КРАМАТОРСЬК

ЗБІРНИК

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

(частина 2 “Динаміка”)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

О.Г. Водолазська
Ю.О.Єрфорт
Л.В. Кутовий
С.В. Подлєсний
О.М. Стадник
В.Г. Федорченко

ЗБІРНИК

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ
(частина 2 “Динаміка”)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів очної та заочної форм навчання для механічних спеціальностей

КРАМАТОРСЬК 2004

ББК 22.21
УДК 531.
З-41

Рецензенти:

Л.І.СЕРДЮК, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою теоретичної механіки (Полтавський національний технічний університет);

О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою теоретичної механіки (Національний Технічний університет “ХПІ”);

А.Ф.ТАРАСОВ, доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою інформаційних технологій (Донбаська державна машинобудівна академія).

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № ________________________ від “___”__________

З-41 Збірник розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки. Динаміка / О.Г.Водолазська, Ю.О.Єрфорт, Л. В. Кутовий та інш. - Краматорськ: ДДМА, 2004. –Ч.2. – 148 с.

ISBN

Збірник вміщує розрахунково-графічні завдання з третього розділу теоретичної механіки: “Динаміка”, а саме: короткі відомості з теорії, умови, варіанти та схеми, а також приклад виконання кожного завдання.

ББК 22.21
ISBN

ЗМІСТ

Вступ		4
1	Інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки	5
2	Дослідження коливального руху матеріальної точки	17
3	Динаміка відносного руху матеріальної точки	32
4	Застосування теореми про зміну кінетичного моменту для визначення кутової швидкості твердого тіла	47
5	Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи	59
6	Застосування принципу Даламбера до визначення реакцій в'язей механічної системи	76
7	Застосування принципу можливих переміщень для знаходження опорних реакцій складової плоскої рами	89
8	Застосування загального рівняння динаміки при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем вільності	103
9	Застосування рівнянь Лагранжа при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем вільності	116
10	Дослідження вільних коливань системи з одним ступенем вільності	132
Рекомендована література		147

ВСТУП

Теоретична механіка містить багато наукових узагальнень, які допомагають майбутнім інженерам різних спеціальностей правильно розуміти ті явища, які вони спостерігають, і робити науково обґрунтовані висновки. Крім того, ця дисципліна є науковою базою багатьох галузей сучасної техніки. Вона є основою таких загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, гідравліка, деталі машин, динаміка машин та інші, що вивчаються у вузах. Знання теоретичної механіки потрібні студентам для успішного вивчення профілюючих предметів, а також для творчої інженерної діяльності на промисловому виробництві після закінчення вузу.

Запропоновані методичні вказівки складено відповідно до уніфікованого навчального плану програми та робочого плану з цього курсу. Курсові розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки спрямовані на розвиток у студентів уміння виконувати типові задачі. Крім того, ці роботи сприяють кращому засвоєнню теоретичного матеріалу й придбанню навичок самостійної практичної роботи.

Кожний із студентів отримує варіант, згідно з яким він протягом семестру виконує усі задачі завдань.

Номер варіанта складається із чотирьох цифр.

Перша цифра – це номер стовпчика (або рядка) із першої таблиці, друга цифра вибирається із другої таблиці, а третя і четверта цифри означають номер схеми (у загальному випадку номер схеми співпадає із порядковим номером студента у журналі академічної групи). Завдання видаються після вивчення відповідних тем і повинні бути виконаними у термін, визначений робочим планом, а також оформлені відповідно до вимог і здані на перевірку. Після перевірки (а при необхідності – після доопрацювання) студент захищає завдання у визначений термін.

1 ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Короткі відомості з теорії

Якщо рух матеріальної точки, що відбувається під дією заданих сил, не обмежено ніякими наперед заданими Умовими, то точку називають вільною.

Основне рівняння динаміки, що виражає другий закон Ньютона, для руху вільної матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1.1}$$

де m – маса точки;

$\bar{a}$ – прискорення точки;

$\bar{F}$ – рівнодіюча прикладених до точки сил.

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки в координатній формі мають вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \tag{1.2}$$

де x, y, z – координати точки, а $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ – проекції вектора швидкості на осі координат.

Натуральна форма диференціальних рівнянь руху точки

$$\begin{cases} m\dfrac{d\upsilon}{dt} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ m\dfrac{\upsilon^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}), \\ 0 = F_b(t, s, \dot{s}), \end{cases} \tag{1.3}$$

де F_τ – проекція рівнодійної $\bar{F}$ на дотичну до траєкторії;

F_n – проекція рівнодійної $\overline{F}$ на головну нормаль;

F_b – проекція рівнодійної $\overline{F}$ на бінормаль.

У динаміці вільної матеріальної точки можна ставити і розв'язувати задачі двох основних типів.

Перша основна задача динаміки точки полягає у визначенні рівнодійної сил, які спричиняють заданий закон руху матеріальної точки з відомою масою. Спосіб розв'язання цієї задачі простий: диференціюємо двічі задані рівняння руху, а потім за диференціальними рівняннями руху знаходимо проекції рівнодійної.

Друга основна задача (обернена). Заданими є сила, яка прикладена до матеріальноточки, положення точки в певний момент часу, а також маса точки. Знайти закон руху точки.

1.2 Умови завдання

Матеріальна точка D масою m має початкову швидкість υ_A, рухається у вертикальній площині вздовж трубки ABC. На частині AB на неї діють: сила ваги $\overline{P} = m\overline{g}$, сила нормального тиску $\overline{N}^{/}$, сила опору $\overline{R}$, яка залежить від швидкості υ точки, стала сила $\overline{Q}$. Силою тертя ковзання на частині AB нехтувати (рис. 1.1).

У точці B швидкість змінюється лише за напрямком і на частині BC на точку діють: сила ваги $\overline{P} = m\overline{g}$ сила нормального тиску $\overline{N}$, сила тертя ковзання $F_{тр} = fN$, яка не залежить від швидкості υ точки і змінна сила $\overline{F}$, проекцію якої F_x на вісь x треба взяти з таблиці 1.2.

Знайти закон руху матеріальної точки D на частині BC, якщо відома відстань $AB = l$, або час t_1 руху від точки A до точки B.

Необхідні розрахункові дані подані в таблицях 1.1 і 1.2 .

Таблиця 1.1

Величини	**Значення величин за варіантами**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m, кг	1,4	1,8	1,6	0,4	1,2	2,4	2,6	2,5	0,5	2,0
Q, Н	14	22	12	16	28	20	8	10	12	18
u_0, м/с	26	35	24	32	28	40	12	14	16	20
f	0,3	0,15	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,25	0,05	0,15

Таблиця 1.2

Варіант	**R, Н**	**t_1, с**	**l=АВ, м**	**F_x, Н**
0	$0{,}4u$	2,5	---	$2 \sin(4t)$
1	$0{,}8u^2$	---	4	$6t - t^2$
2	$0{,}5u$	1,5	---	$3 \cos(2t)$
3	$0{,}6u^2$	---	2	$-3e^{-0.5t}$
4	$0{,}3u$	4	---	$6e^{-0.1t}$
5	$0{,}2u^2$	---	3	$-4\cos(3t)$
6	$0{,}2u$	0 .5	---	$12 \sin(2t)$
7	$0{,}3u^2$	---	2	$-2e^{-0.2t}$
8	$0{,}1u$	3	---	$6t^2 - t$
9	$0{,}5u^2$	---	0,5	$-4e^{-0.1t}$

Примітка*:*
З таблиць вибирати значення тільки тих величин, що задані на рисунку.

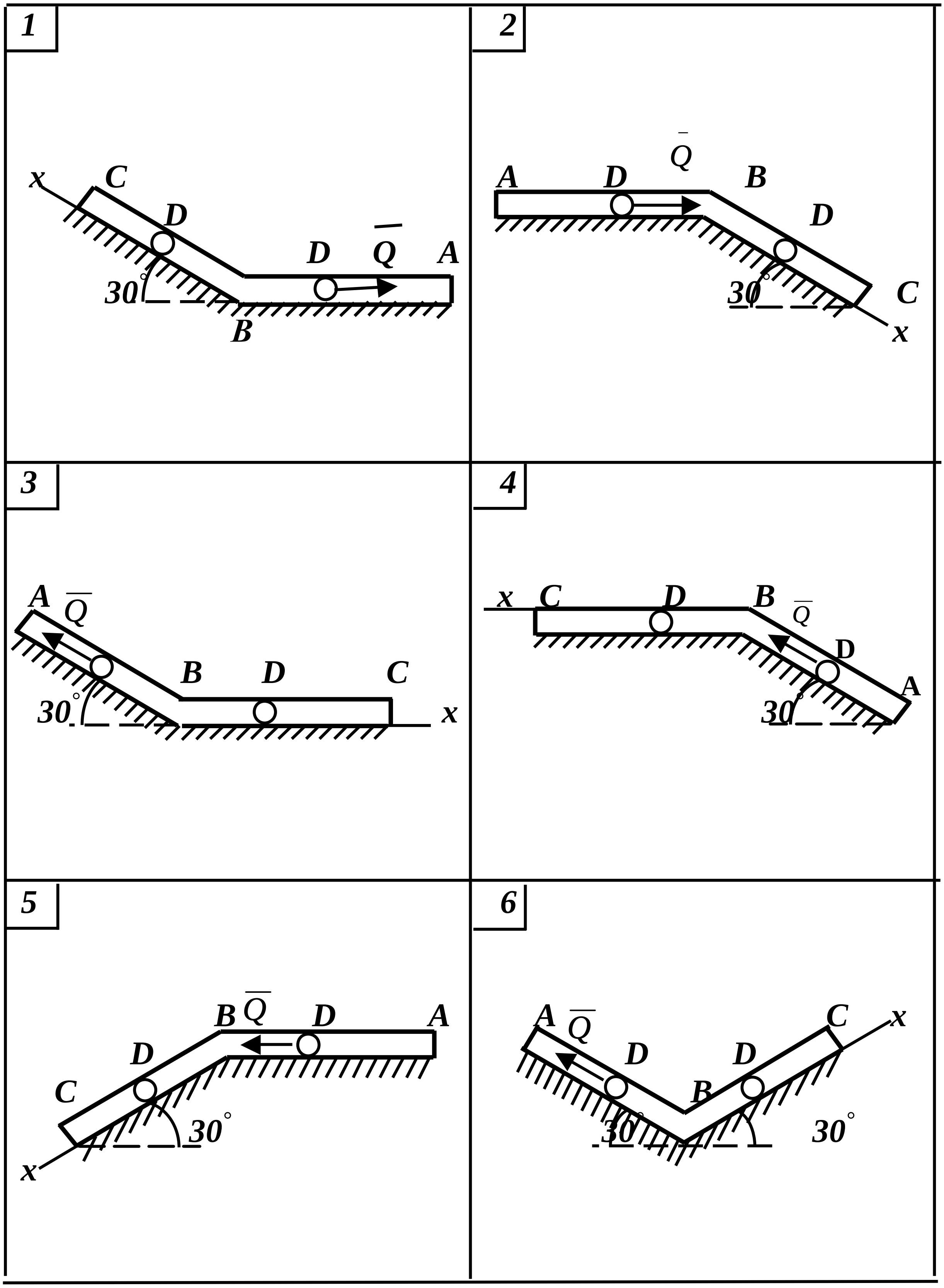


Рисунок 1.1 – Схеми до варіантів завдання

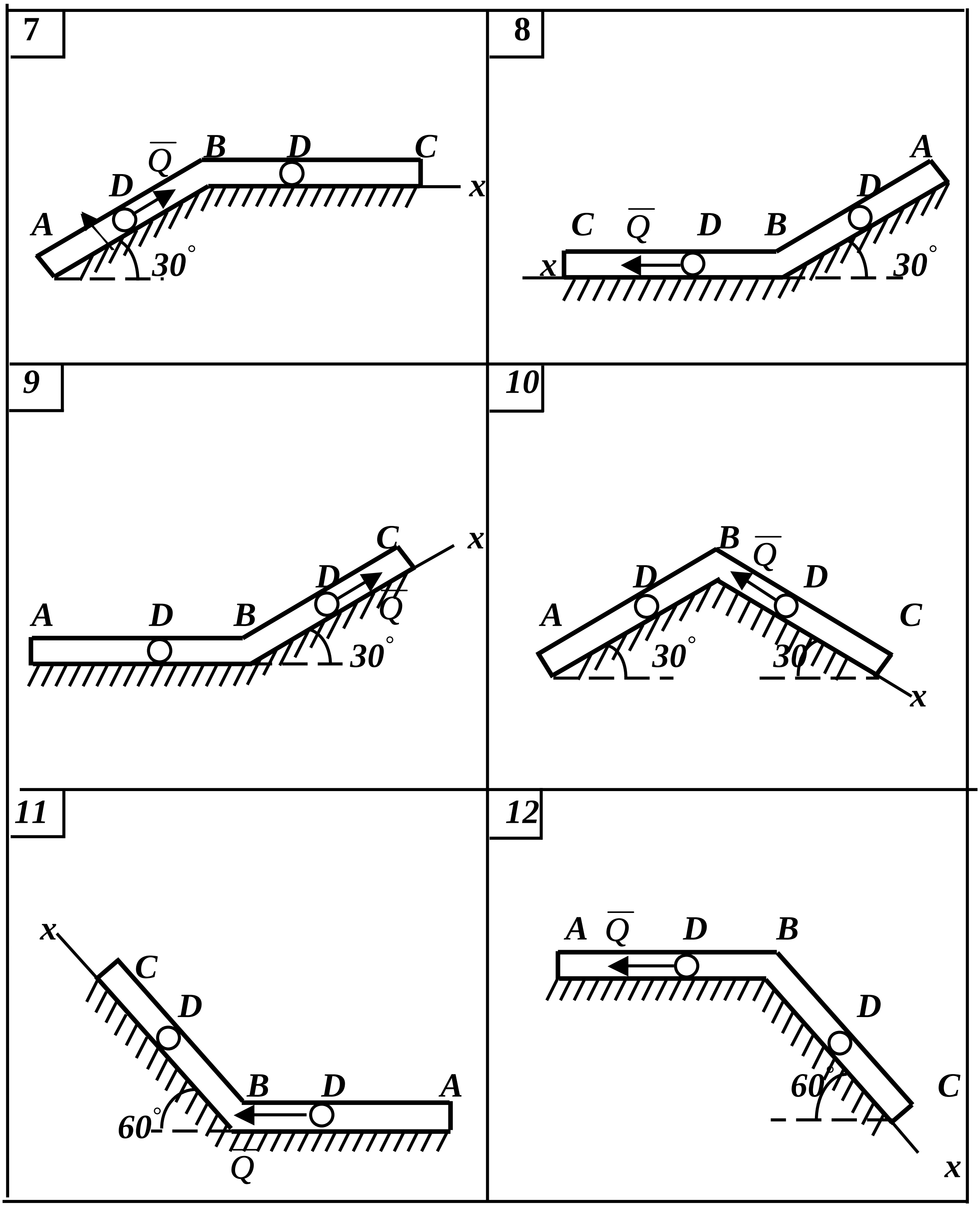


Рисунок 1.1, аркуш 2

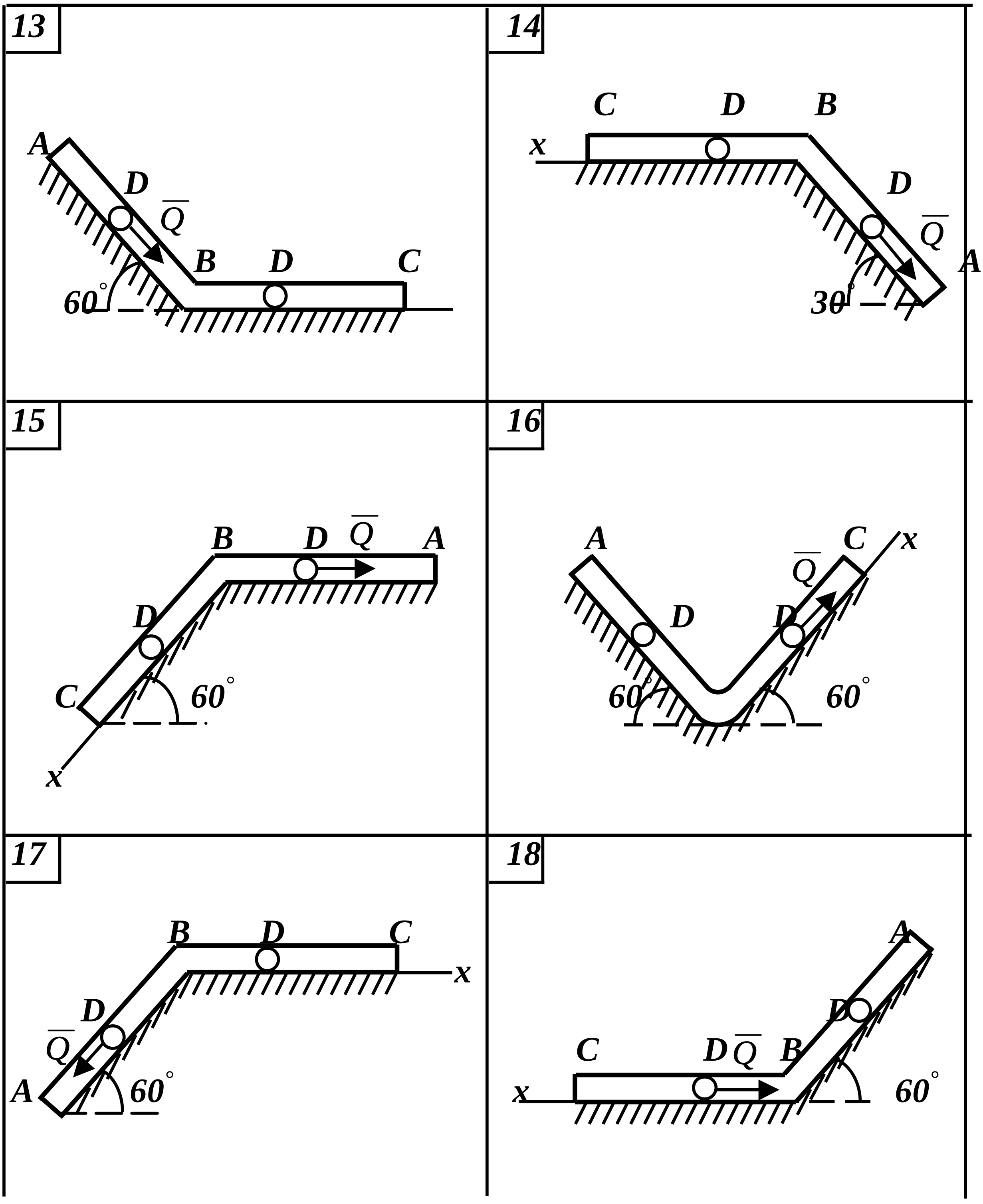


Рисунок 1.1, аркуш 3

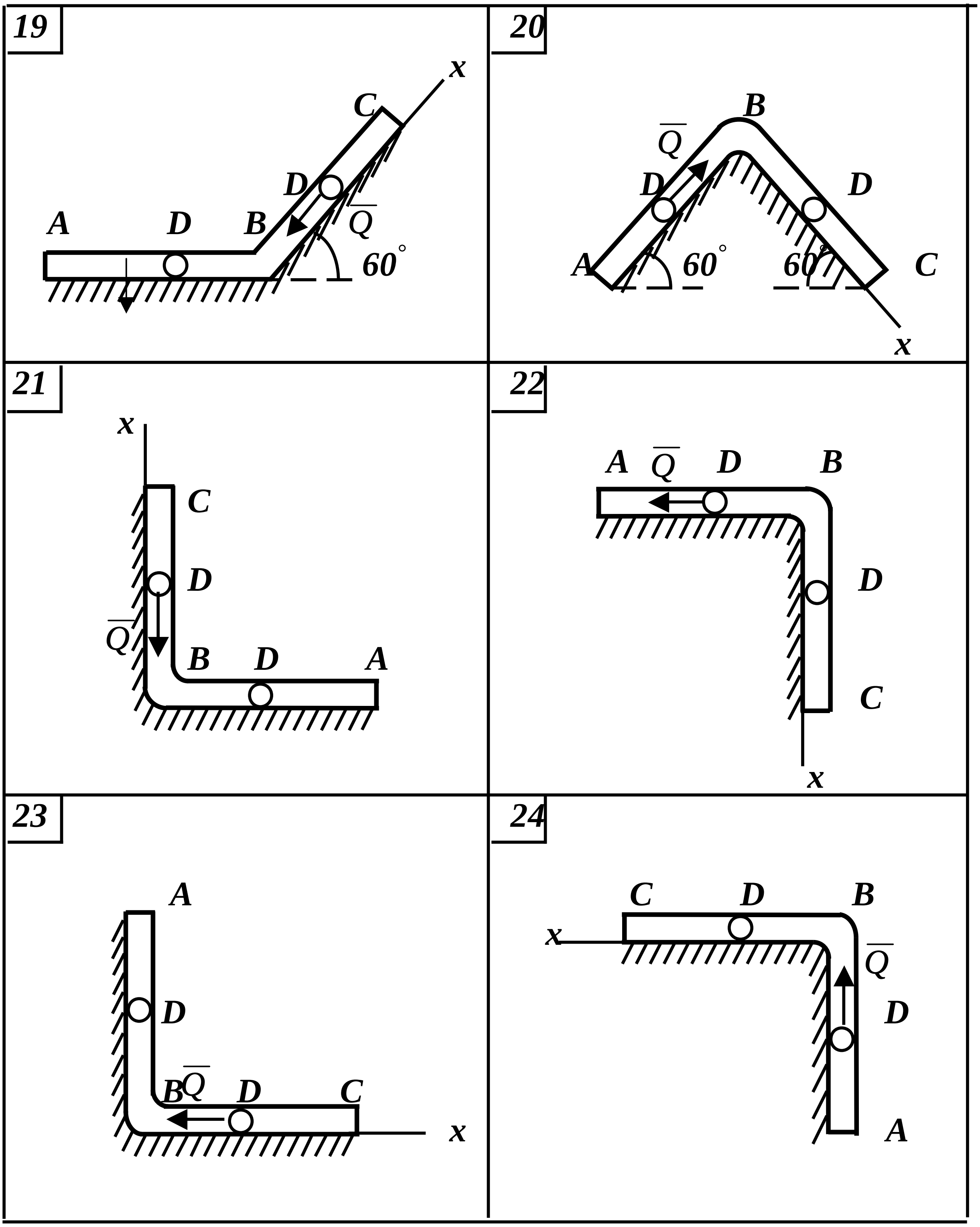


Рисунок 1.1, аркуш 4

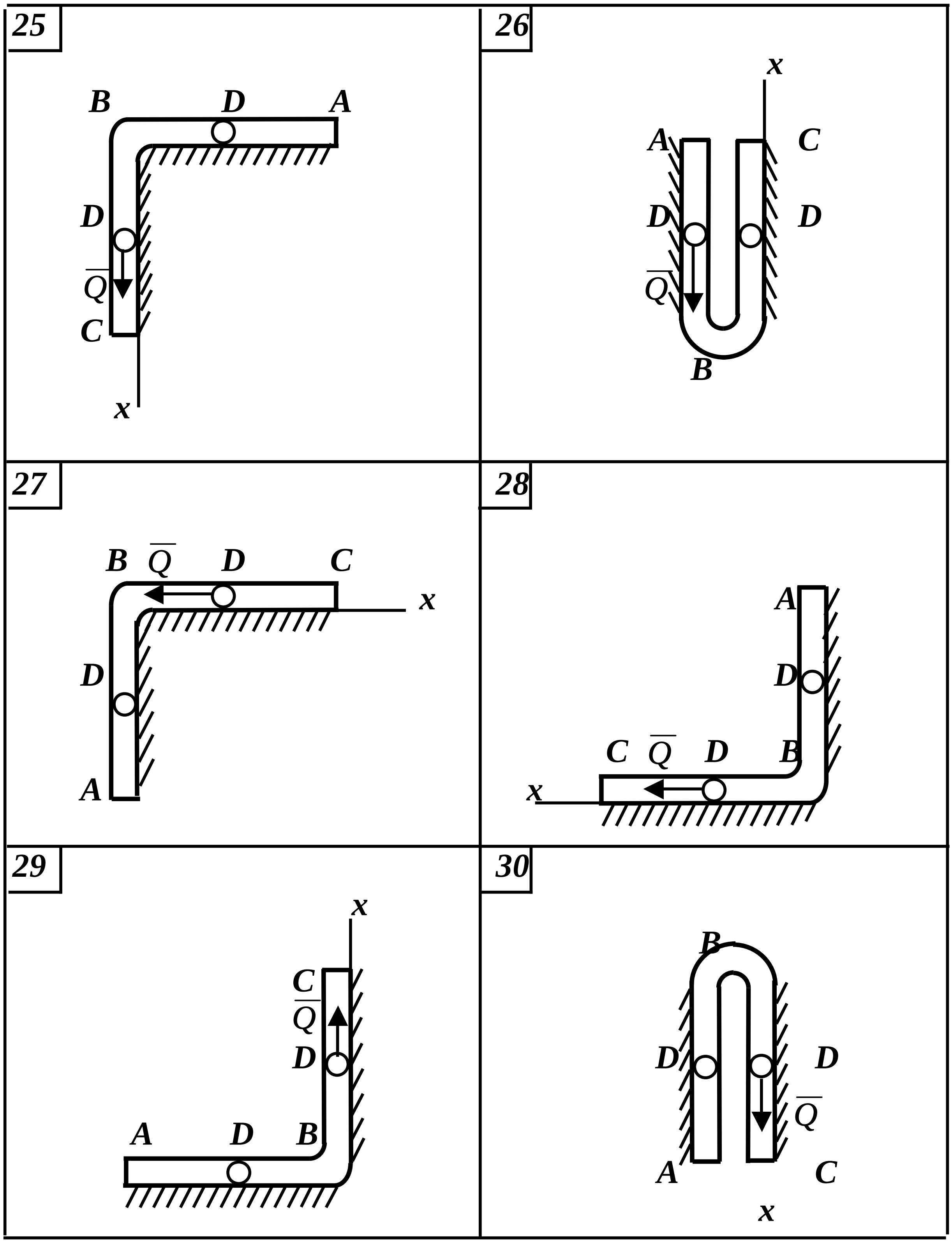


Рисунок 1.1, аркуш 5

1.3 Приклад виконання завдання

Дано: $m = 2$ *кг*, $u_0 = 5$ *м/с*, $R = \mu u^2$ *Н*, де $\mu = 0{,}4$ *Н с²/м²*, $l = 2{,}5$ *м*,

$F_x = 16\sin(4t)$ *Н*, $Q = 0$ *Н.*

Знайти: $x = f(t)$ – закон руху матеріальної точки D на частині BC.

Рішення

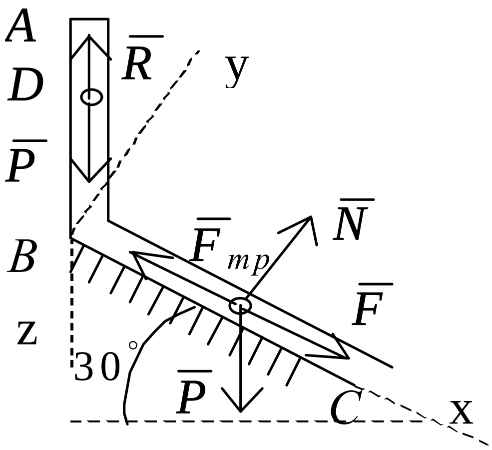


Рисунок 1.2 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Розглянемо рух матеріальної точки D на частині AB (рис. 1.2). Вона буде рухатись під дією сил: $\overline{P} = m\overline{g}$ і $\overline{R}$. Складемо диференційне рівняння руху матеріальної точки на вісь *Az*

$$m\frac{du}{dt} = F_z \quad \text{або} \quad m\frac{du}{dt} = P_z + R_z. \tag{1.4}$$

Далі знайдемо $P_z = P = mg, R_z = -R = -\mu u^2$; підкреслюємо, що у рівнянні усі змінні сили треба обов'язково визначити через усі величини, від яких вони залежать. Враховуючи, що $u_z = u$, отримаємо: z

$$m\frac{du}{dt} = mg - \mu u^2, \quad \text{або} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - u^2\right) \tag{1.5}$$

Для скорочення записів позначимо:

$$k = \frac{m}{m} = 0{,}2\ м^{-1}, \quad n = \frac{mg}{m} = 50\ м^2/с^2, \tag{1.6}$$

де при підрахунках беруть $g = 10\ \ м/с^2$.

Приймаючи до уваги, що права частина рівняння (1.6) залежить від квадрату швидкості, перейдемо від інтегрування за часом до інтегрування за координатою:

$$\frac{du}{dt} = u\frac{du}{dz}.$$

Тоді рівняння (1.6) має вигляд

$$u\frac{du}{dz} = -k(u^2 - n). \tag{1.7}$$

Розподілимо у рівнянні (1.7) змінні:

$$\frac{2u\,du}{u^2 - n} = -2k\,dz. \tag{1.8}$$

Візьмемо від обох частин інтеграли

$$\ln(u^2 - n) = -2kz + C_1. \tag{1.9}$$

Початкові умови для часу $t_0 = 0, z = 0, u = u_0$, що дає $C_1 = \ln(u_0^2 - n)$ і з рівняння (1.9) отримаємо

$$\ln(u^2 - n) = -2kz + \ln(u_0^2 - n),$$

або $$\ln(u^2 - n) - \ln(u_0^2 - n) = -2kz.$$

Звідки $$\ln\frac{u^2 - n}{u_0^2 - n} = -2kz,$$

або

$$\frac{u^2 - n}{u_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

Звідки

$$u^2 = n + (u_0^2 - n)\, e^{-2kz}. \qquad (1.10)$$

Приймаючи до уваги, що для кінцевого моменту часу $z_B = l = 2{,}5$ *м* і замінюючи k і n їх значеннями (1.5), визначимо швидкість u_B в точці B :

$$u_B^2 = 50 - 25\, e^{-1} \quad \text{і} \quad u_B = 6{,}4 \text{ м/с}. \qquad (1.11)$$

Розглянемо тепер рух матеріальної точки D на частині BC; знайдена швидкість u_B буде для руху на цій частині початковою швидкістю $(u_0 = u_B = 6{,}4$ *м/с*). Точка буде рухатись під дією сил:

$$\overline{P} = mg, \overline{N}, F_{mp} \text{ і } \overline{F}_x.$$

Складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки на вісь Ax:

$$m\frac{du}{dt} = P_x + N_x + F_{mp\,x} + F_x,$$

або

$$m\frac{du}{dt} = mg\sin a + F_{mp\,x} + F_x, \qquad (1.12)$$

де $F_{mp\,x} = fN.$

Для визначення N складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки на вісь By.

Оскільки $a_Y = 0$, одержимо $0 = N - mg\cos a$:

звідки $N = mg\cos a$.

Тоді $F_{mpx} = fmg\cos a$.

Крім того, $F_x = 16\sin(4t)$ і рівняння (1.12) набуде вигляду

$$m\frac{du}{dt} = mg\,(\sin a - f\cos a) + 16\sin(4t)\,. \qquad (1.13)$$

Поділивши ліву та праву частини рівняння (1.13) на і, враховуючи, що $m = 2$ *кг*, $g = 10$ *м/с*, $a = 30^0$, отримаємо

$$\frac{du}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (1.14)$$

Помноживши обидві частини рівняння (1.14) на dt, і, інтегруючи, знайдемо

$$u_x = 3{,}2\,t - 2\cos(4t) + C_2\,. \qquad (1.15)$$

Зараз матеріальна точка знаходиться у точці B, тоді початкові умови набувають вигляду: $t = 0$, $x = x_0 = 0$, $u = u_0 = u_B = 6{,}4$ *м/с*, і рівняння (1.15) для часу, коли $t = 0$, допоможе нам знайти C_2:

$$6{,}4 = 3{,}2\;0 - 2\cos(0) + C_2,$$

звідки $$C_2 = 6{,}4 + 2\cos(0) = 8{,}4$$

і $$u_x = \frac{du}{dt} = 3{,}2\,t - 2\cos(4t) + 8{,}4\,. \qquad (1.16)$$

Знову візьмемо інтеграл від обох частин останнього рівняння

$$x = 1{,}6\,t^2 + 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t + C_3\,. \qquad (1.17)$$

Оскільки для часу, коли $t = 0$, $x_0 = 0$, то $C_3 = 0$

і $$x = 1{,}6\,t^2 + 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t,\ м\,. \qquad (1.18)$$

Останнє рівняння і є законом руху точки.

Відповідь:

Закон руху матеріальної точки D на частині BC:

$$x = 1{,}6\,t^2 + 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t.$$

2 ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1 Короткі відомості з теорії

Під коливальним рухом матеріальної точки розуміють періодичне її відхилення в різні боки відносно визначеного положення.

Це положення називають положенням стійкої рівноваги точки.

На рисунках 2.1, 2.2, 2.3 показані можливі положення точки.

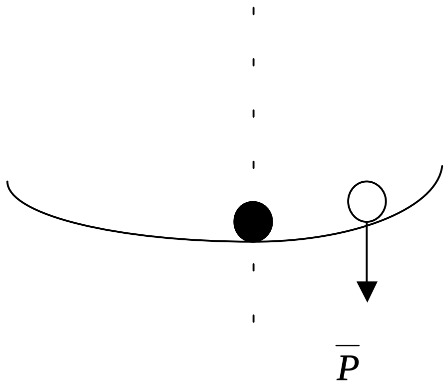


Рисунок 2.1- Положення стійкої рівноваги

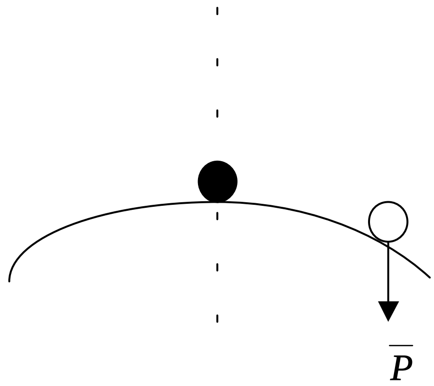


Рисунок 2.2- Положення нестійкої рівноваги

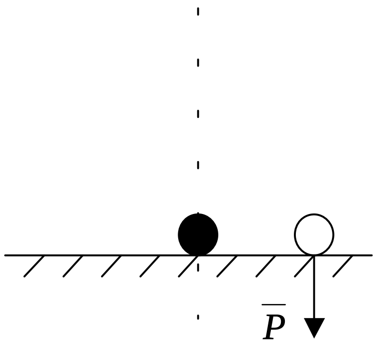


Рисунок 2.3-Положення байдужої рівноваги

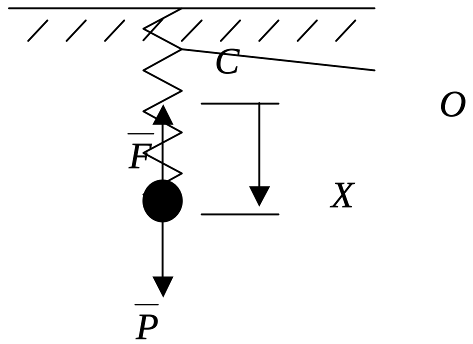


Рисунок 2.4 -Дія відновлювальної сили

Положення точки M (див. рис. 2.1) називають положенням стійкої рівноваги. При відхиленні точки від цього положення вона намагається повернутися назад, здійснюючи коливальний рух.

У прикладі, показаному на рисунку 2.1, точка M повертається в положення стійкої рівноваги силою $\overline{P}$. Таку силу називають відновлювальною силою.

У багатьох випадках відновлювальною силою є сила $\overline{F}$, яка створюється пружним елементом C (рис. 2.4). Коливальний рух зустрічається досить часто у різних галузях науки та техніки.

Усі частини, які входять до складу будь-якої споруди або машини, мають пружність і тому здатні виконувати коливання.

При деяких Умових коливання здатні досягати великих розмірів, які дуже несприятливі для міцності споруди або шкідливі для нормальних умов працездатності машин та механізмів.

Ось чому одним із завдань, що стоять перед інженером – знайти способи, за допомогою яких можна зменшувати коливання, стримуючи їх у доступних межах.

У сучасній техніці особливо поширене використання знайшла теорія нелінійних коливань.

Програмою сучасного курсу передбачено розгляд лінійних коливань, які описуються диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Розрізняють такі види коливального руху матеріальної точки:

1) вільні коливання, що відбуваються під дією поновлюючої сили;

2) вільні коливання, які відбуваються під дією поновлюючої сили та опору руху (затухаючі коливання);

3) вимушені коливання, які відбуваються під дією поновлюючої сили і сили періодичного характеру – збурюючої сили;

4) вимушені коливання, які відбуваються під дією поновлюючої сили та опору рухові та збурюючої сили.

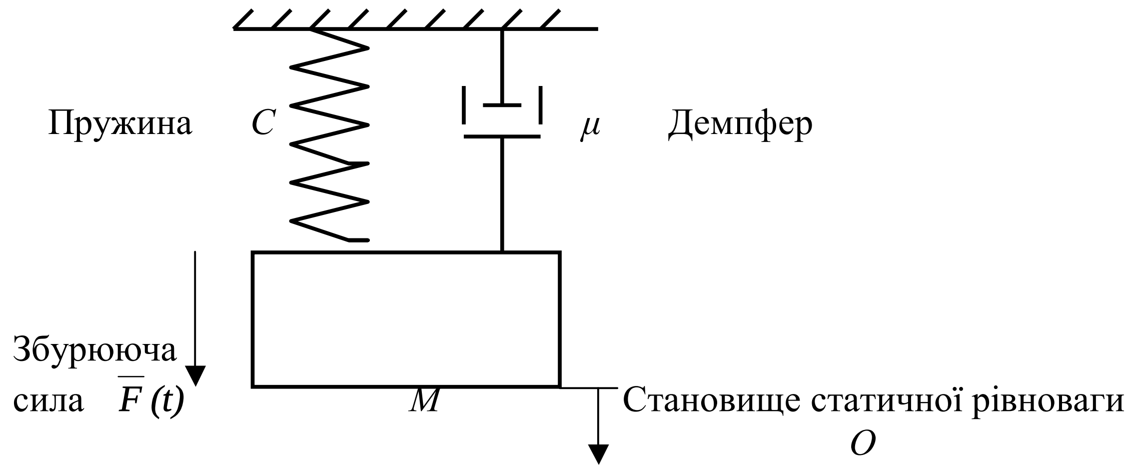


Рисунок 2.5 - Елементи коливальної системи

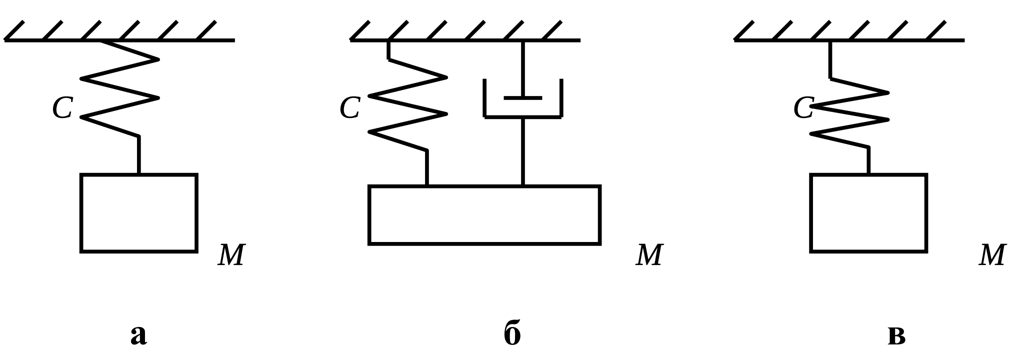


Рисунок 2.6 - Випадки коливальних рухів

На рисунку 2.5 показані окремі ідеалізовані елементи, що утворюють коливальну систему. Такими елементами є маса, пружина, демпфер і збуджуюча сила.

Енергія може накопичуватися масою, а також пружиною і розсіюватися демпфером у вигляді тепла.

Схема, що показана на рисунку 2.5, відповідає четвертому випадку коливального руху точки.

Перші три випадки коливального руху наведені відповідно на рисунку 2.6 послідовно (а, б, в).

У лінійних коливаннях пружна сила й сила опору рухові точки виражені лінійними залежностями.

Так, пружна сила дорівнює

$$\overline{F} = c\Delta L, \qquad (2.1)$$

де $\overline{F}$ – пружна сила,

c – коефіцієнт жорсткості пружини,

ΔL – деформація пружини.

Сила опору руховi точки дорівнює

$$\overline{R} = -m\overline{u} \qquad (2.2)$$

де $\overline{R}$– сила опору,

m – коефіцієнт опору,

$\overline{u}$ – вектор швидкості точки .

Диференціальні рівняння для кожного випадку записані у стандартній формі та мають такий вигляд:

$$\overline{x} + k^2 x = 0, \qquad (2.3)$$

$$x + 2nx + k^2 x = 0, \qquad (2.4)$$

$$x + k^2 x = hsin(pt + d), \qquad (2.5)$$

$$x + 2nx + k^2 x = hsin(pt + d), \qquad (2.6)$$

де k – кругова або власна частота, яка визначається за формулою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (2.7)$$

де n – коефіцієнт затухання, який визначається за формулою

$$2n = m/m; \quad n = m/2m. \qquad (2.8)$$

У цьому завданні розглядається найпростіший, але практично дуже важливий випадок, коли збурююча сила (силове збурення) або кінематичне збурення змінюється за гармонійним законом і визначається аналогічними формулами:

$$F(t) = Q\sin(pt + \delta),\ H, \qquad (2.9)$$

$$Y(t) = Q\sin(pt + \delta),\ м, \qquad (2.10)$$

де Q – амплітудне значення збурень, визначене відповідно у розмірі сили або довжини;

p і d – частота і початкова фаза збурень;

h – відносна амплітуда:

$$h = \frac{Q}{m}.$$

2.2 Умови завдання

У таблицях 2.1 і 2.2 задаються маси тіл, жорсткості пружних елементів (пружин), сили опору або закони збуджуючих навантажень, які мають кінематичний або силовий характер.

На розрахункових схемах (рис. 2.7) зазначені початкові умови коливань точки.

Ці умови при виконанні існуючого завдання визначені початковою координатою або початковою швидкістю точки.

Наприклад, за умовою задачі на розрахунковій схемі під номером 1 до тіла1 приєднують тіло 2.

Тіло, яке приєднують на розрахункових схемах, зображують безперервними лініями і знаком “+”.

Тіло, яке відокремлюють від іншого тіла на розрахункових схемах, зображують переривчастими лініями та знаком “–”.

Приєднання одного тіла до другого, або відокремлення одного від іншого, забезпечує за масами тіл і жорсткості пружних елементів можливість визначення початкового положення тіла або тіл у початковий момент часу за відношенням до стану статичної рівноваги.

Слід мати на увазі, що на всіх розрахункових схемах вказані ознаки опору руховi (демпфер), кінетичного збурення (координата *Y*), силового збурення (сила $\overline{F}(t)$).

При розв'язанні конкретної задачі, згідно з шифром варіанта, залишається тільки один із трьох наведених ознак.

При розв'язанні задачі необхідно знайти рівняння руху тіла 1 масою m_1 або системи тіл 1 і 2 масами m_1 і m_2.

Стрижні, що з'єднують вантажні й пружні елементи, беруться невагомими. Рішення диференціального рівняння затухаючих коливань залежить від співвідношення власної частоти коливань k і коефіцієнта затухання n.

