ см/с}$, а абсолютне прискорення - $a = 395 \text{ см/с}^2.$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики.- М.: Высш. шк., 1990.- 523с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Высш шк., 1986.- 478с.
3. Теоретическая механика/ Г.Н.Савин, Н.А.Кильчевский, Т.В.Путията. - К.: ГИТЛ УССР, 1963.-586с.
4. Бухгольц М.М. Основной курс теоретической механики.- М.;-Л.: ОГИЗ, 1965.- 434с.
5. Мещерский М.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука,1981.-480с.
6. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов строительных, транспортных, машиностроительных и др. специальностей/ Под ред. С.М.Тарга. - М.: Высш. шк., 1989. –112с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Высш.шк., 1985.-532с.
8. Збірник завдань для самостійної роботи та контролю знань студентів з теоретичної механіки. Кінематика і статика / Укл. О.Г.Водолазська, Ю.О.Єрфорт, Л.В.Кутовий та ін. – Краматорськ, ДДМА, 2000. - Ч.1. – 132с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна
ЄРФОРТ Юрій Олександрович
КУТОВИЙ Леонід Володимирович
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович
СТАДНИК Олександр Миколайович
ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович

**Збірник
розрахунково-графічних
завдань
з теоретичної механіки**

Редактор

Ірина Іванівна Дьякова

Підп. до друку
Ризограф. друк. Ум. друк арк. Обл.- вид. арк.
Тираж 100 прим. Зам. №

Формат 60×84/16.

ДДМА, 84313, м.Краматорськ, вул.Шкадінова, 72