Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

Составители:
доц. С. В. Подлесный
ст. пр. Ю. А. Ерфорт

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ЧАСТЬ 1

КИНЕМАТИКА И СТАТИКА

(для студентов заочной формы обучения)

ё

Утверждено
на заседании кафедры
технической механики
Протокол №8 от 26.12. 2000г

КРАМАТОРСК 2001

УДК 539.3

Теоретическая механика. Конспект лекций. Часть 1. Кинематика и Статика (для студентов заочной формы обучения) / Сост.: С.В.Подлесный., Ю. А. Ерфорт. Краматорск: ДГМА , 2001. – 115 с.

Составители: .Подлесный Сергей Владимирович,
Ерфорт Юрий Александрович

Редактор Хахина Нелли Александровна

СОДЕРЖАНИЕ

1 КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих движение.

Кинематика представляет собою, с одной стороны, введение в динамику, с другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например при изучении передач движения в механизмах. Выделение кинематики в самостоятельный раздел механики произошло в первой половине 19 века.

Представления древнего мира о движении ограничивалось равномерным движением и его скоростью, как отношением пути, пройденного телом, ко времени, в течении которого пройден этот путь.

Понятие ускорения введено *Галилеем* (1564-1642) и обобщено для случая криволинейного движения голландским физиком *Гюйгенсом* (1629-1695). *Гюйгенс* первым применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие.

Развитие кинематики в 18 веке связано с работами *Леонарда Эйлера* (1707-1783). *Эйлер* заложил основы кинематики твердого тела, создал аналитические методы решения задач механики.

Крупные исследования принадлежат французским ученым *Понселе* (1788-1876), *Шалю* (1793-1880), *Кориолису* (1792-1843) и русским ученым *П. Л. Чебышеву* (1821-1894), *Д. В. Ассуру* (1878-1920), *Н. И. Мерцалову* (1866-1948), *А. П. Котельникову* (1865-1944) и др.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения материи механическое движение-происходящее во времени изменение положения одного тела в пространстве по отношению к другим телам. С телом, по отношению к которому изучается движение (*тело отсчета*), связывают систему координатных осей и часы.

Системой отсчета называется совокупность тела отсчета связанной с ним системы координат и часов.

Пространство в классической механике считается трехмерным *евклидовым*, не зависящим от времени. *Время* является универсальной независимой переменной, не связанной с пространством и движением, т.е. во всех системах отсчета, произвольно движущихся друг относительно друга, оно одно и тоже, если за начало отсчета выбрано общее для них событие.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано.

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки), значит задать положение этого тела относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы зная закон движения данного тела (точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности.

Изучение кинематики мы начнем с изучения движения точки, а затем перейдем к изучению движения твердого тела.

1.1 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1.1 Способы задания движения точки

1.1.1.1 Естественный способ задания движения

Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета. Если траекторией является прямая линия, то движение точки называется *прямолинейным,* если кривая – *криволинейным* .

Форма траектории зависит от выбранной системы отсчета. Одно и тоже движение точки может быть прямолинейным относительно одной системы отсчета и криволинейным относительно другой. Например, если с летящего горизонтально Земле с постоянной скоростью самолета отцепляют груз, то, пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая только действие силы тяжести, получим в качестве траектории движения центра масс груза относительно самолета прямую линию, а относительно Земли – параболу.

При естественном способе задания движения указывается траектория точки и закон ее движения по этой траектории.

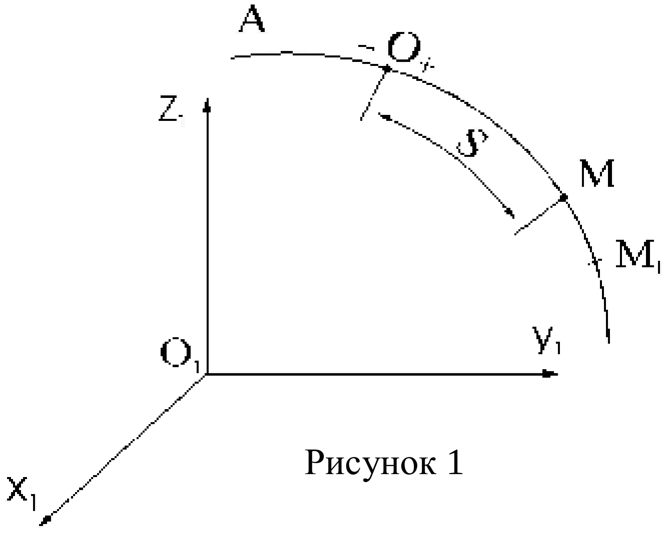


Рисунок 1

Для задания закона движения точки естественным способом надо знать:

1) закон движения точки вдоль траектории в виде

2) траекторию точки;

3) начало отсчета на траектории с указанием положительных и отрицательных направлений отсчета;

4) начало отсчета времени; $S = f(t)$ (1)

Величина S в уравнении (1) определяет *положение* движущейся точки, а *не пройденный путь*.

В случае прямолинейного движения, если направлять ось Ox вдоль траектории точки (рис.2), будем иметь $S = x$ и закон прямолинейного движения точки будет

Рисунок 2

$$x = f(t) \tag{2}$$

1.1.1.2 Координатный способ задания движения

Положение точки по отношению к какой-либо системе координат полностью определяется координатами точки. Поэтому задание координат точки в виде известных функций времени дает возможность определять ее положение в любой момент времени.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки как известных функции времени и требует выбора конкретной системы координат.

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат x, y, z точки M (рис.3) известных функций времени:

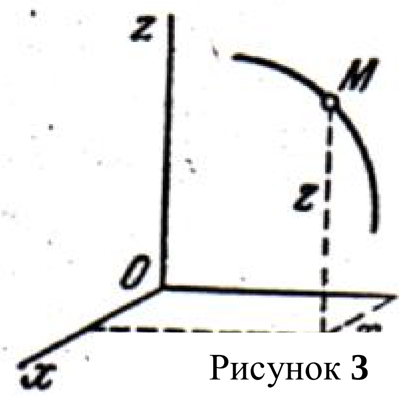


Рисунок **3**

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t); \tag{3}$$

Уравнения (3) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Исключив из уравнения движения t, можно найти уравнение траектории в обычной форме, т.е. в виде, дающем зависимость между ее координатами.

1.1.1.3 Векторный способ задания движения

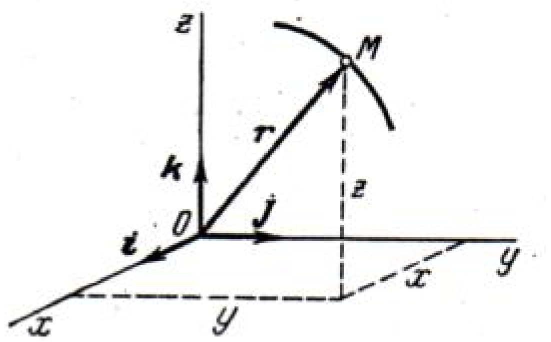


Рисунок 4

Положение точки в пространстве будет вполне определено, если ее радиус-вектор *r*, проводимый из какого-либо заданного центра (рис.4), известен как функция от времени, т.е.

$$r = r(t) \qquad (4)$$

$$r = xi + yj + zk \qquad (4\ )$$

1.1.2 Скорость точки

Положение движущейся точки *M* относительно рассматриваемой системы отсчета определяется в данный момент времени *t* радиусом-вектором *r*, который соединяет эту точку с неподвижной точкой О. В другой момент времени $t_1 = t + Dt$ движущаяся точка займет положение M_1 и ее радиус-вектор будет *r* (рис.5).

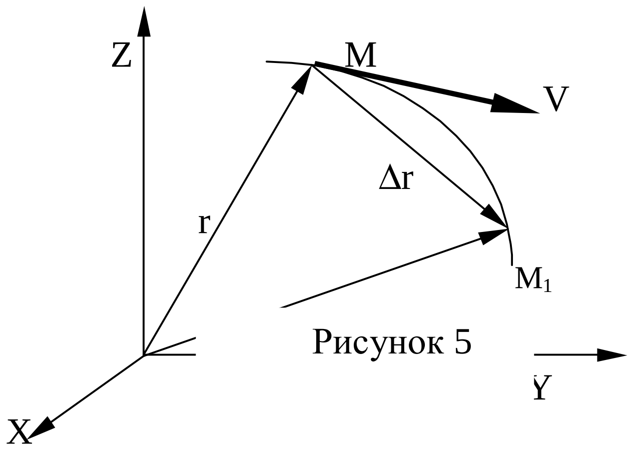


Рисунок 5

Средней скоростью V_{CP}. Точки за время *Dt* называется отношение *Dr / Dt*, т.е.

$$V_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad (5)$$

Скорость точки V в момент *t* определяется как предел средней скорости, если *t* стремится к нулю, т.е.

$$V = \lim_{Dt\to 0} V_{CP} = \lim_{Dt\to 0} \frac{D\bar{r}}{Dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (6)$$

Таким образом, скорость точки равна первой производной по времени от ее радиус-вектора. Она направлена по касательной к траектории в сторону движения точки.

Учитывая (4), согласно определению скорости имеем

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \qquad (7)$$

Проекции скорости на декартовые оси координат определяются по формулам

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ ;\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\ ;\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{8}$$

Тогда

$$\overline{V} = V_x\overline{i} + V_y\overline{j} + V_z\overline{k} \tag{9}$$

Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль скорости $V = \left|\overline{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (10)

Средняя скорость точки при естественном способе будет равна (рис.6, 9)

$$V_{CP} = \frac{S_1 - S}{t_1 - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{11}$$

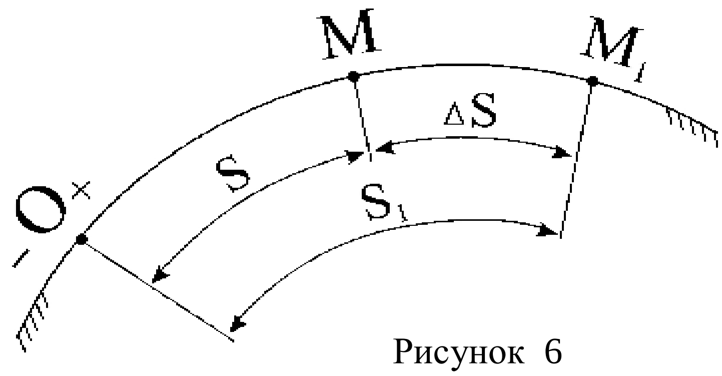


Рисунок 6

Переходя к пределу, найдем численную величину скорости точки в данный момент времени *t*:

$$V = \lim_{Dt \to 0} \frac{DS}{Dt} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \tag{12}$$

Направляем вектор скорости по касательной к траектории. Знак V совпадает со знаком DS.

Обозначим $\overline{t}$ - единичный вектор касательной к кривой, направленный в сторону положительного отсчета дуги. Тогда вектор скорости определится по формуле

$$\overline{V} = V_t \cdot \overline{t}\ , \qquad \text{где} \quad V_t = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \tag{13}$$

1.1.3 Ускорение точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

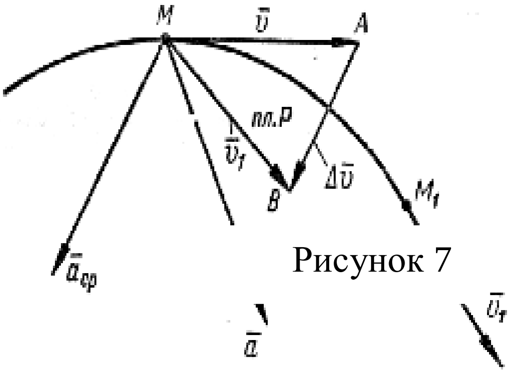


Рисунок 7

Пусть движущаяся точка M в момент t имеет скорость $\bar{V}$. В момент времени $t_1 = t + Dt$ эта точка занимает положение M_1, имеет скорость V_1 (рис.7)

Средним ускорением точки $\overline{a_{cp}}$ за время Dt называется отношение $\Delta\bar{V}/\Delta t$, то есть

$$\overline{a_{cp}} = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} \quad . \tag{14}$$

Ускорением точки a в момент времени t называется предел, к которому стремится среднее ускорение при Dt, стремящемся к нулю, т.е.

$$\bar{a} = \lim_{Dt \to 0} \overline{a_{c\,p}} = \lim_{Dt \to 0} \frac{D\bar{V}}{Dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} \tag{15}$$

Таким образом, уравнение точки равно первой производной по времени от скорости точки. Или с учетом (7) , $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ (16)

Проекции ускорения точки на оси координат равны первым производным от проекций скорости или вторым производным соответствующих координат точки по времени.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\ ;\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\ ;\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{17}$$

или $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\ ;\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}\ ;\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$ (17’)

Модуль ускорения $a = \left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (18)

Прежде чем перейти к нахождению ускорения при естественном способе задания движения, познакомимся с необходимыми сведениями из дифференциальной геометрии. Рассмотрим пространственную кривую. Пусть $\bar{t}$ - единичный вектор касательной, проведенной в какую-либо точку M этой кривой. Возьмем теперь на кривой точку M_1, близкую к точке M, и обозначим единичный вектор касательной в этой точке через $\overline{t}_1$. Параллельно перенеся вектор $\overline{t}_1$ в точку M_1, проведем плоскость через векторы $\overline{t}$ и $\overline{t}_1$,приложенные в точку M.

При стремлении точки M_1 к точке M эта плоскость в пределе займет определенное положение. Полученную таким образом плоскость называют - соприкасающейся. плоскостью в точке M. Отметим, что если рассматриваемая кривая плоская, то она целиком будет расположена в соприкасающейся плоскости.

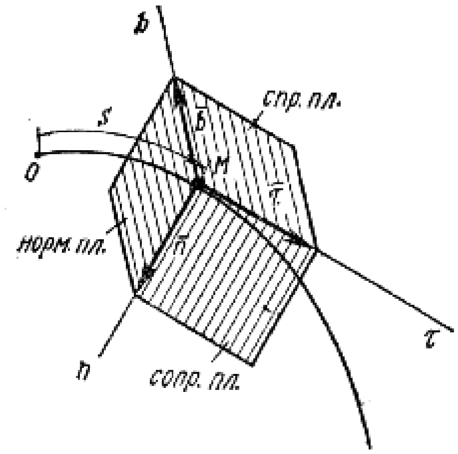


Рисунок 8

Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно касательной, называют *нормальной* плоскостью. Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей определяет *главную нормаль* к кривой в точке M. Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно главной нормали, называют *спрямляющей плоскостью*. На рисунке 8 показаны соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости. Бинормаль - линия пересечения спрямляющей и нормальной плоскостей.