У залежності від цього можливі такі випадки розв'язання вказаного диференціального рівняння:

$$n < k,\ \ x = e^{-nt}\left(C_1 sin k_1 t - C_2 cos k_2 t\right),$$

$$n = k,\ \ x = e^{-nt}\left(C_1 t + C_2\right),$$

$$n > k,\ \ x = e^{-nt}\left(C_1 e^{-k2t} + C_2 e^{-k2t}\right),$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

У залежності від вказаних співвідношень можливі такі розв'язання диференціального рівняння:

$$p < k, x = C_1 cos\, kt + C_2 sin\, kt + \frac{h}{k^2 - p^2} sin\,(pt + d),$$

$$p = k, x = C_1 cos\, kt + C_2 sin\, kt + \frac{h}{k^2 - p^2} sin\,(pt + d - \frac{p}{2}),$$

$$p > k, x = C_1 cos\, kt + C_2 sin\, kt + \frac{h}{k^2 - p^2} sin\,(pt + d - p).$$

Таблиця 2.1

Величина	**Визначення функції за варіантами**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Маса тіла, кг:										
m_1	2	1	0,5	1,5	3,0	4,0	3,5	4,5	5,5	6,0
m_2	1	2	1,5	3,0	2,5	--	--	--	--	--
Жорсткість пружніх елементів, Н/см:										
C_1	3	12	10	2	4	50	15	5	1	7
C_2	3	35	5	--	25	4	6	--	2	1
C_3	--	--	--	4	--	--	--	10	--	--

Таблиця 2.2

Назва функції	**Визначення функції за варіантами**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Сила опору $R = -\mu u$, Н	$10u$	--	$5u$	--	--	$20u$	--	$90u$	--	$15u$
Кінематичне збурення $Y=Q\sin pt$,см	--	--	--	--	2sin5t	--	3sin7t	--	--	--
Силове збурення $F=Q\sin pt$, Н	--	4sin3t	--	6sin8t	--	--	--	--	9sin2t	--

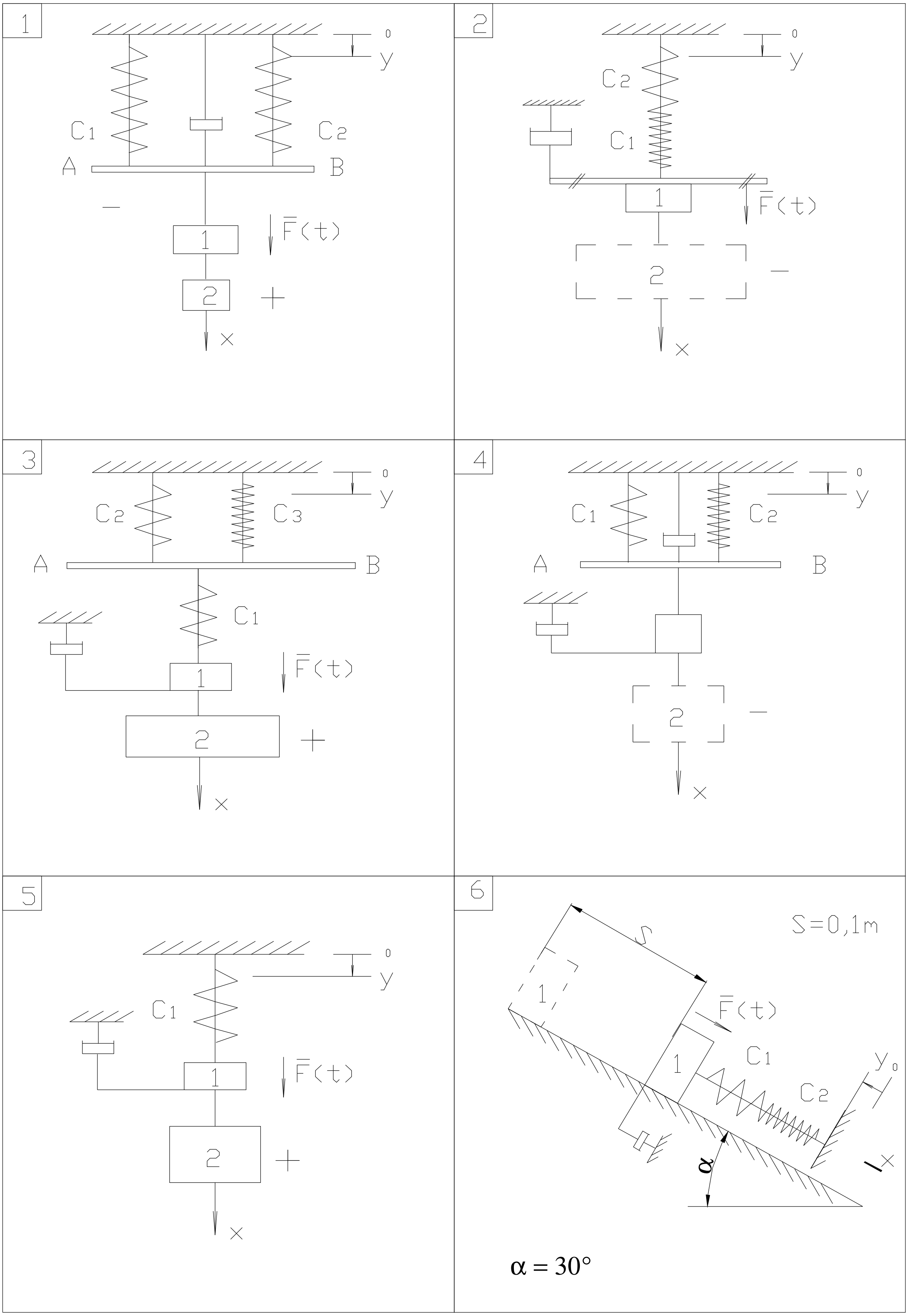


Рисунок 2.7 – Схеми до варіантів завдання

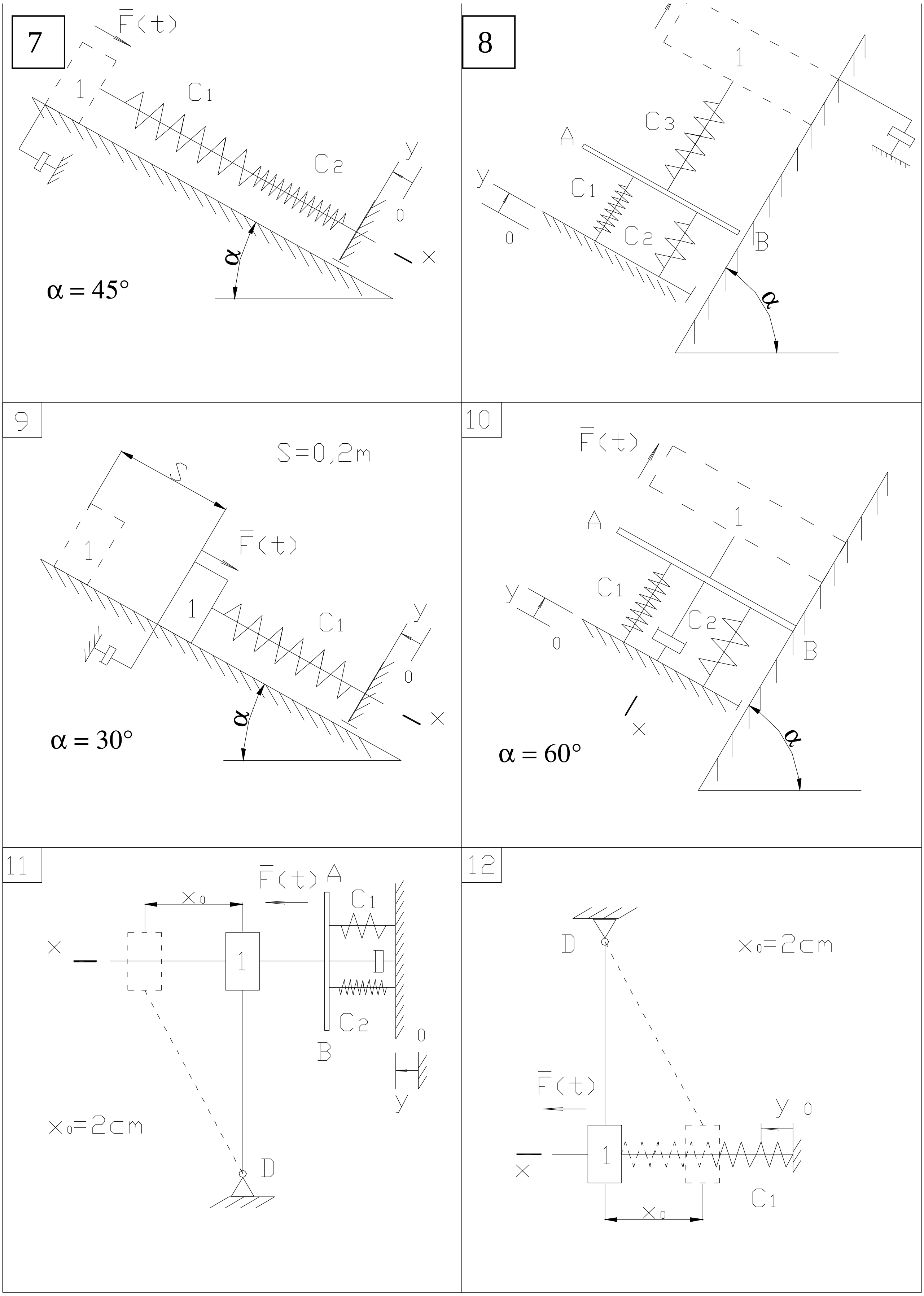


Рисунок 2.7, аркуш 2

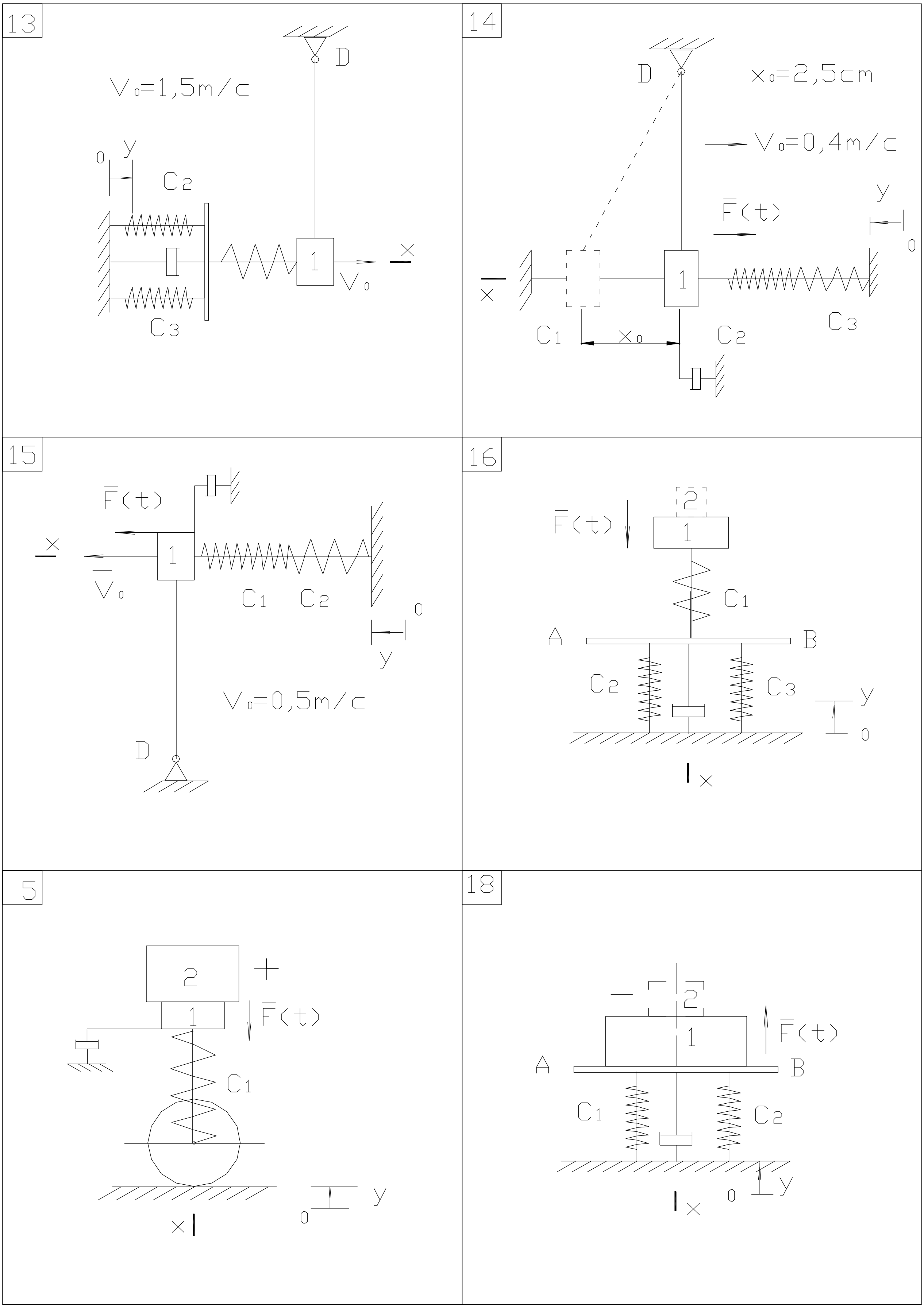


Рисунок 2.7, аркуш 3

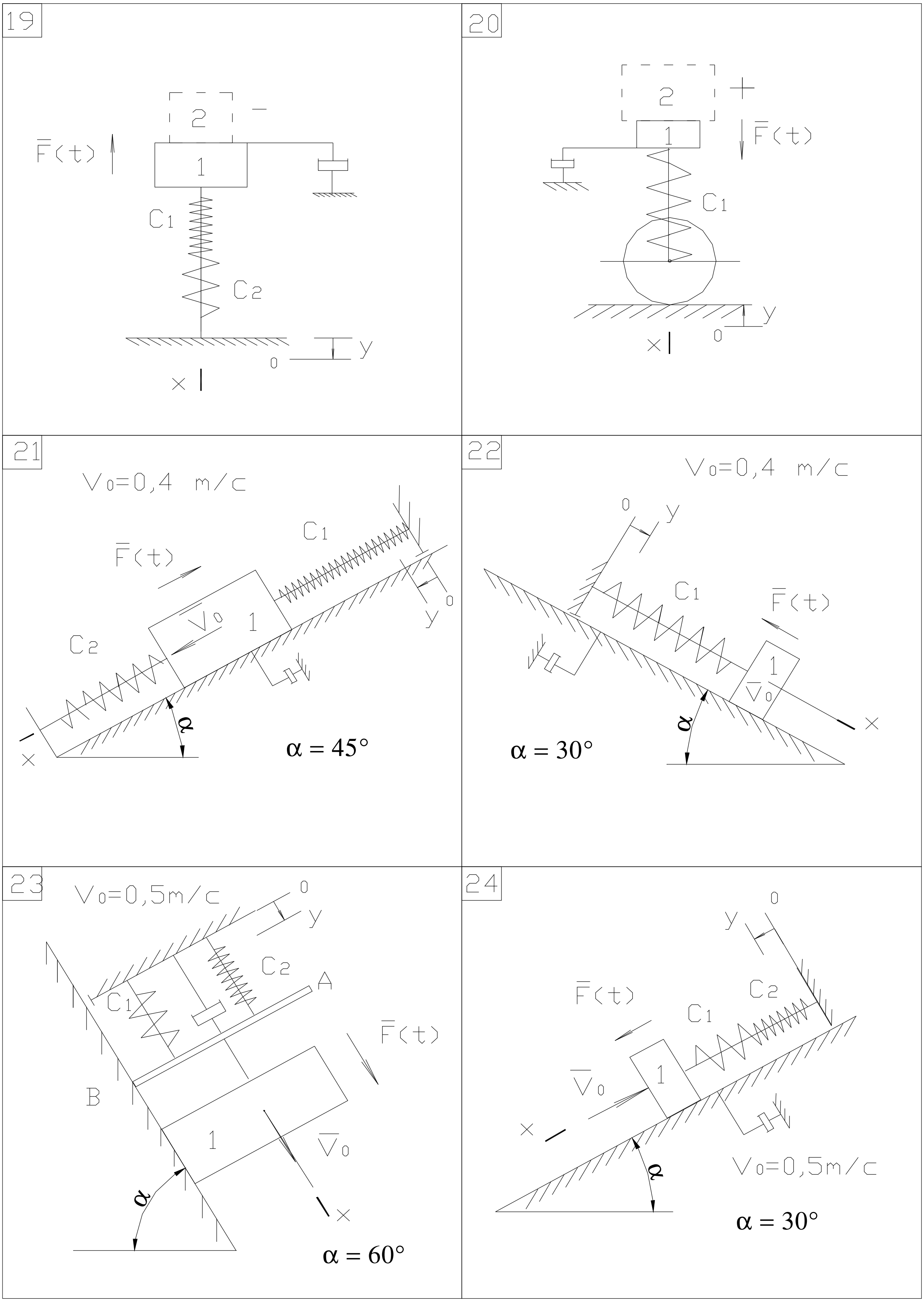


Рисунок 2.7, аркуш 4

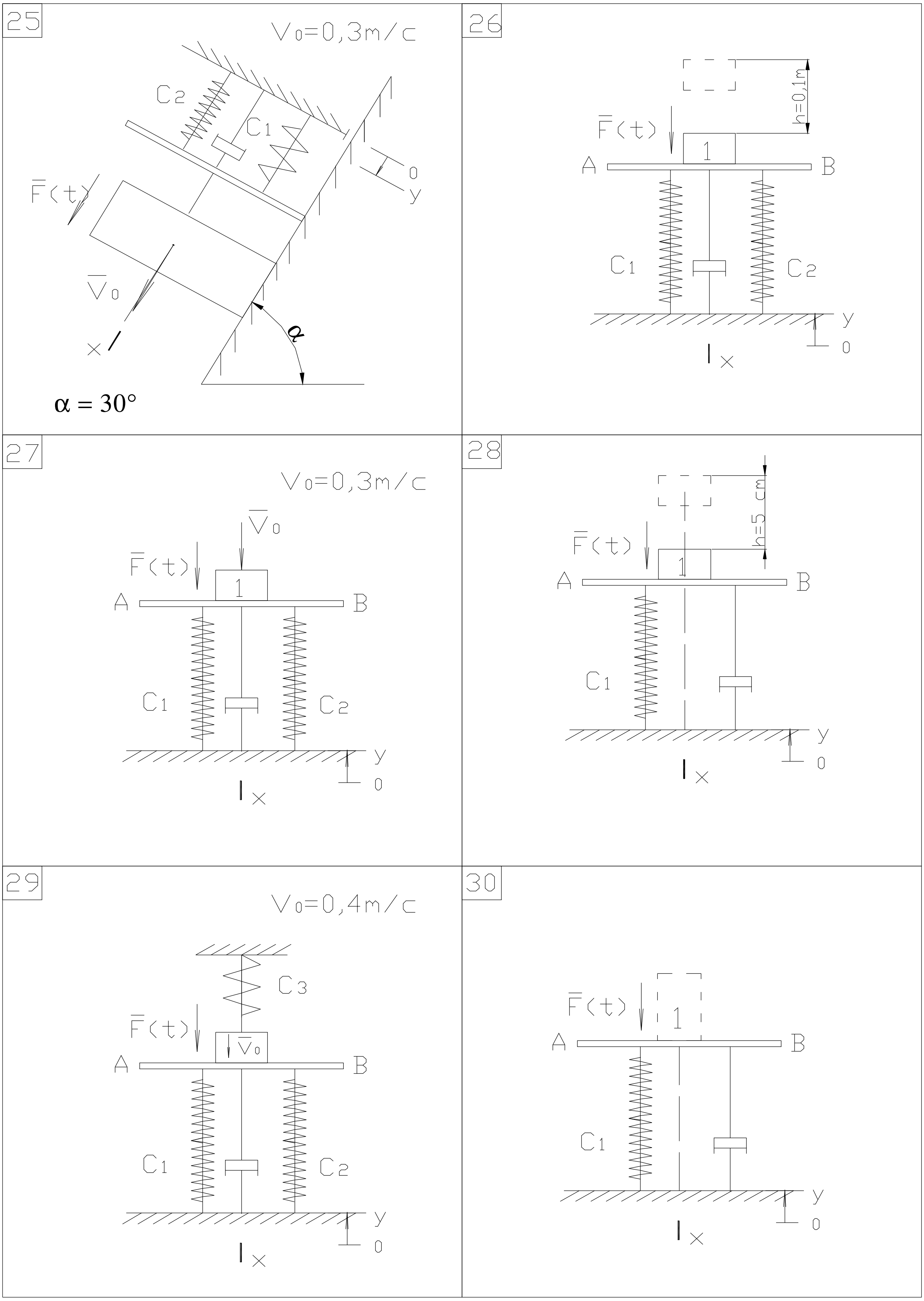


Рисунок 2.7, аркуш 5

2.3 Приклад виконання завдання

Дано: *m_1=2 кг* і *m_2=3 кг*; *a = 30°*; *C =6 Н/см = 600 Н/м*.

Знайти: рівняння руху тіла 1.

Рішення

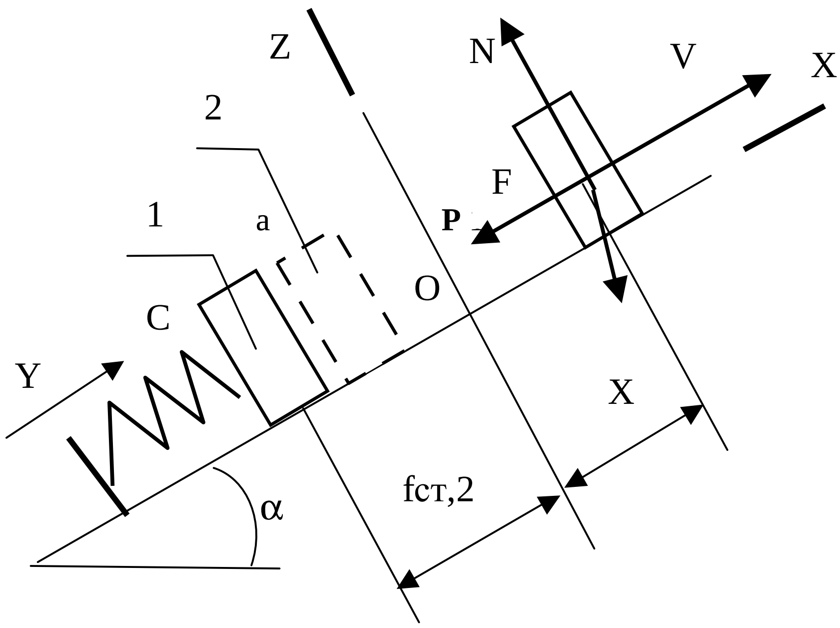


Рисунок 2.8 — Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Два тіла 1 і 2 масами m_1=2 кг і m_2=3 кг знаходяться на гладкій площині, розташованій під кутом a = 30° до горизонту, опираючись на пружину, коефіцієнт жорсткості якої C = 6 Н/см = 600 Н/м (див. рис. 2.7).

У якийсь час тіло 2 знімають і одночасно кінець пружини рухають відповідно до закону $Y = 0{,}02\ sin10t$ метрів.

Визначити рівняння руху тіла 1.

Спрямуємо вісь X у бік руху тіла 1 у час, визначений координатою X (рис. 2.8). Початок відліку вибирається у стані статичної рівноваги тіла.

Рух тіла визначається за диференціальним рівнянням

$$m_1 = \sum F_{ix}\,, \tag{2.11}$$

де $\sum F_{ix} = - P_1 \sin a - F,$

тут $F = C\,(x - f_{cm.1} - y),$

$f_{cm.1}$ – статична деформація пружини під дією тіла 1.

Цю статичну деформацію визначимо з умов статичної рівноваги тіла:

$$-P_1 sin a + C f_{cm.1} = 0\,,$$

звідки

$$f_{cm.1} = P_1 sin a / C\,.$$

Диференціальне рівняння руху тіла 1 набуває вигляду

$$m_1 x = - P_1 \sin a - C\,(x - f_{cm.1} - y).$$

Після перетворення одержуємо

$$m_1 x + C_x = d \sin (pt),$$

де d = 0,02.

З рівняння $k = \dfrac{C}{m_1}$, звідки $k = k = \sqrt{\dfrac{600}{2}} = 10 \cdot \sqrt{3} = 17{,}3.$

Таким чином, у даному випадку

$$P < k\,.$$

Рішення диференціального рівняння у цьому разі має вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt). \tag{2.12}$$

Для визначення сталих коефіцієнтів інтегрування запишемо рівняння для x:

$$x = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{2.13}$$

Визначимо початкові умови

$$x_0 = -f_{ст.2} = -p_2 \sin(a/c), \dot{x}_0 = 0. \tag{2.14}$$

Після підстановки початкових умов (2.14) у рівняннях (2.12), (2.13) і визначення сталих інтегрування, одержимо рівняння тіла 1

$$x = -2{,}45 \cos 1{,}73t - \sin 1{,}73t + 3 \sin 10t.$$

Відповідь:

Рівняння руху тіла 1:

$$x = -2{,}45 \cos 1{,}73t - \sin 1{,}73t + 3 \sin 10t.$$

3 ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1 Короткі відомості з теорії

Рух матеріальної точки, що відбувається під дією заданих сил, не обмежений ніякими попередніми Умовими називають вільним.

Основне рівняння динаміки, що виражає другий закон Ньютона, для руху вільної матеріальної точки має вигляд

$$m\,\bar{a} = \bar{F}\ , \tag{3.1}$$

де m – маса точки;

$\bar{a}$ – прискорення точки;

$\bar{F}$ – рівнодійна прикладених до точки сил.

Виникає потреба знайти закон руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи координат.

На підставі теореми Коріоліса

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \tag{3.2}$$

де $\bar{a}_r$ – відносне прискорення точки;

$\bar{a}_e$ – переносне прискорення точки;

$\bar{a}_k$ – прискорення Коріоліса.

Підставляючи (3.1) в (3.2), дістанемо

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \left(-m\bar{a}_e\right) + \left(-m\bar{a}_k\right). \tag{3.3}$$

Запровадимо позначення

$$\overline{\Phi}_k = -m\,\overline{a}_k\ , \qquad \overline{\Phi}_e = -m\,\overline{a}_e\,. \tag{3.4}$$

Вектор $\overline{\Phi}_e$ називається силою інерції переносного руху; вектор $\overline{\Phi}_k$ силою інерції Коріоліса, або поворотною (ці сили запропоновані Коріолісом у 1831 році).

На підставі (3.4) рівність (3.3) набуває вигляду

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k\,. \tag{3.5}$$

Рівність (3.5) визначає другий закон Ньютона для відносного руху матеріальної точки або динамічну теорему Коріоліса, яку можна сформулювати так: добуток маси точки на прискорення їх відносного руху дорівнює векторній сумі сил, прикладених до неї, сили інерції переносного руху й сили інерції Коріоліса. Це основне рівняння відносного руху матеріальної точки у векторній формі.

Оскільки рух неінерціальної системи відліку вважається відомим, то переносне прискорення точки завжди можна визначити. Прискорення Коріоліса розраховують за відомою з кінематики формулою

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r\ , \tag{3.6}$$

де $\overline{\omega}_e$ – миттєва швидкість неінерціальної системи відліку;

$\overline{\upsilon}_r$ – відносна швидкість матеріальної точки.

Проеціючи рівняння відносного руху на осі рухомої (неінерціальної)системи координат $x\,y\,z$, і, беручи до уваги, що

$$a_{rx} = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \quad a_{ry} = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \quad a_{rz} = \frac{d^2z}{dt^2}\,,$$

дістанемо диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки в координатній формі:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \quad \textbf{(3.7)}$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz},$$

Аналізуючи диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки у векторній і координатних формах, приходимо до висновку: диференціальні рівняння динаміки відносного руху складаються так само, як і в інерціальних системах, тільки до безпосередньо прикладених до точки сил приєднуються ще сили інерції – переносна і Коріоліса.

Отже, всі наслідки, отримані з основних законів механіки, справедливі й для відносного руху, якщо окрім реальних сил, які діють на цю точку, враховувати ще сили інерції. Введення сил інерції приводить до зручного формулювання основних законів механіки у відносному русі і надає їм наочного характеру, завдяки чому ці закони мають широке використання .

Розклавши переносну силу інерції точки $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ на складові, дістанемо

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e^n - m\overline{a}_e^t = \overline{\Phi}_e^n + \overline{\Phi}_e^t .$$

При обертальному русі твердого тіла

$$\Phi_e^n = mw^2r, \quad \Phi_e^t = m\varepsilon r.$$

Коли відбувається поступальний рух твердого тіла

$$\Phi_e^n = m\frac{\upsilon^2}{r}, \qquad \Phi_e^t = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

У випадку прямолінійного поступального руху:

$$r = \infty \quad \text{і} \quad \Phi_e^n = 0.$$

3.2 Умови завдання

Матеріальна точка M масою m (рис. 3.1), маючи початкові умови: при $t_0 = 0$, $x = x_0$, $u = u_0$, рухається вздовж циліндричного каналу рухомого тіла A.

Визначити закон відносного руху матеріальної точки M, координату x і силу нормального тиску N для часу $t = t$.

Тіло A обертається зі сталою кутовою швидкістю w навколо нерухомої осі (у варіантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26, та 30 ось обертання Z_1 вертикальна, а у варіантах 1, 12, 15 та 25 ось обертання X_1 горизонтальна). У варіантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 та 29 тіло A рухається поступально, паралельно вертикальній площині $Y_1O_1Z_1$. При цьому закон змінення координати $Y_1 = a\,t^3 + b\sin(pt)$ або $Z_1 = a\,t^3 + b\sin(pt)$, а значення коефіцієнтів a і b треба взяти з таблиці 3.2.

Коефіцієнт тертя $f = 0{,}1$ураховувати лише у варіантах 13, 14, 21 та 28.

Необхідні розрахункові дані подані в таблицях 3.1 і 3.2.

Таблиця 3.1

Величини	Значення величин за варіантами									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
m, кг	0,08	0,06	0,05	0,04	0,02	0,08	0,06	0,05	0,04	0,01
C, Н/см	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,5
l_0, м	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
t, с	0,1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,3
a, °	30	60	30	60	30	60	30	60	30	60

Таблиця 3.2

Величини		Значення величин за варіантами									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
w, с$^{-1}$		3	4	5	6	7	10	15	20	25	30
x_0, м		0	0,4	0,3	0,2	0,1	0	0.4	0,3	0,2	0,1
$u_0=\dot{x}_0$, м/с		0,1	-0,2	0	0,5	-0,1	0,4	-0,5	0,2	0	-0,3
Довжина стрижня, м	a	0	2	0	-4	0	3	0	-3	0	4
	b	0,1	0	-0,2	0	-0,1	0	0,2	0	0,3	0

Примітка.

З таблиць вибирати значення тільки тих величин, що задані на рисунку.

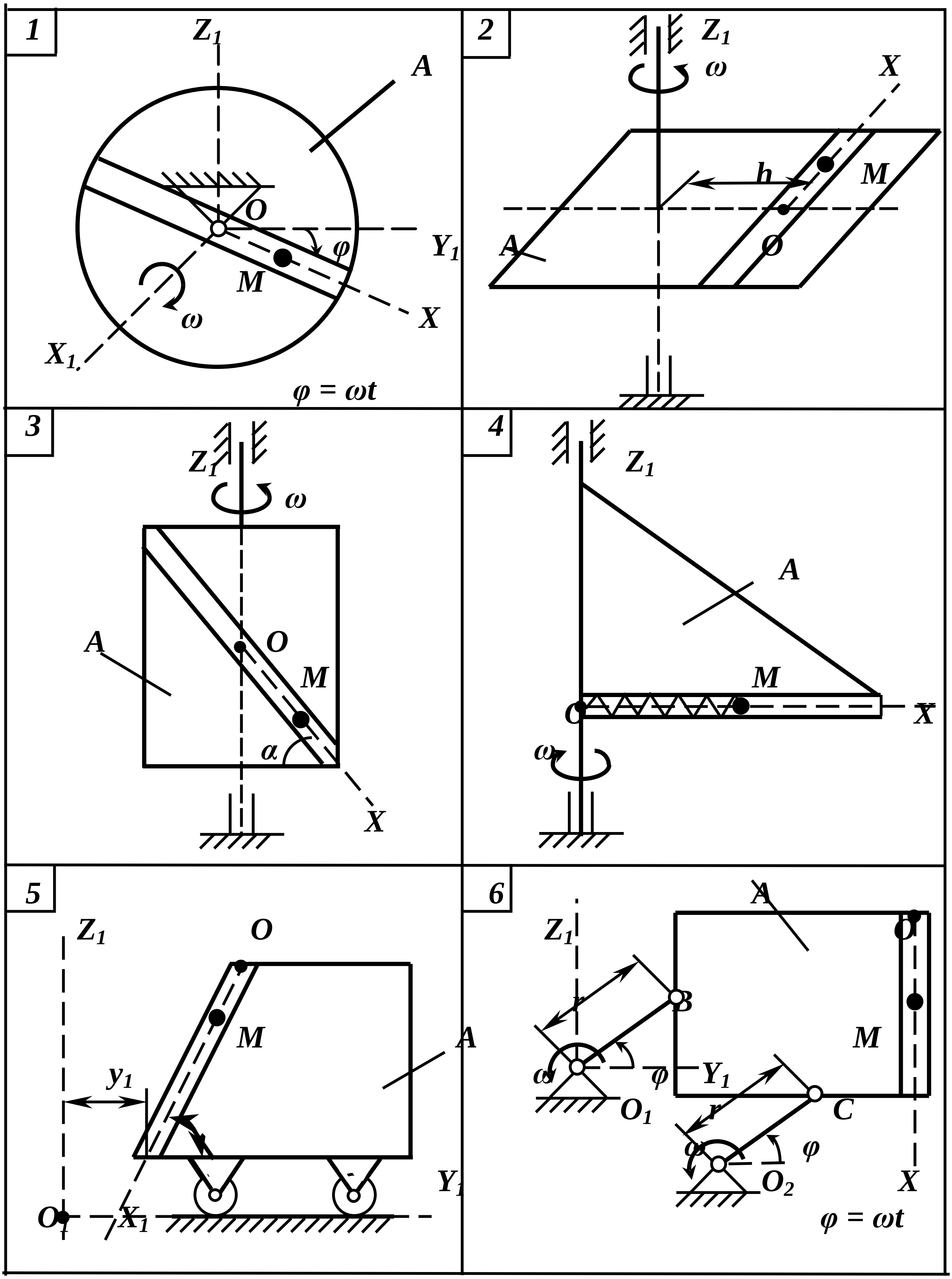


Рисунок 3.1 – Схеми до варіантів завдання

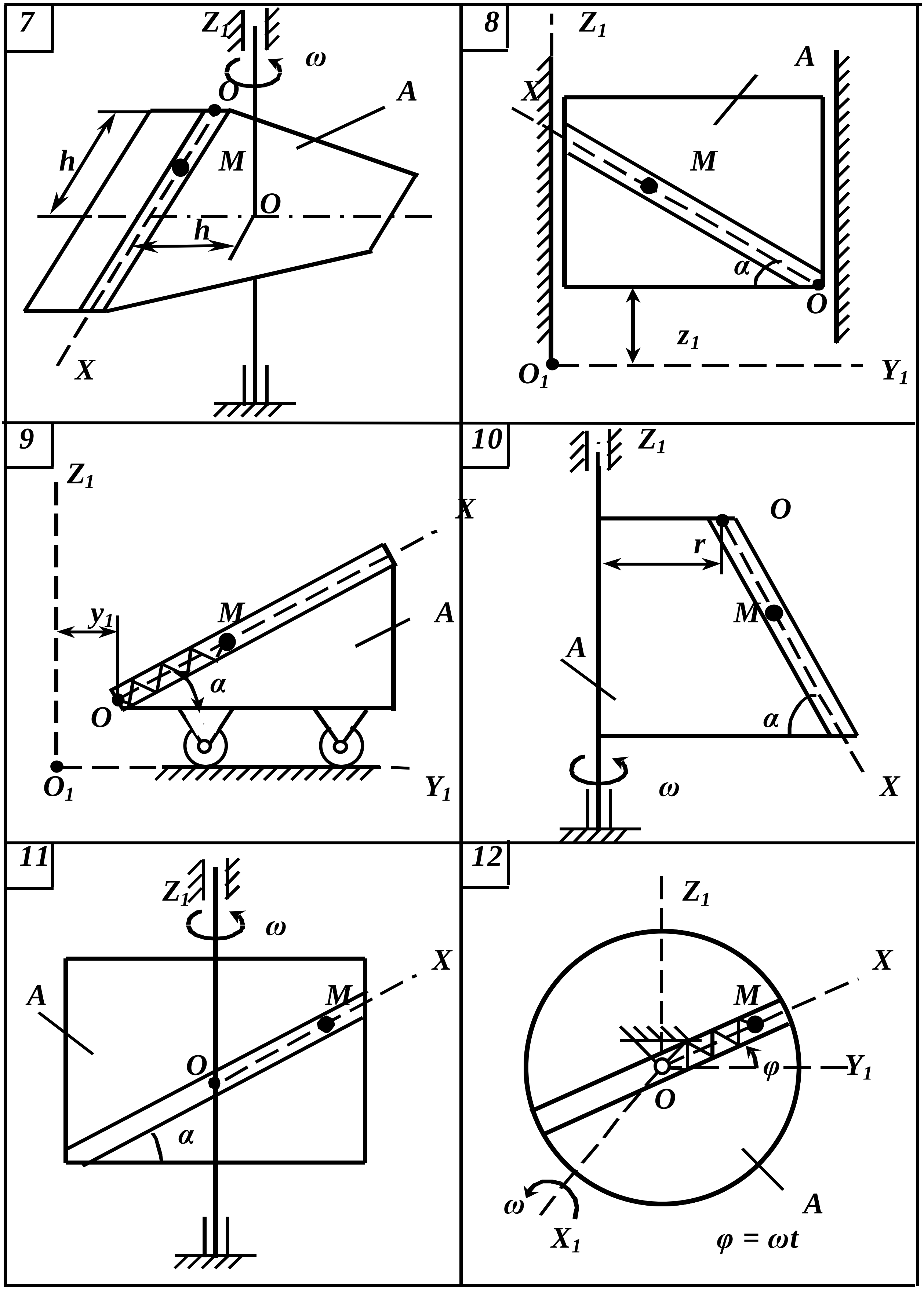


Рисунок 3.1, аркуш 2

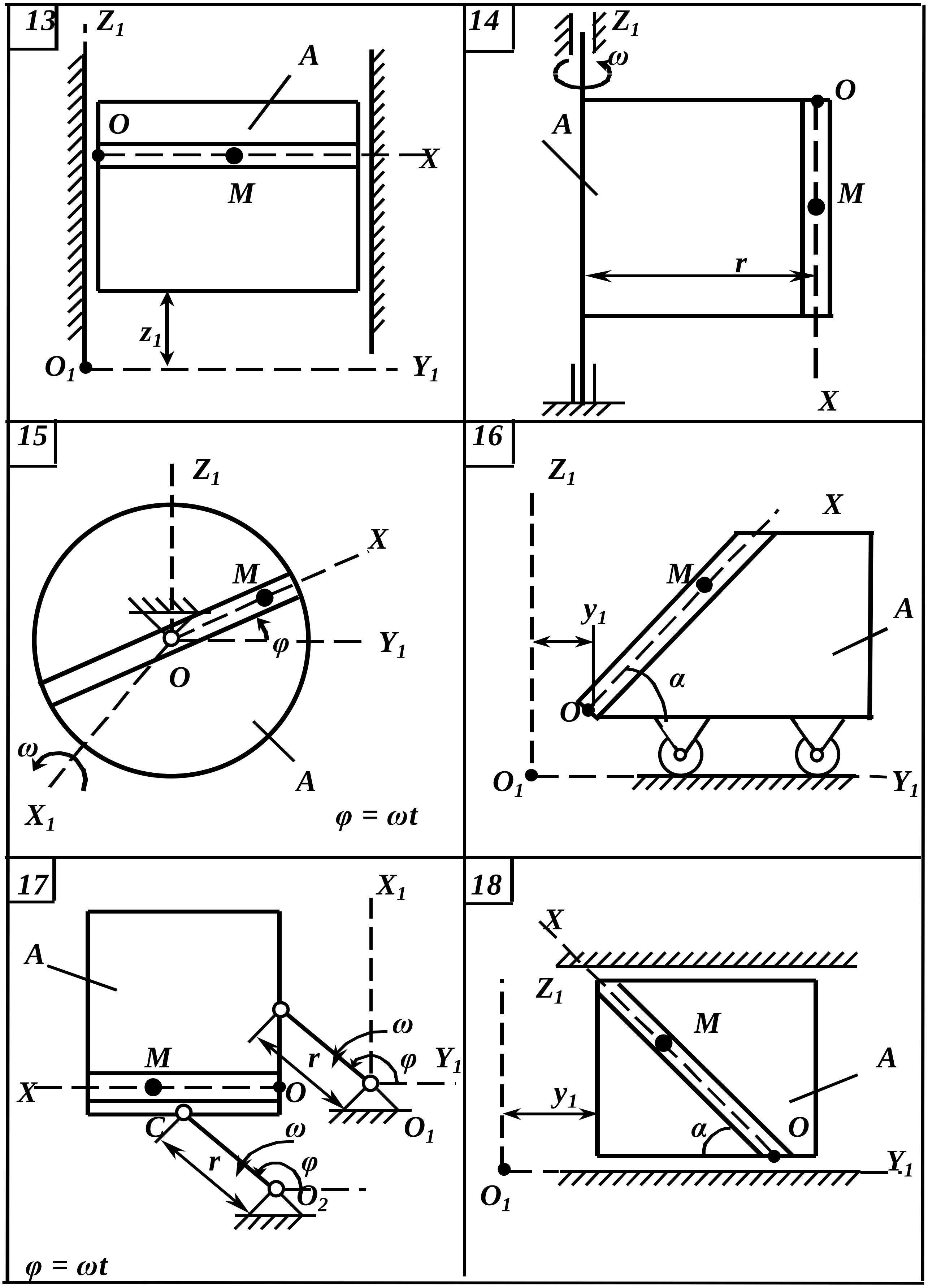


Рисунок 3.1, аркуш 3

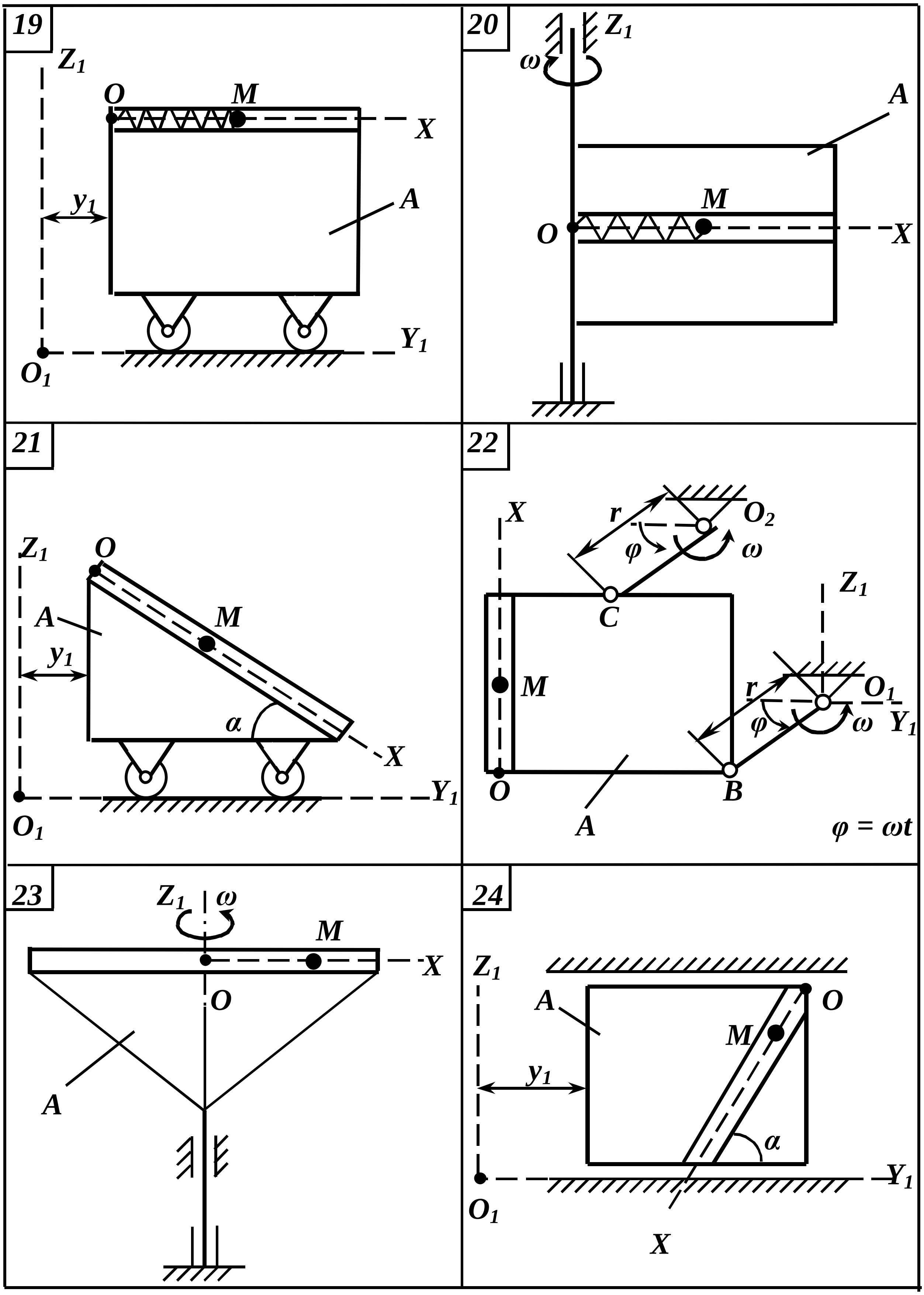


Рисунок 3.1, аркуш 4

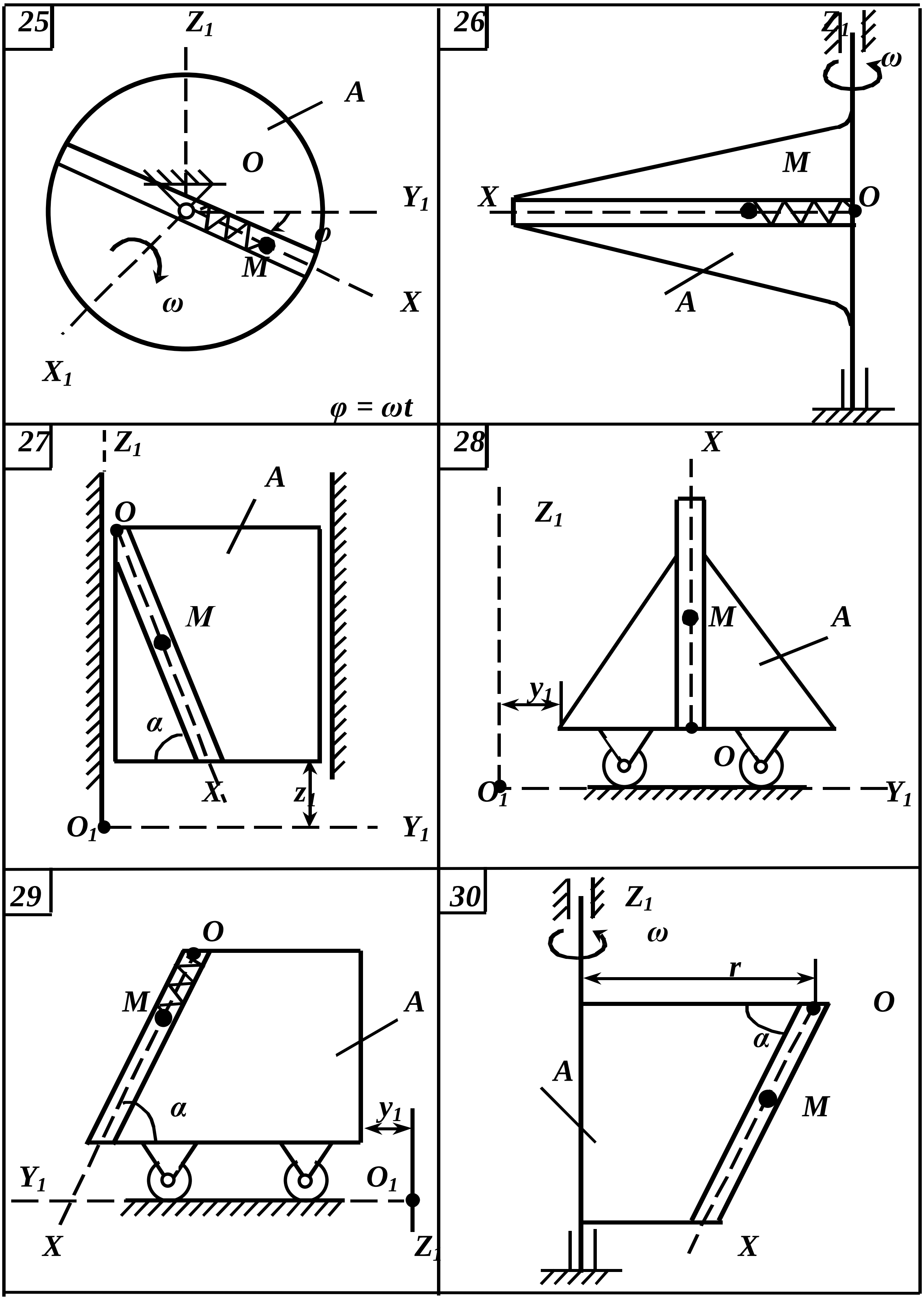


Рисунок 3.1, аркуш 5

3.3 Приклад виконання завдання

Дано: $m = 0{,}01$ *кг*, $x_0 = 0{,}3$ *м*, $u_0 = 2$ *м/с*, $t = 0{,}2$ *с*, $w = p$ c^{-1}, $b = 30^0$,

$c = 1$ *н/м*, $l_0 = 0{,}2$ *м* , $r = 0{,}2$ *м*.

Знайти: $x = x(t)$ – закон відносного руху матеріальної точки *M*, координату x і силу ормального тиску N для часу $t = t$ *с*.

Рішення

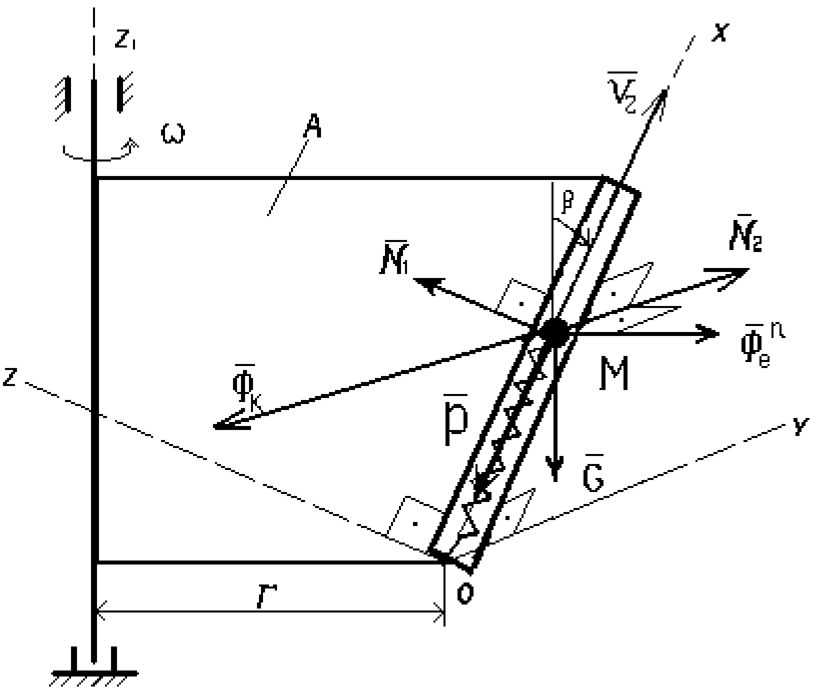


Рисунок 3.2 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Тіло *A* обертається зі сталою кутовою швидкістю w навколо нерухомої осі Z_1 (рис. 3.2). Матеріальна точка M масою m, маючи початкові умови при $t_0 = 0$, $x = x_0$, $u = u_0$, рухається вздовж циліндричного каналу рухомого тіла *A* .

Розглянемо рух матеріальної точки M масою m у довільному положенні, під дією сили ваги G , сили пружності P, реакцій N_1 і N_2 сили нормального тиску N, та сил інерції Φ_e^n і Φ_k .

Модулі сил інерції знайдемо за формулами:

$$\Phi_e^n = ma_e^n = mw^2\left(r + xsinb\right),$$
$$\Phi_k = ma_k = 2mwu_r sinb\ ,$$

де $\upsilon_r = \dot{x}$.

Основне рівняння відносного руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a}_r = \bar{G} + \bar{P} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_k. \tag{3.8}$$

Складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки в проекціях на рухому вісь X:

$$Px = -c(x - l_0)$$
$$m\ddot{x} = mw^2\left(r + xsinb\right)sinb - mgcosb - c\left(x - l_0\right).$$

Останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - w^2 sin^2 b\right)x = w^2 rsinb - gcosb + \frac{c}{m}l_0. \tag{3.9}$$

Загальний інтеграл отриманого диференціального неоднорідного рівняння другого порядку має вигляд $x = x_1 + x_2$,

де x_1 – загальне рішення однорідного рівняння;

x_2 – часткове рішення неоднорідного рівняння.

Характерне рівняння диференціального однорідного рівняння другого порядку має вигляд

$$l^2 + \frac{c}{m} - w^2 sin^2 b = 0,$$

а його корені $l_1 = \sqrt{\left(w^2 sin^2 b - \frac{c}{m}\right)} = 9{,}876\, i$, $l_2 = -9{,}876\, i$.

З теорії диференціальних рівнянь, загальне рішення однорідного рівняння:

$$x_1 = C_1 cos 9{,}876t + C_2 sin 9{,}876t.$$

Часткове рішення неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді x_2=*B.* З диференціального рівняння (3.9):

$$x_2 = B = \left(w^2 r sin b - g cos a + \frac{c l_0}{m}\right) / \left(\frac{c}{m} - w^2 sin^2 b\right) = 0{,}128 \text{ м}$$

і рішення диференціального рівняння (3.9) відносного руху матеріальної точки має вигляд

$$x = C_1 cos 9{,}876t + C_2 sin 9{,}876t + 0{,}128 \text{ м}. \qquad (3.10)$$

Відносна швидкість матеріальної точки

$$\dot{x} = -9{,}876 C_1 sin 9{,}876t + 9{,}876 C_2 cos 9{,}876t \text{ м/с}. \qquad (3.11)$$

Сталі C_1 и C_2 визначаємо за допомогою початкових умов для часу t=0 , x_0 = *0,3 м*, $\dot{x}_0$ = *2,0 м/с* .

Складемо рівняння (3.10) і (3.11) для часу, коли t=0:

$$0,3 = C_1 + 0,128,$$

$$2,0 = 9,876C_2,$$

звідки C_1=0,3 – 0,128 = 0,172; C_2 =2/9,876=0,202.

Рівняння відносного руху матеріальної точки набуває вигляду

$$x = 0,172cos9,876t + 0,202sin9,876t + 0,128 \ \ м.$$

Швидкість відносного руху матеріальної точки

$$\dot{x} = -1,169sin9,876t + 1,99cos9,876t \ \ м/с.$$

Для визначення складових реакцій трубки N_1 і N_2 для часу, коли $t = t = 0,2\ c$ складемо векторне рівняння (див.рис.3.2) в проекціях на осі Y і Z. Враховуючи, що вектор $\overline{a}_r$ перпендикулярний цим осям, одержимо

$$0 = N_2 - \Phi_к,$$

$$0 = N_1 - G\ cos\,60^0 - \Phi_e^n\ cos\,30^0\ .$$

З цих рівнянь одержимо

$$N_2 = \Phi_к = 2mwu_r\ sin30^0\ ,$$

$$N_1 = G\,cos60^0 + \Phi_e^n\ cos30^0 = mg\ cos60^0 + mw^2\ (r + x\ sin30^0\ )\ cos30^0\ .$$

Для визначення числових значень N_1 ,N_2 необхідно одержати координату x і проекцію відносної швидкості матеріальної точки $\dot{x}$ для часу $t = 0{,}2\ c$.

$$x = 0{,}172\cos 9{,}876\cdot 0{,}2 + 0{,}202\sin 9{,}876\cdot 0{,}2 + 0{,}128 =$$
$$= 0{,}172\cos 113^0 + 0{,}202\sin 113^0 + 0{,}128 =$$
$$= -0{,}172\cdot 0{,}391 + 0{,}202\cdot 0{,}92 + 0{,}128 = 0{,}246\ м\ ;$$

$$\dot{x} = -1{,}69\sin 113^0 + 1{,}99\cos 113^0 = -1{,}69\cdot 0{,}92 - 1{,}99\cdot 0{,}391 =$$
$$= -1{,}55 - 0{,}78 = -2{,}33\ м/с\ .$$

Складові сили нормального тиску набувають вигляду:

$$N_1 = 0{,}01\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5 + 0{,}01\pi^2(0{,}2 + 0{,}246\cdot 0{,}5)0{,}866 = 0{,}077\ Н,$$

$$N_2 = 2\cdot 0{,}01\pi\cdot 2{,}33\cdot 0{,}5 = 0{,}080\ Н.$$

Рівнодійна нормального тиску $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = 0{,}111\ Н.$

Відповідь:

Рівняння відносного руху матеріальної точки має вигляд:

$$x = 0{,}172\cos 9{,}876t + 0{,}202\sin 9{,}876t + 0{,}128\ м\ .$$

Координата x і сила нормального тиску N для часу $t = t$ с дорівнюють: $\dot{x} = -2{,}33\ м/с$, $N = 0{,}111\ Н$.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Короткі відомості з теорії

Для розв′язання даного завдання треба застосувати теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно нерухомої осі, яка формулюється так: при русі механічної системи під дією будь-яких зовнішніх і внутрішніх сил похідна за часом від моменту кількості руху системи, взятого відносно будь-якої нерухомої в просторі осі, дорівнює головному моменту зовнішніх сил, прикладених до точок системи відносно тієї самої осі

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_k^e\right), \tag{4.1}$$

де K_Z - кінетичний момент системи відносно осі;

$\sum\limits_{k=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_k^e\right)$ – сума моментів відносно осі Z зовнішніх сил, прикладних до точок системи.

Кінетичний момент системи складається з кінетичних моментів окремих сил

$$K_Z = \sum_{k=1}^{n} \left(K_Z\right)_k . \tag{4.2}$$

Кінетичний момент твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі I_z на кутову швидкість тіла w :

$$K_z = I_z w. \tag{4.3}$$

Кінетичний момент матеріальної точки масою m, яка рухається у просторі з швидкістю $\overline{u}$, відносно центра О дорівнює:

$$\overline{k_0} = \overline{r} \cdot m\overline{u}, \tag{4.4}$$

де $\overline{r}$ – радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки відносно центра О.

Обчислюють момент вектора $m\overline{u}$ так само як і момент сили відносно центра.

4.2 Умови завдання

Однорідна пластина (рис. 4.1) масою m_1 обертається з постійною кутовою швидкістю w_0 навколо вертикальної осі z, яка зміщена від центру ваги C пластини на відстань $OC = a$.

У початковий момент ($t_0 = 0$) вздовж трубки, яка закріплена на пластині, під впливом внутрішніх сил починає рухатись вантаж D масою m за законом $S = AD = f(t)$, де S задається в метрах, а t - в секундах. У той же час на платформу починає діяти пара сил з моментом M_Z, який заданий у ньютонахметрах.

Визначити кутову швидкість w_1 пластини в момент часу t_1.

При розв'язанні завдання треба звертати увагу на знаки початкової кутової швидкості w_0 та моменту M_Z. Якщо вони додатні, то напрям їх дії відповідає напряму обертання тіла проти руху годинникової стрілки, а якщо від'ємні – то за ходом годинникової стрілки.

Необхідні для розв’язання дані наведені в таблицях 4.1 і.4.2.

Таблиця 4.1

Величини	**Значення величин за варіантами**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R, *м*	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
w_0, c^{-1}	2	-1	0	-2	1	-3	-4	0	-1	4
t_1, *c*	3	5	2	1	4	3	2	1	5	4
S=AD, м	$\frac{pRt}{6}$	$\frac{pRt^2}{3}$	$\frac{pRt}{2}$	$\frac{pRt^2}{4}$	$\frac{pRt}{3}$	$\frac{pRt^2}{6}$	$\frac{2pRt}{3}$	$\frac{pRt^2}{2}$	$\frac{2pRt^2}{2}$	$\frac{pRt}{4}$

Таблиця 4.2

Величини	**Значення величин за варіантами**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{3}$	$\frac{R}{4}$	R	O	$\frac{R}{4}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{3}$	R	O
m_1, *кг*	10	12	14	16	18	20	22	18	16	14
m_2, *кг*	3	5	7	6	4	2	3	4	5	6
M_Z, *Н·м*	10	-2	5	-8	4	-3	6	-3	4	12

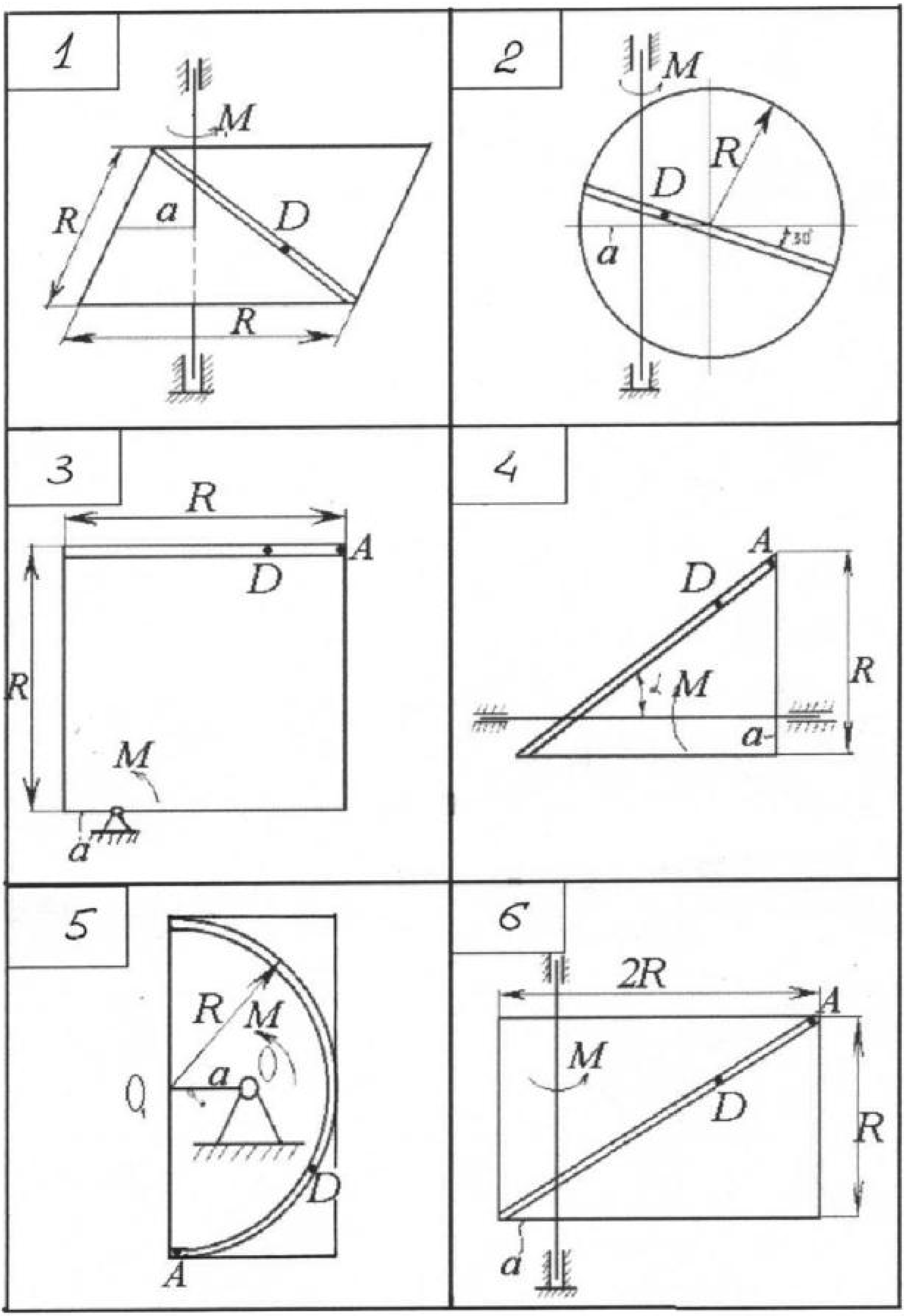


Рисунок 4.1 – Схеми до варіантів завдання

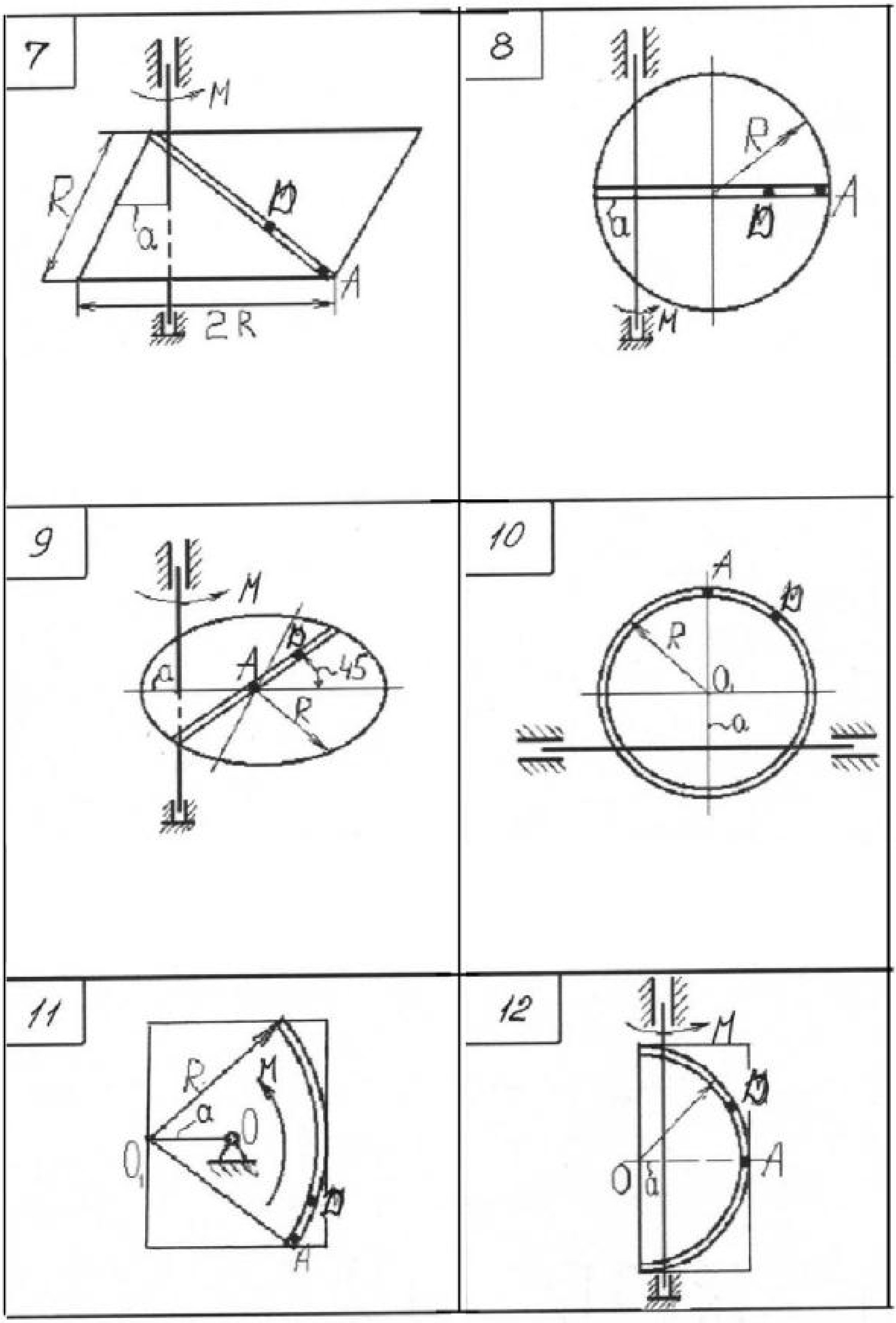


Рисунок 4.1, аркуш 2

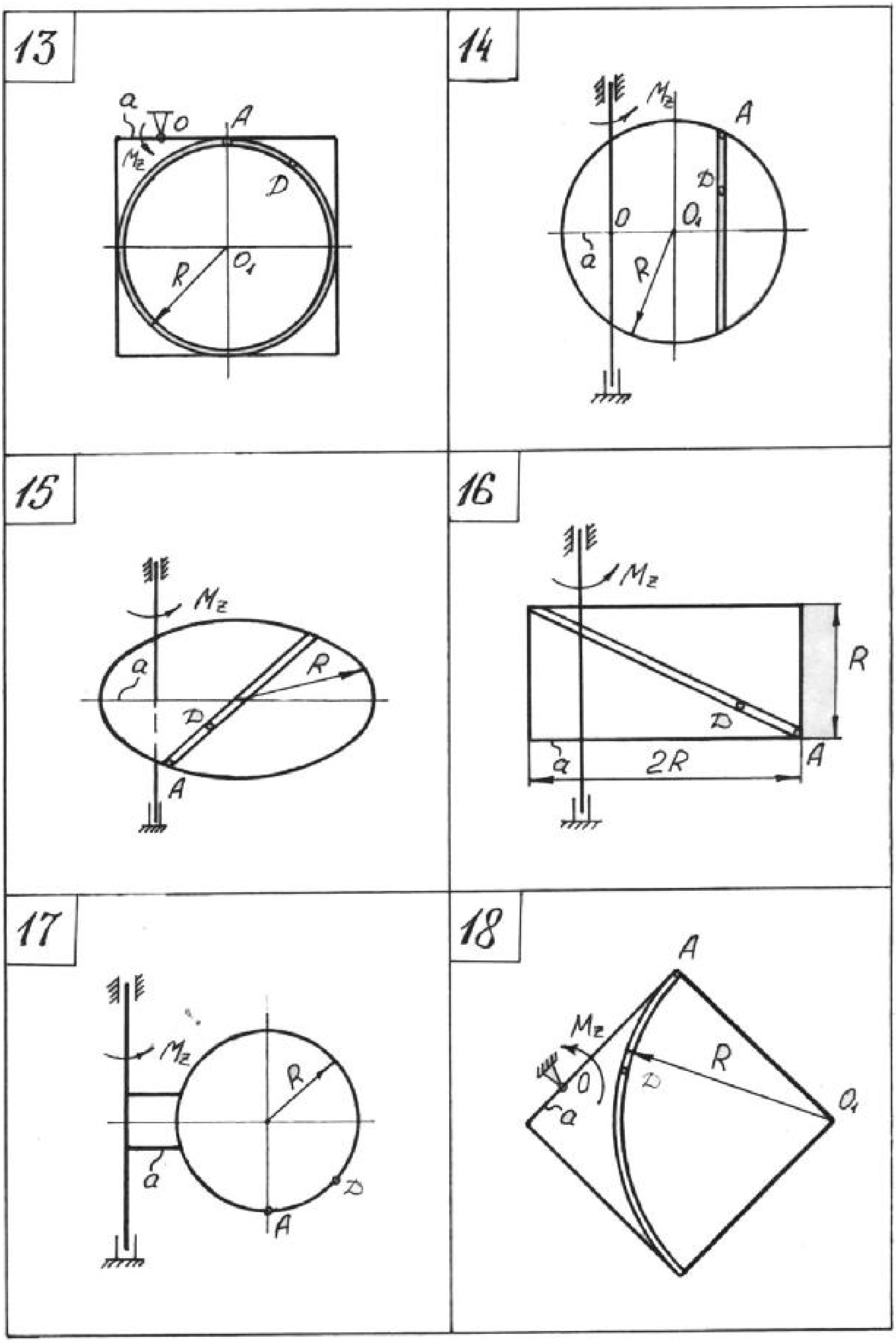


Рисунок 4.1, аркуш 3

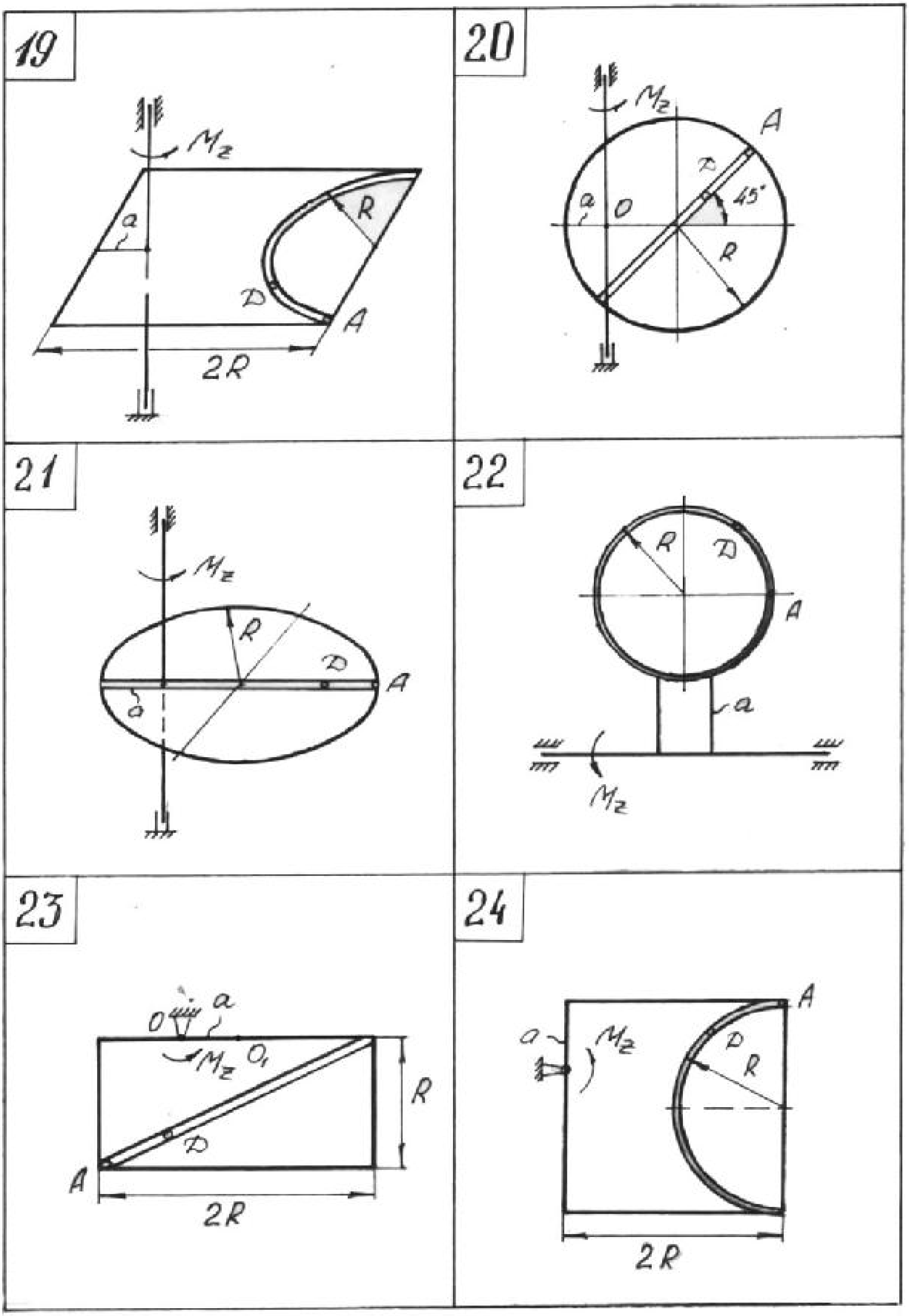


Рисунок 4.1, аркуш 4

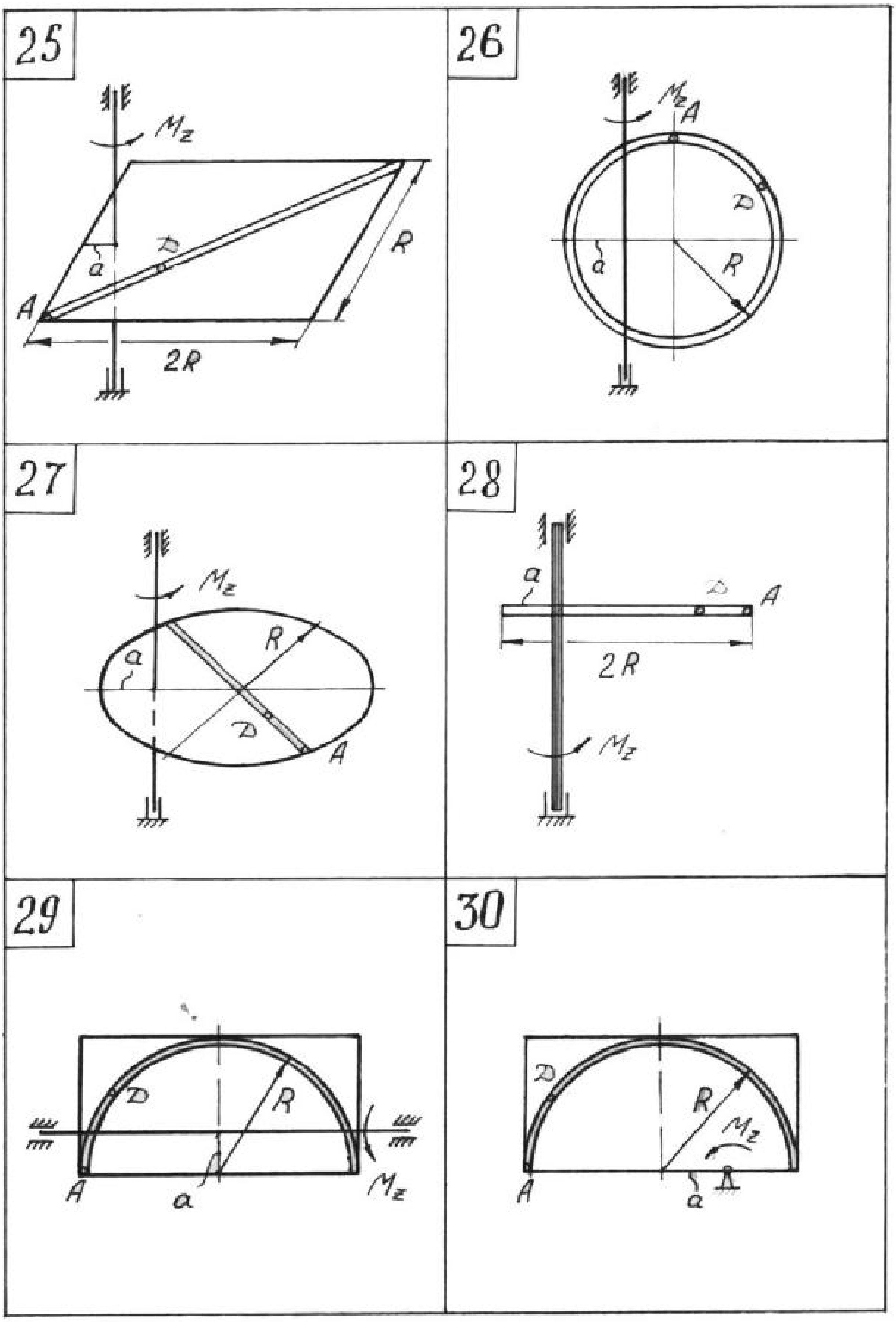


Рисунок 4.1, аркуш 5

4.3 Приклад виконання завдання

Однорідна кругла пластина масою m_1 і радіусом R (рис. 4.2) обертається в горизонтальній площині з постійною кутовою швидкістю w_0 , навколо вертикальної осі z, яка зміщена від центра ваги пластини С на відстань $OC = a$.

У момент початку руху ($t_1 = 0$) на вал починає діяти момент M_Z і в той же час вантаж D масою m починає рухатись вздовж трубки за законом $S = AD = f(t)$.

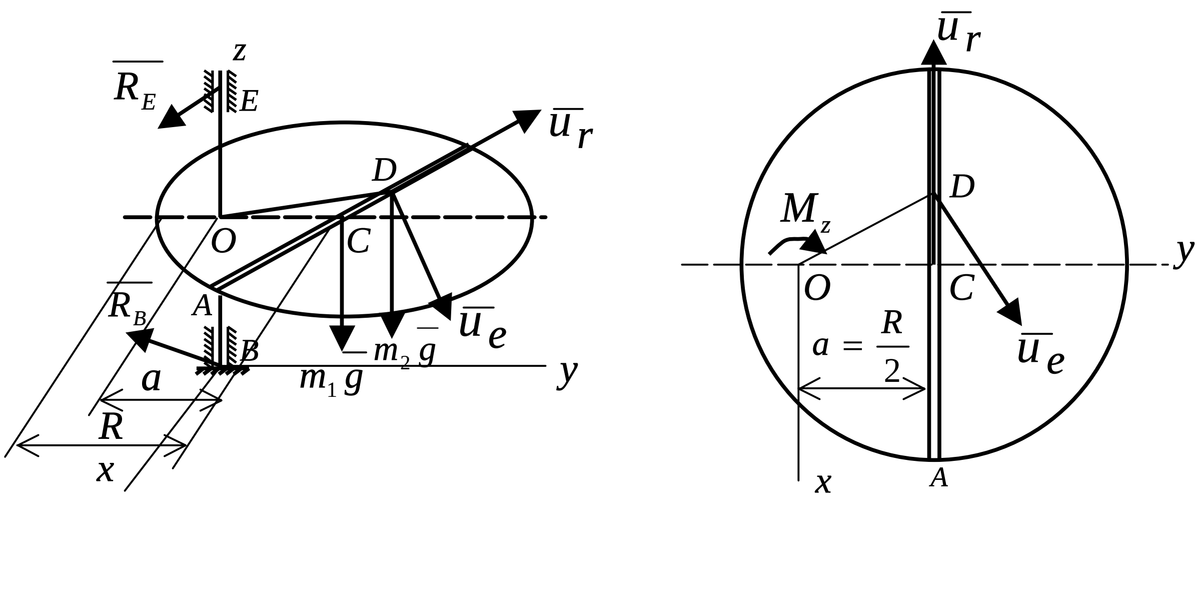
Дано: $m_1 = 20$ *кг*; $m_2 = 10$ *кг*; $R = 2$ *м*; $a = R/2$; $M_Z = 6t$ *Н·м*;

$w_0 = - 2$ c^{-1}; $S = 0{,}6t^2$ *м*; $t_1 = 2$ *с*.

Знайти: кутову швидкість w_1 пластини в момент часу t_1 .

Рішення

Зобразимо на рисунку 4.2 усі зовнішні сили, які діють на систему: сили ваги m_1g і m_2g , реакції R_B і R_E та момент M_Z.



а ***б***

Рисунок 4.2—Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Для розв’язання прикладу використаємо теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно осі

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_k^e\right). \tag{4.5}$$

Оскільки сили ваги $m_1 g$ і $m_2 g$, паралельні осі z, а реакції R_B і R_E цю ось перетинають, то моменти всіх цих сил відносно осі z дорівнюють нулю.

Тоді рівняння (4.5) набуде вигляду

$$\frac{dK_Z}{dt} = 6t. \tag{4.6}$$

Проінтегрувавши це рівняння, знайдемо

$$K_Z = 3t^2 + C, \tag{4.7}$$

де C – стала інтегрування, яка буде знайдена з початкових умов.

Для даної механічної системи:

$$K_Z = K_Z^{пл} + K_Z^D, \tag{4.8}$$

де $K_Z^{пл}$ і K_Z^D – кінетичні моменти відповідно пластини і вантажу D.

Кінетичний момент пластини, яка обертається навколо нерухомої осі z, дорівнює

$$K_Z^{пл} = I_Z \cdot w. \tag{4.9}$$

Значення моменту інерції пластини I_Z знайдемо за допомогою теореми Гюйгенса

$$I_Z = I_{ZC} + m_1 a^2, \tag{4.10}$$

де I_{ZC} – момент інерції відносно осі, яка паралельна осі обертання z і проходить через центр ваги C:

$a = \dfrac{R}{2}$ – відстань між осями z і z_C.

Момент інерції круглої однорідної пластини радіуса R відносно осі, яка проходить через центр ваги перпендикулярно пластині, дорівнює:

$$I_{ZC} = \frac{m_1 R^2}{2}, \tag{4.11}$$

тоді згідно з формулою (4.10)

$$I_Z = \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} m_1 R^2. \tag{4.12}$$

Отже
$$K_Z^{пл} = I_Z \cdot w = \frac{3}{4} m_1 R^2 w. \tag{4.13}$$

Для знаходження K_Z^D визначимо положення вантажу D у момент, коли $t_1 = 2\ c$:

$$S = AD = 0{,}6t^2 = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4\ м.$$

Зобразимо на рисунку 4.2,б положення вантажу D на відстані S=2,4 м від точки А, а також переносну u_e і відносну u_r швидкості вантажу D.

Оскільки абсолютна швидкість вантажу D дорівнює

$$\bar{u}_D = \bar{u}_e + \bar{u}_r, \tag{4.14}$$

то за теоремою Варінйона будемо мати

$$K_Z^D = M_Z(m_2\bar{u}) = M_Z(m_2\bar{u}_e) + M_Z(m_2\bar{u}_r) = m_2\bar{u}_e \cdot OD - m_2\bar{u}_r \cdot OC. \tag{4.15}$$

Оскільки $u_e = w \cdot OD;\ u_r = S_r = 1{,}2t;\ OC = \dfrac{R}{2};$

а $$OD^2 = OC^2 + CD^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (S-R)^2 = 1{,}16 \quad м,$$

то із формули (4.15) знаходимо

$$K_Z^D = m_2 w \cdot OD^2 - m_2 w \cdot OC = m_2 w \cdot 1{,}16 - m_2 \cdot 1{,}2t \cdot \frac{R}{2}. \quad (4.16)$$

Підставимо (4.13) і (4.16) у формулу (4.8), а отриману - у вираз (4.7)

$$\frac{3}{4} m_1 R^2 w + 1{,}16\, m_2 w - 0{,}6\, m_2 R t = 3t^2 + C. \qquad (4.17)$$

Підставимо у формулу (4.17) початкові умови і знайдемо сталу інтегрування $\dfrac{3}{4} m_1 R^2 w_0 + 1{,}16\, m_2 w_0 = C = 143{,}2.$

Перепишемо формулу (4.17), підставивши *C*,

$$\omega\left(\frac{3}{4} m_1 R^2 + 1{,}16\, m_2\right) = 3t^2 + 0{,}6\, m_2 R t - 143{,}2.$$

Знаходимо $$w = \frac{3t^2 + 0{,}6 m_2 R t - 143{,}2}{\frac{3}{4} m_1 R^2 + 1{,}16 m_2} = -1{,}5\, c^{-1}.$$

Знак “–” показує, що пластина продовжує рухатись проти руху годинникової стрілки, так як це було на початку руху.