Координатные оси направим по касательной к главной нормали и бинормали. Введем единичные векторы $\overline{t}$, $\overline{b}$, $\overline{n}$. $\overline{n}$ направим в сторону вогнутости. $\overline{b}$ направим таким образом, чтобы получилась правая система осей. Полученный трехгранник, оставленный из плоскостей называется *естественным трехгранником*. Обозначим через ε угол между векторами $\overline{t}$ и $\overline{t}_1$ ε - угол смежности (рис.9).

Кривизной кривой в точке M называют предел отношения угла смежности к абсолютному значению длины дуги $MM_1 = DS$, т.е.

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{e}{|\Delta S|} \tag{19}$$

Радиусом кривизны кривой в точке M называется величина, обратная

кривизне
$$r = \frac{1}{k} \tag{20}$$

Согласно выражению (13’), вектор скорости можно представить в виде

$$\bar{V} = V_t \bar{t} \ ,$$

где V_t - проекция скорости на направление $\bar{t}$. На основании формулы (16) имеем

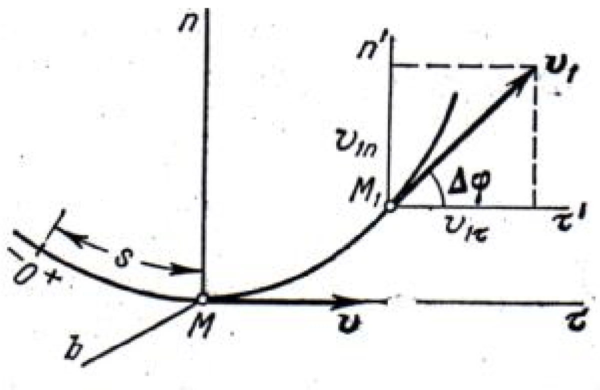


Рисунок 9

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_t \bar{t}\right) = \frac{dV_t}{dt}\bar{t} + V_t \frac{d\bar{t}}{dt} \tag{21}$$

Найдем производную от вектора $\bar{t}$:

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \lim_{Dt \to 0} \frac{D\bar{t}}{Dt} = \lim_{Dt \to 0}\left[\frac{D\bar{t}}{DS}\frac{DS}{Dt}\right] = \lim_{Dt \to 0}\frac{D\bar{t}}{DS} \lim_{Dt \leftarrow 0}\frac{DS}{Dt} = V_t \frac{d\bar{t}}{dS} \ .$$

Вектор $\Delta\bar{t}/\Delta S$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через точка M и векторы $\bar{t}$ и $\overline{t}_1$ (плоскость *MAB*). Следовательно, вектор $d\bar{t}/dS$ лежит в соприкасающейся плоскости, так как, при $\Delta S \to 0$ $(\Delta t \to 0)$ плоскость *MAB* совпадает с соприкасающейся плоскостью к траектории в точке *M*.

Дифференцируя тождество $\left(\bar{t} \cdot \bar{t}\right) = \overline{t^2} = 1$ по S, получим

$$2\frac{d\bar{t}}{dS}\bar{t} = 0 \ .$$

Каждый из сомножителей этого выражения не равен нулю, поэтому векторы $d\bar{t}/dS$ и $\bar{t}$ перпендикулярны друг другу. Следовательно, вектор $d\bar{t}/dS$ направлен по главной нормали к центру кривизны.

Определим модуль вектора $d\bar{t}/dS$. Из равнобедренного треугольника AMB найдем

$$AB = |D\bar{t}| = 2\sin(e/2)$$

или используя равенства (19) и (20), получим

$$\left|\frac{d\bar{t}}{dS}\right| = \lim_{DS\to 0}\left|\frac{D\bar{t}}{DS}\right| = \lim_{DS\to 0}\frac{\sin(e/2)}{(e/2)}\frac{e}{|DS|} = k = \frac{1}{r};$$

Учитывая, то $\bar{n}$ есть единичный вектор главной нормали, будем иметь

$$\frac{d\bar{t}}{dS} = \frac{\bar{n}}{r}\ .$$

Значит,

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{V_t}{r}\bar{n}\ ,$$

и, следовательно,

$$\bar{a} = \frac{dV_t}{dt}\bar{t} + \frac{V^2}{r}\bar{n} \qquad (22)$$

так как $V_t^2 = V^2$.

Из этой формулы следует, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.

Составляющие ускорения по направлениям $\bar{t}$ и $\bar{n}$ соответственно равны.

$$\overline{a_t} = \frac{dV_t}{dt}\bar{t}\ ;\ \ \overline{a_n} = \frac{V^2}{r}\bar{n} \qquad (23)$$

$$\text{и} \quad a_t = \frac{dV_t}{dt}\ ;\ \ a_n = \frac{V^2}{r} \qquad (23')$$

$\overline{a_t}$ - касательное; $\overline{a_n}$ - нормальное ускорения.

Касательное ускорение $\overline{a_t}$ характеризует изменение модуля скорости, нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Модуль вектора ускорения равен

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{r}\right)^2} \qquad (24)$$

1.1.4 Частные случаи движения точки

1.1.4.1 Прямолинейное движение

Если траекторией точки является прямая линия, $r = \infty$. Тогда $a_n = \frac{V^2}{r} = 0$;

$$\text{и} \quad a = a_t = \frac{dV_t}{dt} \qquad (25)$$

1.1.4.2 Равномерное прямолинейное движение

В этом случае $a_n = a_t = 0$, значит и $a = 0$.

1.1.4.3 Равномерное криволинейное движение

$$V = const; \quad a_t = \frac{dV}{dt} = 0; \quad a = a_n = \frac{V^2}{r}.$$

Найдем закон движения

$$V = \frac{dS}{dt} \quad \text{или} \quad dS = Vdt.$$

Интегрируя это равенство в соответствующих пределах, получим

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t Vdt$$

или $S - S_0 = Vt$, так как $V = const$.

Отсюда $S = S_0 + Vt$ (26)

1.1.4.4 Равнопеременное криволинейное движение

Это движение, при котором $a_t = const$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t = 0$ $S = S_0$, а $V = V_0$ - начальная скорость точки.

$$a_t = \frac{dV}{dt}\ , \text{ или } dV = a_t\, dt$$

После интегрирования в соответствующих пределах, получим

$$V = V_0 + a_t\, t \tag{27}$$

$$\frac{dS}{dt} = V_0 + a_t\, t \quad \text{или} \quad dS = V_0\, dt + a_t\, tdt$$

Вторично интегрируя, найдем закон движения

$$S = S_0 + V_0 t + a_t\, \frac{t^2}{2} \tag{28}$$

1.2 ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.2.1 Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Примеры поступательных движений:

1) движение кузова автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги.
2) спарник AB (рис.10) при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A=O_2B$) движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной самой себе). Точки спарника движутся при этом по окружности.

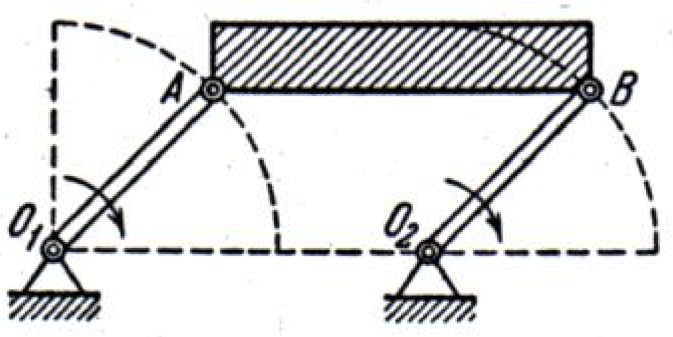


Рисунок 10

Теорема: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории (при наложении совпадающие) и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета *Oxyz*. Положение точек A и B в момент времени определяется радиус-векторами $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$ (рис.11).

Проведем вектор AB, тогда: $\bar{r}_B = \bar{r}_A + AB$. (29)

При этом $AB = const$. Следовательно, траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overline{AB}$.

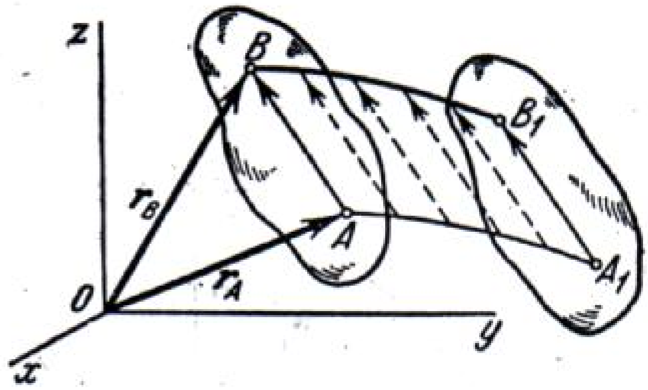


Рисунок 11

Значит траектории точек A и B - одинаковые кривые (при наложении совпадают). Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем равенство (29) по времени:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}; \quad \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{V}_B, \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_A; \quad \frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0;$$

тогда получим $V_A = V_B$, т.е. скорости точек в любой момент времени одинаковы. Беря от полученного равенства производную по времени, найдем:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = a_A \; и \; a_B;$$

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а так же скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь его одной точки.

1.2.2 Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связные), остаются во все время движения неподвижными (рис.12). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая называется *осью вращения*.

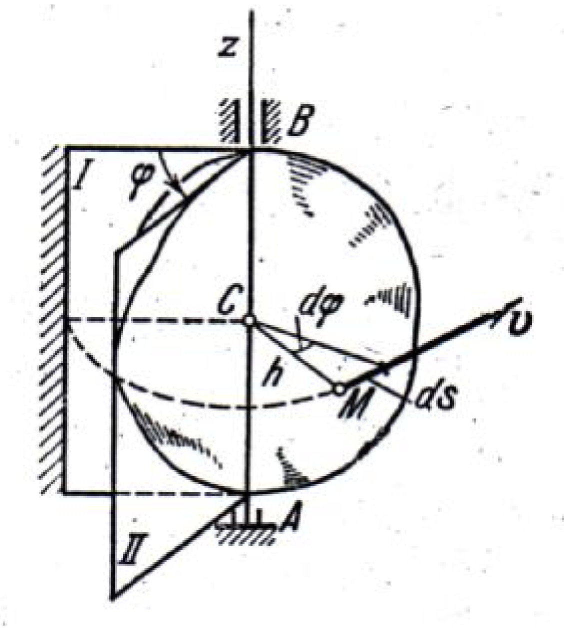


Рисунок 12

. Проведем через ось вращения A_z неподвижную (1) и подвижную (2) полуплоскости. Полуплоскость (2) врезано в само тело, тогда положение тела будет однозначно определяться *углом поворота тела* j между этими полуплоскостями. Угол j измеряется в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла j от времени т.е.

$$j = f(t) \tag{30}$$

Уравнение (30) выражает закон вращательного движения твердого тела.

Если за промежуток времени $Dt = t_1 - t$ - тело совершает поворот на угол $Dj = j_1 - j$, то средняя угловая скорость

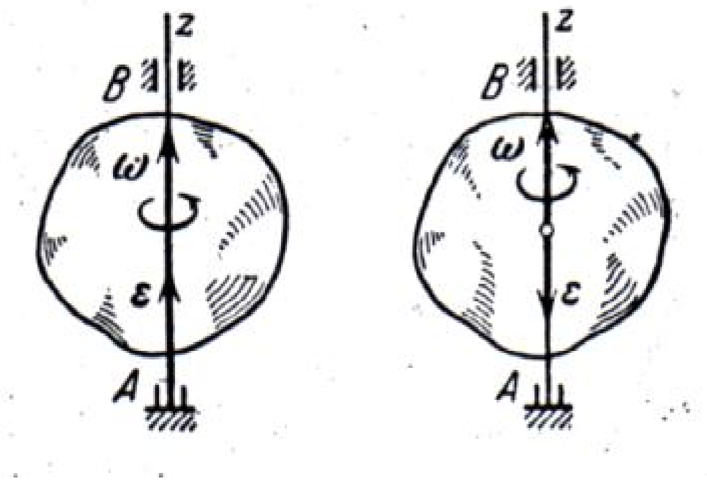
$$w_{cp} = \frac{\Delta j}{\Delta t}; \tag{31}$$

1.2.2.1 Угловая скорость в данный момент времени

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta j}{\Delta t}; \text{или } w = \frac{dj}{dt}; \tag{32}$$

Таким образом, угловая скорость в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени. Знак определяет направление вращения.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора, численная величина которого равна $\frac{dj}{dt}$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.14 а, б)



а) б)

Рисунок 13

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени.

Если за промежуток времени $Dt = t_1 - t$ угловая скорость тела изменится на величину $D\omega = \omega_1 - \omega$, то среднее угловое ускорение будет равно

$$e_{cp} = \frac{\Delta w}{\Delta t}; \tag{33}$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени будет равно

$$e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \Rightarrow e = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 j}{dt^2}; \tag{34}$$

Итак, угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Угловое ускорение также можно изобразить в виде вектора (рис.13). Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = const$), то вращение тела называется равномерным. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы (31) имеем $dj = \omega\, dt$. Отсюда, считая, что в начальный момент при $t = 0$ угол $j = j_0$, после интегрирования получим

$$\int_{j_0}^{j} dj = \int_0^t w\, dt \quad или \quad j = j_0 + wt \tag{35}$$

При равномерном вращении и $j_0 = 0$, имеем

$$w = \frac{j}{t}$$

$$[w] = \text{рад/с}; \quad [n] = \text{об/мин}; \quad w = \frac{p\,n}{30};$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($e = const$),то вращение называется равнопеременным. Найдем закон равнопеременного движения $dw = e \cdot dt$

$$\int_{w_0}^{w} dw = \int_0^t e\,dt \Rightarrow w = w_0 + e \cdot dt \qquad (36)$$

$$\frac{dj}{dt} = w_0 + e\,t;\; dj_0 = w_0 \cdot dt + e\,tdt;$$

$$\int_{j_0}^{j} dj = \int_0^t w_0 dt + \int e \cdot tdt \quad или \quad j = j_0 + wt + e\frac{t^2}{2} \qquad (37)$$

1.2.2.2 Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии r от оси вращения (рис.14,15). Траектория точки M - окружность радиуса r, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси.

Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол dj то точка M при этом совершит элементарное перемещение

$$dS = r\,dj\,.$$

Тогда скорость точки будет равна

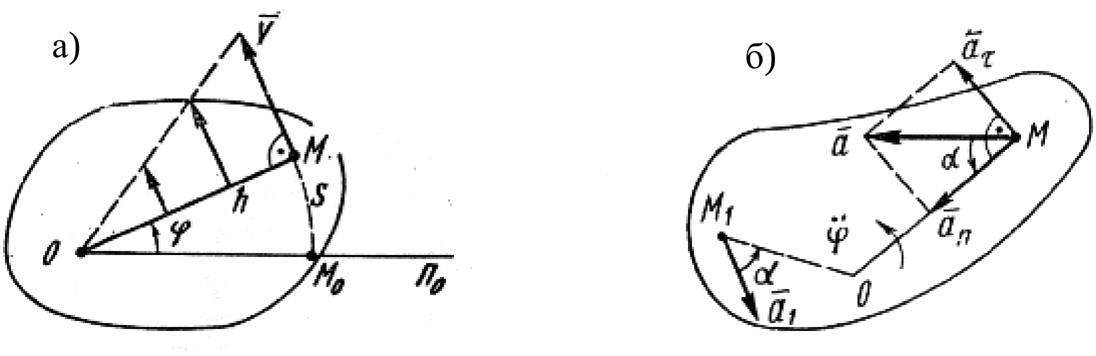
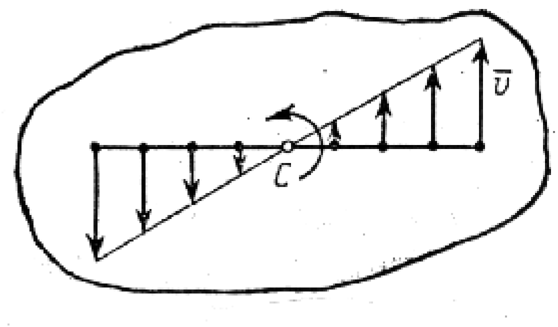


Рисунок 14

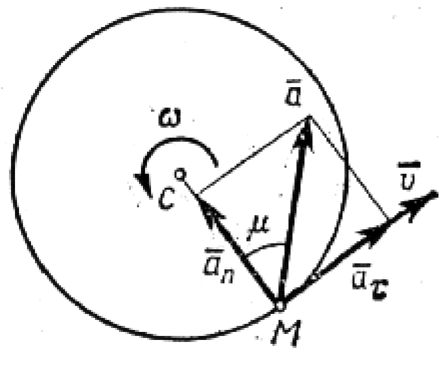
$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dj \cdot r}{dt} \quad или \quad V = rw \qquad (38)$$

V - линейная или окружная скорость точки M.

Таким образом, линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние этой точки от оси вращения (рис. 14,а)



а)



б)

Рисунок 15

Направлена скорость V по касательной к описываемой точкой M окружности. Так как для всех точек тела w имеет в данный момент одно и тоже значение, то из формулы (38) следует, что линейные скорости вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рис.15, а).

Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами

$$a_t = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{r};$$

С учетом формулы (38), получим:

$$a_t = r\frac{dw}{dt}; \; a_n = \frac{r^2 w^2}{r};$$

или окончательно: a_t = r ε , a_n = r ω^2 (39*)

Касательное ускорение a_t направлено по касательной к траектории, нормальное ускорение a_n всегда направлено по радиусу к оси вращения (рис.15, б)

Полное ускорение или $a = r\sqrt{e^2 + w^4}$, (39)

Угол m (рис.15,б) определяется по формуле

$$tg\mu = \frac{|a^t|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{40}$$

Пример. Ускорение точки *M* диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 4 м/с^2 (рис. 15, б). Определить угловую скорость этого диска, если его радиус R = 0,5м, а угол μ=60°, а также скорость точки М.

Решение

Так как угол между вектором полного ускорения точки М и вектором ее нормального ускорения известен

$$a_n = a \cdot \cos\mu = 4 \cdot \cos 60^0 = 2 \quad \left(м/с^2\right).$$

Нормальное ускорение точки при вращательном движении, согласно (39*)

$$a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Откуда $$\omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}5}} = 2 \;(с^{-1}).$$

Скорость точки М, согласно (38)

$$V = \omega R = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \;(м/с).$$

Ответ: $\omega = 2\ с^{-1};\ V = 1\ м/с.$

1.3 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (или плоским) движением твердого тела называется такое его движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости *П* (рис.16).

Плоскости, в которых движутся отдельные точки, параллельны между собой. Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике, так как звенья большинства механизмов и машин, применяемых в технике, совершают плоское движение. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси можно считать частным случаем плоского движения. При рассмотрении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также способы вычисления скоростей и ускорения точек тела.

Рассмотрим сечение *S* тела какой-нибудь плоскостью *Oxy* , параллельной плоскости *П* (рис.16). Любая прямая, перпендикулярная плоскости *П* и жестко

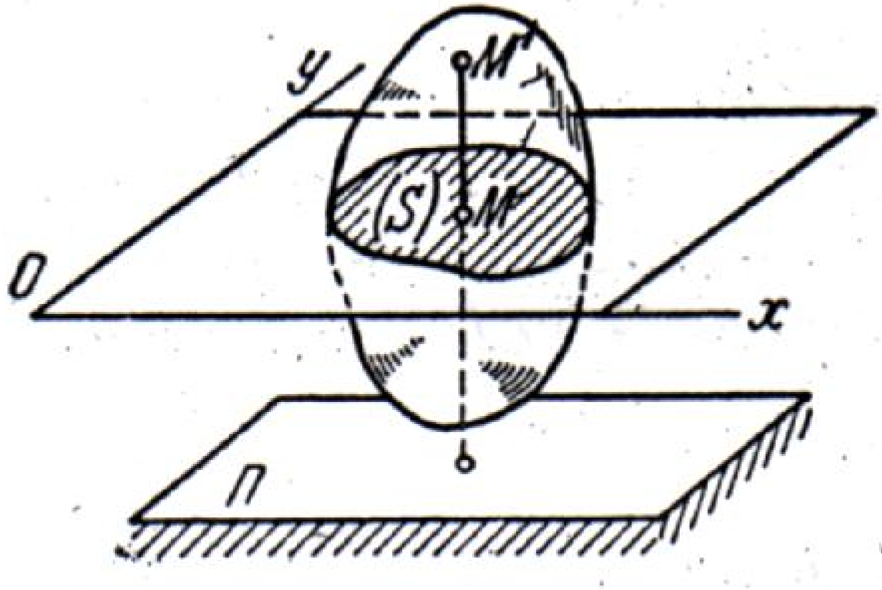


Рисунок 16

скрепленная своими точками с движущимся телом, будет двигаться поступательно, то есть все точки этой прямой движутся одинаково.

Следовательно, для изучения движения точек, лежащих на рассматриваемой прямой, достаточно изучить движение одной точки этой прямой, например, точки M. А для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение S тела в плоскости Oxy.

В дальнейшем будем плоскость Oxy совмещать с плоскостью рисунка, а вместо всего тела изображать только его сечение S.

1.3.1 Уравнения плоского движения твердого тела

Положение сечения S в плоскости Oxy определяется, очевидно, положением какого-либо проведенного в этом сечении отрезка AB (рис. 17). Положение отрезка AB можно определить, зная координаты X_A , Y_A и угол j .

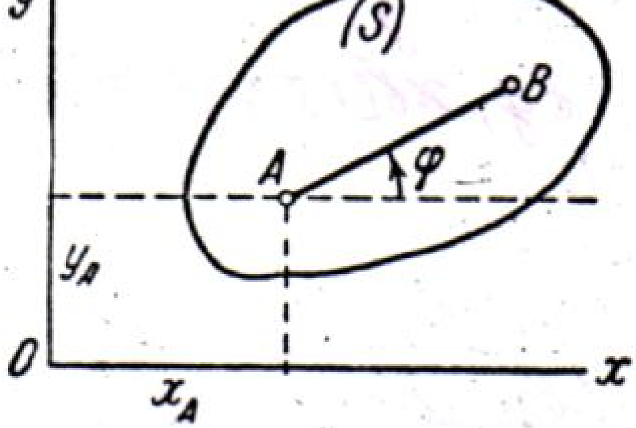


Рисунок 17

Точку A., выбранную для определения положения сечения S, будем в дальнейшем называть полюсом.

Чтобы знать положение тела в пространстве в любой момент времени, надо знать уравнения плоского движения твердого тела:

$$x_A = f_1(t)\,,\ \ y_A = f_2(t)\,,\ \ j = f_3(t)\,. \tag{41}$$

1.3.2 Разложение плоского движения на простейшие

Покажем, что плоское движение слагается из поступательного и вращательного. Для этого рассмотрим два последовательных положения 1 и 2, которое занимает сечение S в момент времени t_1 и $t_2 = t_1 + Dt$ (рис. 18).

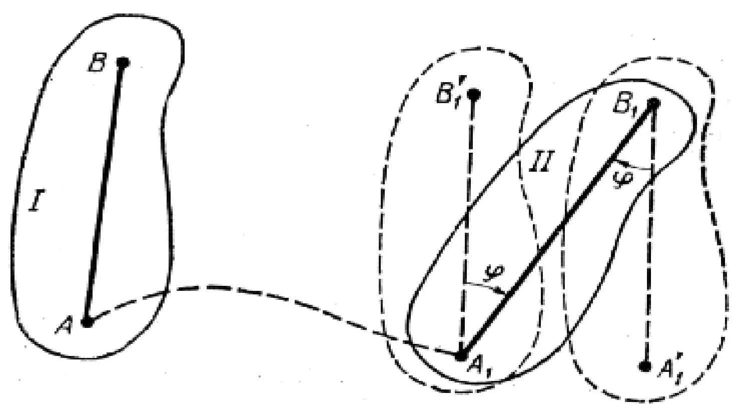


Рисунок 18

Переместим сначала тело поступательно, так, чтобы полюс A, двигаясь вдоль своей траектории, пришел в положение A_2 (при этом отрезок A_1B_1 займет положение A_2B_1), а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол Dj_1. Таким же путем можно переместить тело из положения *2* в следующее его положение *3* и т.д.

Отсюда заключаем, что плоское движение твердого тела слагается из поступательного движения , при котором все точки тела движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Поступательная часть плоского движения описывается, очевидно, первыми двумя из уравнений (1), а вращение вокруг полюса - третьим из этих уравнений.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорости и ускорения поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\overline{V}_{пост} = \overline{V_A}$, $\overline{a_{пост}} = \overline{a_A}$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение e вращательного движения вокруг полюса.

При изучении движения точки в качестве полюса выбирают любую точку тела. На рисунке 18 показаны случаи, когда за полюсы выбираются сначала A, а затем точка *B*. Штриховой линией указаны положения плоской фигуры после поступательных перемещений с точками *A* и *B*.

Так как вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, то и характеристики этой части движения - угловая скорость $w = \dfrac{dj}{dt}$ и угловое ускорение $e = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d^2 j}{dt^2}$ - также не зависят от выбора полюса.

1.3.3 Определение траекторий точек тела

Рассмотрим точку *M* тела, положение которой в сечении *S* определяется расстоянием $b = AM$ от полюса *A* и угол *BAM* (рис. 19).

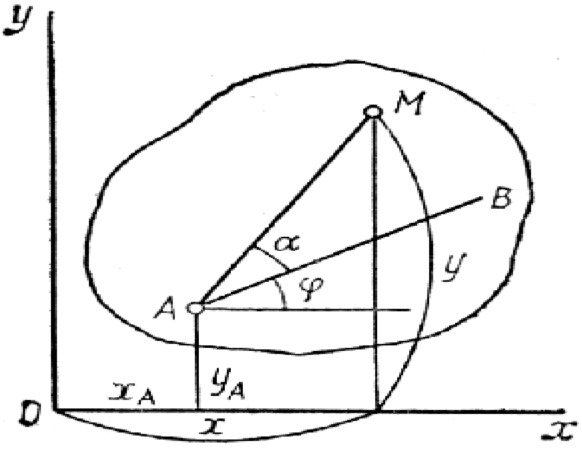


Рисунок 19

Координаты точки *M*:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= x_A + b\cos(j + a) \\ y_M &= y_A + b\cos(j + a) \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

где x , y , - известные функции от t . Равенства (42) определяющие закон движения точки M в плоскости Oxy , дает одновременно уравнение траектории в параметрической форме.

Обычное уравнение траектории получается исключением из системы (42) времени t .

1.3.4 Скорости точек тела при плоском движении

Положение любой точки *M* в сечении *S* определяетсярадиус-вектором

$\overline{r} = \overline{r_A} + \overline{r'}$ (рис.20), где $\overline{r_A}$ - радиус-вектор т. A; $\overline{r'} = \overline{AM}$ - вектор, определяющий положение т. M относительно осей $Ax^{/}y^{/}$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение сечения (S) по отношению к этим осям представляют собой вращение вокруг полюса A). Тогда

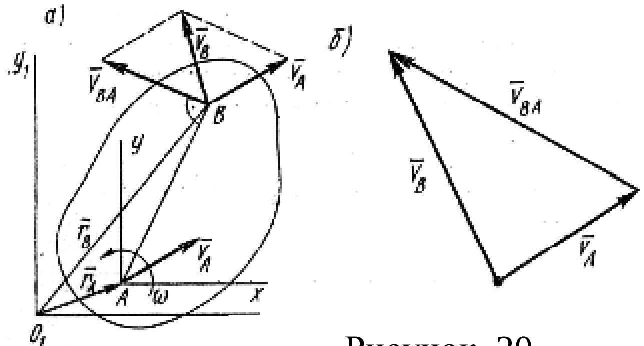


Рисунок 20

$$V_M = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r_A}}{dt} + \frac{d\overline{r'}}{dt}\;. \;.$$

Здесь $\frac{d\overline{r_A}}{dt} = \overline{V_A}$ и $\frac{d\overline{r'}}{dt} = \overline{V_{MA}}$ - скорость вращения точки M вокруг полюса A.

$$\overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA} \qquad (43)$$

При этом $V_{MA} = w * MA$ и $\overline{V_{MA}} \perp \overline{MA}$ (44)

где w - угловая скорость вращения тела.

Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и окружной скорости этой точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса. Модуль и направление скорости $\overline{V_M}$ находится направлением соответствующего параллелограмма (рис 20,б).