Відповідь:

Кутова швидкість пластини в момент часу t_1 дорівнює:

$$w = -1{,}5\ c^{-1}.$$

5 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ДО ВИВЧЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

5.1 Короткі відомості з теорії

Для розв'язання даного завдання треба застосувати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи в інтегральній формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \ , \tag{5.1}$$

де T – поточне значення кінетичної енергії системи;

T_0 – початкове значення кінетичної енергії системи;

$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^e$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^i$ – суми робіт усіх відповідно зовнішніх і внутрішніх сил;

n – кількість матеріальних точок, які складають систему.

Оскільки робота внутрішніх сил для ідеальної системи, в якої в'язі не деформуються, а тертям нехтують, дорівнює нулю, то формула (3.5.1) буде мати вигляд

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e \, . \tag{5.1}$$

Якщо в початковий момент система була нерухома, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія системи T складається із кінетичних енергій тіл T_k , які входять до складу системи.

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається поступально, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m u^2 , \tag{5.2}$$

де m – маса тіла;

u – його швидкість.

Кінетична енергія твердого тіла , що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} I_Z w^2 , \qquad (5.3)$$

де I_Z – момент інерції тіла відносно осі обертання;

w – кутова швидкість тіла.

Кінетична енергія тіла при плоско-паралельному русі дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m u_C^2 + \frac{1}{2} I_{ZC} w^2 , \qquad (5.4)$$

де u_C – швидкість центра мас тіла;

I_{ZC} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Робота сили F, яка прикладена до точки M, на переміщенні M_1M_2, визначається за формулою

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_t \, dS , \qquad (5.5)$$

де $F_t = F \cdot cos(\hat{\bar{F}, \bar{t}})$ – проекція сили F на дотичну вісь t ;

dS – елементарне переміщення точки по траєкторії.

У деяких випадках роботу обчислюють за формулами, які наведені нижче.

Робота сили ваги матеріальної точки

$$A = \pm mgh, \qquad (5.6)$$

де $h = z_2 - z_1$ - різниця вертикальних координат між початковою та кінцевою точками відрізка траєкторії. Робота вважається додатною, якщо напрямок сили (mg) співпадає з напрямком переміщення, тобто коли сила переміщується униз.

Робота сили пружності

$$A = \pm \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x_1^2 \right), \tag{5.7}$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини;

x_0 і x_1 – відповідно початкове і кінцеве видовження пружини.

Робота сил, які прикладені до тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$$A = \int_0^j M_z dj \ , \tag{5.8}$$

де $M_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e)$ – обертовий момент, або сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання

dj – елементарний кут повороту тіла навколо осі;

j – скінчений кут повороту.

5.2 Умови завдання

Механічна система під впливом змінної сили $F = f(S)$ починає рухатись із стану спокою (при цьому пружини вважаються не розтягнутими). Початкові положення системи зображені на рис. 5.1.

Враховуючи тертя ковзання тіла 1 та опір тіла 3 при коченні (вар.1-6, 8, 9, 12-14, 16-19, 21-26, 28-30), ігноруючи маси ниток, які вважають нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у положенні, коли точка прикладання сили F пройде шлях $S_i = 1$ *м*.

У завданні прийняті такі позначення :

– m_1, m_2 та m_3 - маси тіл 1, 2 та 3, величини яких залежать від заданої маси $m = 10$ *кг* (для усіх варіантів);

– r_2, R_2, r_3 та R_3 – радіуси великих та малих кіл, причому $R_2=2r_2$, $R_3=2r_3$;

– i_{2Z} та i_{3Z} – радіуси інерції тіл 2 та 3 відносно горизонтальних осей, причому $i_{2Z} = 1{,}5\ r_2$; $i_{3Z} = 2\ r_3$;

– c – коефіцієнт жорсткості пружини;

– f та d – коефіцієнти тертя відповідно ковзання та кочення.

Необхідні для рішення дані наведені в таблицях 5.1 і 5.2.

Таблиця 5.1

Величини	**Значення величин за варіантами**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_2, м	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
r_3, м	0.50	0.60	0.80	0.70	0.60	0.40	0.50	0.30	0.20	0.10
f	0.10	0.15	0.20	0.30	0.35	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20
d, см	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.10	0.12	0.14	0.16

Таблиця 5.2

Величини	**Значення величин за варіантами**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1, кг	9m	10m	9m	8m	6m	8m	7m	9m	10m	8m
m_2, кг	6m	5m	4m	3m	4m	3m	5m	6m	4m	3m
m_3, кг	2m	3m	1m	3m	2m	1m	2m	3m	2m	1m
c, Н/м	12	14	18	20	16	14	12	18	22	20
$F=f(S)$, Н	30S	$21S^2$	40S	$18S^2$	10S	$24S^2$	16S	$30S^2$	24S	$12S^2$

Блоки та катки, які мають тільки один радіус, вважати однорідними суцільними циліндрами. Тіла, маси яких не задані, вважаються невагомими.

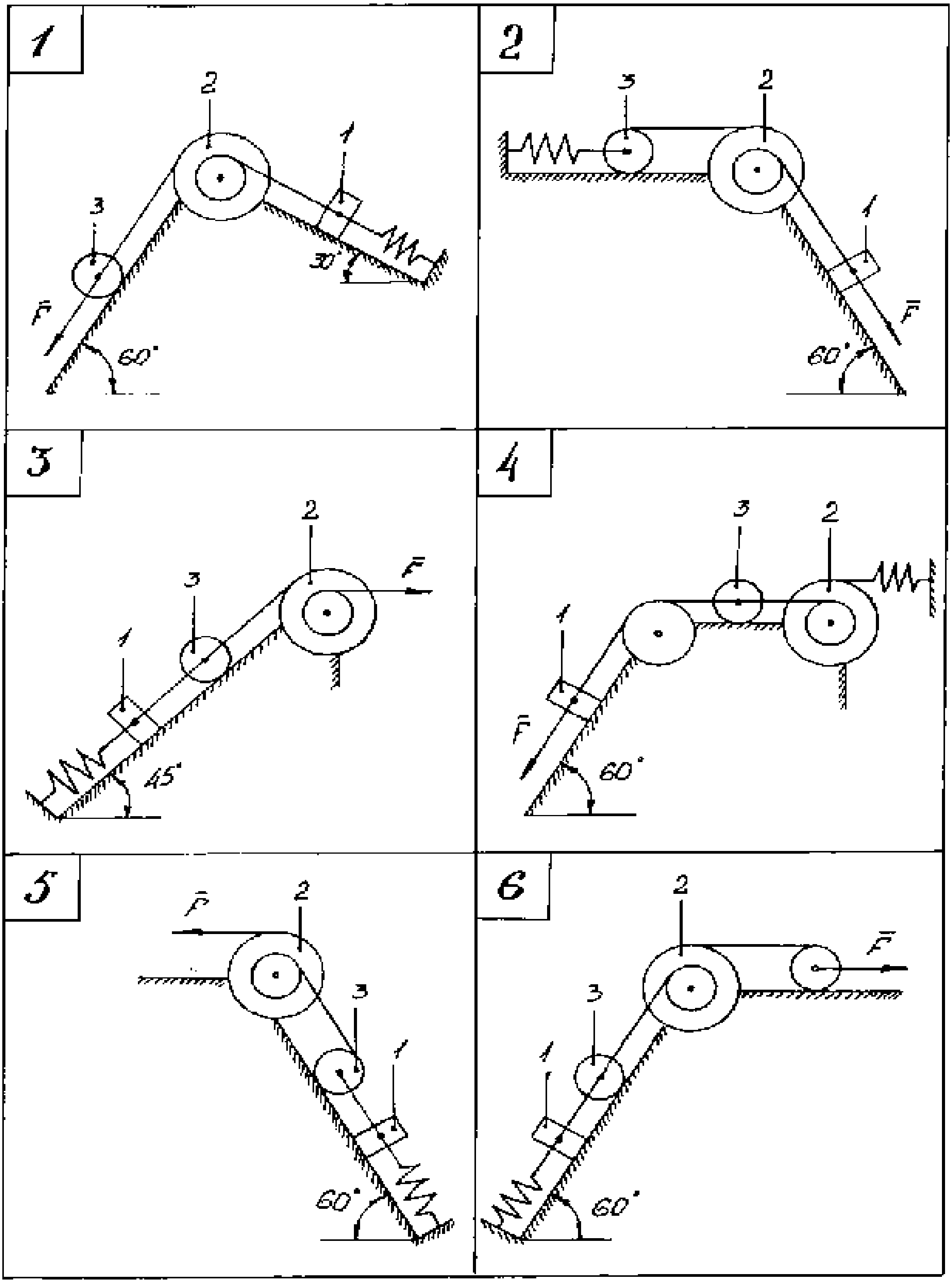


Рисунок 5.1-Схеми до варіантів завдань

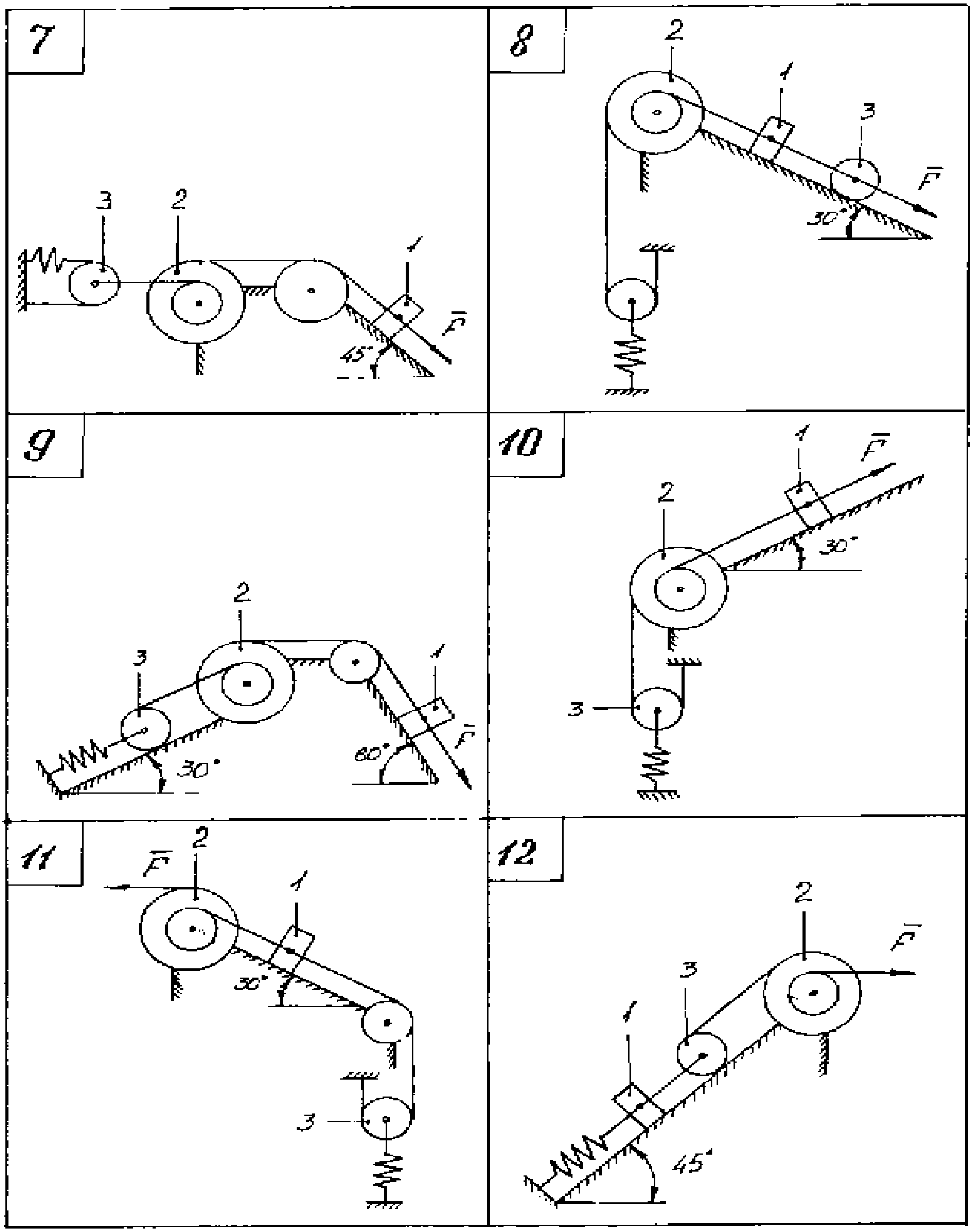


Рисунок 5.2, аркуш 2

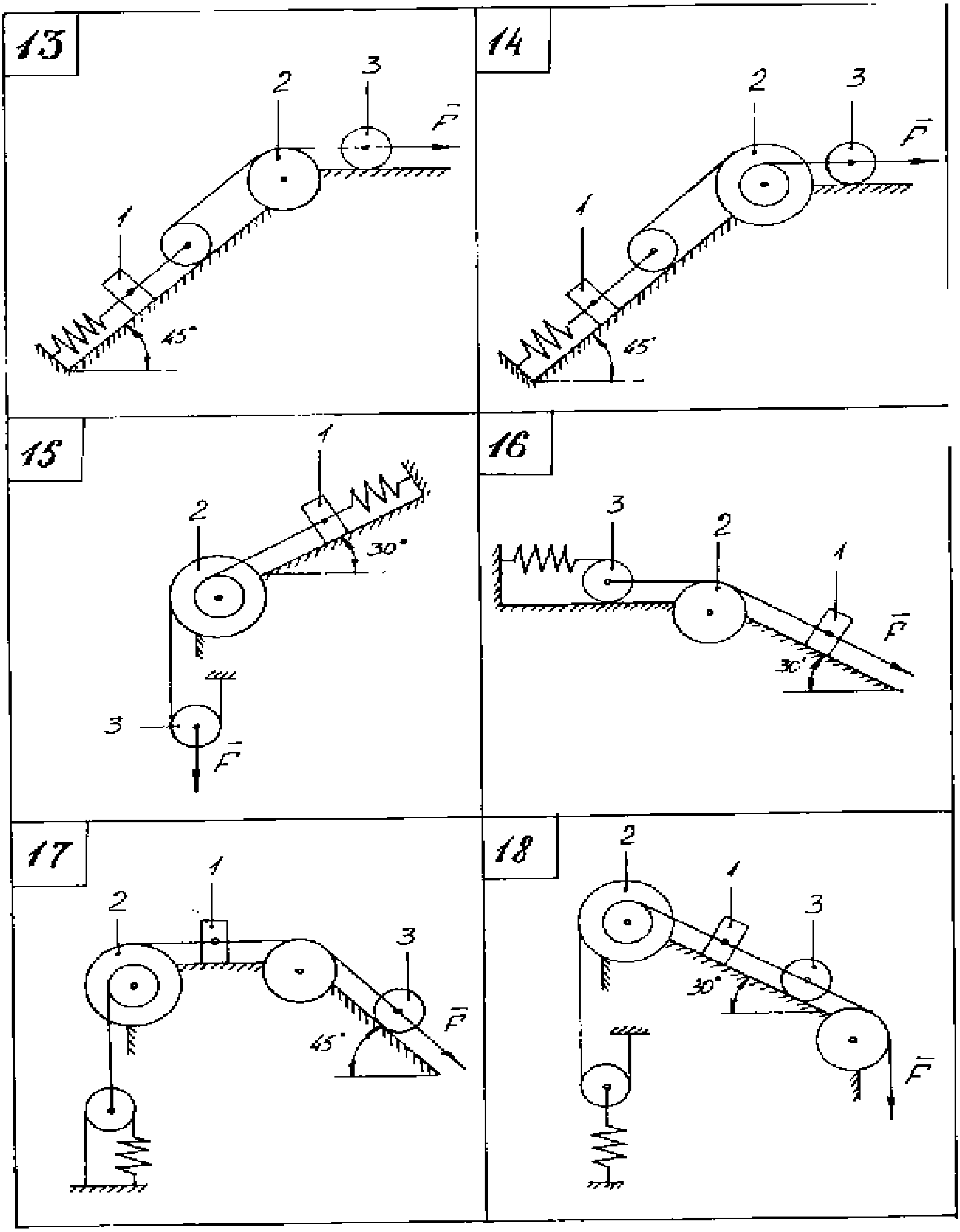


Рисунок 5.3, аркуш 3

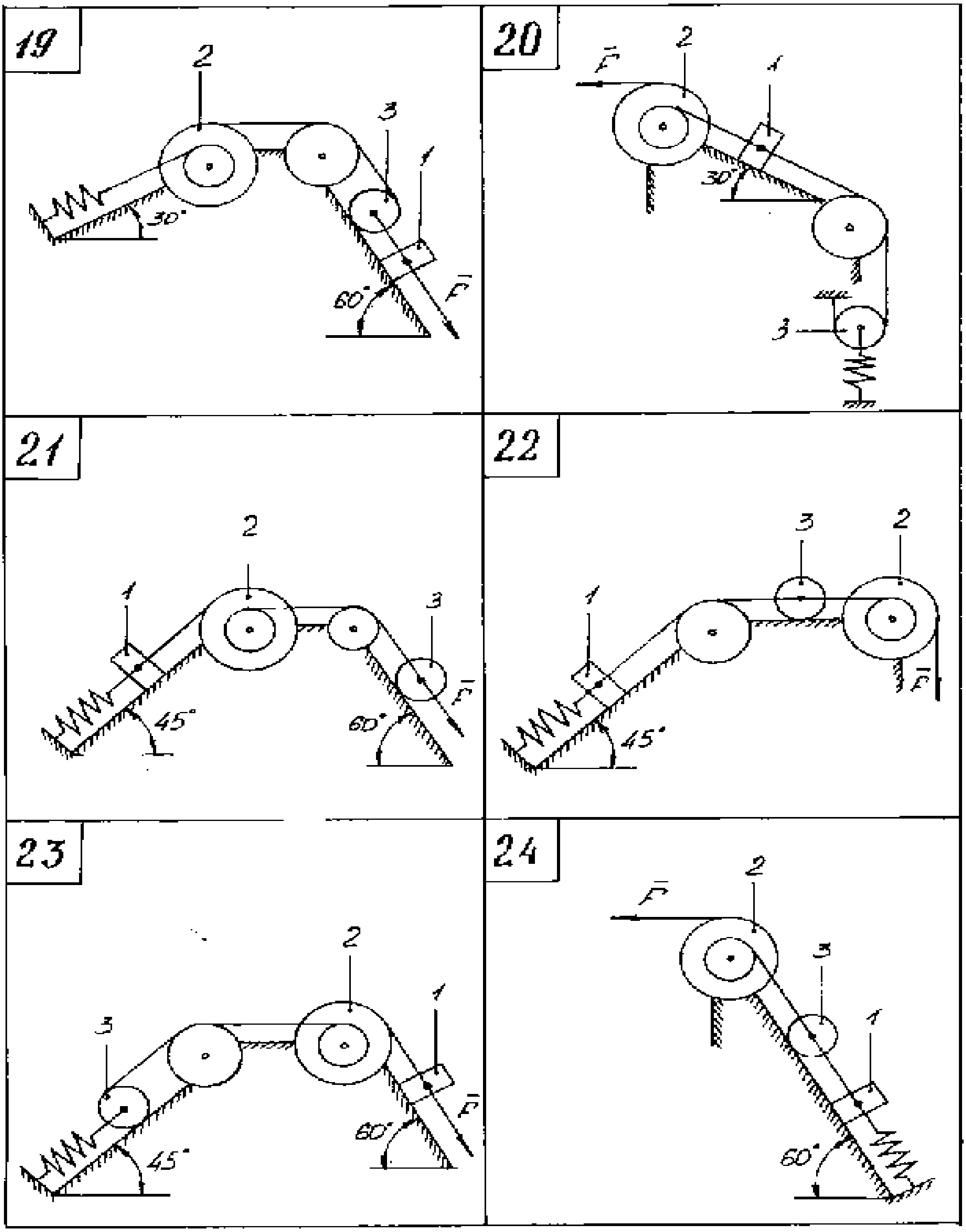


Рисунок 5.4, аркуш 4.

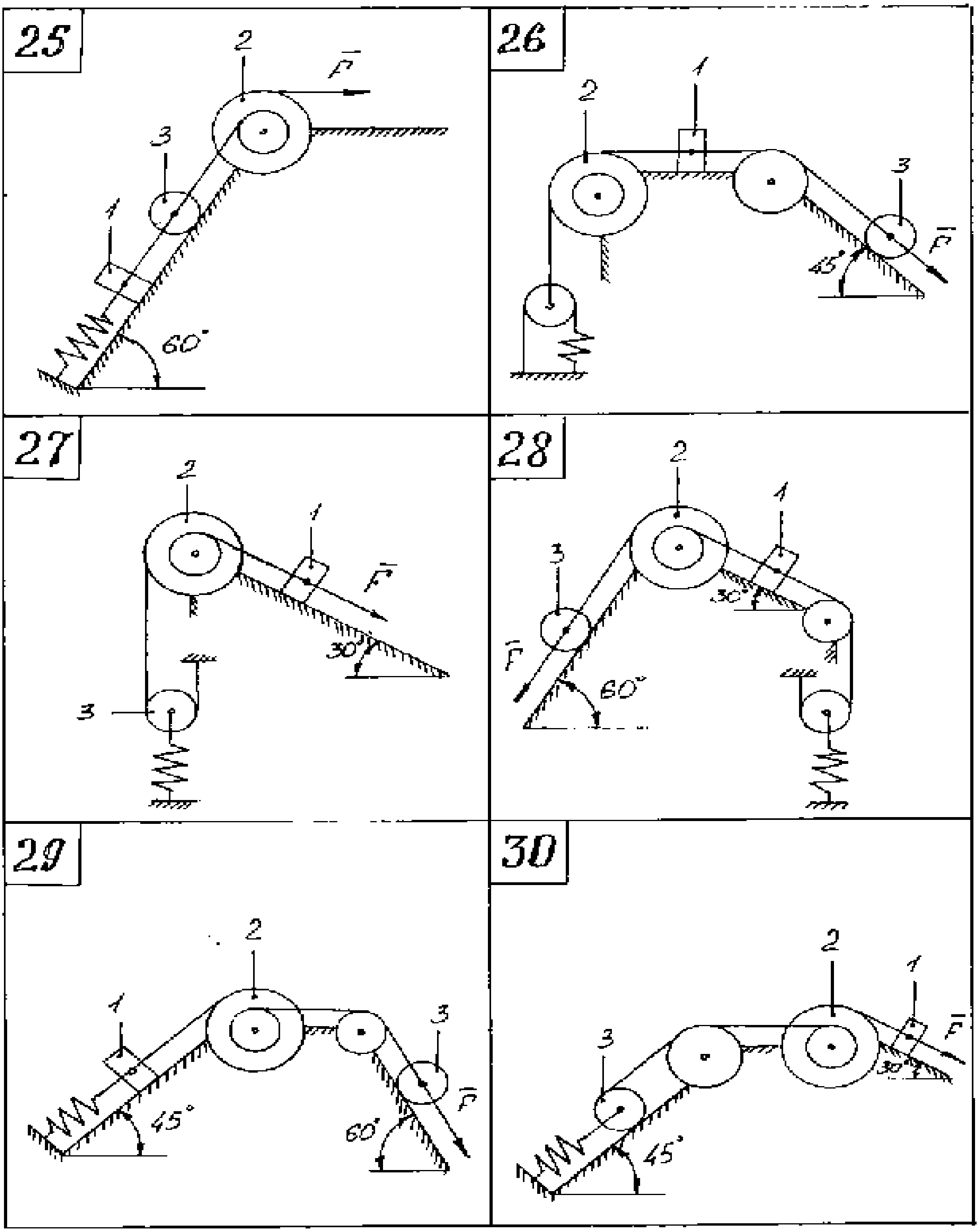


Рисунок 5.5, аркуш 5.

5.3 Приклад виконання завдання

Механічна система (рис. 5.2,а) складається з вантажу 1 (коефіцієнт тертя вантажу 1 о поверхню дорівнює f), шківа 2 і однорідного суцільного циліндру 3. Тіла системи зв'язані нерозтяжними нитями. К центру C_3 циліндра 3 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості ***c*** (її початкова деформація дорівнює нулю).

Система починає рухатись під впливом сили $F = f(S)$.

Дано: *$m_1 = 10m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $m = 10$ кг; $r_2 = 6$ см; $R_2 = 2r_2 =$ $= 12$ см; $i_{2Z} = 1{,}5r_2 = 9$ см; $R_3 = 15$ см; $a = 30^0$; $b = 45^0$; ¦ = 0,1; c = 10 Н/м; d = 0,2 см; S = 0,5 м; F = ¦(S) = =30(S+3S), Н.*

Знайти: швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні.

Рішення

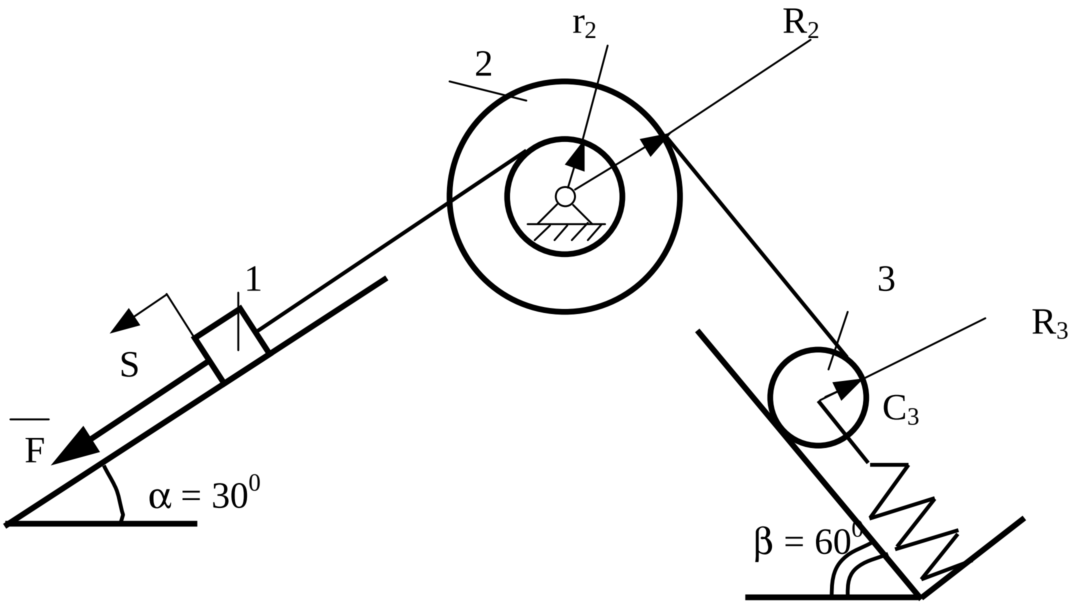
Зобразимо механічну систему в кінцевому положенні (рис. 5.2,б).

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії можна записати

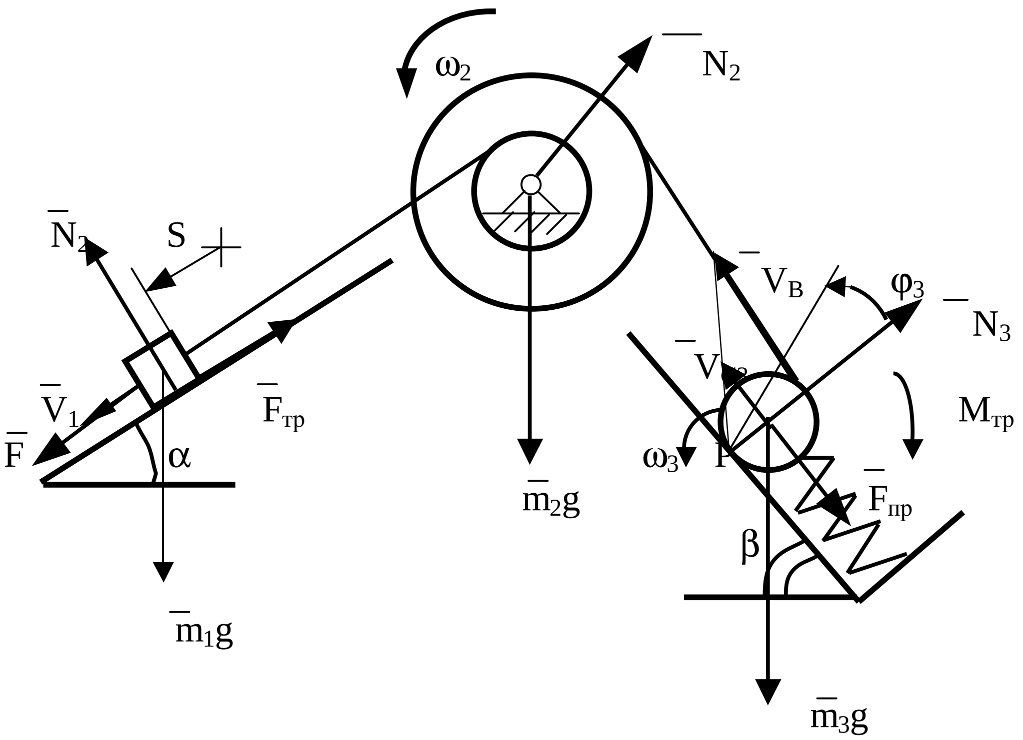
$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e, \tag{5.9}$$

де T_0 та T – кінетична енергія системи відповідно у початковому та кінцевому положеннях;

$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил.



а



б

Рисунок 5.2 - Розрахункова схема до приклада виконання завдання

Якщо в початковий момент система знаходилась в стані спокою, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія системи в кінцевому положенні складається з кінетичних енергій кожного тіла

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \; . \tag{5.10}$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально

$$T = \frac{1}{2} m_1 u_1^{\;2} \tag{5.11}$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі

$$T = \frac{1}{2} I_{2Z} w_2^2 , \tag{5.12}$$

де I_{2Z} – момент інерції блока відносно осі обертання,

$$I_{2Z} = m_2 i_{2Z}^2 \tag{5.13}$$

ω_2 – кутова швидкість блока 2 дорівнює

$$w_2 = \frac{u_1}{r_2} . \tag{5.14}$$

Таким чином

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} u_1^2 . \tag{5.15}$$

Кінетична енергія катка 3, який рухається плоско-паралельно

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 u_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_{ZC} w_3^2 , \tag{5.16}$$

де u_{C3} – швидкість центру мас катка;

w_3 – кутова швидкість катка;

I_{ZC} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Оскільки тіло 3 можна вважати суцільним однорідним диском, то його момент інерції відносно осі Z , яка проходить через центр мас C , дорівнює:

$$I_{ZC} = \frac{m_3 R_3^2}{2}. \tag{5.17}$$

Для знаходження швидкостей w_3 і υ_{C3} скористаємось формулою (5.14) і спочатку знайдемо швидкість точки B:

$$u_B = w_2 R_2 = \frac{u_1 R_2}{r_2}, \tag{5.18}$$

оскільки $u_{C3} = \frac{1}{2} u_B$, то $u_{C3} = \frac{u_1 R_2}{2 r_2}$ (5.19)

а $w_3 = \frac{u_B}{2R_3} = \frac{u_1 R_2}{2 r_2 R_3}$. (5.20)

Підставимо (5.17), (5.19) та (5.20) в (5.16)

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{u_1 R_2}{2 r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \left(\frac{u_1 R_2}{2 r_2 R_3} \right)^2 = \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} u_1^2. \tag{5.21}$$

Визначимо кінетичну енергію усієї механічної системи, підставивши (5.11), (5.15) та (5.21) у формулу (5.10)

$$T=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2\frac{i_{2Z}^2}{r_2^2}u_1^2+\frac{3}{16}m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}u_1^2=\frac{u_1^2}{16}\left(8m_1+8m_2\frac{i_{2Z}^2}{r_2^2}+3m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}\right) \quad (5.22)$$

Після підстановки значень мас і радіусів одержимо

$$T=\frac{u_1^2}{16}\left(8\cdot 10m+8\cdot 2m\left(\frac{1{,}5r_2}{r_2}\right)^2+3m\left(\frac{2r_2}{r_2}\right)^2\right)=8mu_1^2. \quad (5.23)$$

Знайдемо суму робіт усіх сил зовнішніх сил, які діють на тіла системи на заданому переміщенні. Зобразимо зовнішні сили, які діють на систему (див. рис. 5.2,б) і знайдемо їх сумарну роботу

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^e= A(\bar{F})+A(m_1\bar{g})+A(\bar{N}_1)+A(\bar{F}_{mp1})+A(m_2\bar{g})+$$
$$+A(\bar{N}_2)+A(m_3\bar{g})+A(\bar{N}_3)+A(\bar{F}_{np})+A(M_{mp})+A(\bar{F}_{mp3}). \quad (5.24)$$

Робота зовнішньої сили F

$$A(F)=\int_0^{S_1}FdS=\int_0^{S_1}30(2+3S)dS=60S_1+45S_1^2, \quad (5.25)$$

де S_1 – переміщення вантажу 1.

Робота сили ваги тіла 1

$$A(m_1g)=A(m_1g)_t\ S,$$

де $(m_1g)_t$ – проекція сили ваги на напрямок руху, $(m_1g)_t = m_1g\ sin\alpha$.

Таким чином,

$$A(m_1g)=m_1g\ sin\alpha\ S_1.. \quad (5.26)$$

Робота нормальної реакції $\overline{N_1}$ дорівнює 0, оскільки вона перпендикулярна до напрямку руху вантажу 1 отже

$$A(N_1)=0. \tag{5.27}$$

Робота сили тертя ковзання $F_{тр1}$,

$$A(F_{тр1})=(F_{тр1})_t\,S_1\ ,$$

де $(F_{тр1})_t$ - проекція сили тертя ковзання на напрямок руху.

Оскільки сила тертя дорівнює $F_{тр1} = ¦\,N_1 = ¦\,m_1 g\ cosa$.

то $$A(F_{тр1}) = -¦\,m_1 g\ cosa\ S_1. \tag{5.28}$$

Робота сили ваги тіла 2 і реакції підшипника N_2 дорівнюють 0 оскільки сили прикладені до точки , яка не рухається

$$A(m_2 g)=A(N_2)=0. \tag{5.29}$$

Робота сили ваги тіла 3

$$A(m_3 g)=A(m_3 g)_t\ S_{C3},,$$

де $(m_3 g)_t$ - проекція сили ваги на напрямок руху, $(m_3 g)_t = -m_3 g\ sinb$,

а S_{C3} - переміщення центру мас тіла 3 , пропорційне відповідній швидкості:

$$\frac{S_3}{u_{C3}}=\frac{S_1}{u_1}, \qquad \text{звідки} \qquad S_3=S_1\frac{u_{C3}}{u_1}=S_1.$$

Отже,

$$A(m_3 g) = -m_3 g\ sinb\ S_1. \qquad (5.30)$$

Робота нормальної реакції площини N_3 дорівнює 0, оскільки сила розміщена перпендикулярно напрямку руху

$$A(N_3)=0 \qquad (5.31)$$

Робота сили тертя ковзання $F_{тр3}$ також дорівнює нулю, оскільки вона прикладена до миттєвого центру швидкостей катка 3, який не рухається.

Отже,
$$A(F_{тр3}) = 0. \qquad (5.32)$$

Робота сил опору кочення $M_{тр}$

$$A(M_{тр}) = -M_{тр}\ j_3, \qquad (5.33)$$

де $M_{тр}$ – момент сил опору кочення, який дорівнює $M_{тр} = d\ N_3 = d\ m_3 g\ cosb;$

j_3 – кут повороту катка 3 навколо осі Z, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через миттєвий центр швидкостей.

Кут j_3 – є величиною, яка пропорційна відповідній кутовій швидкості ω_3, тому $\dfrac{j_3}{w_3} = \dfrac{S_1}{u_1}$, звідки $j_3 = \dfrac{S_1}{R_3}$.

Отже ,
$$A(M_{тр}) = -d\ m_3 g\ cosb\ \frac{S}{R_3}. \qquad (5.34)$$

Робота сили пружності $F_{пр}$

$$A\left(F_{np}\right)=-\frac{cS_3^2}{2}=-\frac{cS_1^2}{2}. \qquad (5.35)$$

Підставляючи одержані значення робіт (5.25) – (5.35) до формули (5.24) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = \left(60S_1 + 45S_1^2\right) + m_1 g sina \cdot S_1 - fm_1 g cosa \cdot S_1 -$$

$$- m_3 g sinb \cdot S_1 - dm_3 g cosb\, \frac{S_1}{R_3} - \frac{cS_1^2}{2}. \qquad (5.36)$$

Після підстановки значень мас та функцій кутів одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = S_1(60 + 45S_1 + 10mg \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 10mg \cdot 0{,}866 -$$

$$-0{,}707mg - 0{,}002mg\,\frac{0{,}707}{0{,}015} - \frac{10S_1}{2}).$$

Звідки $$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 203{,}3 \quad Дж.$$

Підставимо (5.23) і (5.35) у формулу (5.9) і знайдемо, що

$$8m\,u_1^{\,2} = 203{,}3.$$

Остаточно $$u_1 = 1{,}59 \quad \text{м/с}.$$

Відповідь:

Швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні дорівнює:

$$u_1 = 1{,}59 \quad \text{м/с}.$$

6 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДАЛАМБЕРА ДО ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ В'ЯЗЕЙ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

6.1 Короткі відомості з теорії

Згідно з принципом Даламбера для механічної системи, якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, крім діючих на неї внутрішніх і зовнішніх сил, додати відповідні сили інерції, то отримана система сил буде врівноваженою, тобто до цієї системи можна застосувати усі рівняння рівноваги з статики.

Розглянемо окремі випадки руху твердого тіла: поступальний, обертальний і плоский.

При поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові і дорівнюють прискоренню $\bar{a}_C$ центра мас тіла. Тому сили інерції твердого тіла зводяться до рівнодіючої сили $\bar{\Phi}$, яка дорівнює головному вектору сил інерції.

Цю рівнодіючу силу можна обчислити за формулою:

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_c \; , \qquad (6.1)$$

де M – маса тіла.

З формули (6.1) видно, що сила $\bar{\Phi}$ спрямована вздовж однієї прямої з прискоренням $\bar{a}_C$, але в протилежний бік.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі сили інерції, прикладені до точок тіла, в загальному випадку можна звести до головного моменту сил інерції відносно будь-якого центра приведення.

Якщо за центр приведення обрати точку C – центр ваги твердого тіла, то сили інерції зводяться до рівнодіючої сили $\bar{\Phi}$, яка обчислюється згідно з формулою (6.1), та пари сил з моментом L_C^{Φ}.

$$L_C^{\Phi} = J_c e\,, \qquad (6.2)$$

де J_c – момент інерції відносно осі, яка проходить через центр ваги і паралельна осі обертання;

e– кутове прискорення твердого тіла.

При виконанні будь-якої задачі на рисунку момент L_C^{Φ} зображується дуговою стрілкою, яка має напрямок, протилежний дуговій стрілці e.

При цьому треба пам'ятати, що при обертальному русі прискорення $\overline{a}_c$ має дві складові частини: нормальну і дотичну, тобто:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_C^n + \overline{a}_C^t$$

$$\overline{\Phi}_C = \overline{\Phi}_C^n + \overline{\Phi}_C^t \quad \text{, де} \quad \overline{\Phi}_C^n = -M\overline{a}_C^n;\ \overline{\Phi}_C^t = -M\overline{a}_C^t\,.$$

Якщо за центр приведення обрати точку *O*, що лежить на нерухомій осі *OZ*, то сили інерції зведуться теж до двох величин: це, як і раніше, рівнодіюча, яка обчислюється за формулою (див. 6.1), та момент $L_0^{\Phi} = J_{oz} e\,,$

де $J_{oz} = J_C + Mh^2;$

J_{oz} – момент інерції тіла навколо осі обертання;

h – найкоротша відстань між паралельними осями *OZ* та CZ^1.

Як бачимо, за центр приведення краще обирати центр ваги *C*.

Нарешті, якщо точка *C* лежить на осі обертання, то головний вектор сил інерції дорівнює нулю ($a_C = 0$) і система сил інерції зводиться до однієї пари сил з моментом L_Z^{Φ}, що визначається за формулою (6.2).

При плоскому русі твердого тіла система сил інерції зводиться до головного вектора сил інерції, прикладеного у центрі приведення, та до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно обраного центра приведення. Звичайно за центр приведення обирають центр мас (або центр ваги твердого тіла). Тоді маємо:

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C; \quad \text{та} \quad L_C^{\Phi} = J_c e,$$

де $\bar{\Phi}_C$ – спрямована протилежно a_C; головний момент L_C^{Φ} діє у площині руху тіла і має напрямок, протилежний кутовому прискоренню.

6.2 Умови завдання

Вертикальний вал *AK* (див. рис. 6.1.), що обертається з постійною кутовою швидкістю w, закріплений підп'ятником у точці *A* і циліндричним шарніром (підшипником) у точці, зазначеній на рисунку ($AB = BD = DE = EK = a$). До вала жорстко прикріплені тонкий однорідний ламаний стержень, який складається з частин 1 і 2 (розміри частин стержня показані в таблиці 6.1., а їхньої маси m_1 m_2 у таблиці 6.2.), і невагомий стрижень 3 довжиною l із матеріальною точкою на кінці, маса якої m_3; обидва стрижні лежать в одній площині. Кути a, j, задані в таблиці 6.1.

Визначити реакції підп'ятника і підшипника, нехтуючи вагою вала.

Таблиця 6.1

Величина		Значення величини за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Довжина стрижня, *м*	*l*	10	8	6	4	12	14	16	18	20	2
	a	4	3	2	1	6	5	8	10	12	0,8
	b	6	5	4	2	8	10	12	14	16	1
Кут, ^{0} .	*a*	30	45	60	60	30	30	45	60	15	15
	j	45	60	45	30	60	15	15	15	30	45

Таблиця 6.2

Величина		Значення величини за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Маса, *кг*	m_1	1	5	2	8	3	4	10	6	7	9
	m_2	2	10	4	12	4	2	12	3	4	3
	m_3	3	15	6	16	5	1	8	2	3	6
w, c^{-1}		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Примітка**.** З таблиць вибирати значення тільки тих величин, що задані на рисунку.

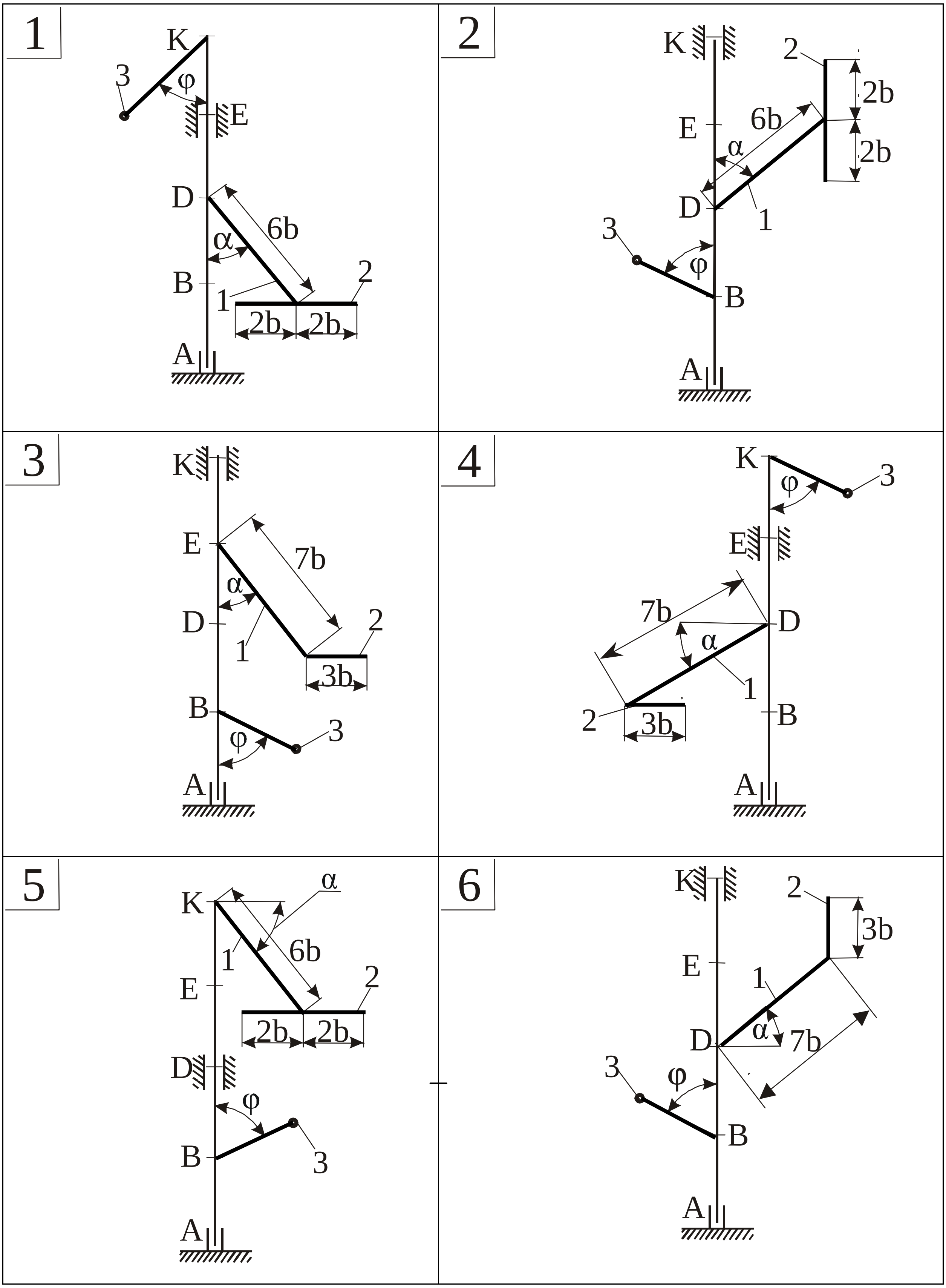


Рисунок 6.1 – Схеми до варіантів завдання

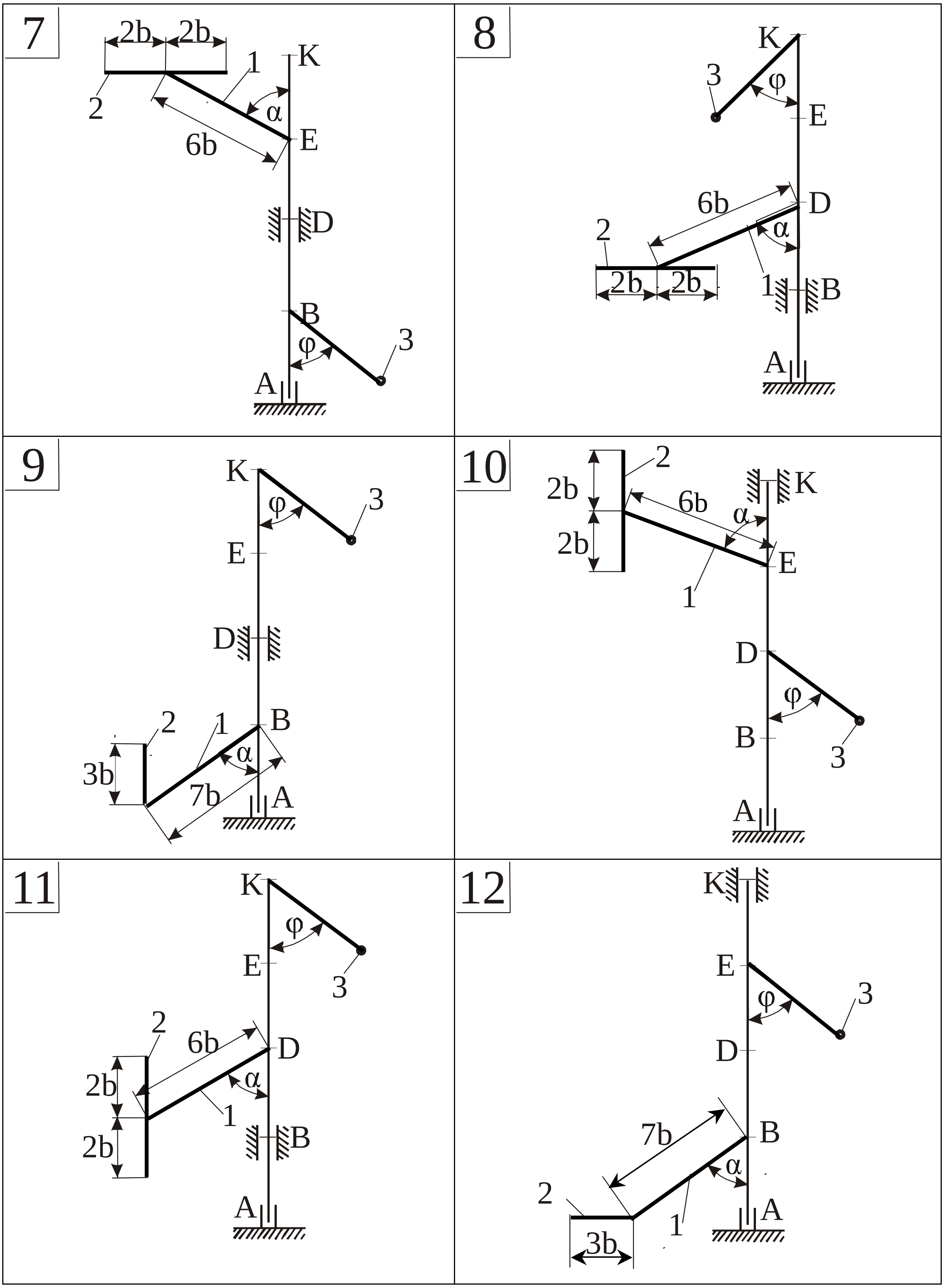


Рисунок 6.1, аркуш 2

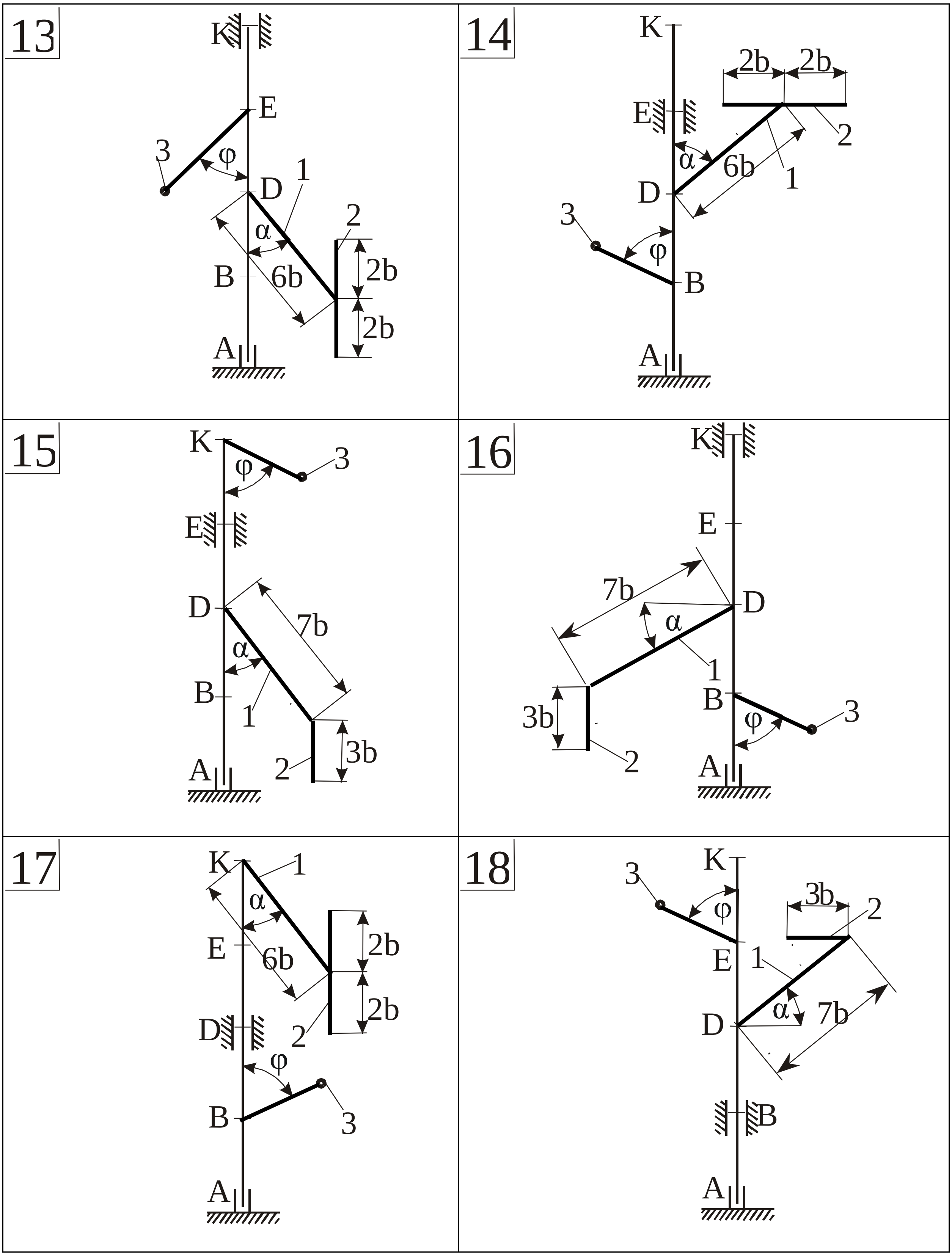


Рисунок 6.1, аркуш 3

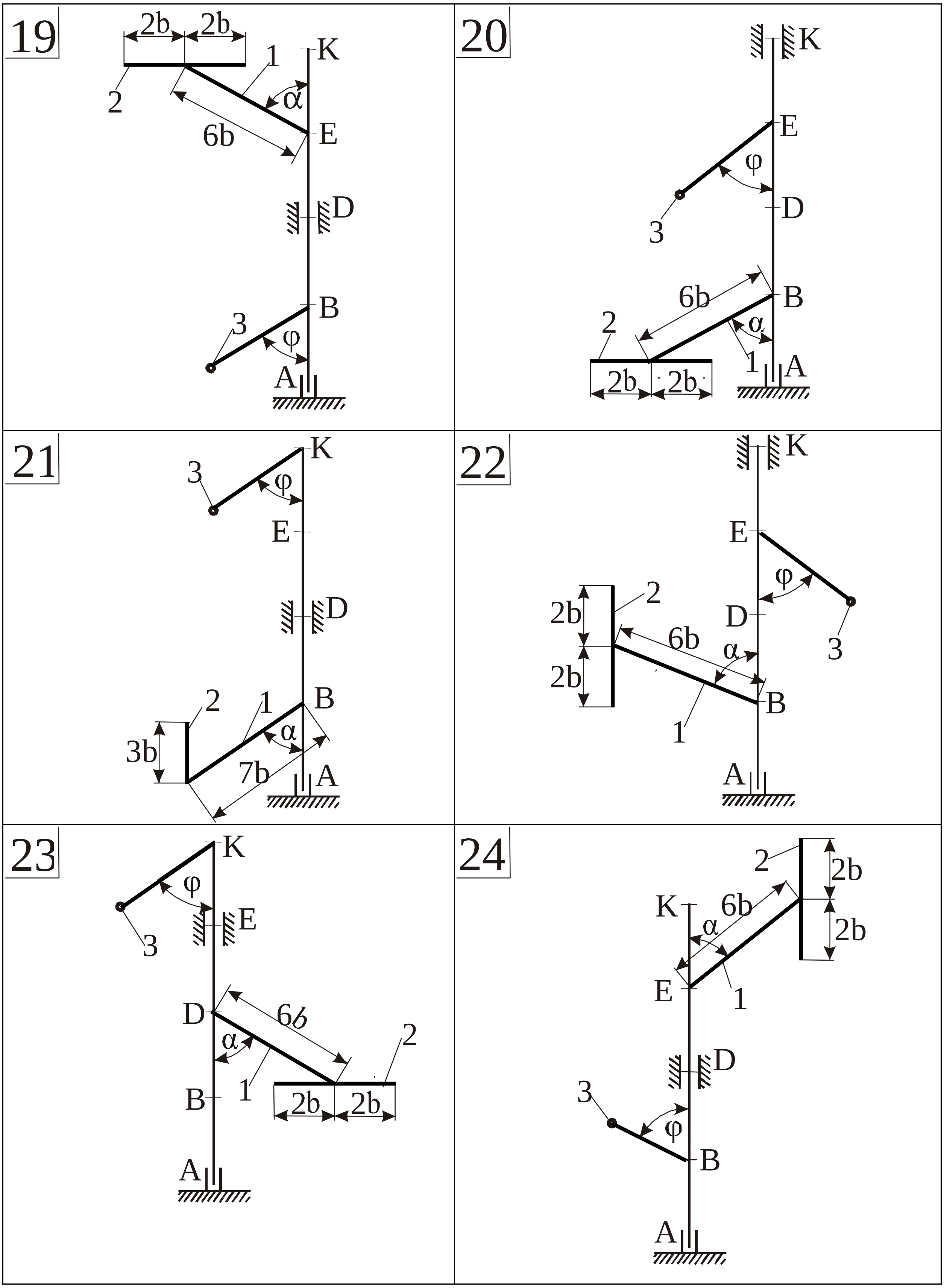


Рисунок 6.1, аркуш 4

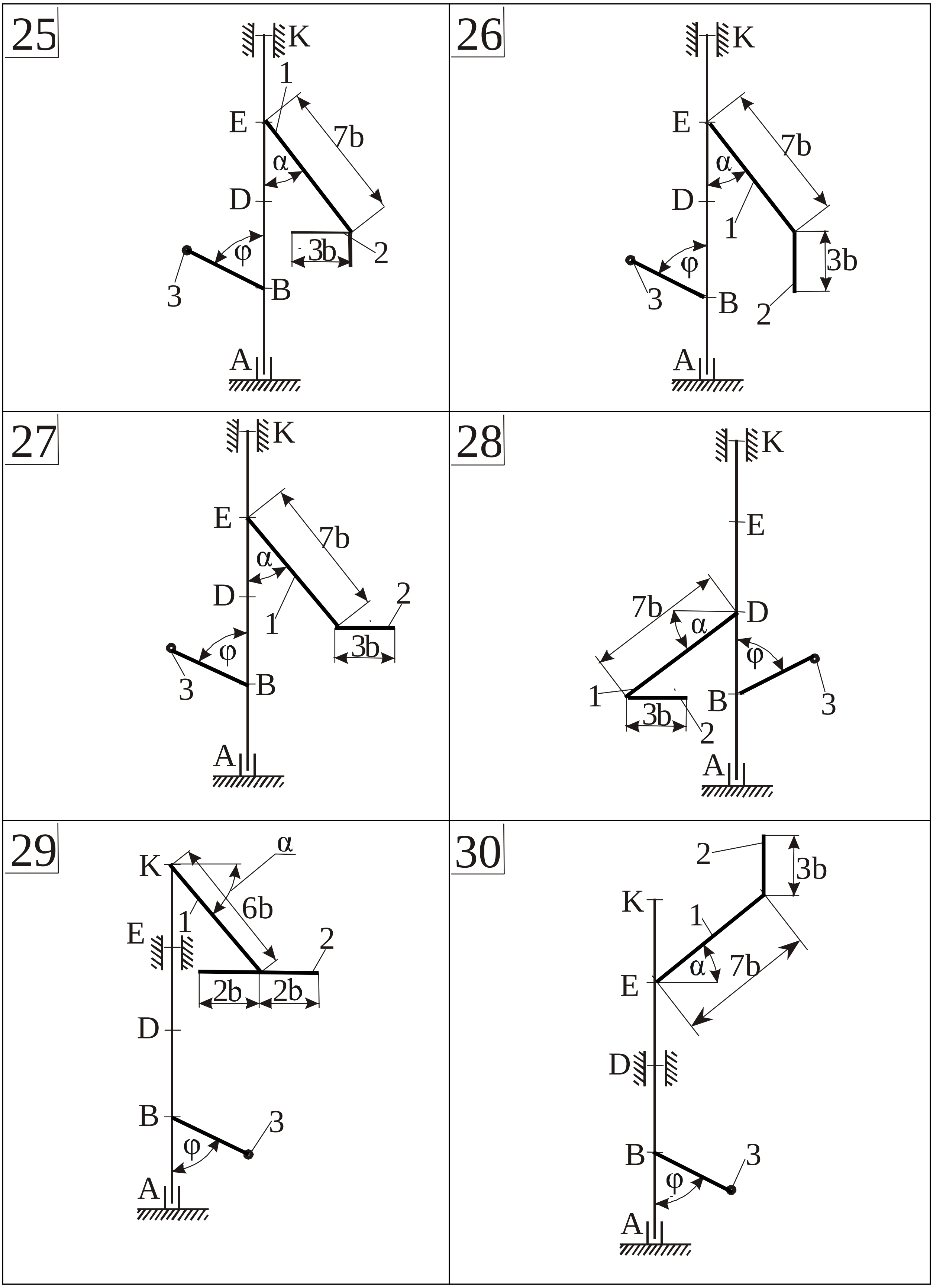


Рисунок 6.1, аркуш 5

6.3 Приклад виконання завдання

Дано: $w = 8\ c^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ *кг*, $m_3 = 2$ *кг*, $a = 30^0$, $j = 60^0$,

$a = 0{,}3$ *м*, $b = 0{,}1$ *м*, $l_1 = 6b$, $l_2 = 4b$, $l_3 = 5b$, $AB = BD = DE = a$.

Знайти: реакції підп'ятника *A* и підшипника *D*, нехтуючи вагою вала.

Рішення

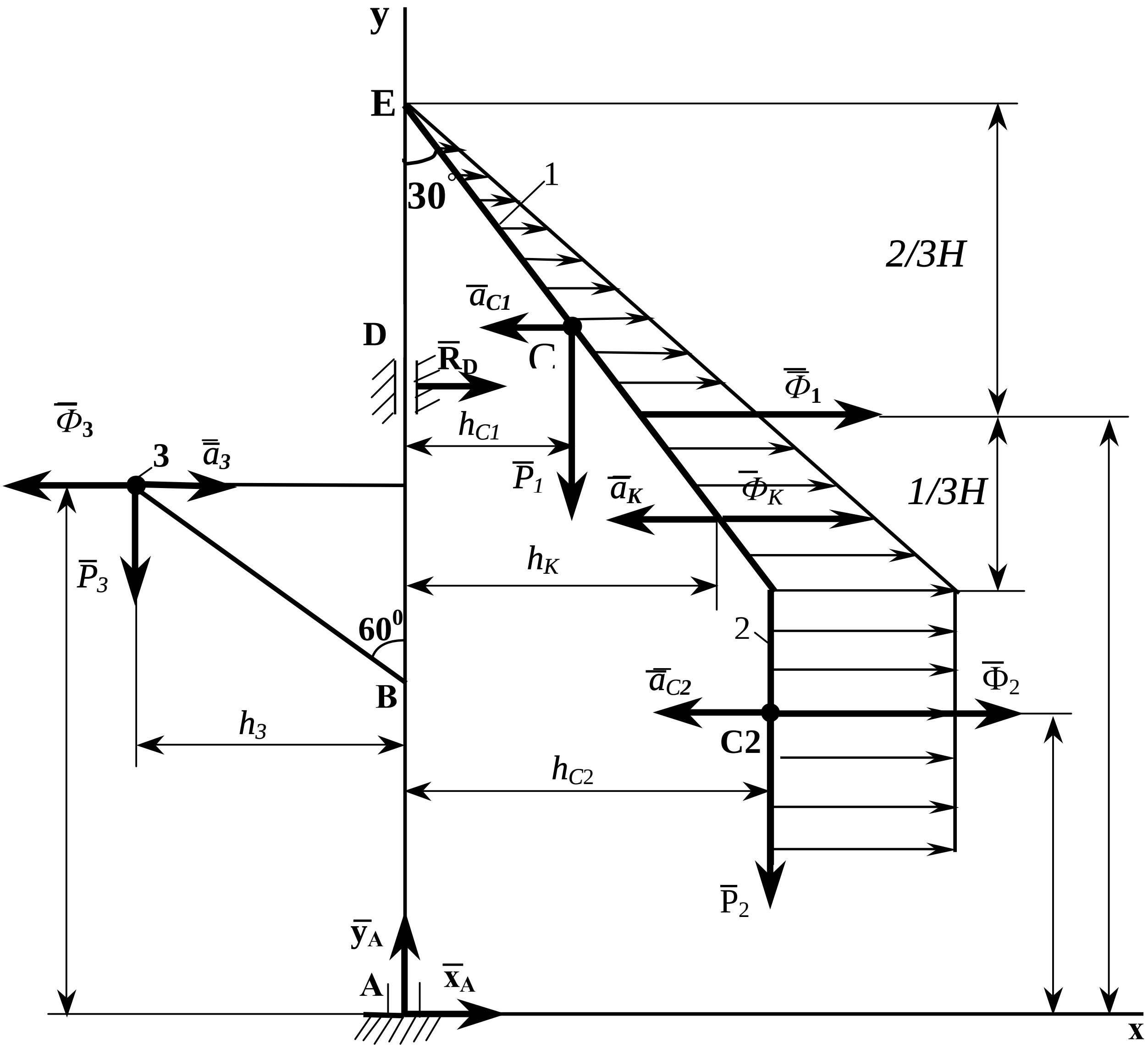


Рисунок 6.2 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання

Вертикальний вал (рис. 6.2) довжиною *3a* (*AB*=*BD*=*DE*=*a*), закріплений підп'ятником *A* і підшипником *D*, обертається з постійною кутовою швидкістю *ω*. До вала жорстко прикріплений у точці *E* ламаний однорідний стрижень масою *m* і довжиною *10b*, що складається з двох частин 1 і 2, а в точці *B* прикріплений невагомий стрижень довжиною *l=5b* із точкою масою m_3 на кінці; обидва стрижні лежать в одній площині.

Зображуємо вал і прикріплені до нього в точках *B* и *E* стрижні. Маси і ваги частин 1 і 2 ламаного стрижня пропорційні довжинам цих частин і відповідно дорівнює

$$m_1 = 0{,}6m,\ m_2 = 0{,}4m,\ \ P_1 = 0{,}6mg,\ \ P_2 = 0{,}4mg,\ \ P_3 = m_3 g \qquad (6.3)$$

Для визначення невідомих реакцій розглянемо рух заданої механічної системи і застосуємо принцип Даламбера. Проведемо координати осі AXY (вони обертаються разом з валом) так, щоб стрижні лежали в площині XУ, і зобразимо діючі на систему сили: активні сили – сили ваги $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ і реакції зв'язків – складові реакції підп'ятника $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$ і реакцію циліндричного підшипника $\overline{R_D}$.

Відповідно до принципу Даламбера, приєднаємо до цих сил сили інерції елементів однорідного ламаного стрижня і вантажу, вважаючи його матеріальною точкою.

Так як вал обертається рівномірно, то елементи стрижня мають тільки нормальні прискорення $\overline{a}_{nk}$, спрямовані до осі обертання, а чисельно

$$a_{nk} = w^2 h_k ,$$

де h_k – відстань елементів від осі обертання. Тоді сили інерції $\overline{\Phi}_k$ будуть спрямовані від осі обертання, а чисельно

$$\Phi_k = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k\, w^2 h_k , \qquad (6.4)$$

де Δm_k – маса елемента.

Тому що всі $\bar{\Phi}_k$ пропорційні h_k, то епюри цих нормальних сил інерції стрижня утворять для частини 1 трикутник, а для частини 2 – прямокутник (див. рис. 6.2)

Кожну з отриманих систем нормальних сил інерції замінимо її рівнодіючою, яка дорівнює головному вектору цих сил. Тому, що модуль головного вектора сил інерції будь-якого тіла має значення

$$\Phi_1 = m_1 a_{c1}\,,\ \Phi_2 = m_2 a_{c2}\ . \tag{6.5}$$

Сила інерції матеріальної точки маси 3 повинна бути спрямована в бік, протилежний її прискоренню і чисельно буде дорівнювати $\Phi_3 = m_3 a_3$.

Прискорення центрів мас частин 1 і 2 стрижні й вантажу 3 дорівнюють

$$a_{c1} = w^2 h_{c1},\ a_{c2} = w^2 h_{c2},\ a_3 = w^2 h_3, \tag{6.6}$$

де h_{c1}, h_{c2} – відстань центрів мас частин стрижня від осі обертання, а h_3 – відповідна відстань від вантажу до осі обертання:

$$\begin{gathered} h_{c1} = (l_1/2)\sin 30^0 = 3b\sin 30^0 = 0{,}15\ м, \\ h_{c2} = 6b\sin 30^0 = 0{,}3\ м, \\ h_{c3} = l\sin 60^0 = 5b\sin 60^0 = 0{,}43\ м. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Підставивши в формули (6.5) значення (6.3) і врахувавши значення (6.7), одержимо числові значення Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = 0{,}6\ mw^2 h_{c1} = 57{,}6\ H, \\ \Phi_2 = 0{,}4\ mw^2 h_{c2} = 76{,}8\ H, \\ \Phi_3 = m_3 w^2 h_3 = 55{,}0\ H. \end{gathered} \tag{6.8}$$

При цьому лінії дії рівнодіючих $\bar{\Phi}_1$ і $\bar{\Phi}_2$ пройдуть через центри ваги відповідних епюр сил інерції. Так лінія дії сили $\bar{\Phi}_1$ пройде на відстані *2/3 H* від вершини *E* трикутника, де $H = 6b\,sin\,60^0 = 0{,}52$ *м*.

Згідно з принципом Даламбера, прикладені зовнішні сили (активні й реакції в'язей) і сили інерції утворюють урівноважену систему сил.

Для отриманої плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + R_D + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \tag{6.9}$$

$$\sum \bar{M}_A(F_k) = 0; \; -R_D 2a - P_1 h_{c1} - P_2 h_{c2} + P_3 h_3 - \Phi_1 H_1 - \Phi_2 H_2 - \Phi_3 H_3 = 0,$$

де H_1, H_2, H_3 – відповідно плечі сил $R_1^и, R_2^и, R_3^и$, відносно точки *A* дорівнюють:

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \;\; м;$$

$$H_2 = 3a - (H + 2\,b) = 0{,}18 \;\; м\;; \tag{6.10}$$

$$H_3 = a + l\,cos\,60^0 = 0{,}55 \;\; м.$$

Підставляючи в рівняння (6.9) відповідні величини із рівностей (6.7, 6.8, 6.10) і вирішуючи цю систему рівнянь (6.7), знайдемо невідомі реакції.

Відповідь:

$$X_A = -33{,}7\,H; \;\; Y_A = 117{,}7\,H; \;\; R_D = 45{,}7\,H.$$

7 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНИХ РЕАКЦІЙ СКЛАДОВОЇ ПЛОСКОЇ РАМИ

7.1 Короткі відомості з теорії

Можливим переміщенням точки називається нескінченно мале переміщення, що допускається в'язями, накладеними на точку в фіксований момент часу. Ці переміщення не залежать від діючих сил. Якщо радіус-вектор точки дорівнює $\bar{r}$, то $d\,\bar{r}$ – можливе переміщення, а $d\bar{r}$ – справжнє переміщення точки. У проекціях на координатні осі матимемо в часі:

$$d\bar{r} = d\,x\bar{i} + d\,y\,\bar{j} + d\,z\bar{k}\,, \quad \text{а} \quad d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}\,.$$

Для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються ідеальним двостороннім в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт сил, що задаються, при .будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнювала нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k d\bar{r}_k = 0\,,$$

або в проекціях на координатні осі:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k = 0\,.$$

Зазначимо, що у формулюванні принципу немає сил реакцій ідеальних в'язей. Цей принцип ефективний при розв'язуванні задач про рівновагу системи твердих тіл.

Якщо серед в'язей, накладених на систему, є в'язі з тертям (не гладенькі), то до заданих сил належать також сили тертя.

Якщо треба визначити яку-небудь реакцію ідеальної в'язі, то слід, застосовуючи принцип звільнення від в'язей, відкинути відповідну в'язь і замінити її дію пошуковою реакцією в'язі.

Складаючи рівняння рівноваги, треба до заданих сил додати силу реакції в'язі. Такий метод розв'язування задач про рівновагу системи твердих тіл надзвичайно ефективний, оскільки шукана сила реакцій в'язі визначається з одного рівняння, а не з системи рівнянь, як це буває при застосуванні звичайних методів статики (геометричної). Схема розв'язування задач за допомогою принципу можливих переміщень така:

1) виділити об'єкт рівноваги;

2) при наявності неідеальних в'язей віднести відповідні сили тертя до активних сил, після чого в'язі розглядати як ідеальні;

3) вивчивши систему всіх активних сил, включаючи сили тертя неідеальних в'язей, вказати їх на фізичній схемі;

4) у випадку визначення реакції в'язі слід умовно відкинути в'язь, замінивши її дію шуканою реакцією в'язі. Застосувати принцип звільнення від в'язей, якщо $\overline{R}\cdot d\overline{r}\neq 0$.

7.2 Умови завдання

Плоска конструкція, що представляє собою систему двох (рис. 7.1., схеми 1,2,...20) або трьох (рис. 7.1., схеми 21,22,...30) тіл, що з'єднані між собою шарнірно, знаходиться в рівновазі.

На конструкцію діють системи зосереджених сил $\overline{F}$, пара сил M і розподілене навантаження інтенсивністю $q = 20\frac{кН}{м}$.

Напрямок дії розподіленого навантаження на заданих ділянках задається в таблиці 7.4.

Застосовуючи принцип можливих переміщень, знайти складові опорних реакцій плоскої рами. Схеми конструкцій показані на рисунку 7.1, а необхідні для рішення дані в таблицях 7.1 (для схем 1…20) та 7.2 (для схем 21...30), 7.3 (для схем 1...30). На рисунках усі розміри зазначені в метрах.

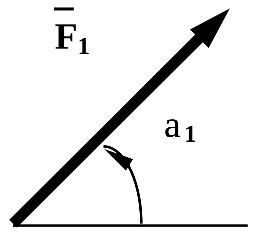
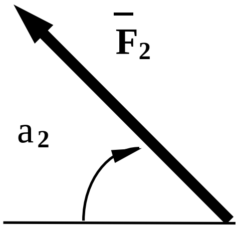
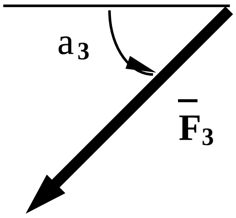
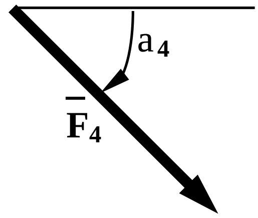
Таблиця 7.1. (для схем 1...20)

Номер умови	Розподільно-навантажений відрізок $q = 20\frac{кН}{м}$	Сила, кНм		Кут нахилу опорної поверх-хні (β, ^{0})	Знайти складові
		M_1	**M_2**		
0	CD	40	30	30	Y_A, R_B
1	AE	50	60	45	M_A, R_B
2	BL	75	55	60	X_A, Y_A
3	CD	30	25	30	X_A, M_A
4	AE	-40	50	45	Y_A, M_A
5	BL	-50	30	60	X_A, R_B
6	CD	-75	40	30	Y_A, R_B
7	AE	50	-30	45	M_A, R_B
8	BL	40	-50	60	X_A, Y_A
9	CD	75	-40	30	X_A, M_A

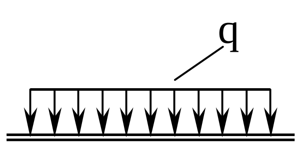
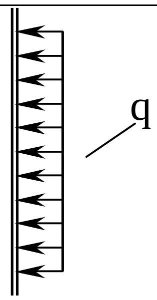
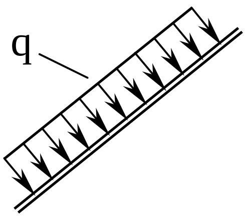
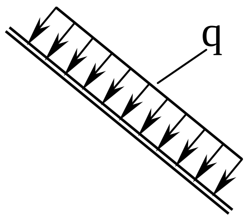
Таблиця 7.2 (для схем 21...30)

Номер умови	Розподільно-навантажений відрізок $q = 20\frac{кН}{м}$	Сила, (кНм)		Кут нахилу опорної повер-хні (β, ^{0})	Знайти складові
		M_1	**M_2**		
0	AE	-	30	40	X_A, Y_B
1	DE	-	60	30	Y_A, X_B
2	DC	30	40	-	M_A, X_B
3	BC	40	-	50	X_A, Y_A
4	BL	50	-	30	Y_A, M_A
5	CL	60	-	20	X_A, Y_B
6	AE	-	-30	50	M_A, Y_B
7	DE	-	-40	60	X_A, Y_A
8	DC	-50	20	-	M_A, X_B
9	BC	-50	-	30	M_A, Y_B

Таблиця 7.3 (для схем 1...30)

Номер умови								
	F_1 = 10 кН		**F_2 = 20 кН**		**F_3 = 30 кН**		**F_4 = 40 кН**	
	Точка прикла-ден-ня	α_1, °	Точка при-кладен-ня	α_2,°	Точка при-кладен-ня	α_3 ,°	Точка при-кладен-ня	α_4 ,°
0	E	60					L	30
1			E	30	L	60		
2	L	15					E	60
3			L	75	E	30		
4	E	30			L	15		
5			E	75			L	60
6	L	60			E	60		
7			L	30			E	75
8					E	15	L	30
9	E	15	L	60				

Таблиця 7.4

Ділянка, на якому діє розподільне навантаження			
Горизонтальне	Вертикальне	Похиле	
			