1.3.4.1 Теорема о проекциях скоростей точек тела

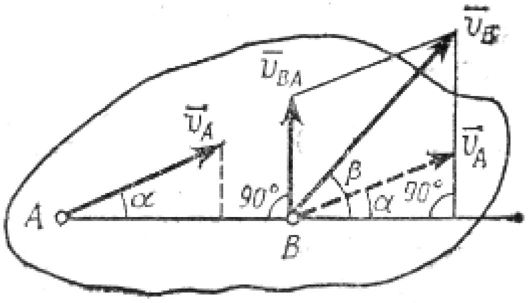


Рисунок 21

Теорема: проекции скоростей точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B тела. Принимая точку за полюс (рис. 21), получаем, что

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}\;.$$

Проецируя обе части равенства на линию AB, находим :

$$V_B \cos b = V_A \cos a$$

1.3.4.2 Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

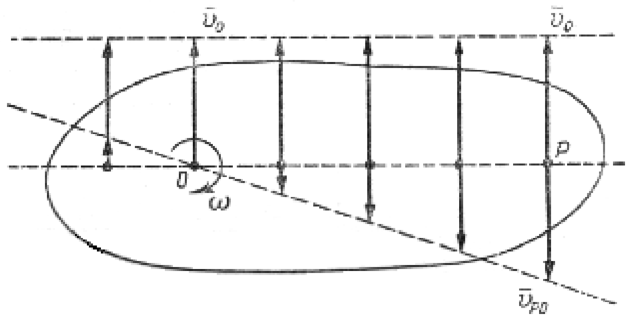


Рисунок 22

Пусть скорость $\overline{V_A}$ произвольной точки плоской фигуры отлична от нуля. По знаку угловой скорости $w = \dot{\varphi}$ определяем направление вращения плоской фигуры вокруг точки *A* и в этом направлении откладываем от точки *A* отрезок $AP = \dfrac{V_A}{w}$ перпендикулярно скорости $\overline{V_A}$ (рис. 22).

Докажем, что скорость полученной точки *P* равна нулю, то есть эта точка и есть МЦС.

В соответствие с формулой (2) имеем: $\overline{V_P} = \overline{V_A} + \overline{V_{PA}}$.

Так как скорость $\overline{V_A} \perp AP$, то вектор $\overline{V_{PA}} \parallel \overline{V_A}$.

Кроме того, $\overline{V_A}$ и $\overline{V_{PA}}$ имеют противоположные направления.

Модуль скорости V равен $V_{PA} = w \cdot AP = \dfrac{V_A}{w} w = V_A$.

Следовательно,

$$\overline{V_P} = \overline{V_A} + \overline{V_{PA}} = 0 \ ,$$

то есть скорость точки P равна нулю.

Выберем теперь за полюс точку *P*, тогда скорость произвольной точки *A* плоской фигуры определится по формуле:

$$\overline{V_A} = \overline{V_P} + \overline{V_{AP}} = \overline{V_{AP}} = \overline{w} \cdot \overline{PA} \ ,$$

так как $\overline{V_P} = 0$.

Следовательно, скорости точек тела при его плоском движении распределяются точно так же, как и при вращательном движении вокруг оси, проходящей через МЦС.

Например, скорости точек A и B определяются по формулам

$$V_A = w \cdot PA, \; \left(\overline{V_A} \perp \overline{PA}\right); \qquad V_B = w \cdot PB, \; \left(\overline{V_B} \perp \overline{PB}\right).$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}, \tag{45}$$

то есть скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1) для определения МЦС надо знать только направления скоростей $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$ каких-нибудь двух точек A и B сечения тела: МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (рис.23,а);

2) для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A и направление скорости другой его точки B.

Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$, построим МЦС- точку P, по направлению $\overline{V_A}$ определим направление поворота тела, а по формуле (45) найдем скорость $\overline{V_B}$.

3) угловая скорость тела равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки к ее расстоянию до МЦС :

$$w = \frac{V_z}{PZ}. \tag{46}$$

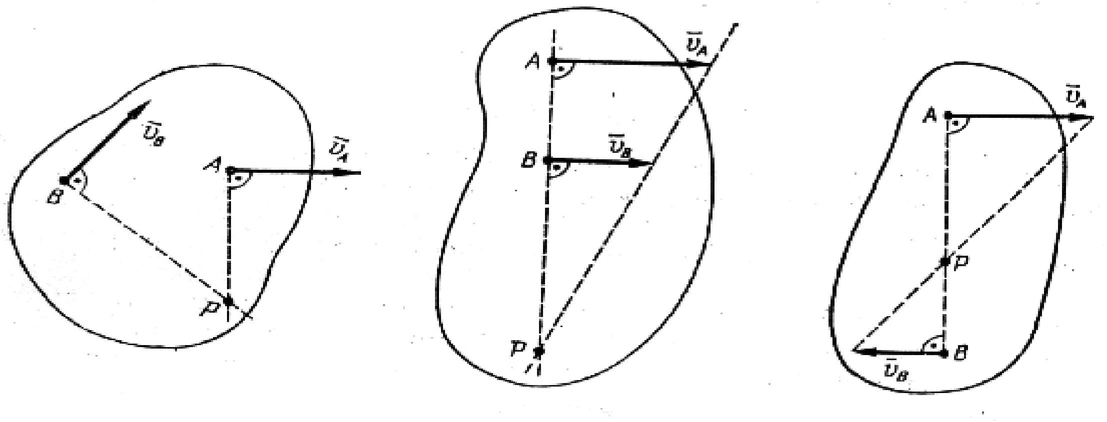
Из формул $V_{BA} = \left|\overline{V_B} - \overline{V_A}\right|$ и $V_{BA} = w * AB$, находим, что

$$w = \frac{\left|\overline{V_B} - \overline{V_A}\right|}{AB}. \tag{47}$$

Частные случаи определения МЦС

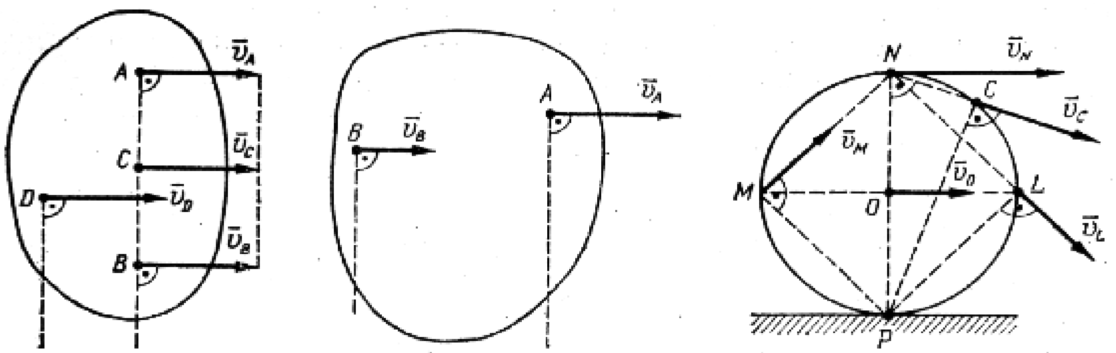
В некоторых случаях удается сразу указать точку плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент равна нулю. Эти точки в таких задачах и являются мгновенными центрами скоростей.

Так, например:



а) б) в)

Рисунок 23



а) б) в)

Рисунок 24

а) цилиндрическое тело без скольжения катится по неподвижной поверхности. Точка контакта P- МЦС (рис. 24, в)

б) скорости точек A и B параллельны (рис. 24, а,б), причем линия AB не перпендикулярна к $\overline{V_A}$. МЦС лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны. $\overline{V_A}$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что

$$V_A cosa = V_B cosb, \text{ то есть } V_B = V_A;$$

аналогичный результат получается для всех других точек тела, то есть тело имеет мгновенное поступательное распределение скоростей.

в) если скорости точек A и B параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна к $\overline{V_A}$, то МЦС P определяется построением, показанным на рисунке 23, б, в. В этом случае кроме направления надо знать еще и модули скоростей V_A и V_B.

г) если известен вектор скорости $\overline{V_A}$ и угловая скорость w, то положение МЦС, лежащего на перпендикуляре к $\overline{V_A}$, можно найти из равенства (46), которое дает

$$PA = \frac{V_A}{w}\ .$$

1.3.5 Ускорения точек при плоском движении

Положение точки *M* по отношению к осям *Oxy* (рис 20) определяется радиусом-вектором $\overline{r} = \overline{r_A} + \overline{r'}$, где $\overline{r'} = \overline{AM}$. Тогда

$$\overline{a_M} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r_A}}{dt^2} + \frac{d^2\overline{r'}}{dt^2}\ .$$

Здесь $\dfrac{d^2\overline{r_A}}{dt^2} = \overline{a_A}$ и $\dfrac{d^2\overline{r'}}{dt^2} = \overline{a_{MA}}$.

Следовательно, . $\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}}$ (48)

При этом для ускорения $\overline{a_{MA}}$ точки *M* во вращательном движении вокруг полюса *A* будет :

$$\overline{a_{MA}} = MA\sqrt{e^2 + w^4}\ , \qquad tgm = \frac{|e|}{w^2} \tag{49}$$

где w и e - угловая скорость и угловое ускорение тела,

а μ - угол между $\overline{a_{MA}}$ и *MA* .

Таким образом, ускорение любой точки *M* тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и ускорения точки *M* в ее вращательном движении вместе с телом вокруг этого полюса.

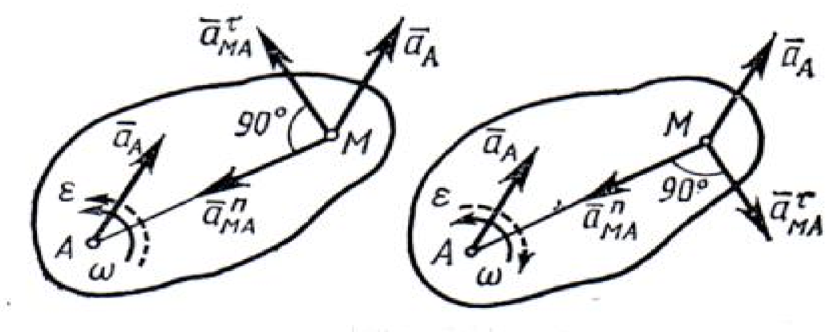


Рисунок 25

а) б)

Модуль и направление ускорения $\overline{a_M}$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 25).

Ускорение $\overline{a_{MA}}$ можно разложить на составляющие:

$$\overline{a_{MA}} = \overline{a^t_{MA}} + \overline{a^n_{MA}} ,$$

где $\overline{a^t_{MA}} = AM \cdot e$; $\overline{a^n_{MA}} = AM \cdot w^2$.

В общем случае полюс А движется не прямолинейно и его ускорение

$$\overline{a_A} = \overline{a^t_A} + \overline{a^n_A} , \qquad \textit{тогда}$$

$$\overline{a_M} = \overline{a^t_A} + \overline{a^n_A} + \overline{a^t_{MA}} + \overline{a^n_{MA}} \tag{50}$$

1.4 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Движение свободного твердого тела

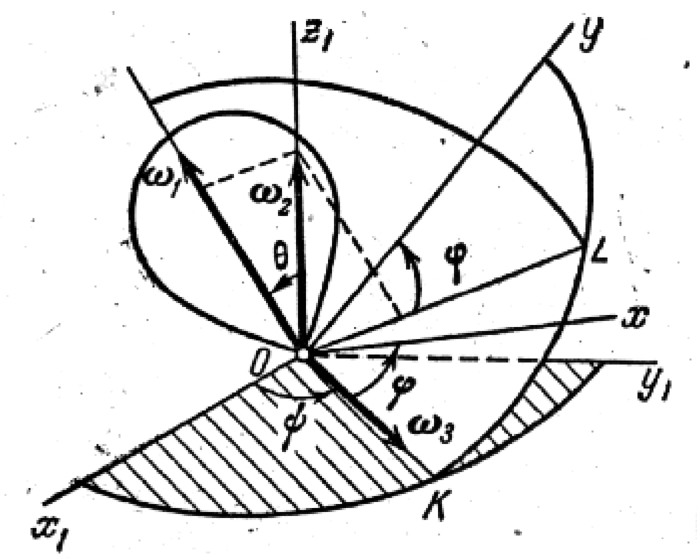


Рисунок 26

Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $O\, x_1\, y_1\, z_1$ твердого тела, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время движения неподвижной (рис. 26).

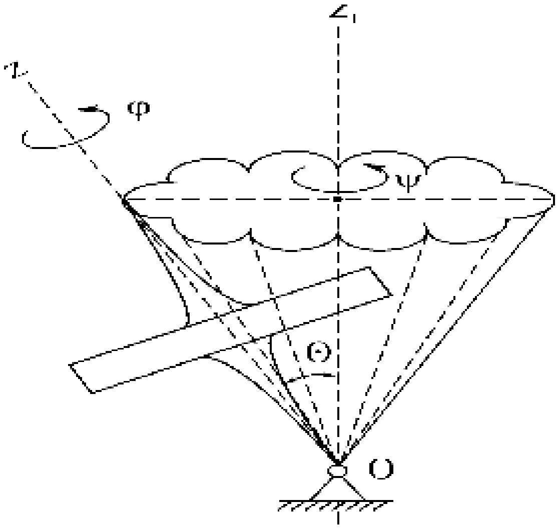
Другую систему координат $Oxyz$ скрепим с телом, вращающимся вокруг неподвижной точки O. Тело имеет три степени свободы.

Углы Эйлера:

Угол прецессии Ψ - определяет положение линий узлов OK, которая является линией пересечения координатных плоскостей Ox_1y_1 и Oxy относительно неподвижной координаты Ox. Для изменения этого угла тело должно вращаться вокруг координатной оси Oz, которую называют *осью прецессии*.

Угол нутации q - угол между координатными плоскостями Ox_1y_1 и Oxy, его измеряют как угол между осями Oz_1 и Oz, являющимися перпендикулярами к этим плоскостям. Ось *ОК*, вокруг которой вращается тело при изменении угла q, соответственно называется *осью нутации* или *линией узлов*.

Угол собственного вращения j - угол между подвижной осью координат *Ox* и положительным направлением линий углов *ОК*. При изменении угла j тело вращается вокруг так называемой оси собственного вращения *Oz*, перпендикулярной плоскости, в которой лежат прямые *ОК* и *Ox*, образующие этот угол.



Углы Эйлера широко применяются в теории гироскопов (рис. 27). Известно, например, что земной шар кроме собственного вращения вокруг своей оси еще прецессирует и совершает нутационное движение.

В технике особо важное значение имеет так называемая регулярная_прецессия, когда $\dot{j} = const$, $\dot{y} = const$, $\dot{q} = const$.

Рисунок 27

1.4.1. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

$$j = f_1(t)$$
$$y = f_2(t \qquad (51)$$
$$q = f_3(t).$$

Теорема Эйлера-Даламбера: всякое элементарное перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собой элементарный поворот вокруг некоторой неподвижной оси вращения, проходящей через эту точку.