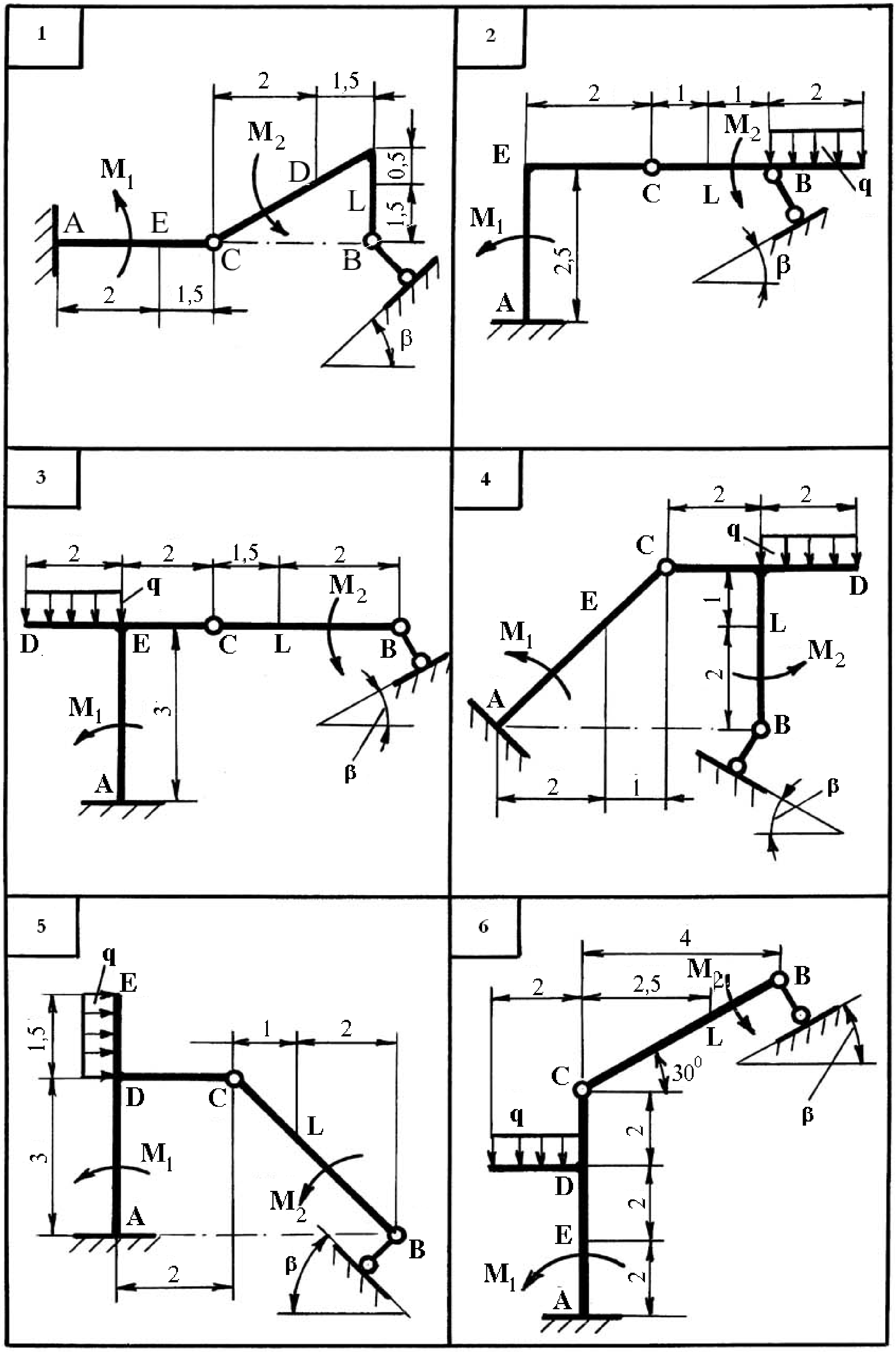


Рисунок 7.1 - Схеми до варіантів завдань

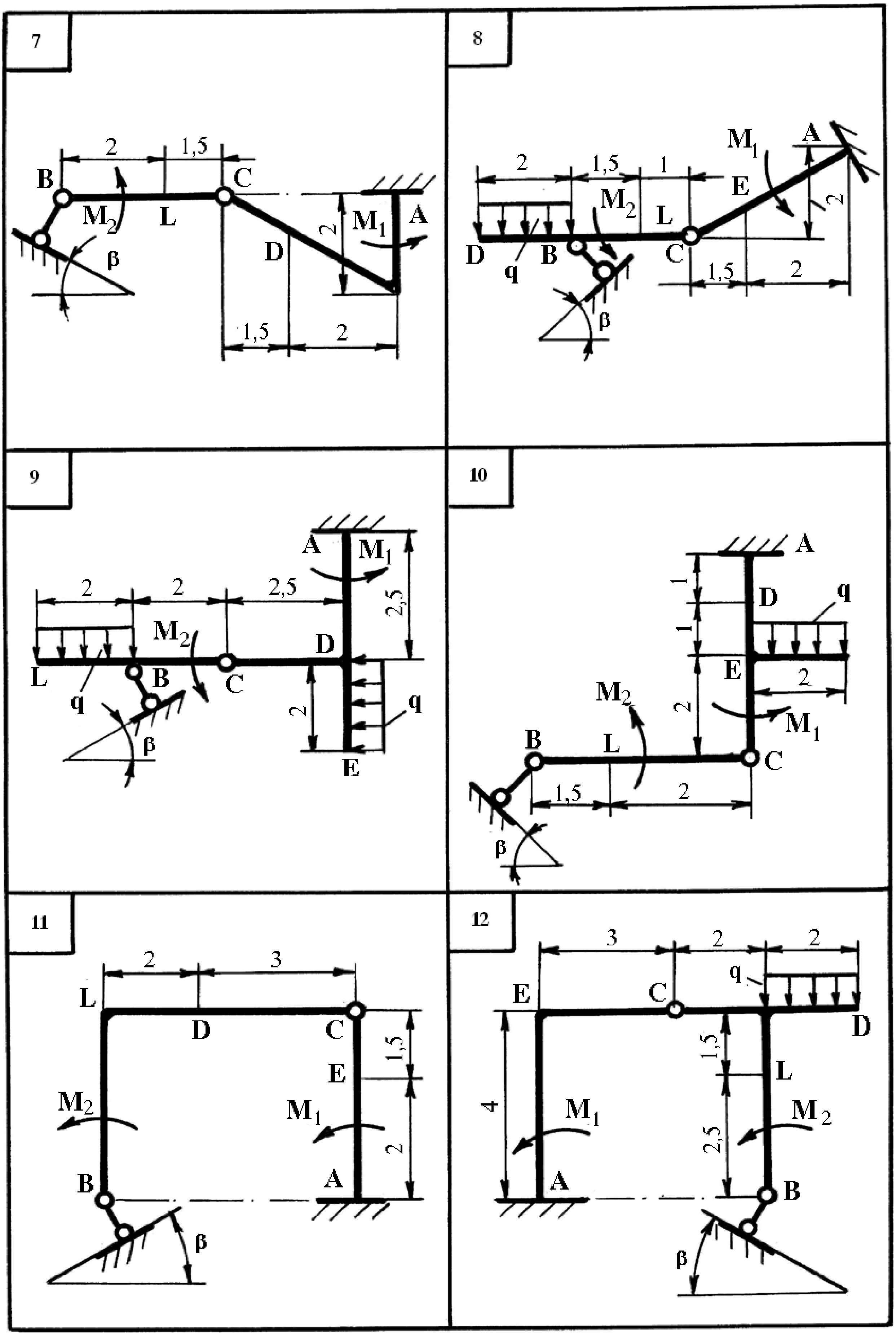


Рисунок 7.1, аркуш 2

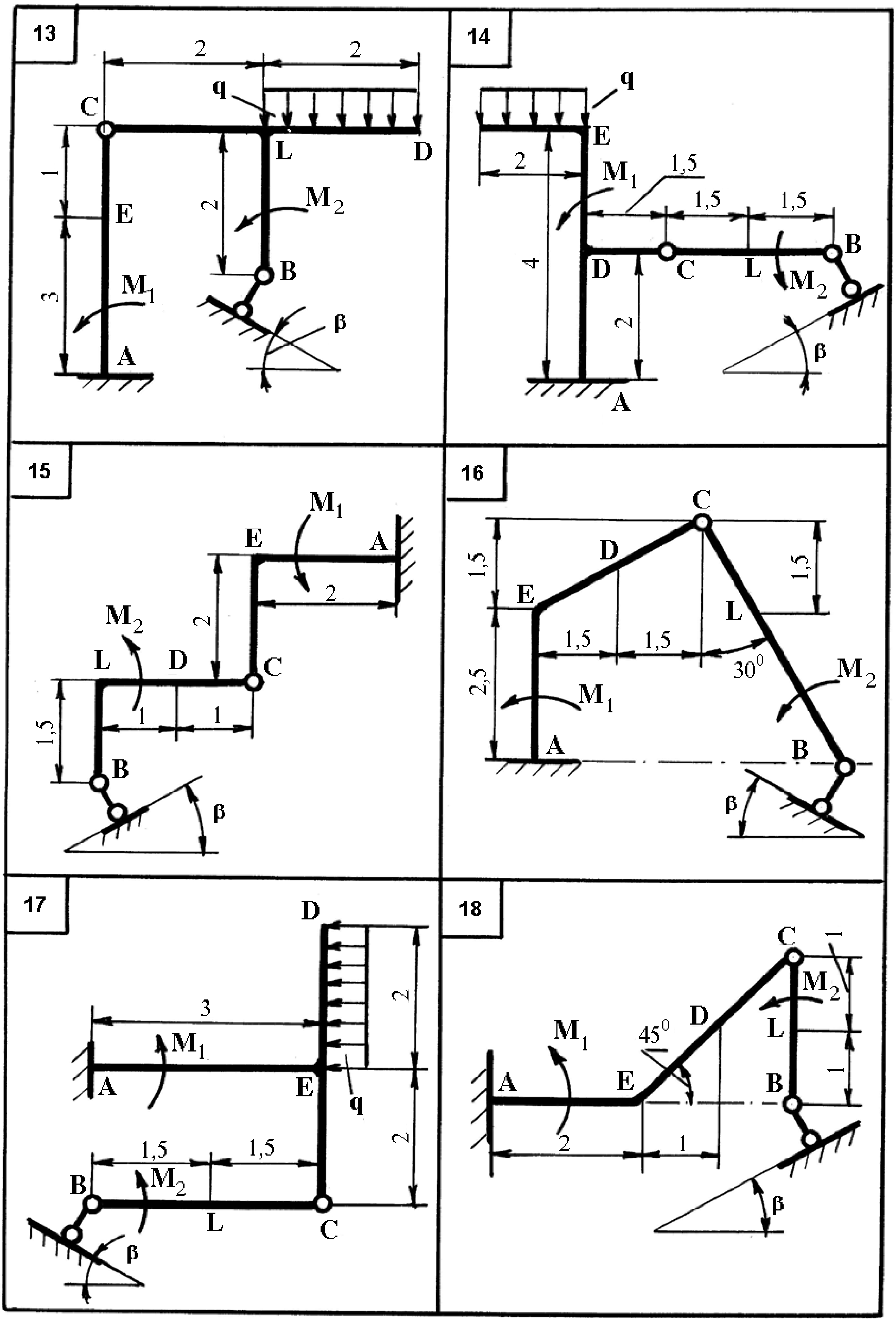


Рисунок 7.1, аркуш 3

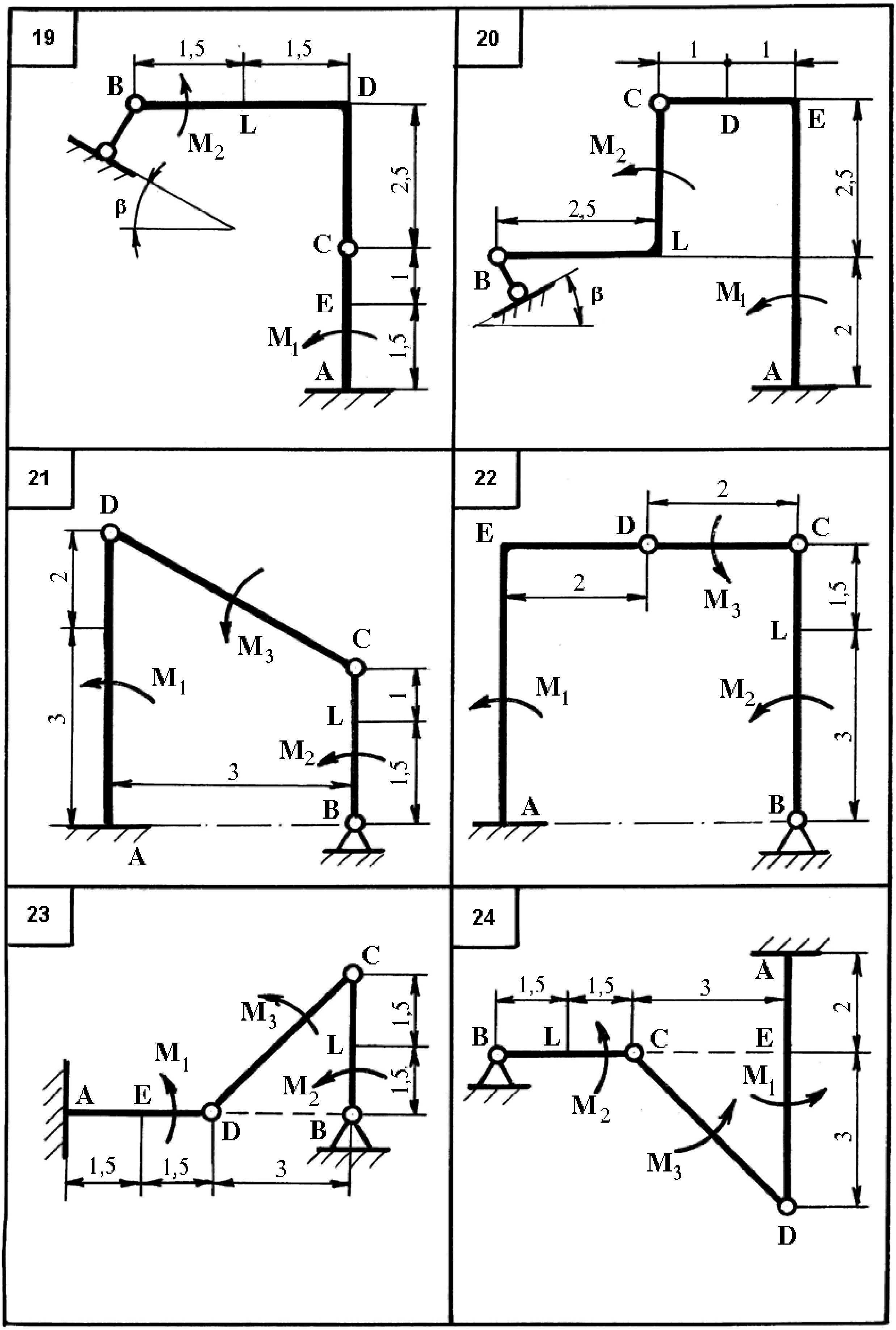


Рисунок 7.1, аркуш 4

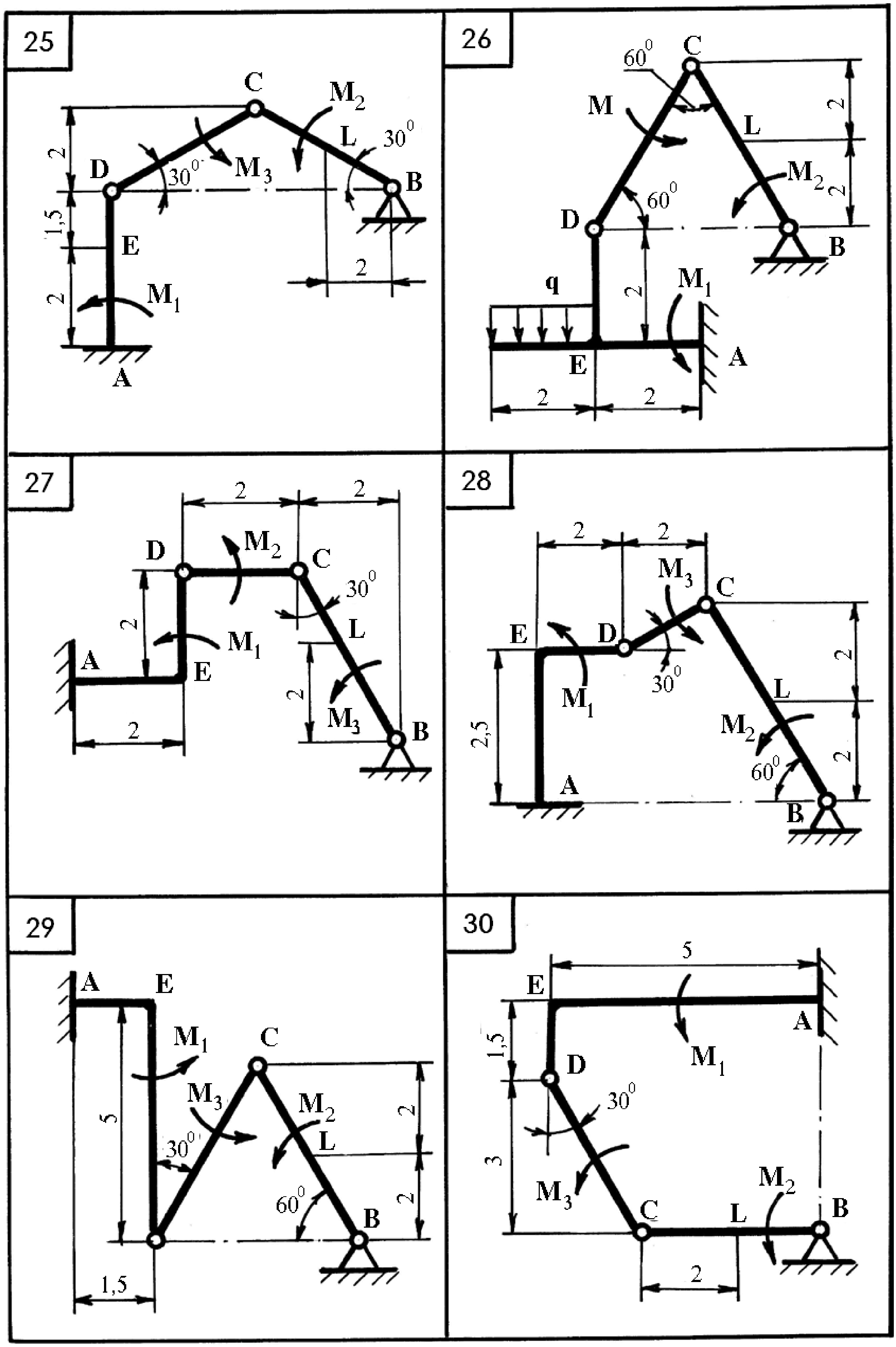


Рисунок 7.1, аркуш 5

7.3 Приклад виконання завдання

Визначити силу опорної реакції драбинки *АСВ* (рис. 7.2., а) в точці *В*, дві однакові половини якої *АС* і *СВ* шарнірно з'єднані в точці *С*, а кінці *А* і *В* впираються у виступи підлоги. Вага кожної половини драбинки дорівнює відповідно P_1 і P_2. У точці *К* прикладено силу *Q*, спрямовану вертикально вниз *АС* = *СВ*, а Ð *САВ* = Ð *СВА* = *a* = *60°*.

Дано: P_1, P_2., *Q*. *АС* = *СВ*, Ð *САВ* = Ð *СВА* = *a* = *60°*.

Знайти: опорної реакції зовнішніх в'язей.

Рішення

Розглянемо рівновагу системи тіл: драбинок *АС* і *ВС*, до яких прикладено сили P_1, P_2 і *Q*, на які накладено в'язі: горизонтальну гладеньку підлогу та вертикальні виступи підлоги (вертикальна стінка). Щоб визначити вертикальну складову R_{IB} сили опорної реакції в точці *В*, дамо опорі *В* можливість рухатися у вертикальному напрямі (рис. 7.2., б).

Для цього замінимо виступ підлоги в точці *В* опорою на котках, яка може переміщуватися у вертикальному напрямі. У цьому випадку немовби частково використовується принцип звільнення від в'язей, а саме: відкидається тільки горизонтальна підлога й зберігається вертикальна частина – виступ.

Уплив горизонтальної підлоги на драбинку замінюється вертикальною силою R_{IB}.

Нехай вертикальне можливе переміщення $d\overline{r}_B$ відбувається вгору (можна й униз). При цьому ліва частина драбинки *АС* повернеться навколо осі *А*, перпендикулярної до площини рисунка, а права частина *ВС* здійснить плоско-паралельний рух. Можливе переміщення $d\overline{r}_C$ точки *С* буде перпендикулярне до *АС*.

Знаючи можливі переміщення кінців відрізка *BC*, знайдемо положення миттєвого центра обертання в точці *A*, оскільки в цій точці перетинаються перпендикуляри, опущені з точок *B* і *C* на напрями $d\overline{r}_B$ і $d\overline{r}_C$.

Отже, в точці *A* збігаються центр обертання лівої половини *AC* драбинки, що обертається навколо нерухомої осі, і миттьовий центр обертання правої частини *BC* драбинки, що обертається навколо миттьової осі. Отже, вся драбинка матиме можливе кутове переміщення dj навколо точки *A* в площині рисунка, проти стрілки годинника.

Застосовуючи принцип можливих переміщень, складемо рівняння елементарних робіт на можливих переміщеннях всіх заданих сил, а також невідомої вертикальної складової сили реакції опори *B*

$$P_1 d r_A + Q d r_R + P_2 d r_E + R_{IB} d r_{IB} = 0,$$

або $$-P_1 (AA_1) dj - Q (AA_3) dj - P_2 (AA_4) dj + R_{IB} (AB) dj = 0.$$

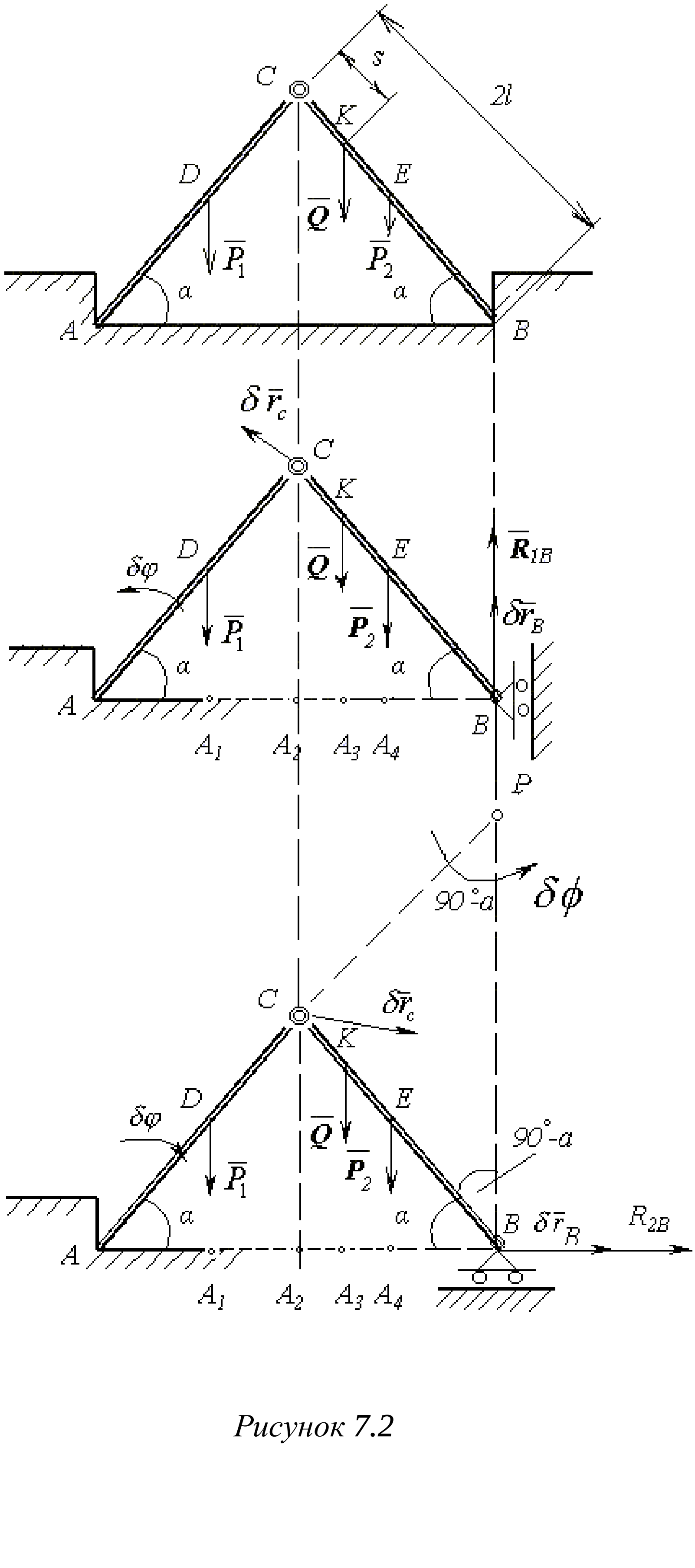


Рисунок 7.2

Враховуючи, що

$$AA_1 = l\cos\alpha;\quad AA_3 = (2l+s)\cos\alpha;\quad AA_4 = 3l\cos\alpha;\quad AB = 4l\cos\alpha,$$

одержимо

$$[-P_1 - Q(2l+s) - P_2 3l + R_{1B}4l]\cos\alpha\, d\varphi = 0.$$

Оскільки переміщення $d\varphi$ довільне, то

$$R_{1B} = \frac{(P_1 + 2Q + 3P_2)l + Qs}{4l}.$$

Щоб визначити горизонтальну складову R_{2B} сили опорної реакції в точці *B***,** дамо опорі *B* можливість рухатися в горизонтальному напрямі. Для цього, застосовуючи принцип звільнення від в'язей (частково), відкинемо виступ (вертикальну стінку) і збережемо горизонтальну підлогу. Вплив вертикальної частини виступу замінимо горизонтальною складовою сили R_{2B} в'язі.

Надамо можливого переміщення точці *B* за горизонталлю вправо. При цьому права половина драбинки здійснить плоско-паралельний рух, а ліва — повернеться навколо точки *A*. Знаючи можливі переміщення $d\overline{r}_C$ і $d\overline{r}_B$ двох точок стрижня *BC*, визначимо положення миттьового центра обертання частини *BC* драбинки в точці *P* перетину перпендикулярів, поставлених з точок *C* і *B* до відповідних можливих переміщень $d\overline{r}_C$ і $d\overline{r}_B$.

Отже, ліва половина *AC* драбинки повертається навколо точки *A* на кут $d\varphi$ за стрілкою годинника, а права половина *CB* повертається навколо точки *P* на кут $d\phi$ проти стрілки годинника. Встановимо залежність між можливими кутовими переміщеннями $d\varphi$ і $d\phi$. Оскільки шарнір *C* належить обом частинам драбинки, то

$$dr_C = (AC)d\varphi = (CP)d\phi.$$

Але $AC = CP$ (трикутник BCP рівнобедрений), тому $\delta\varphi = \delta\phi$. Застосовуючи принцип можливих переміщень, складемо рівняння елементарних робіт

$$P_1(AA_1)\delta\varphi + Q(A_3B)\delta\phi + P_2(A_4B)\delta\phi + R_{2B}(PB)\delta\phi = 0.$$

Враховуючи, що

$$AA_1 = l\cos\alpha;\ A_3B = (2l - s)\cos\alpha;\ A_4B = l\cos\alpha;\ PB = 4l\sin\alpha,$$

матимемо

$$\{[P_1 l + Q(2l - s) + P_2 l]\cos\alpha + R_{2B}4l\sin\alpha\}\delta\varphi = 0.$$

Оскільки можливе переміщення $\delta\varphi$ довільне, то дістанемо рівняння, з якого визначимо складову реакції опори B

$$R_{2B} = \frac{(P_1 + P_2 + 2Q)l - Qs}{4l}ctg\alpha.$$

Відповідь:

Складові опорних реакцій:

$$R_{1B} = \frac{(P_1 + 2Q + 3P_2)l + Qs}{4l};\ R_{2B} = \frac{(P_1 + P_2 + 2Q)l - Qs}{4l}ctg\alpha.$$

8 ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

8.1 Короткі відомості з теорії

Розглянемо рух механічної системи з ,будь-якими в'язями. Якщо до кожної точки системи, крім діючих активних сил $\overline{F}_k$ і реакцій в'язей $\overline{R}_k$, додати сили інерції $\overline{\Phi}_k = -m_k \overline{a}_k$, то згідно з принципом Даламбера отримана система сил буде перебувати у стані рівноваги. Використовуючи для такої системи принцип можливих переміщень, отримаємо загальне рівняння динаміки, а саме:

$$\sum \overline{F}_k d\,\overline{r}_k + \sum \overline{R}_k d\,\overline{r}_k + \sum \overline{\Phi}_k d\,\overline{r}_k = 0 \qquad (8.1)$$

або

$$\sum d\,A_k + \sum d\,A_k^R + \sum d\,A_k^{\Phi} = 0. \qquad (8.2)$$

Якщо до системи прикладені ідеальні в'язі, то рівняння (8.1) і (8.2) можливо спростити. Відомо, що Умови ідеальності в'язей має вигляд:

$$\sum \overline{R}_k d\,r_k = 0.$$

Тоді рівняння (8.1) набуде вигляду:

$$\sum \overline{F}_k d\,\overline{r}_k + \sum \overline{\Phi}_k d\,\overline{r}_k = 0,$$

а (8.2):

$$\sum d\,A_k + \sum d\,A_k^{\Phi} = 0. \qquad (8.3)$$

Кількість рівнянь (8.1) або (8.2) залежить від числа ступенів вільності системи. Якщо система має один ступінь вільності, то для розв'язання задачі необхідно надати можливе переміщення одній із точок системи. Усі інші можливі переміщення точок системи необхідно визначити через надане можливе переміщення.

На рисунку необхідно зобразити всі діючі сили та додати до них відповідні сили інерції. При цьому треба мати на увазі, що при поступальному русі твердого тіла зображуємо рівнодіючу силу $\bar{\Phi}$, яка спрямована проти прискорення центра мас тіла.

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

де M – маса тіла;

$\bar{a}_C$ – прискорення центра мас тіла,

При обертальному русі однорідних тіл навколо осі, що співпадає з віссю симетрії, сили інерції зводимо до однієї пари сил з моментом

$$L_x^{\Phi} = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла навколо осі обертання,

e – кутове прискорення тіла.

Напрямок головного моменту сил інерції L_x^{Φ} зображуємо дуговою стрілкою, протилежною напрямку e .

При плоскому русі твердого тіла на рисунку треба зобразити і головний вектор сил інерції

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

спрямований протилежно прискоренню точки C і головний момент сил інерції

$$L_C^{\Phi} = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла відносно центра мас тіла.

Напрямок $L_C^{Ф}$ протилежний напрямку e. Прискорення усіх точок системи і кутові прискорення виражаємо через те прискорення, що необхідно знайти згідно з умовою задачі.

Далі обчислюємо елементарну роботу зображених сил і моментів сил на можливих переміщеннях, тобто записуємо рівняння (8.3), з якого і знаходимо невідому величину.

8.2 Умови завдання

Механічна система складається з чотирьох тіл, які з'єднані між собою нитками (в схемах 6, 8, 11, 15, 18, 20, 23, 28 тіла 3 і 4 з'єднані за допомогою стержня).

Для заданої механічної системи, зображеної на рисунку 8.1 визначити прискорення вантажу 1. Величини, необхідні для розв'язання задачі, вказані в таблицях 8.1 і 8.2. Блоки і катки, радіуси інерції яких у таблицях відсутні, вважати однорідними круглими циліндрами.

Таблиця 8.1

Величина		**Значення величини за варіантами**									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кути,°	a	30	45	15	45	60	45	75	30	15	60
	b	45	15	45	60	45	75	45	15	60	15
Радіуси тіл, м	R_2	10	20	15	5	3	2	1	8	6	4
	r_2	2	15	5	3	1,5	1,2	0,5	2	3	2
	R_3	15	25	20	10	10	3	2	4	12	2
	r_3	5	10	10	2	5	1	1,5	2	4	1
	R_4	5	10	30	10	6	8	4	6	8	6
	r_4	2,5	5	15	5	3	4	1	3	4	2
Радіуси інерції, м	r_2	5	16	10	4	2	2	0,8	6	4	3
	r_3	10	12	15	6	8	2	2	3	8	1
	r_4	4	8	20	8	4	6	2	4	6	4

Примітка**.** З таблиці вибрати тільки значення величин, що є на схемах.

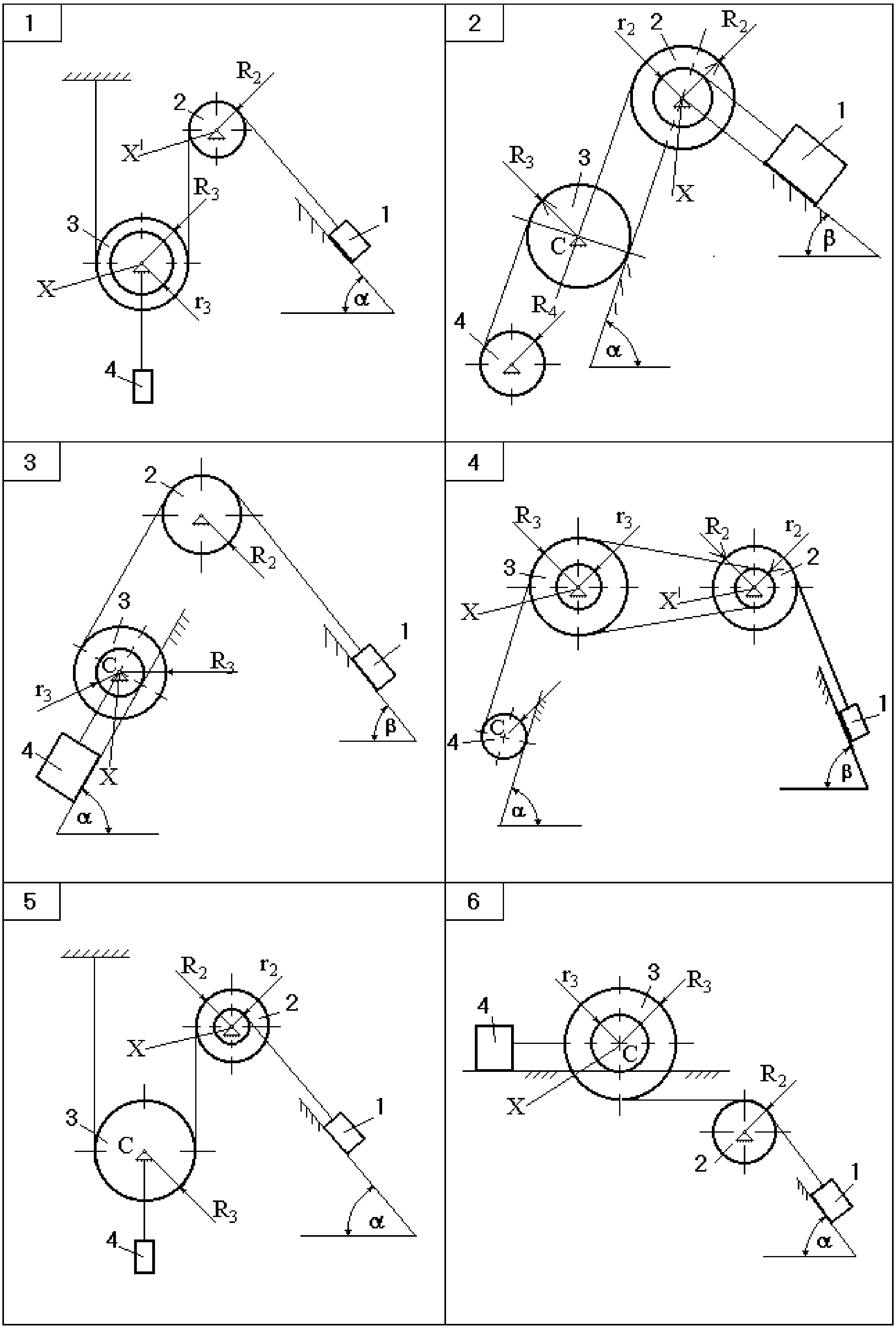
Таблиця 8.2

Величина		Значення величини за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Маса тіл, кг.	m_1	1	2	3	0,5	4	5	6	7	8	9
	m_2	4	0,5	4	1	3	2	5	2,5	3,5	6
	m_3	0,2	1	2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	m_4	0,75	0,2	0,8	0,7	0,3	0,4	0,5	1	1	0,6
f		0,1	0,15	0,2	0,25	0,05	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
f_k, 10^{-2} м		0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,6	0,7	0,8	0,9	0,1

Примітки:

1 Для схем 7, 10, 11, 12, 15, 18, 19, 25, 26, 27, 28 і 30 тертя ковзання врахувати тільки для тіла 1. Для схем 8, 16, 20, 22, 23 – тільки для тіла 4. У схемах 9, 13, 14, 17, 21, 24, 29 – тертя ковзання відсутнє.

2 Коефіцієнт тертя кочення не враховувати у схемах 1, 5, 7, 16, 19, 27 і 30.



3

Рисунок 8.1 – Схеми до варіантів завдання

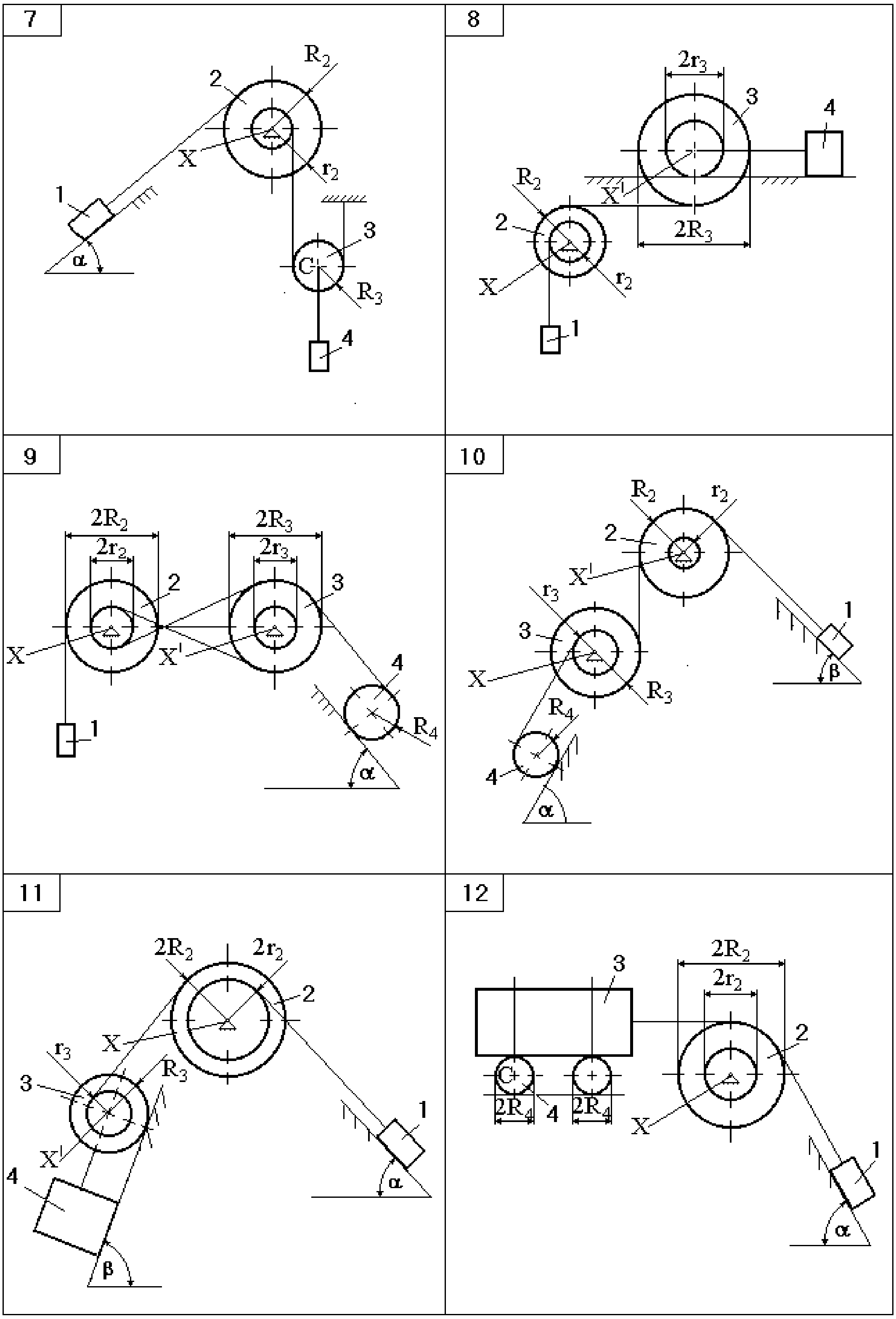


Рисунок 8.1, аркуш 2

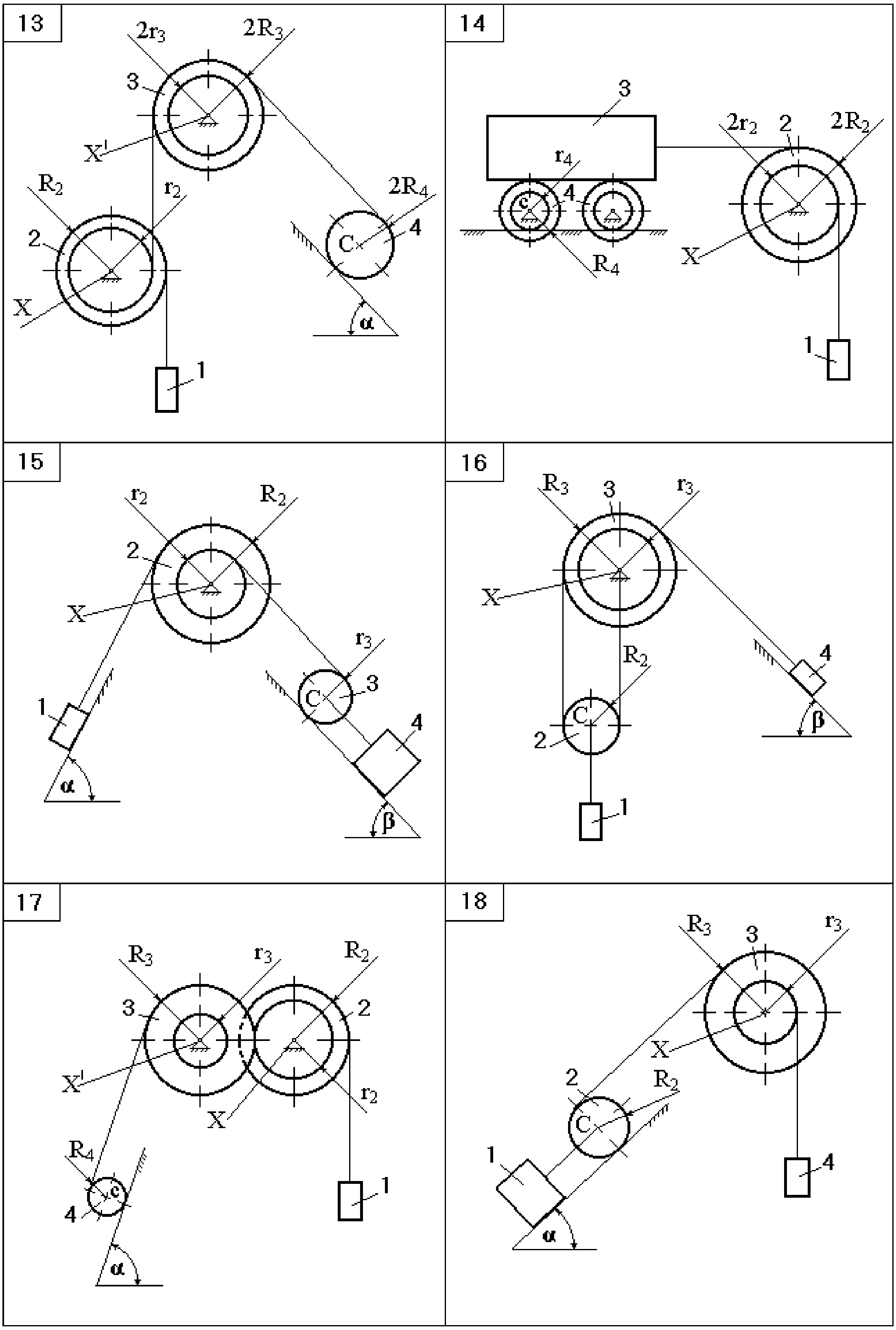


Рисунок 8.1, аркуш 3

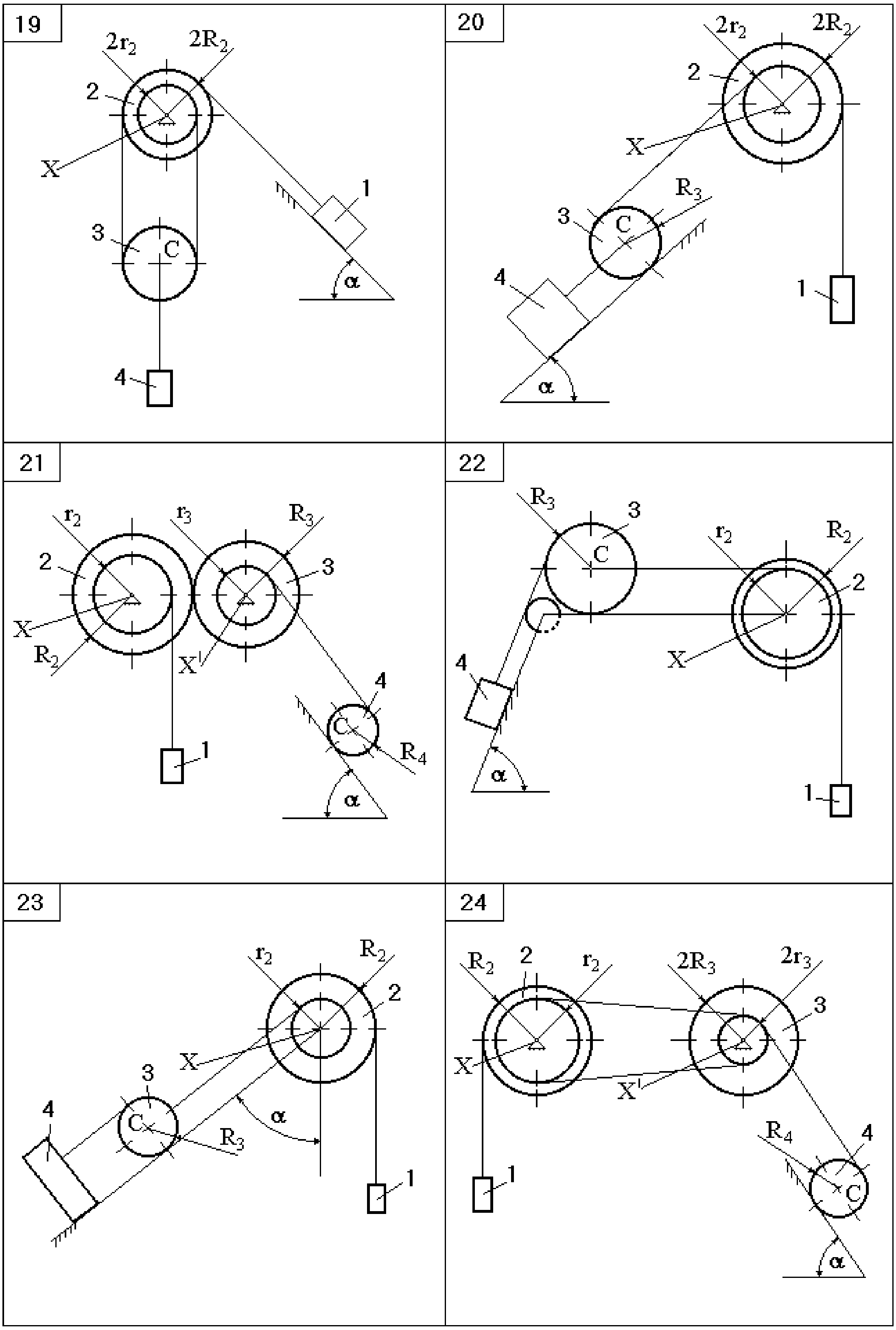


Рисунок 8.1, аркуш 4

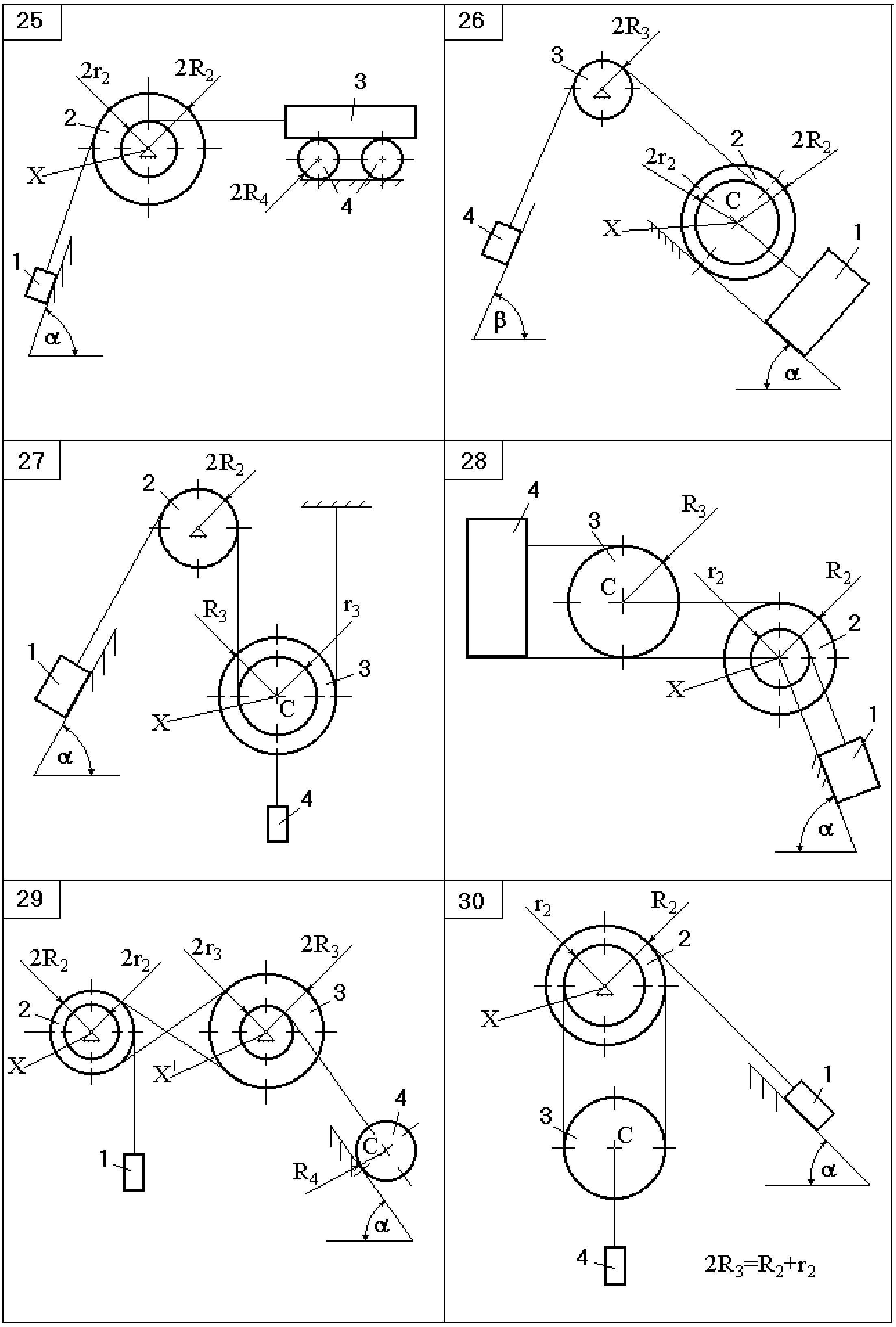


Рисунок.8.1, аркуш 5

8.3 Приклад виконання завдання

Для заданої механічної системи з ідеальними в'язями визначити прискорення вантажу 1.