Обозначим

$$w_1 = \frac{dj}{dt} = \dot{j}; \quad w_2 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad w_3 = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \qquad (52)$$

В соответствии с ранее рассмотренным случаем сложения вращений вокруг пересекающихся осей сферическое движение будет мгновенным вращением вокруг оси *OP*, проходящей через точку *O*, причем угловая скорость w этого вращения равна геометрической сумме угловых скоростей $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$; $\overline{w_3}$, то есть

$$\overline{w} = \overline{w_1} + \overline{w_2} + \overline{w_3} \qquad (53)$$

$$\begin{aligned} w_x &= w_{1x} + w_{2x} + w_{3x} \\ w_y &= w_{1y} + w_{2y} + w_{3y} \\ w_z &= w_{1z} + w_{2z} + w_{3z} \end{aligned} \qquad (54)$$

$$\omega_{1z} = \dot\varphi;\quad \omega_{3x} = \dot\theta\cos\varphi;\quad \omega_{1x}=\omega_{1y}=0;\quad \omega_{3y} = -\dot\theta\sin\varphi;\quad \omega_{3z} = 0.$$

Для определения проекций $\overline{\omega_2}$ проведем через оси Oz_1 и Oz плоскость, которая пересечется с плоскостью Oxy вдоль линии OL. Так как линия OK перпендикулярна и к плоскости zOz_1, то она перпендикулярна и к линии OL ($\angle KOL = 90°$, а $\angle LOy = \varphi$). Тогда, проецируя вектор $\overline{\omega_2}$ на линию OL, а эту проекцию в свою очередь на оси Ox и Oy, получим

$$\omega_{2x} = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi;\quad \omega_{2y} = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi;\quad \omega_{2z} = \dot\psi\cos\theta.$$

Окончательно найдем

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{aligned} \qquad (55)$$

Уравнения (55) называют кинематическими уравнениями Эйлера.

Мгновенную угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, направленного вдоль оси OP (рис. 28).

Угловое ускорение тела в данный момент времени или мгновенное угловое ускорение

$\overline{\varepsilon}$ -является вектором, определяющим изменение угловой скорости (рис. 28);

$\overline{\omega}$ - по модулю и направлению.

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}. \qquad (56)$$

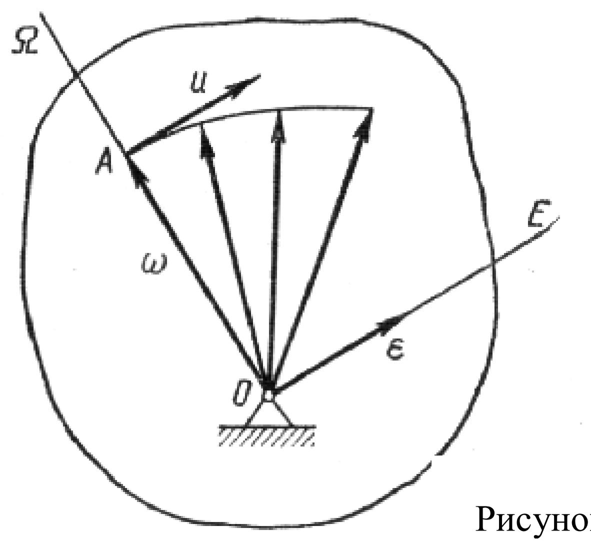


Рисунок 28

1.4.1.1 Скорости точек тела при вращательном движении вокруг неподвижной точки

Формула Эйлера, полученная ранее для вращательного движения тела вокруг неподвижной оси справедлива и для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. В этом случае в каждый момент времени тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через неподвижную точку, с угловой скоростью $\overline{\omega}$, направленной по мгновенной оси (рис. 29).

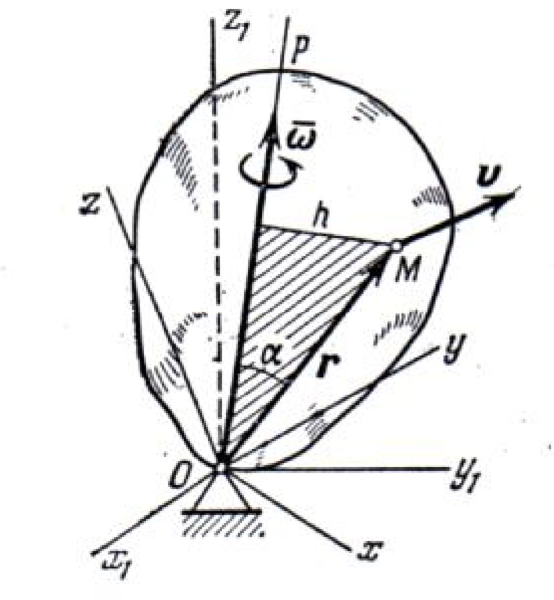


Рисунок 29

$$\overline{V} = \overline{w} \times \overline{r} \qquad (57)$$

$$V = w \cdot r\, sin(\overline{w}, \overline{r}) = w \cdot h \qquad (58)$$

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{w} \times \overline{r}\,. \qquad (59)$$

1.4.1.2 Ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной точки

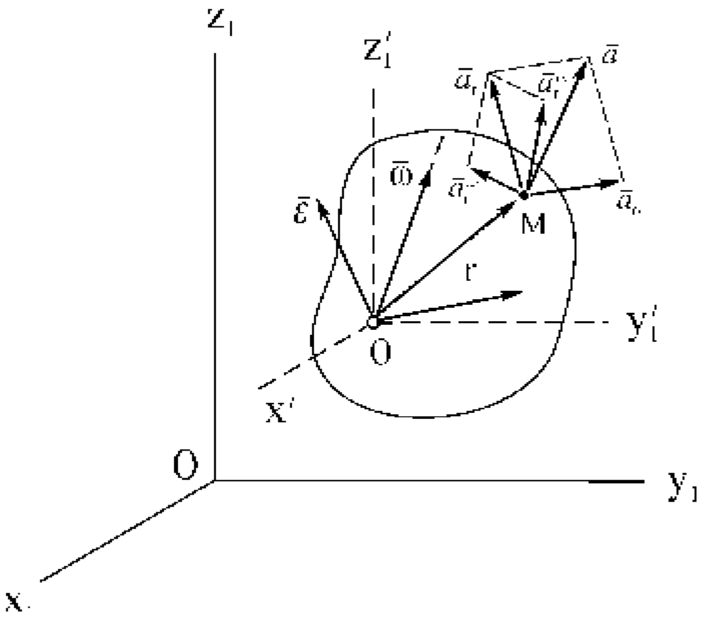


Рисунок 30

Выполняя дифференцирование формулы (57), получаем

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\overline{w}}{dt} \times \overline{r} + \overline{w} \times \frac{d\overline{r}}{dt} \qquad (60)$$

так как

$$\frac{d\overline{w}}{dt} = \overline{e}\,; \quad \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{V} = \overline{w} \times \overline{r}\,.$$

Формула *Ривальса* $\quad \overline{a} = \overline{e} \times \overline{r} + \overline{w} \times \overline{V}$

$\overline{a_{в\,р}} = \overline{e} \cdot \overline{r}$ - *вращательное ускорение* (61)

$$\overline{a_{oc}} = \overline{w} \times \overline{V}$$ - *осестремительное ускорение*

Следовательно, (рис. 30) $$\bar{a} = \overline{a_{в\ р}} + \overline{a_{ос}}\ .$$ (62)

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2 + 2a_{вр}a_{ос}\cos\left(\overline{a_{вр}}, \overline{a_{ос}}\right)}$$ (63)

$$a_{вр} = h_1 e\ ,$$

$$a_{вр} = \left|\bar{e} \times \bar{r}\right| = e \cdot \underbrace{r\sin\left(\bar{e}, \bar{r}\right)}_{h_1}.$$

$$a = \left|\bar{w} \times \bar{V}\right| = wV\sin\left(\bar{w}, \bar{V}\right) = wV = hw^2.$$

1.4.2 Общий случай движения свободного твердого тела

Выберем произвольную точку *A* тела в качестве полюса и проведем через нее оси *Axyz*, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом поступательно. Тогда положение тела относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если мы будем знать положение полюса то есть его координата X_a, Y_a, Z_a и положение тела по отношению к осям *Axyz*, определяемое углми Эйлера j, y, q (рис. 31)

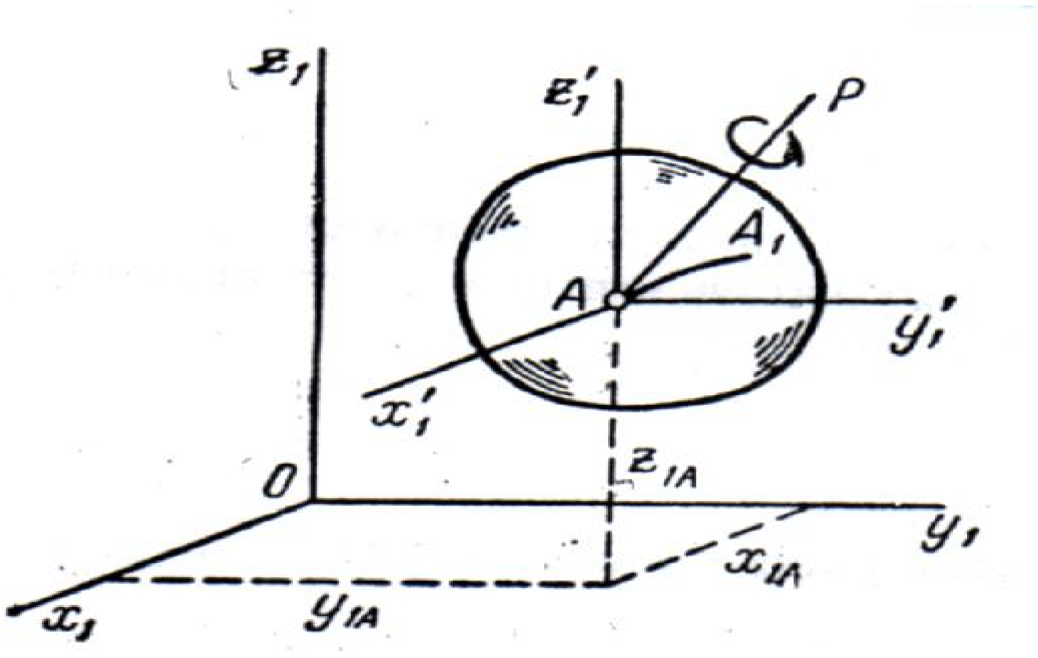


Рисунок 31

1.4.2.1 Уравнения свободного движения твердого тела

$$x_{1A} = f_1(t); \quad y_{1A} = f_2(t); \quad z_{1A} = f_3(t)$$
$$j = f_4(t); \quad y = f_5(t); \quad q = f_6(t). \qquad (64)$$

Движение свободного твердого тела слагается в общем случае из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс *A* со скоростью $\overline{V_a}$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\overline{w}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через

полюс *A* (рис. 32).

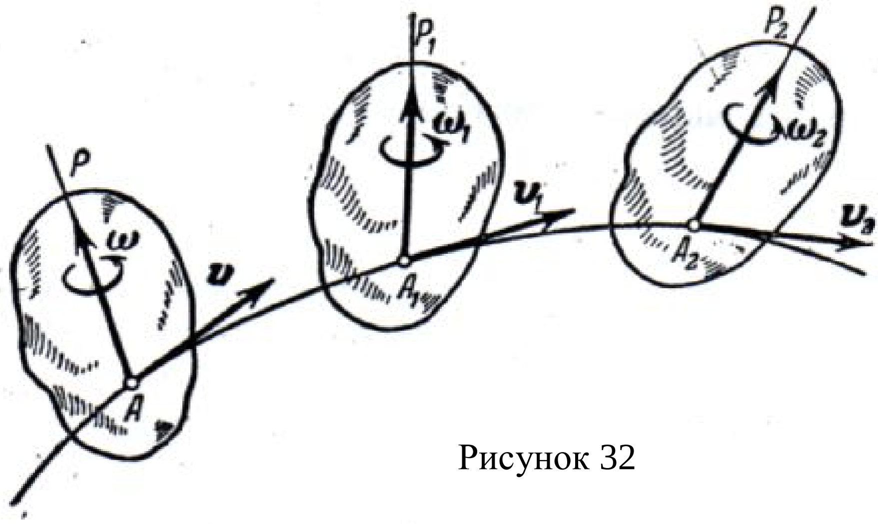


Рисунок 32

1.4.2.2 Скорости и ускорения точек свободного тела в общем случае

Так как движение свободного твердого тела в общем случае можно представить как сложное движение, то и скорость и ускорение некоторой точка *M* этого тела можно вычислить по теоремам сложения скоростей и ускорений. Так, для скорости $\overline{V}$ точка *M* (рис. 32).

$$\overline{V} = \overline{V_e} + \overline{V_r}.$$

$$\overline{V_e} = \overline{V_a}; \qquad \overline{V_r} = \overline{w} \times \overline{r}, \qquad \text{где} \qquad \overline{r} = \overline{AM}.$$

$$\overline{V} = \overline{V_a} + \overline{w} \times \overline{AM}.$$

Ускорение $\overline{a}$ точки *M*

$$\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} .$$

$$\overline{a_r} = \overline{e} \times \overline{r} + \overline{w} \times \overline{V_r} = \overline{e} \times \overline{r} + \overline{w} \times \left(\overline{w} \times \overline{r}\right).$$

$$\overline{a} = \overline{a_a} + \overline{e} \times \overline{r} + \overline{w} \times \left(\overline{w} \times \overline{r}\right)$$

или $$\overline{a} = \overline{a_a} + \overline{a_r^{вр}} + \overline{a_r^{ос}} .$$

1.5 Сложное движение точки

1.5.1 Относительное, переносное и абсолютное движение

В ряде случаев движение точки рассматривается по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой.

Движение, совершаемое при этом точкой, называют *сложным* .

Рассмотрим точку *M*, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz,* которая в свою очередь как-то движется по отношению к другой

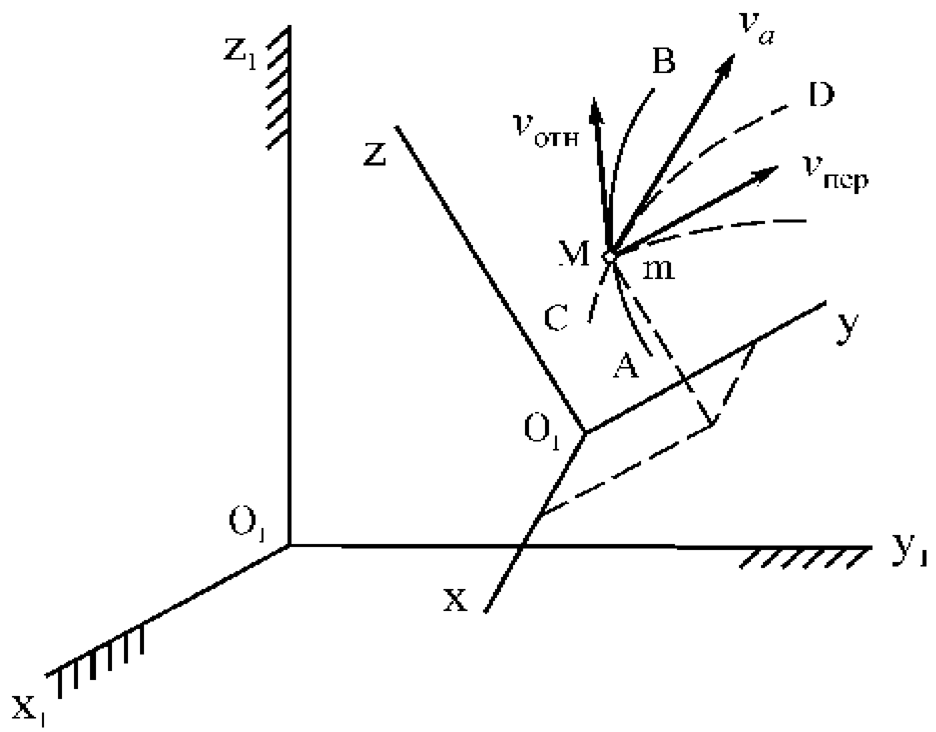


Рисунок 33

системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис.33).

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, называют *относительным движением*. Траектория AB, описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость точки M по отношению к осям $Oxyz$ называется относительной скоростью $\overline{V_r}$, а ускорение - относительным ускорением $\overline{a_r}$.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для т М *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки M, называют *переносной скоростью* точки M в этот момент - $\overline{V_e}$, а ускорение точки M - *переносным ускорением* точки M - $\overline{a_e}$.

Таким образом $\qquad \overline{V_e} = \overline{V_M}\,, \qquad \overline{a_e} = \overline{a_M}\,.$

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называют абсолютным или сложным. Траектория CD этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость - *абсолютной скоростью* $\overline{V_a}$ и ускорение - абсолютным ускорением $\overline{a_a}$.

1.5.2 Теорема о сложении скоростей

Рассмотрим сложное движение точки M. Пусть за время $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории AB точка совершает перемещение $\overline{MM'}$ (рис. 34 а).

Сама кривая AB, двигаясь вместе с подвижными осями $Oxyz$ (на рисунке не показаны), перейдет за тот же промежуток времени в какое-то новое поло-

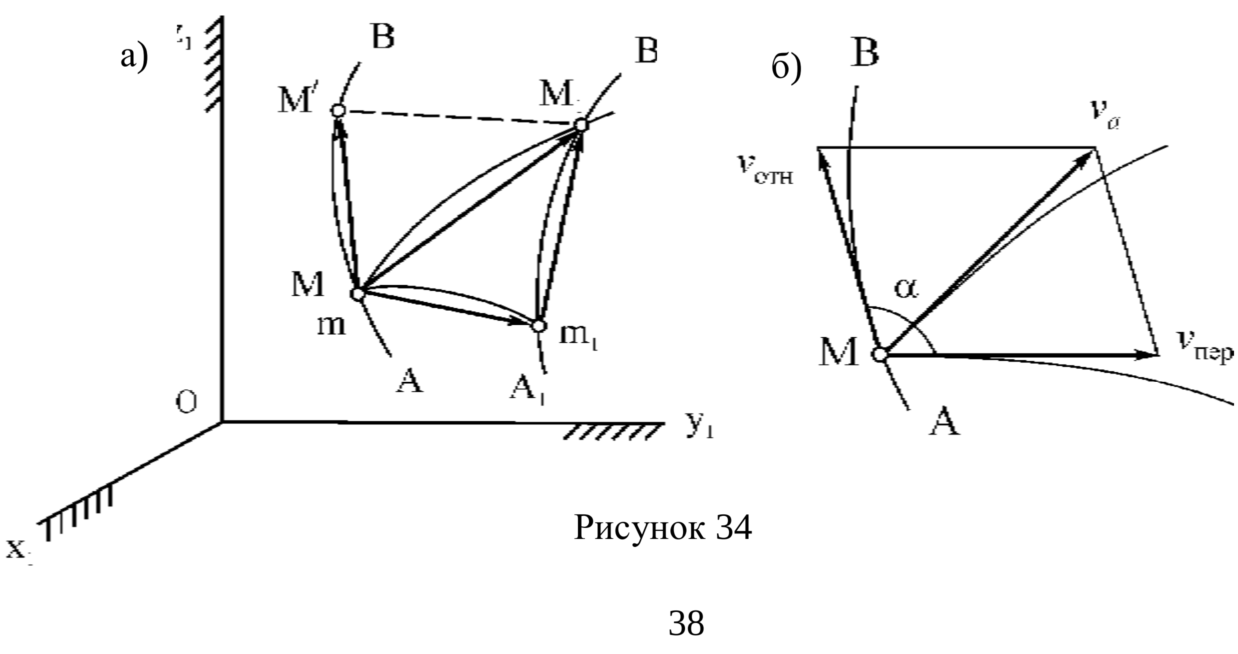


Рисунок 34

жение A_1B_1. Одновременно та точка кривой AB с которой в момент времени t совпадает точка M, совершит переносное перемещение $\overline{mm_1} = \overline{MM_1}$. В результате точка M придет в положение M_1 и совершит за время Dt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$. Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}\ .$$

Деля обе части этого равенства на Dt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{Dt\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{Dt} = \lim_{Dt\to 0}\frac{\overline{Mm_1}}{Dt} + \lim_{Dt\to 0}\frac{\overline{m_1M_1}}{Dt};$$

таким образом, $$\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e} \tag{65}$$

т.е. при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей (рис.34 б).

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_eV_r\cos a} \tag{66}$$

1.5.3 Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Из (65) получаем

$$\overline{a_a} = \frac{d\overline{V_a}}{dt} = \frac{d\overline{V_r}}{dt} + \frac{d\overline{V_e}}{dt}\ . \tag{67}$$

Производные здесь определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются в общем случае из изменений при относительном и при переносном движениях.

Следовательно, если условиться изменения, которые векторы $\overline{V_r}$ и $\overline{V_e}$ получают при относительном движении, отмечать индексом “1”, а при переносном движении - индексом “2”, то равенство (3) примет вид

$$\overline{a_a} = \frac{\left(d\overline{V_r}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\overline{V_r}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_2}{dt} \tag{68}$$

Но относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении; движение осей $Oxyz$, то есть переносное движение при этом во внимание не принимается. Поэтому переносное ускорение характеризует изменения переносной скорости только при переносном движении. Поэтому

$$\overline{a_r} = \frac{\left(d\overline{V}_r\right)_1}{dt}\ . \tag{69}$$

Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении, поэтому

$$\overline{a_e} = \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_2}{dt}. \qquad (70)$$

В результате из (67) получаем

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \frac{\left(d\overline{V_r}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_1}{dt}. \qquad (71)$$

Введем обозначение

$$\overline{a_c} = \frac{\left(d\overline{V_r}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_1}{dt}. \qquad (72)$$

Величина a_c, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении, называется *кориолисовым* ускорением точки.

В результате равенство (71) примет вид

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_c} \qquad (73)$$

Формула (73) выражает *теорему Кориолиса о сложении ускорений:*

При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

1.5.3.1 Определение кориолисова ускорения (без доказательства)

Будем считать переносное движение слагающимся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью $\overline{w}$, называемой *переносной угловой скоростью*. Величина $\overline{w}$ от выбора полюса не зависит. Запишем без вывода формулы для правой части уравнения (72)

$$\frac{\left(d\overline{V_r}\right)_2}{dt} = \overline{w} \times \overline{V_r}\,; \qquad \frac{\left(d\overline{V_e}\right)_1}{dt} = \overline{w} \times \overline{V_r}\,.$$

Тогда

$$\overline{a_c} = 2\left(\overline{w} \times \overline{V_r}\right).$$

Таким образом, кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) на относительную скорость точки.

В случае поступательного переносного движения $w = 0$, следовательно

$\overline{a_c} = 0$. Тогда

$$\overline{a_a} = a_r + \overline{a_e}, \tag{74}$$

то есть, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Модуль кориолисова ускорения. Если угол между векторами $\overline{w}$ и $\overline{V_r}$ обозначить через α, то модуль a_c будет равен

$$a_c = 2 \cdot |w| \cdot |V_r| \sin a \tag{75}$$

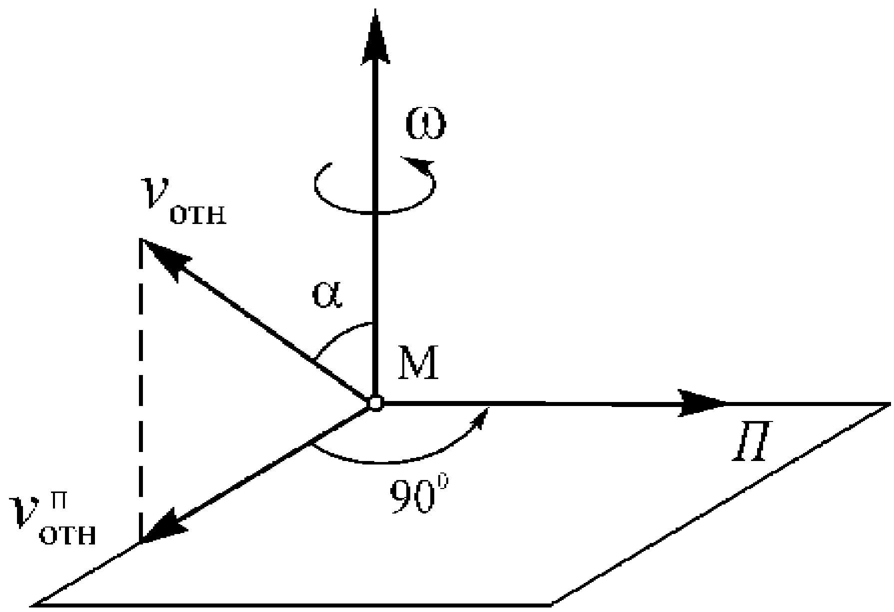


Рисунок 35

Правило Жуковского: модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения;

чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости повернуть на 90° вокруг оси, параллельной оси переносного вращения в направлении этого вращения (рис. 35).

Из формулы (75) видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) когда $w = 0$, то есть когда переносное движение является поступательным;

2) когда $V_r = 0$, то есть когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) когда $a = 0$ или $a = 180°$, то есть. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если вектор $\overline{V_r}$ параллелен этой оси.

Например, если человек идет равномерно вдоль радиуса равномерно вращающейся платформы, то его относительной скоростью является скорость его движения вдоль радиуса, а переносной - скорость той точки платформы,
где он находится в данный момент времени (рис. 36).

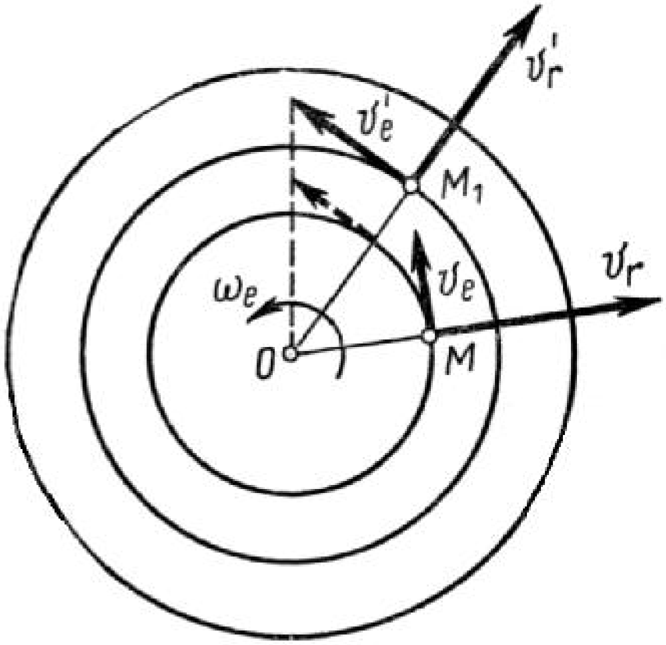


Рисунок 36

Пусть в момент времени t человек занимает положение *M*, а в момент $t+Dt$ - положение M_1.

Так как относительное движение равномерное и прямолинейное, то относительное ускорение человека $\overline{a_r} = 0$. Однако за время *Dt* относительная скорость изменяется по направлению от $\overline{V_r}$ до $\overline{V_r'}$ вследствие вращения подвижной системы (платформы).

За время *Dt* происходит изменение модуля переносной скорости от $V_e = w_e \cdot OM$ до $V_e' = w_e \cdot OM_1$ вследствие относительного перемещения человека из точки *M* в точку M_1.Указанные изменения $\overline{V_r}$ и $\overline{V_e}$ вызывают появление кориолисова ускорения.

Таким образом, кориолисово ускорение характеризует:

1) изменение модуля и направления переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;

2) изменение направления относительной скорости точки вследствие вращательного переносного движения.

1.6 Сложное движение твердого тела

Если тело движется относительно подвижных осей *Oxyz*, а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называют *сложным*.