Дано: $m_1=5m$; $m_2=2m$; $m_3=3m$; $m_4=m=1кг$; $r_2=1м$; $R_3=3м$; $r_4=3м$; $r_2:R_2=1:4$; $R_3:r_3=3:1$; $\rho_2=2м$; $\rho_3=3м$; $\rho_4=4м$; $f=0,1$; $f_k=0,2$; $\alpha=30^\circ$; $\beta=60^\circ$.

Знайти: a_1 – прискорення тіла 1

Рішення

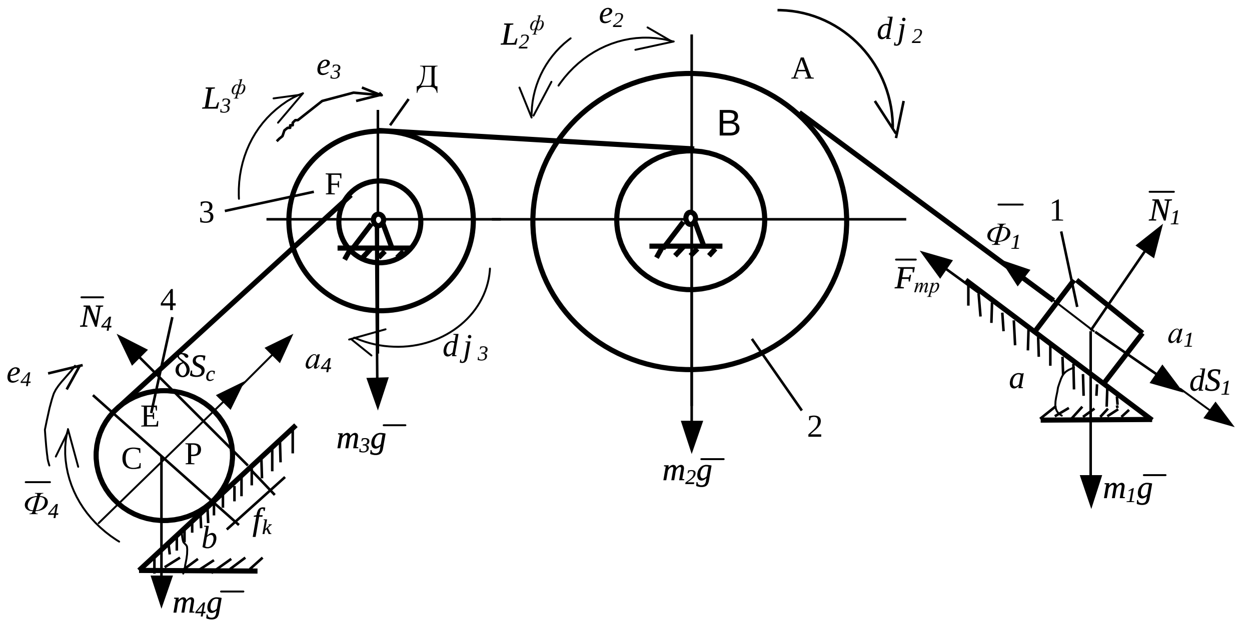


Рисунок 8.2 - Розрахункова схема до прикладу розв'язання задачі

Розглянемо рух механічної системи, що складається з тіл 1, 2, 3, 4, які з'єднані нитками. (рис. 8.2). Тіло 1 здійснює поступальний рух, тіла 2 та 3 – обертальний, а тіло 4 – плоско-паралельний.

Застосуємо загальне рівняння динаміки за формулою (8.3)

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{\Phi} = 0. \qquad (8.4)$$

1) Система має один ступінь вільності. Зобразимо на рисунку 8.2 активні сили ваги $m_1\bar{g}, m_2\bar{g}, m_3\bar{g}, m_4\bar{g}$; нормальні реакції $\bar{N}_1$ та $\bar{N}_2$; силу тертя ковзання $\bar{F}_{тр}$. Дамо системі можливе переміщення, вважаючи, що тіло 1 рухається вниз по нахиленій площині. Тіло 1 отримало можливе переміщення, δS_1, тіло 2 обертається на $\delta\varphi_2$, тіло 3 – на $\delta\varphi_3$, тіло 4 – на $\delta\varphi_4$, а його центр ваги перемістився на δS_C.

2) Зазначимо на рисунку.8.2 сили та моменти сил інерції: тіло 1 рухається поступально, тому сили інерції приводяться до головного вектора Φ_1; тіла 2 та 3 обертаються, їх сили інерції приводяться до головного моменту сил інерції L_2^{Φ} та L_3^{Φ}; рух тіла 4 – плоский, отже сили інерції приводяться і до головного вектора, що прикладений до центру ваги та до головного моменту Φ_C і L_4^{Φ} відповідно. Вектори сил інерції направлені проти векторів прискорень центрів ваги, а стрілки головних моментів – проти стрілок кутових прискорень.

3) Деякі сили не виконують роботу з таких причин: $\bar{N}_1$ перпендикулярна до переміщення тіла 1; $m_2\bar{g}$ та $m_3\bar{g}$ прикладені в нерухомих точках.

4) Складемо загальне рівняння динаміки для заданої системи

$$m_1 g \sin\beta \delta S_1 - F_{тр}\delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - L_2^{\Phi}\delta\varphi_2 - L_3^{\Phi}\delta\varphi_3 - L_4^{\Phi}\delta\varphi_4 - \Phi_C \delta S_C -$$
$$- N_4 f_k \delta\varphi_4 - m_1 g \sin\beta \delta S_C = 0.$$

Виразимо деякі величини в цьому рівнянні:

$$F_{тр} = fN_1 = fm_1 g\cos\alpha; \;\; \Phi_1 = m_1 a_1; \;\; \Phi_C = m_4 a_C; \;\; N_4 = m_4 g\cos\beta;$$

$$L_1^{\Phi} = J_2\varepsilon_2; \;\; J_2 = m_2\rho_2^2; \;\; L_3^{\Phi} = J_3\varepsilon_3; \;\; J_3 = m_3\rho_3^2; \;\; L_4^{\Phi} = J_C\varepsilon_4; \;\; J_C = m_4\rho_4^2.$$

5) Виразимо всі переміщення через dS_1.

$$u_1 = u_A = R_2 w_2;$$

отже $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_1}{R_2}$.

Оскільки залежності між швидкостями, прискореннями та переміщеннями однакові, то

$$j_2 = S_1/R_1; \ \Rightarrow \ dj_2 = dS_1/R_1;$$

$$u_B = u_{\text{Д}}; \ \ w_2 r_2 = w_3 R_3; \ \ j_2 r_2 = j_3 R_3; \ \Rightarrow \ j_3 = j_2 r_2/R_3 = S_1/4R_3;$$

$$dj_3 = dS_1/4R_3;$$

$$u_F = u_E; \ \ w_3 r_3 = w_4 EP \ \Rightarrow \ w_4 = w_3 r_3/2r_4; \ \ j_4 = j_3 r_3/2r_4 = S_1/24r_4;$$

$$dj_4 = dS_1/24r_4;$$

$$u_C = w_4 CP = w_4 r_4; \ \ S_C = j_4 r_4 = S_1/24; \ \ dS_C = dS_1/24r_4; \ \Rightarrow \ a_C = a_1/24;$$

$$e_2 = a_1/R_2; \ \ e_3 = a_1/4R_3; \ \ e_4 = a_1/24r_4.$$

6) Запишемо вираз

$$m_1 g \sin a\, d S_1 - m_1 g f \cos a\, d S_1 - m_1 a_1 d S_1 -$$

$$-\frac{m_2 p_2^2 d S_1 a_1}{R_2^2} - \frac{m_3 p_3^2 d S_1 a_1}{(4R_3)^2} - \frac{m_4 p_4^2 d S_1 a_1}{(24 r_2)^2} - \frac{m_4 a_1 d S_1}{24} -$$

$$-\frac{m_4 g f_k \cos b\, d S_1}{24 r_4} - \frac{m_4 g \sin b\, d S_1}{24} = 0.$$

Звідси:

$$a_1 = \frac{m_1 g\left(\sin a - f\cos a\right) - \frac{1}{24} m_4 g \left(\frac{f_k \cos b}{r_4} + \sin b\right)}{m_1 + \frac{m_2 r_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_3^2}{16 R_3^2} + \frac{1}{24^2} m_4 \left(1 + \frac{r_4^3}{r_4^2}\right)}.$$

Підставимо значення:

$$a_1 = \frac{5 \cdot 9{,}8\left(\sin 30^o - 0{,}1 \cdot \cos 30^o\right) - \frac{1}{24} 9{,}8 \left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3} \cos 60^o + \sin 60^o\right)}{5 + \frac{2 \cdot 2^2}{4^2} + \frac{3 \cdot 3^2}{16 \cdot 6^2} + \frac{1}{24}\left(1 + \frac{4^2}{3^2}\right)}.$$

$$a_1 = \frac{20{,}26 - 0{,}37}{5 + 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005} = 3{,}6 \quad м/с^2.$$

Відповідь:

Прискорення тіла 1 дорівнює $a_1 = 3{,}6 \quad м/с^2$.

9 ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

9.1 Короткі відомості з теорії

Для механічної системи з одним ступенем вільності рівняння Лагранжа має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q\,, \tag{9.1}$$

де T – кінетична енергія системи;

$\dot{q}$ – узагальнена швидкість;

q – узагальнена координата;

Q – узагальнена сила.

Вирішення задачі звичайно починають із зображення на схемі усіх діючих на механічну систему сил. Потім задають узагальнену координату. Для системи з одним ступенем вільності вибирають одну узагальнену координату – q. Це обов’язково повинна бути координата тієї точки, для якої, згідно з умовою задачі, необхідно буде визначити прискорення. Цій же точці задають можливе переміщення dq, так, щоб прирощення узагальненої координати було додатнім. На рисунку зображують можливі переміщення, які отримають усі точки і тіла, що входять до системи. Далі розраховують узагальнену силу Q за формулою

$$Q = \sum dA_k / dq, \tag{9.2}$$

де $\sum dA_k$ – сума елементарних робіт активних сил на можливому переміщенні.

При обчисленні узагальненої сили можливі переміщення, позначені на рисунку, виражають через обране можливе переміщення dq.

Кінетичну енергію T системи визначають як суму кінетичних енергій тіл, що складають систему, причому виражають її через узагальнену швидкість та узагальнену координату (в заданій задачі кінетична енергія не залежить від узагальненої координати). Після цього знаходять часткову похідну від кінетичної енергії за узагальненою швидкістю, а від отриманої величини першу похідну за часом, а також часткову похідну від кінетичної енергії за узагальненою координатою. Знайдені значення підставляють у рівняння (9.1).

9.2 Умови завдання

Для заданої механічної системи, зображеної на рисунку 9.1, визначити прискорення вантажу 1 (див. умову до задачі 8). Величини, необхідні для вирішення задачі, вказані в таблицях 9.1 і 9.2. Блоки і котки, радіуси інерції яких у таблицях відсутні, вважати однорідними круглими циліндрами.

Таблиця 9.1

Величина		**Значення величини за варіантами**									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
***m*, кг**	m_1	1	2	3	0,5	4	5	6	7	8	9
	m_2	4	0,5	4	1	3	2	5	2,5	3,5	6
	m_3	0,2	1	2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	m_4	0,75	0,2	0,8	0,7	0,3	0,4	0,5	1	1	0,6
f		0,1	0,15	0,2	0,25	0,05	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
f_k, 10^{-2} м		0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,6	0,7	0,8	0,9	0,1

Примітка**.** З таблиці вибрати тільки значення величин, що є на схемах.

Таблиця 9.2

Величина		**Значення величини за варіантами**									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кути, ^{0}	α,	30	45	15	45	60	45	75	30	15	60
	β,	45	15	45	60	45	75	45	15	60	15
***R*,*r*, м**	*R2*	10	20	15	5	3	2	1	8	6	4
	r2	2	15	5	3	1,5	1,2	0,5	2	3	2
	R3	15	25	20	10	10	3	2	4	12	2
	r3	5	10	10	2	5	1	1,5	2	4	1
	R4	5	10	30	10	6	8	4	6	8	6
	R4	2,5	5	15	5	3	4	1	3	4	2
***r*, м**	*r2*	5	16	10	4	2	2	0,8	6	4	3
	r3	10	12	15	6	8	2	2	3	8	1
	r4	4	8	20	8	4	6	2	4	6	4

Примітки**:**

1 Для схем 7,10, 11, 12, 15, 18, 19, 25, 26, 27, 28 і 30 тертя ковзання враховувати тільки для тіла 1. Для схем 8, 16, 20, 22, 23 – тільки для тіла 4. А для схем 9, 13, 14, 17, 21, 24, 29 – тертя ковзання відсутнє.

2 Коефіцієнт тертя кочення не враховувати у схемах 1, 5, 7, 16, 19, 27 і 30

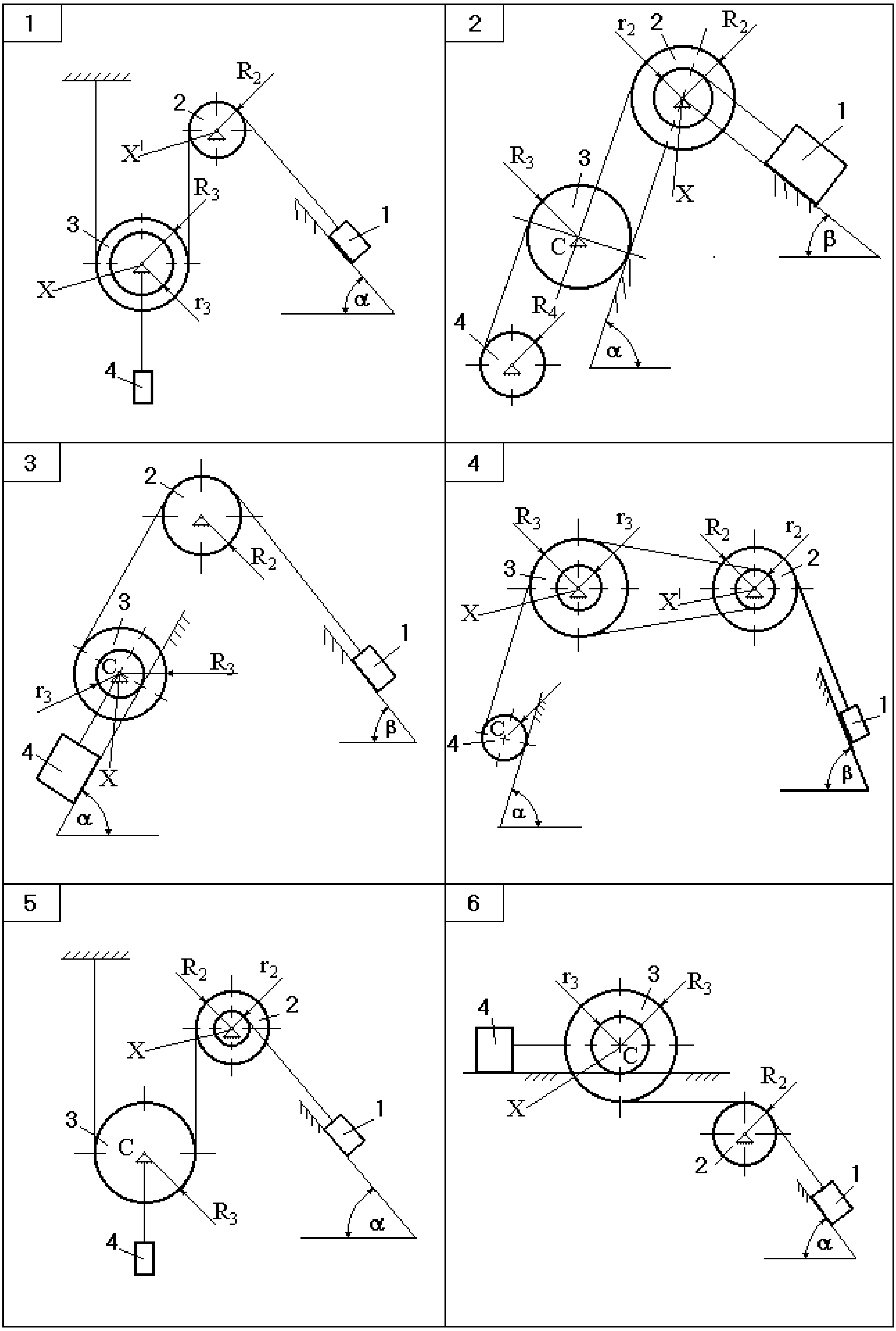


Рисунок 9.1 – Схеми до варіантів завдання

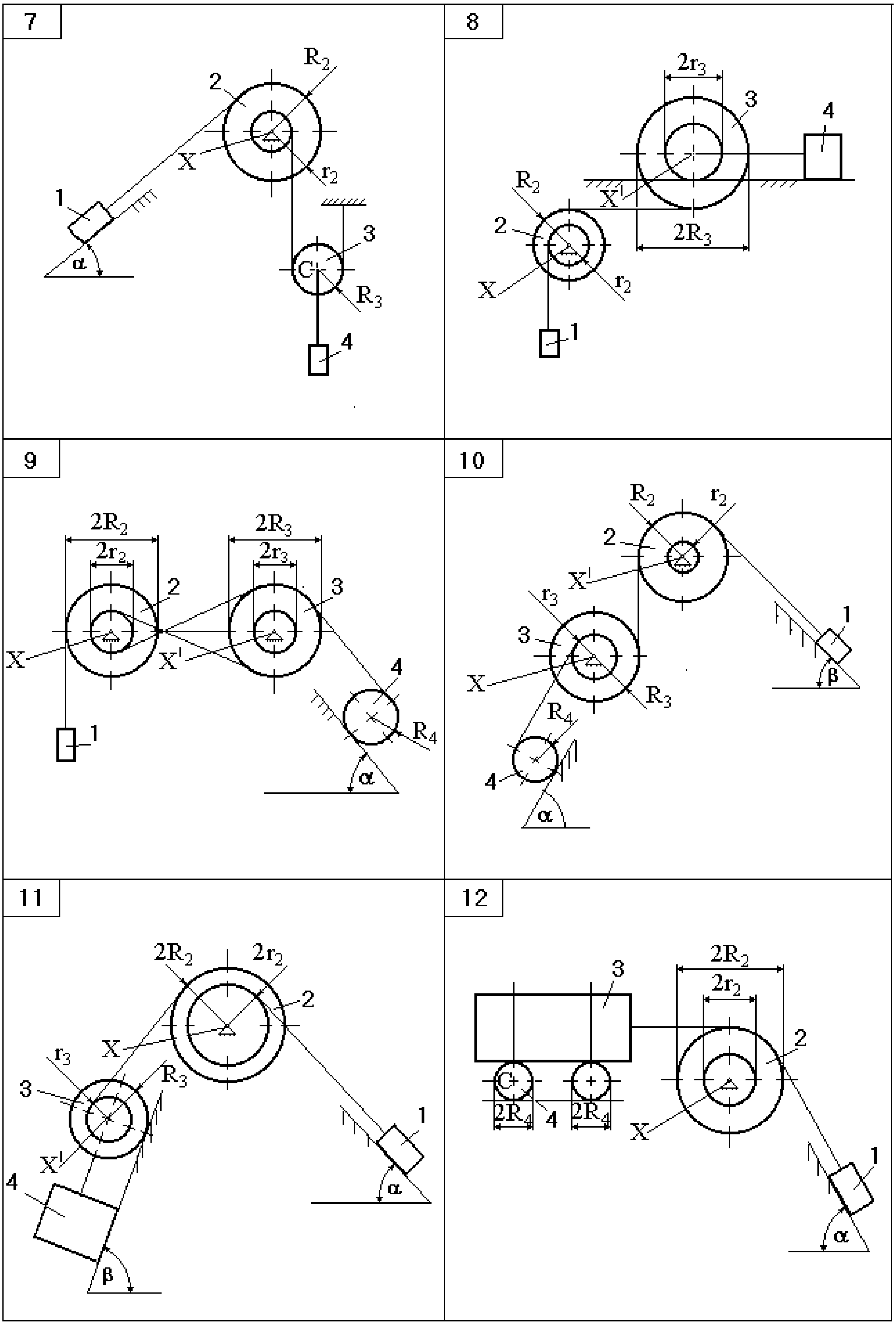


Рисунок 9.1, аркуш 2

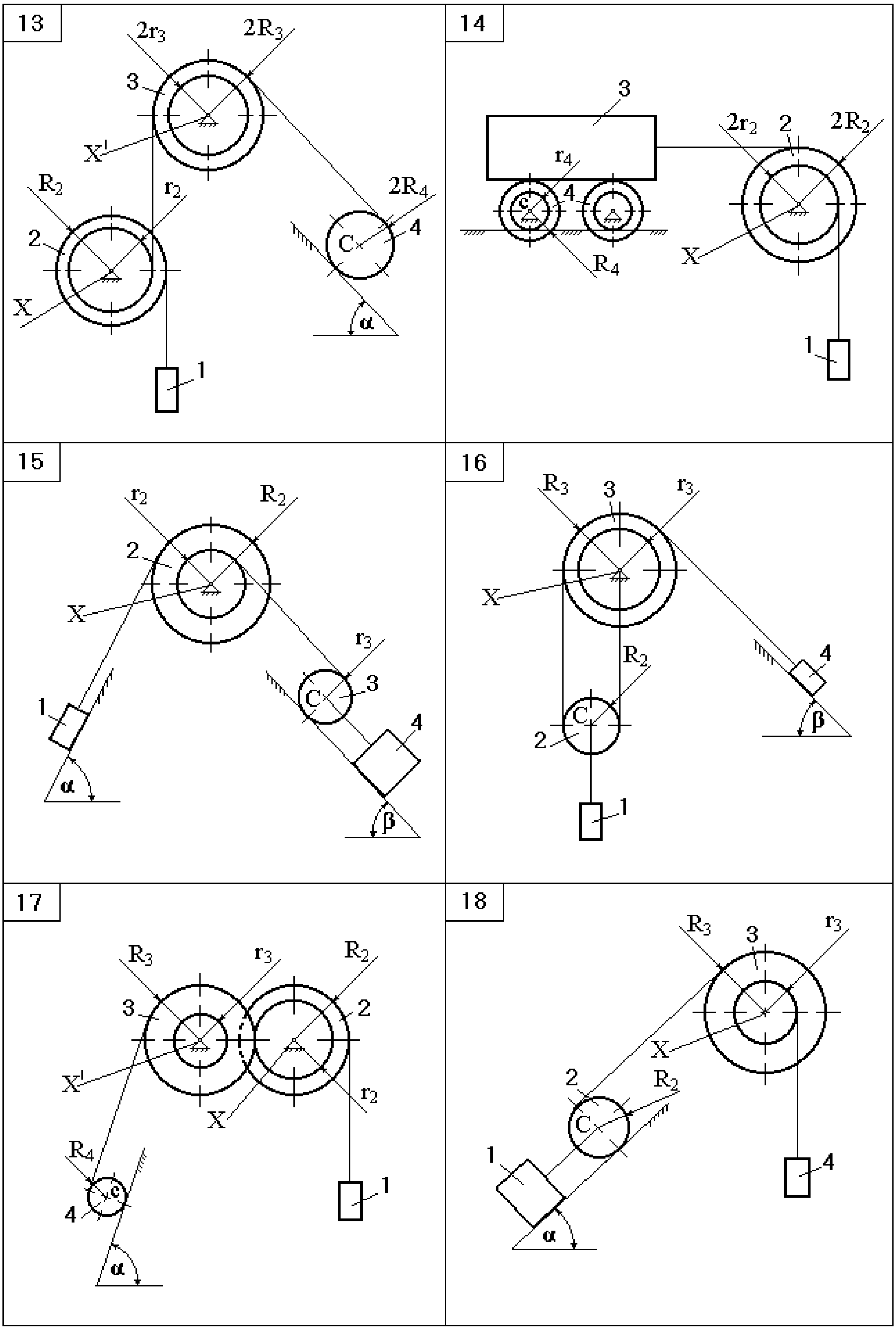


Рисунок 9.1, аркуш 3

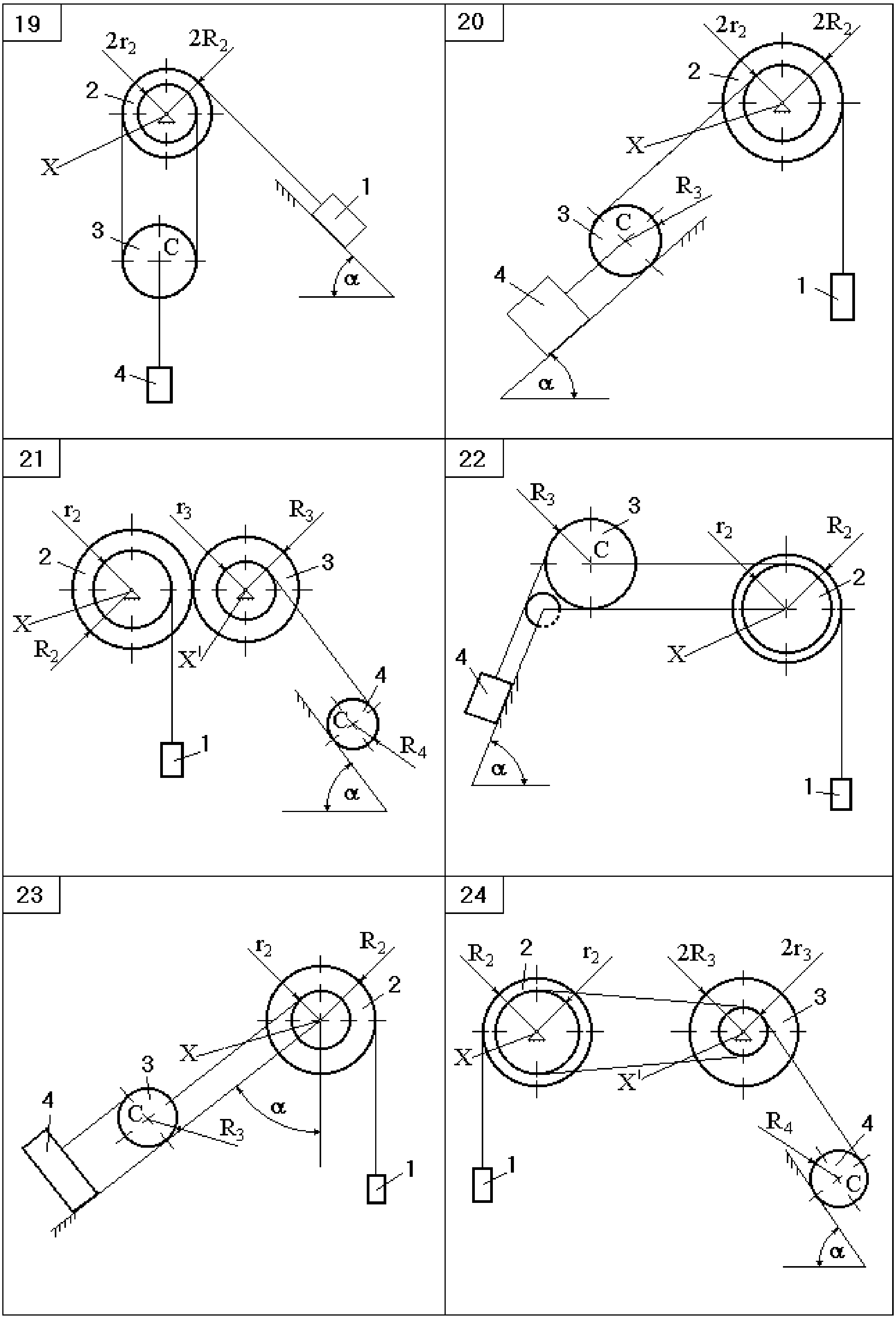


Рисунок 9.1, аркуш 4

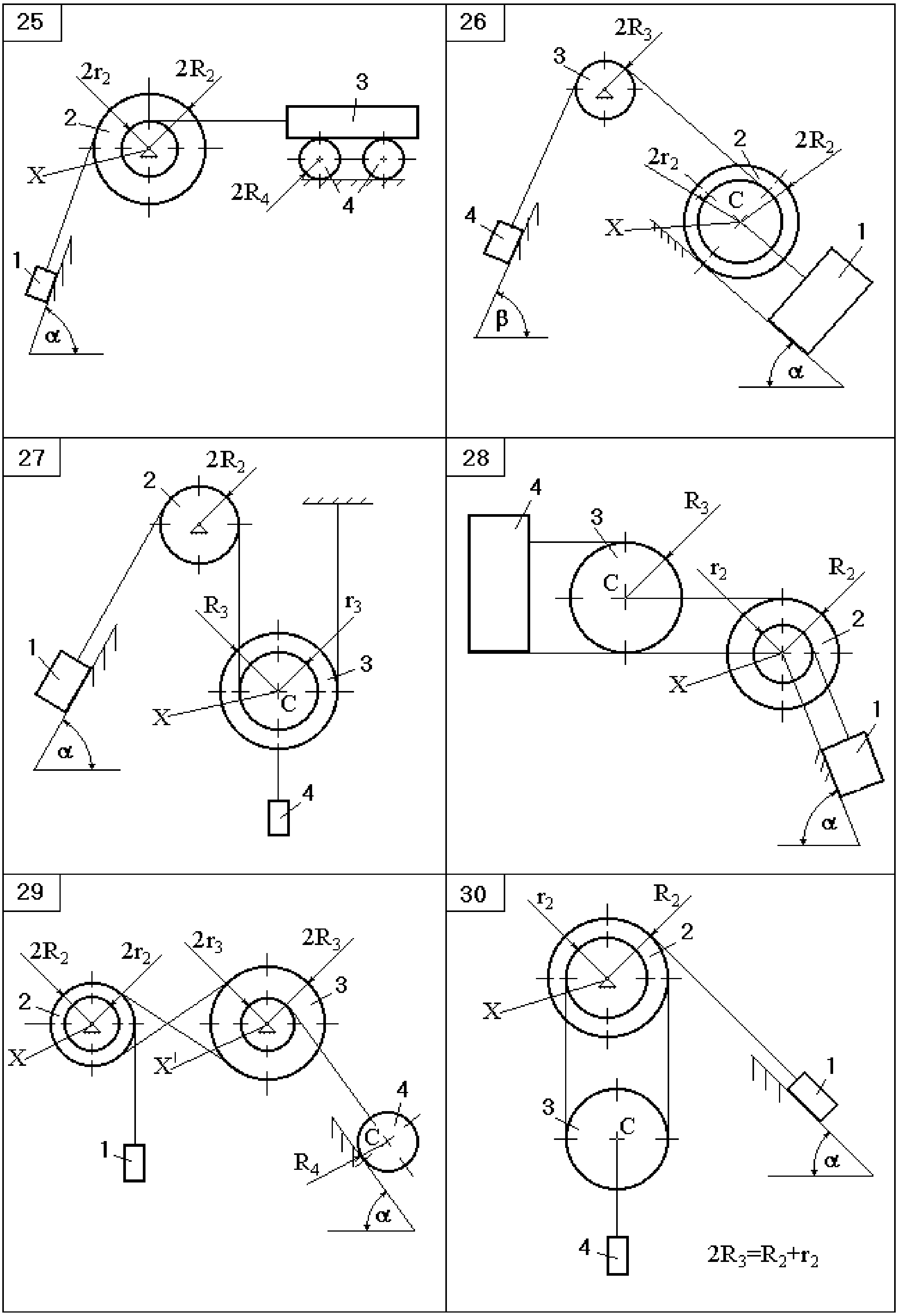


Рисунок 9.1, аркуш 5

9.3 Приклад виконання завдання

Дано: m_1=5m; m_2=2m; m_3=3m; m_4=m=1*кг*; r_2=1*м*; R_3=3*м*; r_4=3*м*; $r_2:R_2=1:4$; $R_3:r_3=3:1$; r_2=2*м*; r_3=3*м*; r_4=4*м*; f=0,1; f_k=0,2; a=30°; b=60°.

Знайти: a_1 – прискорення тіла 1.

Рішення

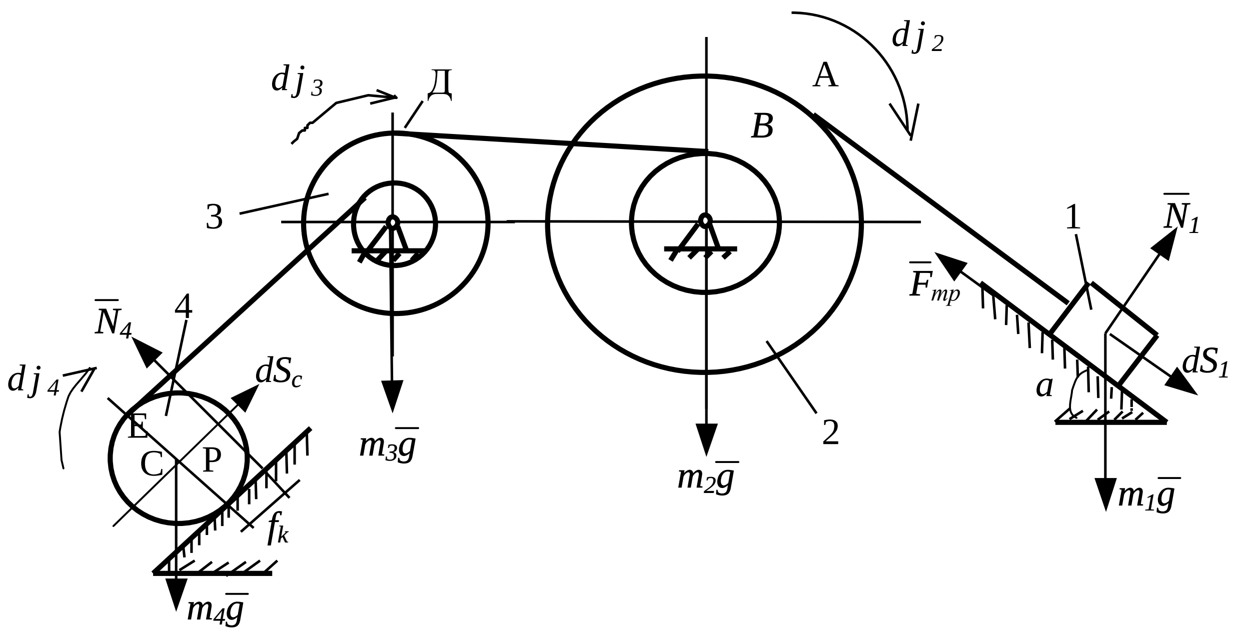


Рисунок 9.2 - Розрахункова схема до прикладу вирішення задачі

До заданої механічної системи (рис. 9.2) застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\,, \qquad (9.3)$$

1) Система має один ступінь вільності, отже рівняння буде одне. Зобразимо на рисунку активні сили: $m_1\overline{g},\overline{N}_1,\overline{F}_{тр},m_2\overline{g},m_3\overline{g},m_4\overline{g},\overline{N}_4$. З них ро-

боту не будуть здійснювати сили $\bar{N}_1$, $m_2\bar{g}, m_3\bar{g}$ ($\bar{N}_1$ перпендикулярна до переміщення; $m_2\bar{g}, m_3\bar{g}$ прикладені у нерухомих точках).

Припустемо, що узагальнена координата переміщення вниз тіла 1 вздовж нахиленої площини – $q = S_1$, і дамо цій координаті приріст (а системі – можливе переміщення).

Тіло 1 зрушилось на $d\,S_1$, тіла 2 та 3 здійснили обертання на $dj_{\,2}$ і $dj_{\,3}$ відповідно, тіло 4 – на $dj_{\,4}$, і його центр ваги C зрушився на $d\,S_C$.

2) Запишемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_1. \qquad (9.4)$$

Знайдемо узагальнену силу

$$Q = \frac{\sum d\,A_k}{d\,S_1};$$

$$\begin{aligned}\sum d\,A_k = m_1 g sina\, d\,S_1 - fm_1 g cosa\, d\,S_1 - \\ - m_4 f_k g cosb\, dj_{\,4} - m_4 g sinb\, d\,S_C.\end{aligned} \qquad (9.5)$$

$$dj_{\,2} = \frac{d\,S_1}{R_2};; \; dj_{\,3} = \frac{d\,S_1}{R_3}.$$

Тому що $w_2 r_2 = w_3 r_3$, $\qquad w_3 = \frac{w_2 r_2}{R_3} = \frac{w_1 r_2}{R_2 R_3}$,

згідно з Умовими задачі $\frac{R_2}{r_2} = 4,$

тоді $\qquad w_3 = \frac{w_2}{4R_3}; \qquad dj_{\,4} = \frac{d\,S_1}{24 r_4}; \qquad d\,S_C = \frac{d\,S_1}{24}.$

Підставивши вирази для можливих переміщень через $d\,S_1$(дивись приклад виконання задачі 8), та розділивши $\sum d\,A_k$ на $d\,S_1$, отримаємо

$$Q = m_1 g\left(sina - fcosa\right) - m_4 g\left(f_k cosb/r_4 + sinb\right). \qquad (9.6)$$

3) Знайдемо повну кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4;$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 S_1^2.$$

Оскільки тіло 1 рухається поступально

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 w_2^2 = \frac{m_2 r_2^2 S_1^2}{2R_2^2}; \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 w_3^2 = \frac{m_3 r_3^2 S_1^2}{32R_3^2}.$$

Оскільки тіла 2 та 3 обертаються

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 u_C^2 + \frac{1}{2} J_C w_4^2 = \frac{1}{2} m_4 S_1^2 \frac{\left(1 + r_4^2 / r_4^2\right)}{24^2}.$$

Тіло 4 здійснює плоский рух

$$T = \frac{1}{2} m_1 S_1^2 + \frac{m_2 r_2^2 S_1^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 r_3^2 S_1^2}{32R_3^2} + \frac{m_4 S_1^2 \left(1 + r_4^2 / r_4^2\right)}{2\left(24\right)^2} =$$

$$= S_1^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{m_2 r_2^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 r_3^2}{32R_3^2} + \frac{1}{2} \frac{m_4 \left(1 + r_4^2 / r_4^2\right)}{\left(24\right)^2} \right).$$

Позначимо $W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{m_2 r_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_3^2}{32R_3^2} + \frac{1}{2} \frac{m_4 \left(1 + r_4^2 / r_4^2\right)}{\left(24\right)^2} \right).$

Знайдемо похідні від кінетичної енергії

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \dot{S}_1 W; \quad \frac{d\left(\dot{S}_1 W\right)}{dt} = W\ddot{S}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial S_1} = 0.$$

4) Підставимо значення узагальненої сили та похідних в формулу (9.3)

$$W\ddot{S}_1 = m_1 g\left(sina - fcosa\right) - \frac{1}{24} m_4 g\left(f_k cosb / r_4 + sinb\right).$$

Звідси

$$a_1 = \frac{m_1 g\left(sina - fcosa\right) - \frac{1}{24} m_4 g\left(\frac{f_k cosb}{r_4} + sinb\right)}{m_1 + \frac{m_2 r_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_3^2}{16R_3^2} + \frac{1}{24^2} m_4 \left(1 + \frac{r_4^3}{r_4^2}\right)}.$$

Підставимо значення:

$$a_1 = \frac{5 \cdot 9{,}8\left(sin30^o - 0{,}1 \cdot cos30^o\right) - \frac{1}{24} 9{,}8\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3} cos60^o + sin60^o\right)}{5 + \frac{2 \cdot 2^2}{4^2} + \frac{3 \cdot 3^2}{16 \cdot 6^2} + \frac{1}{24}\left(1 + \frac{4^2}{3^2}\right)}.$$

$$a_1 = \frac{20{,}26 - 0{,}37}{5 + 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005} = 3{,}6 \ \ м/с^2.$$

Відповідь: прискорення тіла 1 дорівнює $a_1 = 3{,}6 \ \ м/с^2$.

10 ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

10.1 Короткі відомості з теорії

Механічна система з одним ступенем вільності має одну узагальнену координату q, і її рух описується одним рівнянням Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{10.1}$$

де T – кінетична енергія системи;

Q – узагальнена сила;

$\dot{q}$ — узагальнена швидкість;

t — час.

Власні лінійні коливання системи відбуваються під чинністю одних потенційних сил, тобто, коли

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

де Π – потенційна енергія системи.

Коливання вважаються малими, якщо в рівнянні Лагранжа можна знехтувати всіма доданками другого та більш високого порядків відносно $q, \dot{q}$ та $\ddot{q}$.

Диференціальне рівняння малих власних коливань системи з одним ступенем вільності має вигляд

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \tag{10.2}$$

Постійна величина $k = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ називається коловою (або циклічною) частотою коливань. Позитивна постійна a називається коефіцієнтом інерції. Постійну c називають коефіцієнтом жорсткості, або просто жорсткістю.

Рішення рівняння (10.2) можна подати у вигляді

$$q = C_1 cos(kt) + C_2 sin(kt), \tag{10.3}$$

де C_1 та C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов:

$t = 0,\ q = q_0,\ \dot{q} = \dot{q}_0;$ q_0 та $\dot{q}_0$ – початкові значення узагальненої координати та узагальненої швидкості.

Вираз для q можна подати і в так званій амплітудній формі

$$q = A sin(kt + \alpha), \tag{10.4}$$

де A – амплітуда;

α – початкова фаза коливань, які визначаються з початкових умов;

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \qquad tg\alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}. \tag{10.5}$$

Період коливань

$$\tau = \frac{2\pi}{k}. \tag{10.6}$$

10.2 Умови завдання

Механізм, розташований у вертикальній площині (рис. 10.1), складається із колес 1 та 2, які мають непорушні осі обертання, однорідного стрижня 3 довжиною 1 метр, закріпленого шарніром на одному з кінців; вантажу 4, що підвішений на нитці, намотаній на колесо. Стрижні 5 та 6 невагомі. До коліс і стрижня прикріплені пружини.

У таблицях 10.1 і 10.2 наведені маси m_i тіл, коефіцієнти жорсткості пружин c_1 та c_2, малі радіуси колес r_1 та r_2, радіуси інерції коліс r_1 та r_2, відношення великих радіусів коліс до малих радіусів R_1/r_1 та R_2/r_2, а також відношення відстані AB до довжини стрижня AB/l.

У станах, зображених на рисунках, механізм знаходиться у рівновазі. Визначити частоту та період малих коливань системи навколо положення рівноваги.

Таблиця 10.1

Величина		**Значення величини за варіантами**									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
***m*, кг**	m_1	16	18	20	10	12	14	10	20	24	16
	m_2	18	14	16	15	10	12	18	22	20	15
	m_3	4	6	8	6	4	4	5	8	6	4
	m_4	6	4	4	6	6	6	4	4	6	6
***r*, м**	r_1	0,2	0,15	0,3	0,4	0,15	0,1	0,2	0,12	0,24	0,3
	r_2	0,3	0,2	0,4	0,3	0,25	0,15	0,25	0,16	0,18	0,2
***R/r*, м**	R_1/r_1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
	R_2/r_2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Таблиця 10.2

Величина		Значення величини за варіантами									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
AB/*l*		1/3	1/2	2/3	3/4	2/3	1/2	2/3	3/4	1/2	2/3
C, Н/м	C_1	1200	1000	1600	800	1000	1500	1200	1000	800	1000
	C_2	1000	1600	800	1500	1200	800	1000	1200	1500	1200
r, м	ρ_1	0,15	0,16	0,2	0,18	0,24	0,2	0,18	0,16	0,22	0,2
	ρ_2	0,18	0,2	0,24	0,16	0,22	0,14	0,15	0,2	0,18	0,16

10.3 Приклади виконання завдання

Задача 1

Механічна система, що знаходиться в рівновазі складається з східчастих колес 1 та 2 з радіусами східців r_1, R_1, r_2, R_2, стрижня 3, вантажу 4, невагомих стержнів 5 та 6, двох пружин 6 та 7 з коефіцієнтами жорсткості c_1 та c_2 (рис. 10.2).