1.6.1 Сложение поступательных движений

При сложении двух поступательных движений со скоростями $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$ результирующее движение тела также будет поступательным со скоростью

$$\overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2}$$

1.6.2 Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

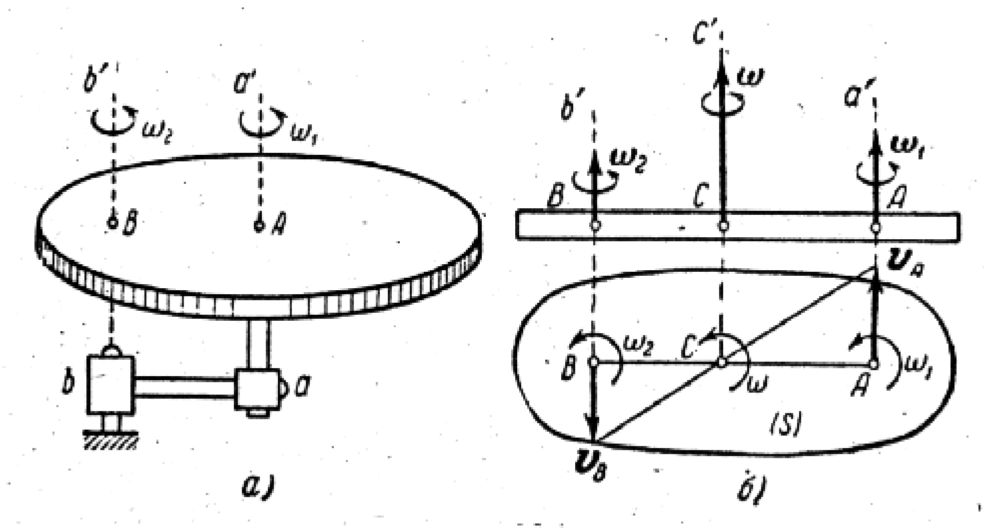


Рисунок 37

1.6.2.1 Вращения направлены в одну сторону

$$V_a = w_2 \cdot AB\,; \qquad V_b = w_1 \cdot AB\,;$$

$$w = \frac{V_b}{BC} = \frac{V_a}{AC}\,; \qquad w = \frac{V_a + V_b}{AB}\,; \qquad w = w_1 + w_2\,;$$

$$\frac{w_1}{BC} = \frac{w_2}{AC} = \frac{w}{AB}.$$

1.6.2.2 Вращения направлены в разные стороны

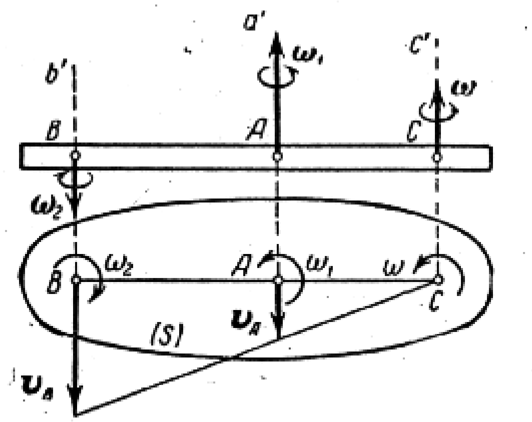


Рисунок 38

$$V_a = w_2 \cdot AB;$$

$$V_b = w_1 \cdot AB.$$

$$w = \frac{V_b}{BC} = \frac{V_a}{AC}; \qquad w = \frac{V_b - V_a}{AB}$$

$$w = w_1 - w_2$$

$$\frac{w_1}{BC} = \frac{w_2}{AC} = \frac{w}{AB}$$

1.6.2.3 Пара вращений (рис. 39)

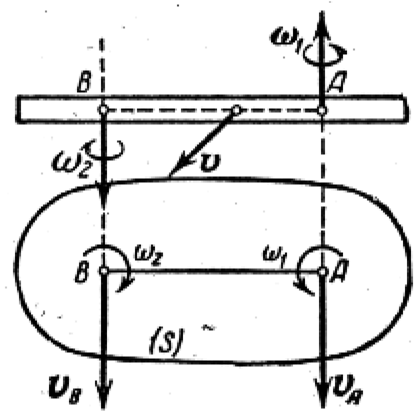


Рисунок 39

$$w_1 = w_2$$

$$V_a = w_2 \cdot AB; \qquad V_b = w_1 \cdot AB;$$

$$V_a = V_b$$

Пара вращений эквивалентна поступательному (или мгновенно поступательному) движению со скоростью $\overline{V}$, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

1.6.3 Сложение вращений вокруг пересекающихся осей (рис.40)

$\overline{V_0} = 0$; $\overline{w}$ - временная угловая скорость тела, направленная по мгновенной оси вращения, проходящей через т.O.

$$\overline{r} = \overline{OM}; \ \overline{V_r} = \overline{w_1} \times \overline{r}; \ \overline{V_e} = \overline{w_2} \times \overline{r}$$

$$\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e} = \left(\overline{w_1} + \overline{w_2}\right) \times \overline{r}; \quad \overline{V_a} = \overline{w} \times \overline{r}; \quad \overline{w} = w_1 + w_2.$$

Следовательно, при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке О, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси О , проходящей через т.О. Угловая скорость

$$\overline{w} = \sum \overline{w_k}$$

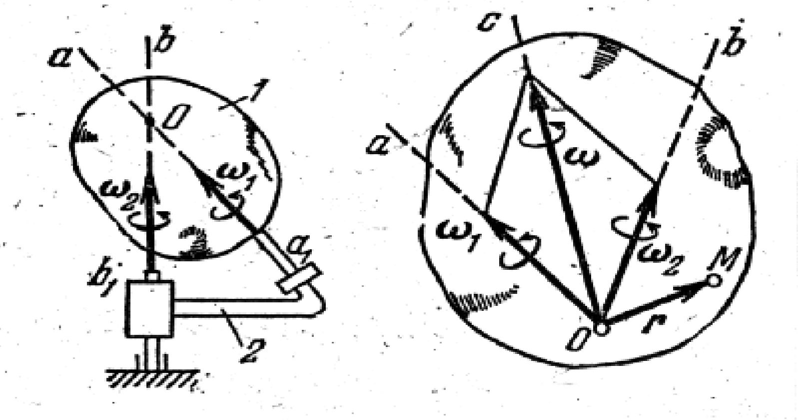
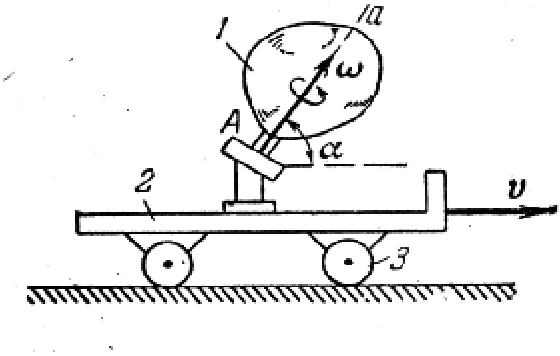


Рисунок 40

1.6.4 Сложение поступательного и вращательного движений (рис.41)



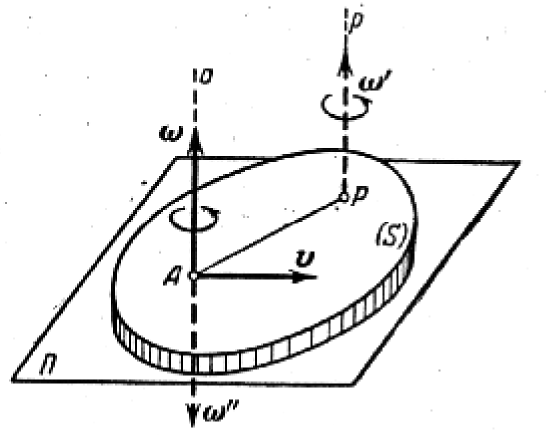


Рисунок 41 Рисунок 42

1.6.4.1 Сложение поступательного и вращательного движений ($\overline{V} \perp \overline{w}$).

Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения ($\overline{V} \perp \overline{w}$). Плоскость $П \perp Aa$. Движение плоскопараллельное. Вектор $\overline{V}$ можно заменить парой угловых скоростей $\overline{w'}$, $\overline{w''}$ беря $\overline{w'} = \overline{w}$, а $\overline{w''} = -\overline{w}$. При этом расстояние АР определяется из равенства $V = w' \cdot AP$, откуда

$$AP = \frac{V}{w};$$

Движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси *Pp* с угловой скоростью $\overline{w'} = \overline{w}$.

1.6.4.2 Сложение поступательного и вращательного движений ($\overline{w} II \overline{V}$).Винтовое движение (рис.43)

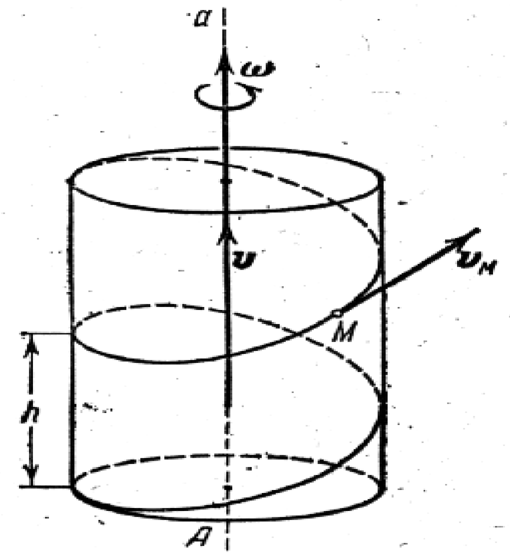


Рисунок 43

Если сложное движение тела слагается из вращения вокруг оси *Aa* с угловой скоростью $\overline{w}$ и поступательного со скоростью $\overline{V}$, направленной параллельно оси Аа, то такое движение тела называют винтовым.

Ось *Aa* называют осью - винта. Когда векторы $\overline{V}$ и $\overline{w}$ направлены в одну сторону, то винт будет правым, если в разные стороны - левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называют шагом h винта. Если $w = const$ и $V = const$, то $wT = 2p$ и $VT = h$, откуда

$$h = 2p\frac{V}{w}$$

где *T* - время одного оборота

$$V_m = \sqrt{V^2 + w^2 r^2}\ ; \qquad tga = \frac{h}{2pr}\ .$$

1.6.4.3 Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения (рис.44)

Сложное движение, совершаемое телом в этом случае, представляет собою общий случай движения свободного твердого тела.

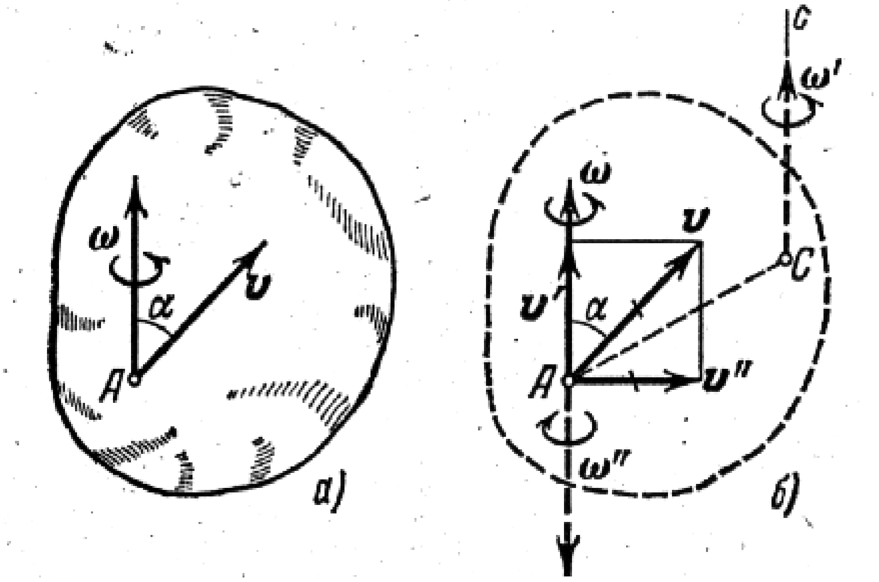


Рисунок 44

Разложим скорость $\overline{V}$ на составляющие

$$\overline{V} = \overline{V'} + \overline{V''} \qquad (V' = V\cos a\,,\ V'' = V\sin a\,).$$

Скорость $\overline{V''}$ можно заменить парой угловых скоростей

$$\overline{w'} = \overline{w} \quad \text{и} \quad \overline{w''} = -\overline{w}\,,$$

после чего векторы $\overline{w}$ и $\overline{w''}$ можно отбросить. Расстояние AC найдем по формуле:

$$AC = \frac{V''}{w} = \frac{V\sin a}{w}\,.$$

Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\overline{w'}$ и поступательное движение со скоростью $\overline{V'}$.Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси Cc с угловой скоростью $w' = w$ и поступательной скоростью $V' = V\cos a$ (рис.44 б). В общем случае движения твердого тела угловая скорость при перемене полюса не изменяется ($\overline{w'} = \overline{w}$), а меняется только поступательная скорость ($\overline{V'} \neq \overline{V}$). Cc - мгновенная винтовая ось. Таким образом, движение свободного твердого тела можно еще рассматривать как слагающееся из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся мгновенных винтовых осей.

2 СТАТИКА

Основные понятия и аксиомы. Сходящиеся силы

В статике твердого тела рассматриваются свойства сил, приложенных к твердому телу. В частности, изучается приведение сложных систем сил к более простому виду, и устанавливаются условия равновесия различных систем сил.

Теоретическая механика, как и всякая другая наука, имеет свои понятия, и определения, которые используются для формулирования ее аксиом и теорем.

Статика базируется на аксиомах, из которых по законам логики, вводя новые понятия, получают все необходимые следствия в удобной для применения форме.

2.1 Основные понятия и определения

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или *неизменяемой механической системой)* называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях. Все тела в природе в той или иной мере деформируемы, но в некоторых задачах деформациями тел можно пренебречь, считая тела твердыми. При рассмотрении движения Земли вокруг Солнца ее можно считать абсолютно твердым телом и даже материальной точкой, хотя в действительности она не твердая, так как на ней есть океаны, воздушная оболочка и т. д.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта на другой, например на твердое тело со стороны других тел.

Меры действия бывают разные. Силой называют ту меру, которая, действуя на пружину динамометра в пределах ее упругости, деформирует эту пружину (сжимает или растягивает) пропорционально действующей силе. Таким образом, силы различной природы определяются через линейную силу упругости.

Сила характеризуется точкой приложения, числовым значением и направлением действия, т.е. является *векторной величиной*. Механическое действие материальных тел друг на друга осуществляется при их соприкосновении (давление стула на пол в местах соприкосновения его ножек с полом) или как действие на расстоянии при посредстве силовых полей (притяжение Луны Землей и т.п.).

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора, например F или P. Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора, т. е. |F|, |P| или те же буквы, но без знака вектора, т. е. F, P.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или в более общем случае - на точки механической системы. Можно рассматривать систему сил, приложенных к одной материальной точке.

Системой сил, эквивалентной нулю (или *равновесной системой сил),* называют такую систему сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях, т. е. если одна система сил приводит твердое тело или материальную точку в какое-то движение, например, из состояния покоя, то другая система сил, эквивалентная первой, сообщит такое же движение. Движения, вызванные действием эквивалентных систем сил, имеют одинаковые характеристики для каждого момента времени.

Условие эквивалентности двух систем сил (F_1, F_2, F_3, ... Fn) и (P_1, P_2, P_3, ... Pn) выражают в форме

$$(F_1, F_2, F_3, \ldots Fn) \equiv (P_1, P_2, P_3, \ldots P_K),$$

где n и k - число сил в системах.

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называют силу, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующая сила обозначается R^*, и условие ее эквивалентности рассматриваемой системе сил (F_1, F_2, F_3, ... Fn) выражается в виде

$$R^* \equiv (F_1, F_2, F_3, \ldots Fn)$$

Равновесная система сил имеет равнодействующую, равную нулю.