Дано: m_1=20 *кг*, m_2=16 *кг*, m_3=8 *кг*, m_4=10 *кг*, r_1=0,2 *м*, R_1=0,4 *м*, r_2=0,12 *м*, R_2=0,18 *м*, $O_3A=l=1$ *м*, $O_3B=l/3$, c_1=1000 *Н/м*, c_2=1200 *Н/м*, радіуси інерції ρ_1=0,3 *м*, ρ_2=0,15 м.

Знайти: частоту k та період t малих коливань системи навколо стану рівноваги.

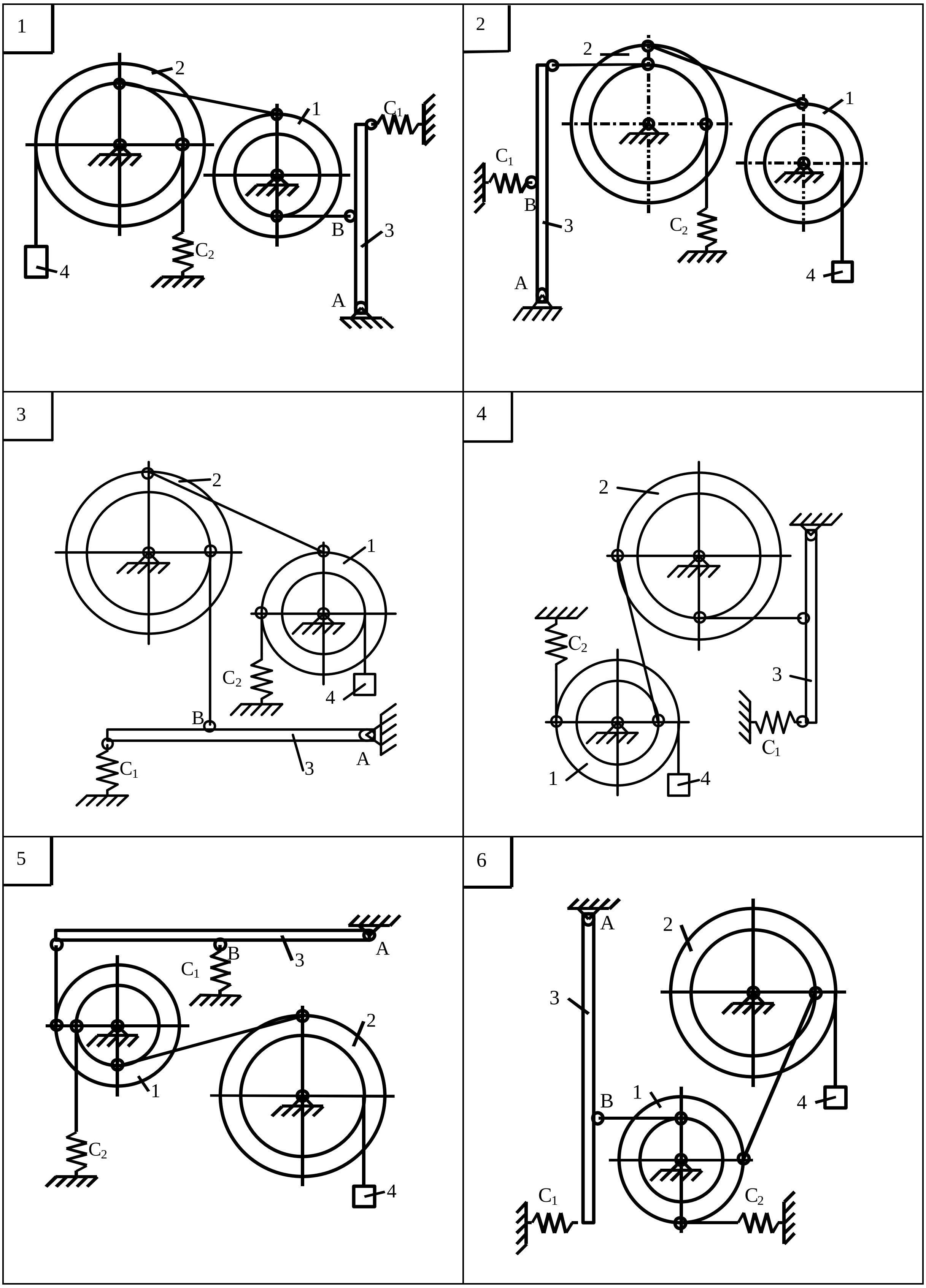


Рисунок 10.1 – Схеми до варіантів завдання

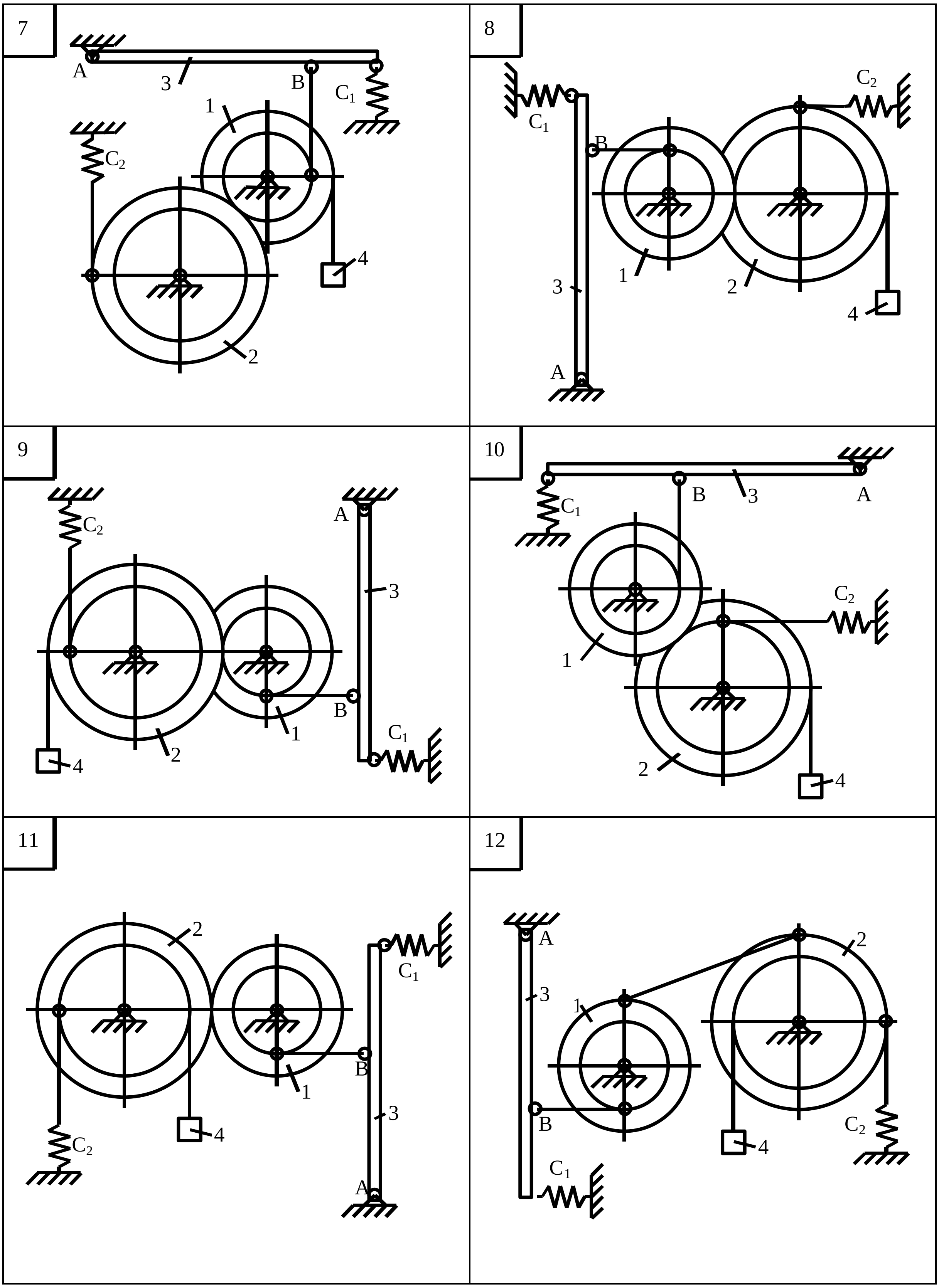


Рисунок 10.1, аркуш 2

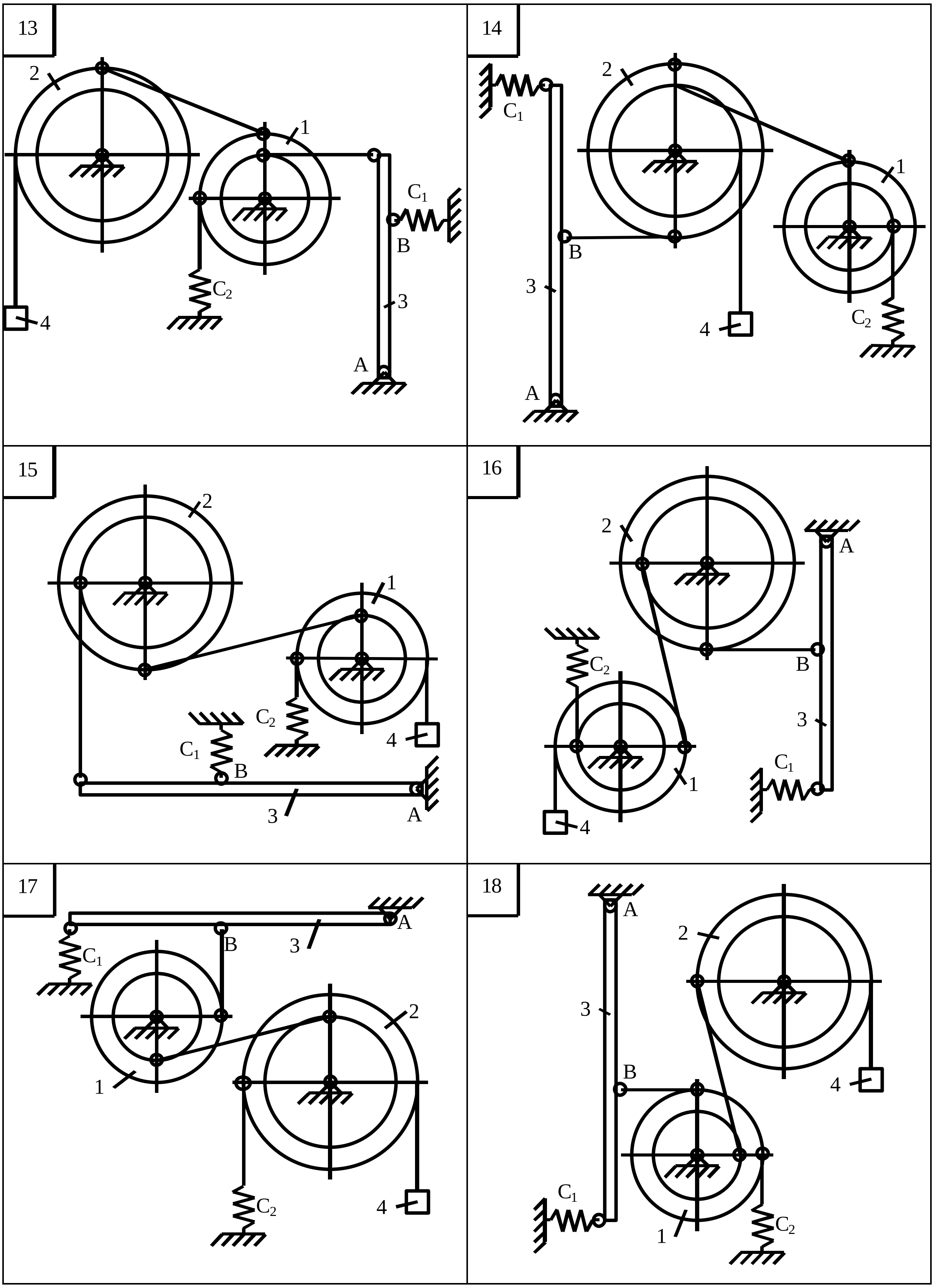


Рисунок 10.1, аркуш 3

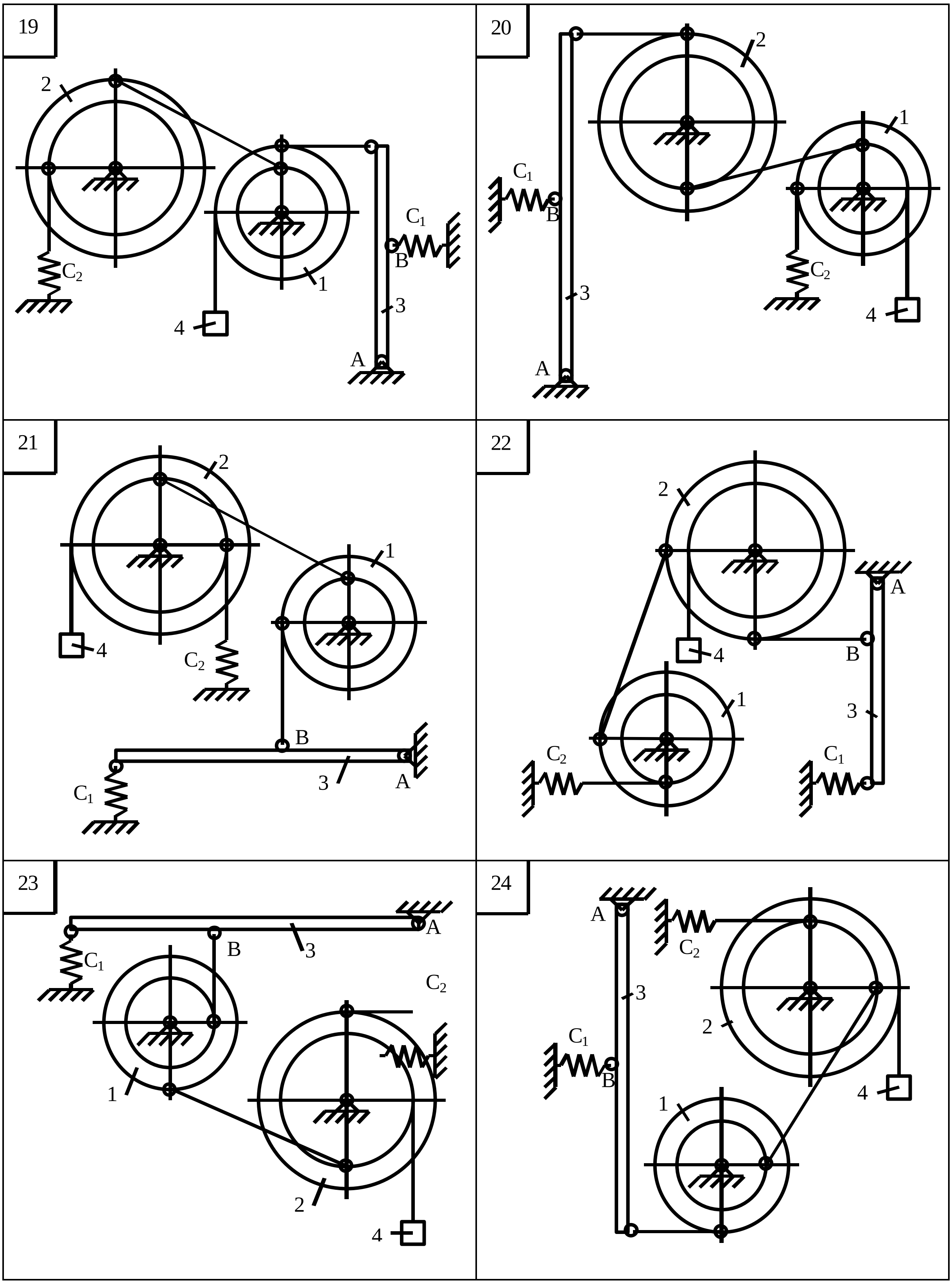


Рисунок 10.1, аркуш 4

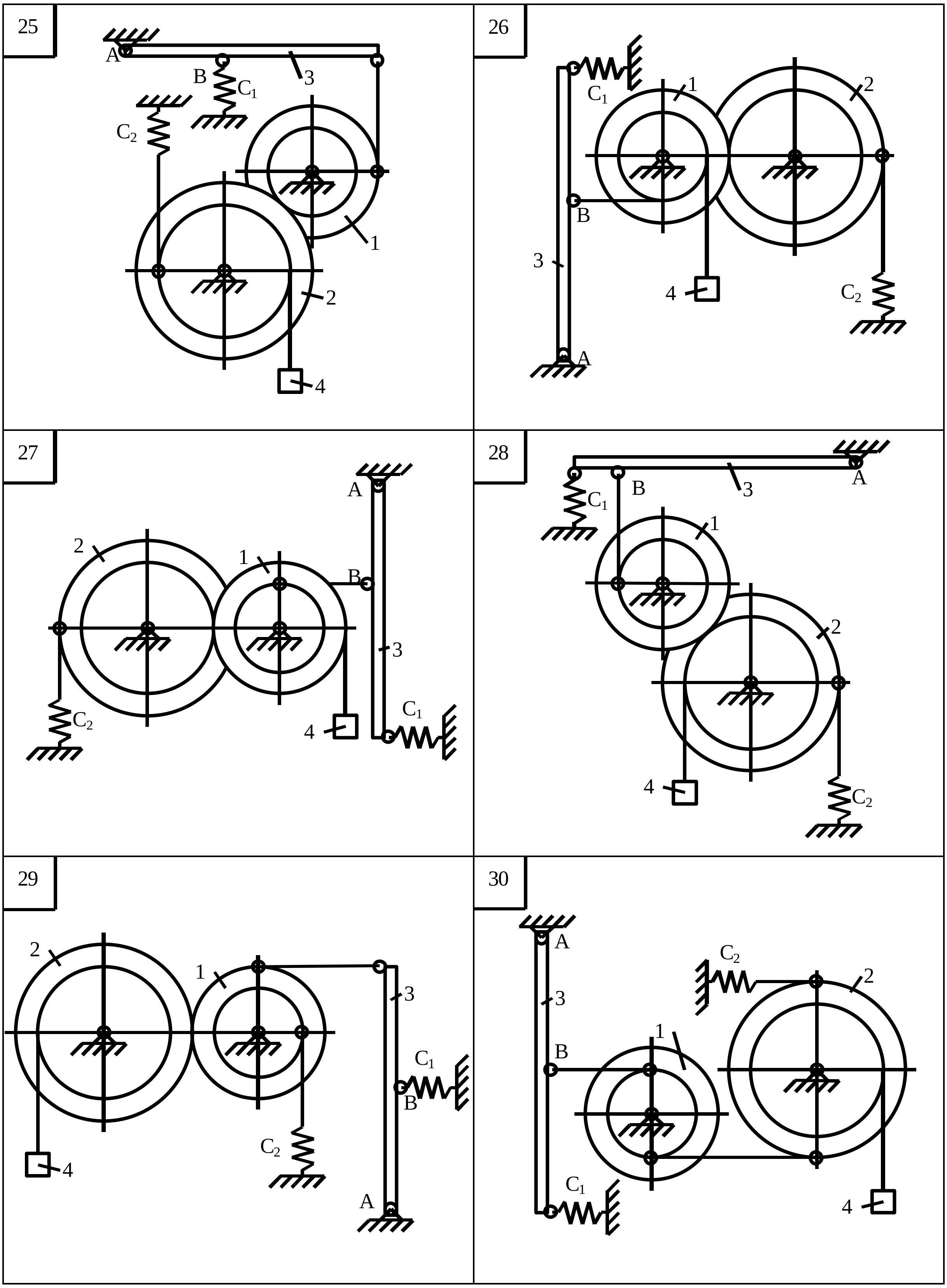


Рисунок 10.1, аркуш 5

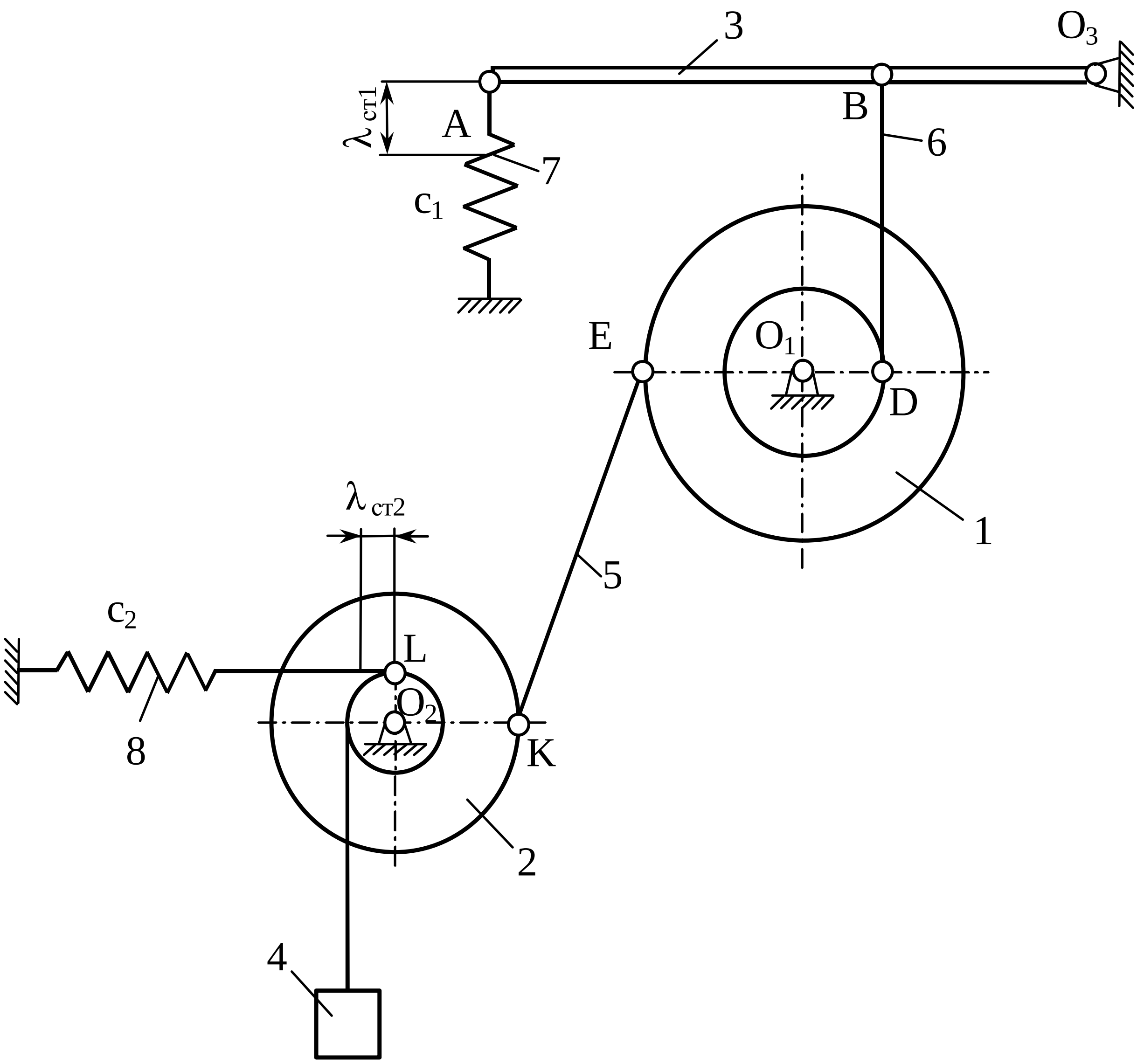


Рисунок 10.2 — Схема до прикладу виконання завдання

Рішення

1 Розглянемо довільне положення системи, коли вона виведена із стану рівноваги та робить малі коливання (рис. 10.3).

Система має одну ступінь вільності. Виберемо в якості узагальненої координати кут j повороту колеса 1, вважаючи j малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа. Оскільки всі діючі активні сили (сила пружності та сила тяжіння) потенційні, виражаємо узагальнену силу Q через потенційну енергію Π системи. Тоді вихідним рівнянням буде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q, \tag{10.7}$$

де $Q=-\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$.

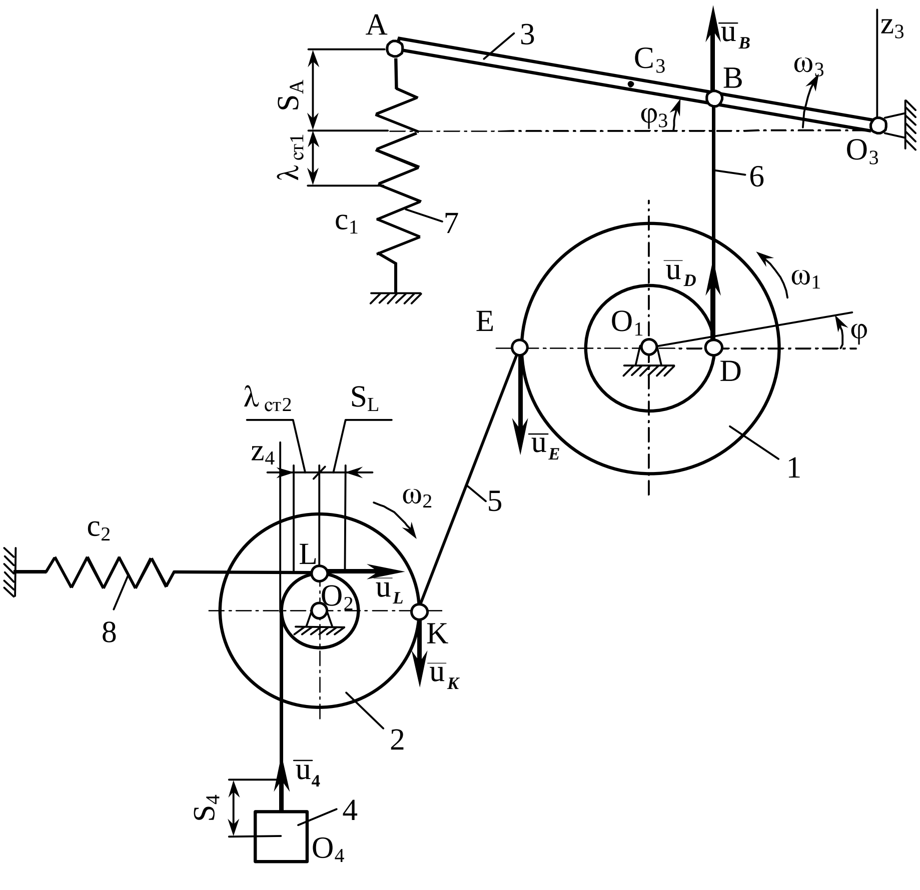


Рисунок 10.3 — Розрахункова схема до виконання завдання

При дослідженні малих коливань в рівнянні зберігають малі величини φ, $\dot{\varphi}$ в першому ступені, відкидаючи малі члени розкладу більш високого порядку. Для цього треба знайти вирази T і Π з точністю до φ^2 і $\dot{\varphi}^2$, бо в (10.7) входять перші похідні від T і Π по φ та $\dot{\varphi}$, а при диференціюванні багаточлена його ступінь знижується на одиницю.

2 Визначимо кінетичну енергію T системи, яка дорівнює сумі енергій всіх вагомих тіл

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \qquad (10.8)$$

Оскільки колеса 1, 2 і стрижень 3 обертаються навколо осей O_1, O_2 і O_3 відповідно, а вантаж 4 рухається поступово, то

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{I_{0_1}\omega_1^2}{2}; \\ T_2 &= \frac{I_{0_2}\omega_2^2}{2}; \\ T_3 &= \frac{I_{0_3}\omega_3^2}{2}; \\ T_4 &= \frac{m_4\omega_4^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.9)$$

де $I_{0_1} = m_1 r_1^2,\ I_{0_2} = m_2 n_2^2,\ I_{0_3} = \dfrac{m_3 l^2}{3}.$ (10.10)

Усі швидкості, що входять у рівності (10.9), треба виражати через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$. З огляду на те, що φ – мала величина, можна вважати

$$\upsilon_D = \upsilon_B = \omega_1 r_1 = r_1\dot{\varphi};\ \omega_3 = \frac{\upsilon_B}{O_3B} = 3\frac{r_1}{l}\dot{\varphi};$$

$$\upsilon_E = \upsilon_K = \omega_1 R_1 = R_1\dot{\varphi};\ \omega_2 = \frac{\upsilon_k}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}; \qquad (10.11)$$

$$\upsilon_4 = \upsilon_L = \omega_2 r_2 = \frac{R_1 r_2}{R_2}\dot{\varphi}.$$

Підставляючи величини (10.10 та 10.11) в рівності (10.9), отримаємо із формули (10.8)

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{\varphi}^2 , \tag{10.12}$$

де $a_0 = m_1 r_1^2 + m_2 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2} + 3m_3 r_1^2 + m_4 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2}$..

Звідси знаходимо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_0 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a_0 \ddot{\varphi}. \tag{10.13}$$

3 Визначимо потенційну енергію (Π) системи, враховуючи, що для пружини

$$\Pi = 0{,}5c\,\lambda^2 ,$$

де λ – деформація пружини.

А для поля сил тяжіння

$$\Pi = mgz_c ,$$

де z_c – координата центру тяжіння (ось z спрямована за вертикаллю вгору).

Тоді для всієї системи

$$\Pi = 0{,}5c_1 \lambda_1^2 + 0{,}5c_2 \lambda_2^2 + m_1 g z_{c_1} + m_2 g z_{c_2} + m_3 g z_{c_3} + m_4 g z_{c_4} , \tag{10.14}$$

де величини $\lambda_1, \lambda_2, z_{c_1}, z_{c_2}, z_{c_3}, z_{c_4}$ повинні бути виражені через φ .

Визначаючи λ_1, λ_2, врахуємо, що в стані рівноваги пружини можуть мати деякі статичні (початкові) деформації $\lambda_{cm_1}, \lambda_{cm_2}$ необхідні для збереження рівноваги (в нашому випадку для зрівноваження сил тяжіння $\overline{P}_3$ та $\overline{P_4}$). У довільному стані (рис. 10.3) пружини отримають додаткові деформації, рівні S_A і S_L, причому з огляду на те, що j – мала величина, можна вважати $S_A = j_3 l$ і $S_L = j_2 r_2$.

Враховуючи, що залежність між малими переміщеннями буде така ж як і між відповідними швидкостями, отримаємо

$$j_2 = \frac{R_1}{R_2} j \; ; \; j_3 = 3\frac{r_1}{l} j \text{ та, відповідно, } S_A = 3r_1 j \; , S_L = \frac{R_1 r_2}{R_2} j \; .$$

Тоді

$$l_1 = l_{cm_1} + S_A = l_{cm_1} + 3r_1 j \text{ та } l_2 = l_{cm_2} + S_L = l_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j \; .$$

Для z_{c_1} і z_{c_2}, які взяли початок координат в точках O_1 і O_2, відповідно, отримаємо $z_{c_1} = z_{c_2} = 0$. Для z_{c_3}, спрямовуючи вісь z_3 з точки O_3 вгору, отримаємо $z_{c_3} = 0{,}5 l \sin(j_3)$. У випадку малих кутів можна вважати $\sin(j_3) = j_3$, (у випадку, коли стрижень вертикальний, потрібно використати розклад $\cos j = 1 - \frac{j^2}{2}$), тоді:

$$z_{c_3} = \frac{3}{2} r_1 j \; .$$

Для z_{c_4}, суміщаючи початок координат O_4 з положенням центру тяжіння вантажу при рівновазі, отримаємо

$$z_{c_4} = S_4 ,$$

де $S_4 = \frac{R_1 r_2}{R_2} j$ – переміщення вантажу.

Підставляючи всі знайдені величини в рівність (10.14), отримаємо

$$\Pi = \frac{C_1}{2}\left(\lambda_{ст_1} + 3r_1\varphi\right)^2 + \frac{C_2}{2}\left(\lambda_{ст_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2}\varphi\right)^2 + g\left(\frac{3}{2}m_3 r_1 + m_4\frac{R_1 r_2}{R_2}\right)\varphi \,. \quad (10.15)$$

4 Визначимо узагальнену силу

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\left[3c_1 r_1\left(\lambda_{ст_1} + 3r_1\varphi\right) + c_2\frac{R_1 r_2}{R_2}\left(\lambda_{ст_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2}\varphi\right) + g\left(\frac{3}{2}m_3 r_1 + m_4\frac{R_1 r_2}{R_2}\right)\right]. \quad (10.16)$$

У стані рівноваги, тобто коли $\varphi = 0$, повинно бути, щоб і $Q = 0$. Тоді із рівності (10.16) отримаємо

$$3c_1 r_1 \lambda_{ст_1} + c_2\frac{R_1 r_2}{R_2}\lambda_{ст_2} = -g\left(\frac{3}{2}m_3 r_1 + m_4\frac{R_1 r_2}{R_2}\right). \quad (10.17)$$

Підставляючи формулу (10.17) у рівняння (10.16), знайдемо остаточно

$$Q = -\beta\varphi \,, \quad (10.18)$$

де $\beta = 9c_1 r_1^2 + c_2\frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2}$.

5 Складаємо рівняння Лагранжа. Підставивши значення (10.13) та (10.18) в рівняння (10.8), отримаємо

$$a_0\ddot{\varphi} = -\beta\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \,, \quad (10.19)$$

де $k^2 = \frac{b}{a_0} = \frac{9c_1r_1^2R_2^2 + c_2R_1^2r_2^2}{m_1r_1^2R_2^2 + m_2R_1^2r_2^2 + 3m_3r_1^2R_2^2 + m_4R_1^2r_2^2}$.

З теорії коливань відомо, що коли рівняння призведене до вигляду (10.19), то в ньому величина k являється розшуковою коловою частотою, а період $t = \frac{2p}{k}$. При заданих числових значеннях, зробивши відповідні розрахунки, отримаємо: $k = 9{,}21\ c^{-1}; \quad t = 0{,}682\ c.$

Відповідь:

Частота k та період t малих коливань системи навколо стану рівноваги дорівнюють: $k = 9{,}21\ c^{-1}; \quad t = 0{,}682\ c.$

Задача 2

Дано: m_1=20 *кг*, m_2=16 *кг*, m_3=8 *кг*, m_4=10 *кг*, r_1=0,2 *м*, R_1=0,4 *м*, r_2=0,12 *м*, R_2=0,18 *м*, $O_3A=l=1$ *м*, $O_3B=l/3$, c_1=1000 *Н/м*, c_2=1200 *Н/м*, радіуси інерції r_1=0,3 *м*, r_2=0,15 м (рис. 10.4).

Знайти: частоту k та період t малих коливань системи навколо стану рівноваги.

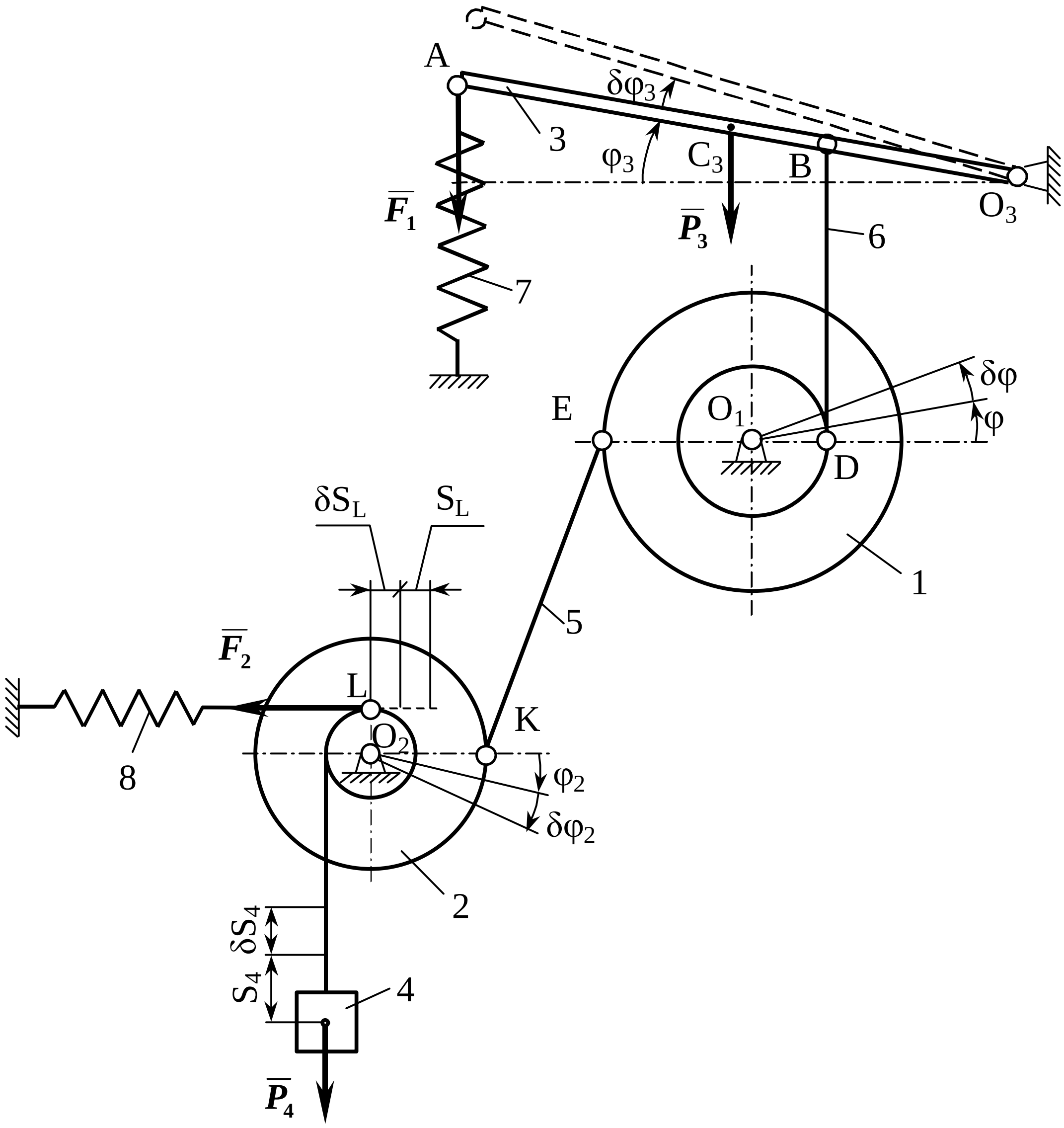


Рисунок 10.4 — Розрахункова схема до виконання завдання

Рішення

Це рішення придатне і для випадку, коли діючі сили не потенційні.

У якості узагальненої координати вибираємо той же кут φ, вважаючи його малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}. \qquad (10.20)$$

Для кінетичної енергії T системи і для відповідних похідних отримаємо, як і раніше, значення (10.12) та (10.13).

Щоб знайти узагальнену силу Q, треба зобразити на рисунку 10.4 діючі активні сили, що виконують роботу при переміщенні системи, тобто сили пружності $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ і сили тяжіння $\overline{P}_3, \overline{P}_4$.

Тепер надаємо системі можливе переміщення, при якому кут j одержує позитивний приріст dj, і обчислюємо роботу dA всіх названих сил на цьому переміщенні. Отримаємо

$$dA = -F_1 l \cos(j_3) dj_3 - P_3 \frac{1}{2} \cos(j_3) dj_3 - F_2 dS_L - P_4 dS_4 . \qquad (10.21)$$

У рівності (10.21) переміщення виражається через узагальнену координату j. За аналогією з формулою (10.11) знайдемо

$$dj_3 = 3\frac{r_1}{l} dj; \quad dS_L = nS_4 = \frac{R_1 r_2}{R_2} dj . \qquad (10.22)$$

Визначимо значення сил пружності $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ за модулем:

$$F_1 = c_1 l_1 = c_1 \left(l_{ст_1} + 3 r_1 j \right), F_2 = c_2 l_2 = c_2 \left(l_{ст_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j \right). \qquad (10.23)$$

Підставивши величини (10.22) і (10.23) в рівність (10.21) і врахувавши, що $P_3 = m_3 g$, а $P_4 = m_4 g$, та, зважаючи на те, що j – мала величина, можна вважати $\cos(j_3) = 1$, приведемо остаточно рівність (10.21) до вигляду

$$dA = -\left[\left(3c_1 r_1 l_{ст_1} + c_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} l_{ст_2} \right) + \left(9 c_1 r_1^2 + c_2 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2} \right) j + \left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2} \right) g \right] dj .$$

Коефіцієнт при $d\varphi$ в правій частині отриманої рівності і є пошуковою узагальненою силою. Отже

$$Q=-\left[\left(3c_1r_1l_{cm_1}+c_2\frac{R_1r_2}{R_2}l_{cm_2}\right)+\left(9c_1r_1^2+c_2\frac{R_1^2r_2^2}{R_2^2}\right)\varphi+\left(\frac{3}{2}m_3r_1+m_4\frac{R_1r_2}{R_2}\right)g\right]. \quad (10.24)$$

Враховуючи, що при рівновазі $\varphi=0$ та $Q=0$, отримаємо вираз (10.17) і тоді остаточно знайдемо

$$Q=-\left(9c_1r_1^2+c_2\frac{R_1^2r_2^2}{R_2^2}\right)\varphi\,. \quad (10.25)$$

Вираз (10.25) повністю співпадає з (10.18) і ми приходимо до отриманого раніше рішення.

Відповідь:

Частота k та період τ малих коливань системи навколо стану рівноваги дорівнюють: $k=9{,}21\ c^{-1}$; $\tau=0{,}682\ c$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики.- М.: Высш. шк., 1990.- 523с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Высш шк., 1986.- 478с.
3. Теоретическая механика/ Г.Н.Савин, Н.А.Кильчевский, Т.В.Путята. - К.: ГИТЛ УССР, 1963.-586с.
4. Бухгольц М.М. Основной курс теоретической механики.- М.;-Л.: ОГИЗ, 1965.- 434с.
5. Мещерский М.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука,1981.-480с.
6. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов строительных, транспортных, машиностроительных и др. специальностей/ Под ред. С.М.Тарга. - М.: Высш. шк., 1989. –112с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Высш.шк., 1985.-532с.
8. Збірник завдань для самостійної роботи та контролю знань студентів з теоретичної механіки. Кінематика і статика / Укл. О.Г.Водолазська, Ю.О.Єрфорт, Л.В.Кутовий та ін. – Краматорськ, ДДМА, 2000. - Ч.1. – 132с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна
ЄРФОРТ Юрій Олександрович
КУТОВИЙ Леонід Володимирович
ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович
СТАДНИК Олександр Миколайович
ФЕДОРЧЕНКО Володимир Григорович

Збірник розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки

Редактор Ірина Іванівна Дьякова

Підп. до друку Формат 60×84/16.
Ризограф. друк. Ум. друк арк. Обл.- вид. арк.
Тираж 100 прим. Зам. №

ДДМА, 84313, м.Краматорськ, вул.Шкадінова, 72