Уравновешивающей силой заданной системы сил считается такая сила, добавление которой к заданной дает новую систему, эквивалентную нулю. Если $R^{*\prime}$ является уравновешивающей силой системы сил (F_1, F_2, F_3, ... Fn) то, согласно определению, она удовлетворяет условию

$$(F_1, F_2, F_3, \ldots Fn, R^{*\prime}) \equiv 0$$

В дальнейшем убедимся, что не всякая система сил имеет равнодействующую и уравновешивающую силы. Есть системы сил, которые не находятся в равновесии и не эквивалентны одной силе.

2.2 Аксиомы статики

Справедливость аксиом механики проверяется на опыте как непосредственно, так и по тем следствиям, которые из них получают.

Рисунок 45

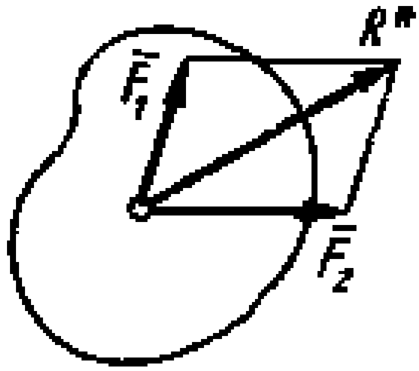


Рисунок 46

I Аксиома о равновесии системы двух сил.

Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по величине и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях (рис. 45).

Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю. Если силы F_1 и F_2 находятся в равновесии, то, естественно, они образуют систему сил, эквивалентную нулю. Действие такой системы сил на покоящееся твердое тело не изменяет состояния покоя этого тела. Аксиома справедлива и для сил, приложенных к одной точке тела или одной материальной точке.

II Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю.

Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил.

Под действием заданной системы сил и новой, полученной после добавления (отбрасывания) равновесной системы сил, тело будет двигаться (или находиться в покое) совершенно одинаково при прочих равных условиях

В частности, к любой системе сил можно добавить (отбросить) простейшую равновесную систему сил, состоящую из двух равных по величине сил, действующих вдоль одной прямой в противоположных направлениях и приложенных в одной или разных точках твердого тела в соответствии с первой аксиомой.

III Аксиома параллелограмма сил.

Две силы, действующие в од ной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 46). Очевидно, справедливо и обратное. Одну силу, приняв за равнодействующую, можно разложить по правилу параллелограмма на две составляющие силы.

Эту аксиому долгое время в истории развития механики пытались доказать и, следовательно, считали теоремой. Тщательный анализ таких доказательств, часто очень остроумных, показал, что для этого обязательно используются положения, принимаемые за аксиомы. Замену двух сил одной равнодействующей силой по правилу параллелограмма называют векторным сложением этих сил:

$$R^* = F_1 + F_2$$

Векторное сложение сил F_1 и F_2 математически выражают так:

$$R^* = \sqrt{F_2^1 + F_2^2 + 2F_2^1 F_2^2 \cos(F_2^1 \,\hat{}\, F_2^2)}$$

Если силы F_1 и F_2 направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то векторное сложение переходит в алгебраическое сложение. Модуль равнодействующей силы R* как величину векторной суммы сил вычисляют по формуле диагонали параллелограмма

Более предпочтительным способом определения числовой величины и направления равнодействующей силы по отношению к каким-либо прямоугольным осям координат является метод проекций, который особенно удобен в случае векторного сложения более чем двух сил. Этот метод рассматривается дальше, при изучении систем сходящихся сил.

IV Аксиома о равенстве сил действия и противодействия - один из основных законов классической механики, сформулированных Ньютоном, -утверждает:

всякой силе действия есть равная, но противоположная сила противодействия. По отношению к двум материальным точкам эта аксиома утверждает, что *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.*

Материальные точки при этом могут взаимодействовать как через посредство силовых полей, т. е. на расстоянии, так и путем соприкосновения друг с другом, если их считать твердыми телами очень малых размеров.

В статике эту аксиому применяют для твердых тел. Силы взаимодействия двух твердых тел (при взаимодействии путем соприкосновения или на расстоянии при посредстве силовых полей) равны по модулю и противоположны по направлению. Силы действия и противодействия всегда приложены к разным телам или к различным взаимодействующим точкам одного и того же тела.

Таким образом, в природе силы встречаются всегда по две: силы действия и противодействия.

V Аксиома связей.

Связью для твердого тела или материальной точки называют материальные объекты (тела и точки), которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого твердого тела или материальной точки.

Аксиома связей утверждает, что *всякую* связь *можно отбросить и заменить силой, реакцией связей (в простейшем случае) или системой сил (в общем случае).*

Эта аксиома фактически уже содержится в определении силы, но в истории развития механики это не было осознано сразу. Длительное время после формулировки Ньютоном основных законов классической механики их применение к несвободным твердым телам и механическим системам

а б)

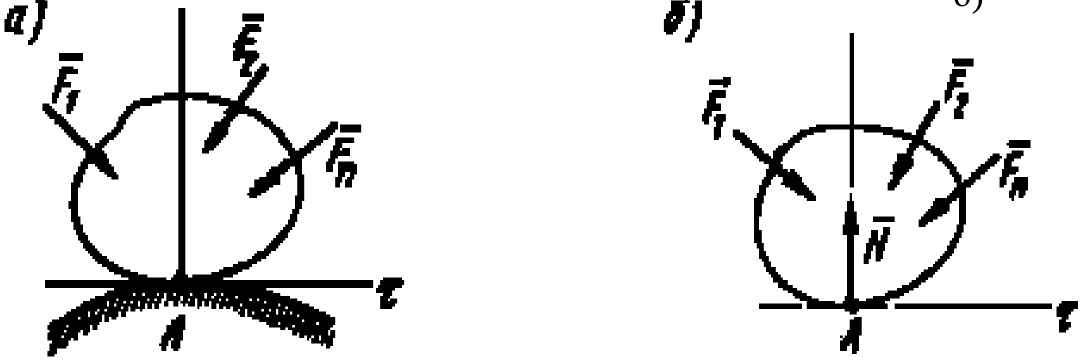


Рисунок 47

встречалось с трудностями, пока не была дополнительно сформулирована аксиома связей. Учитывая большое значение аксиомы связей для дальнейшего изложения теоретической механики, оставим эту аксиому как самостоятельную.

Почти все теоремы и окончательные результаты теоретической механики формулируются для материальной точки или твердого тела, освобожденных от связей, т. е. когда связи заменены силами реакций связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять отброшенные связи силами реакций связей. Это одна из главных задач при изучений статики, которой следует уделить наибольшее внимание.

Силы реакций связей для рассматриваемого тела или точки зависят, прежде всего, от приложенных сил и от вида связей. При движение силы реакций связей зависят еще и от характеристик движения.

Так, при движении тела в воздухе сила реакции воздуха на движущееся тело зависит от скорости движения тела относительно воздуха.

Приведем примеры связей и их замены силами реакций связей. Если связью для твердого тела (рис. 47, *а)* является абсолютно гладкая поверхность другого тела, то сила реакции такой поверхности, если соприкосновение происходит в одной точке, направлена по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей тел независимо от сил, приложенных к рассматриваемому телу (рис. 47, *б).*

Сила реакции связи *N* направлена в сторону, противоположную направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела. Числовое значение силы реакции при равновесии определяется приложенными телу силами, которые в отличие от сил реакций связей часто называют *активными* силами.

Если соприкосновение происходит не в одной точке, а по некоторой площади поверхности, то реакция такой связи сводится к системе распределенных по поверхности сил, которые в некоторых случаях удается заменить одной равнодействующей силой реакции связи. В общем случае система распределенных сил может не иметь равнодействующей.

В тех случаях, когда сила реакции связей не только по модулю, но и по направлению зависит от приложенных сил, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие параллельно осям координат.

Через составляющие легко определяется как модуль силы реакции, так и ее направление.

Неизвестную по модулю и направлению силу реакции создают цилиндрический (плоский) и шаровой шарниры. Пусть имеем балку FB, находящуюся в равновесии под действием силы F и закрепленную на одном конце о помощью цилиндрического шарнира A, а, на другом – катковой опоры B (рис. 48, а).

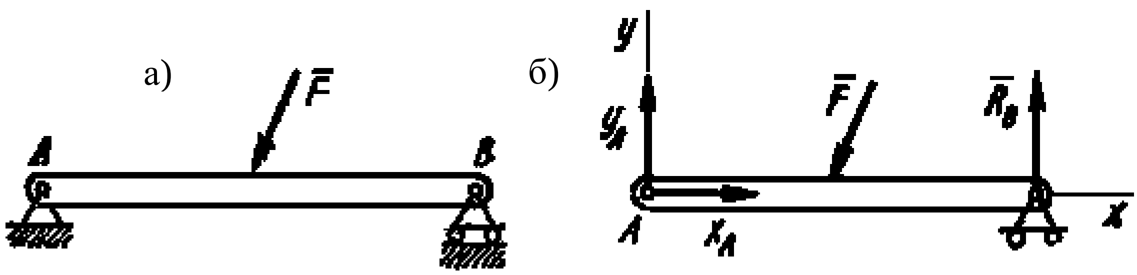


Рисунок 48

Цилиндрическим шарниром называют устройство, позволяющее балке поворачиваться в плоскости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Устройство катковой опоры ясно из рисунка.

На рис. 48, б показана та же балка после освобождения от связей. Сила реакции катковой опоры направлена по нормали к общей касательной, если поверхности соприкосновения гладкие. Неизвестная по модулю и направлению реакция цилиндрического шарнира разложена на две составляющие X_A и Y_A предположительно направленные в положительном направлении осей координат.

В случае шарового шарнира силу реакции раскладывают на три составляющие, параллельные осям координат.

Гибкие связи (канаты, тросы, нити) дают силы реакции связей (силы натяжения), направленные по касательной к гибкой связи.

На рис. 49, а, б сила натяжения нити S заменяет действие нити на груз. На рис. 50, а, б показаны силы натяжения провода в сечениях А и В, действующих на часть провода АВ.

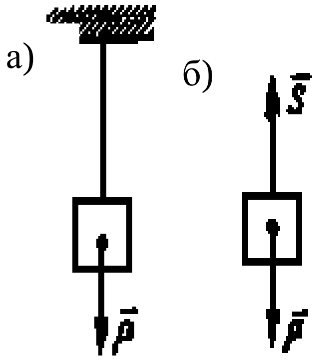


Рисунок 49

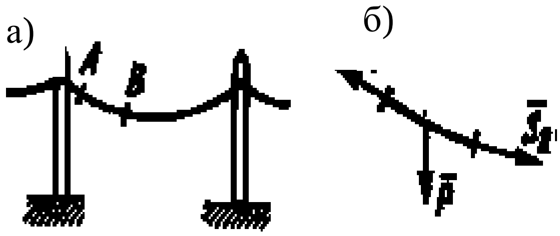


Рисунок 50

Для рассмотрения различных систем сил необходимо ввести понятия алгебраического и векторного моментов силы относительно точки и момента силы относительно оси. Введем эти характеристики действия силы на твердое тело и рассмотрим их свойства.

2.3 Момент силы относительно точки и оси.

2.3.1 Алгебраический момент силы относительно точки

При рассмотрении плоской системы сил, приложенных к твердому телу, используется понятие алгебраического момента силы относительно точки.

Плечом h силы F относительно точки называют кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т.е. длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы F.

Обозначим Mo(F) или Mo алгебраический момент силы F относительно точки O. Тогда

$$Mo(F)=\pm Fh \qquad (76)$$

Если сила стремится вращать тело вокруг моментной точки (точки, относительно которой вычисляют алгебраический момент силы) против часовой стрелки, то берем знак плюс, если по часовой стрелке - знак минус.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки этой точки (рис. 51), взятое со знаком плюс или минус.

Алгебраический момент силы представляет собой произведение силы на длину (в СИ - Н·м).

Из определения алгебраического момента силы относительно точки следует, что он не зависит от переноса силы вдоль ее линии действия.

Алгебраический момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.

Сумма алгебраических моментов относительно точки двух равных по величине, но противоположных по направлению сил, действующих вдоль одной прямой, равна нулю.

Численно алгебраический момент относительно точки равен удвоенной пло

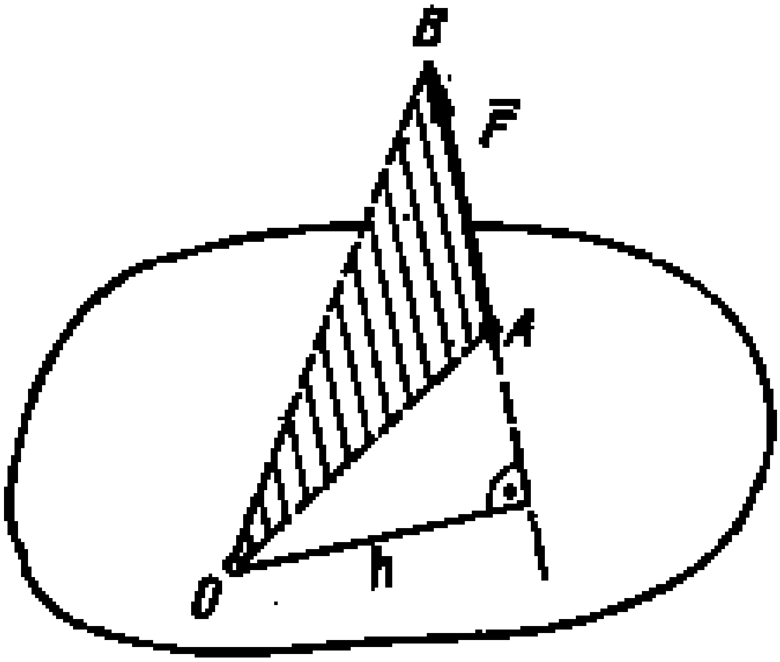


Рисунок 51

щади треугольника, построенного на силе *AB* и моментной точке:

$$Mo\,(F) = 2\ \text{пл.}\ \Delta OAB. \qquad (77)$$

2.3.2 Векторный момент силы относительно точки

При рассмотрении пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, применяется понятие векторного момента силы относительно точки.

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо силы относительно этой точки.

Векторный момент силы направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка, таким образом, что с его конца можно видеть стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки (рис. 52).

Плечом h силы относительно точки O называют кратчайшее расстояние от этой точки до линии действия силы.

Условимся векторный момент силы F относительно точки O обозначать Mo(F), а его числовую величину |Mo(F)|. Тогда, согласно определению,

$$|Mo(F)| = Fh.$$

Как и для алгебраического момента, векторный момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и моментной точке:

$$|Mo(F)| = 2\ \text{пл.}\ \Delta OAB. \qquad (78)$$

Справедлива формула Mo (F) = r x F, где r - радиус-вектор, проведенный из моментной точки O в точку приложения силы или любую другую точку линии действия силы.

Чтобы убедиться в справедливости формулы (78), достаточно показать, что r x F по величине и направлению выражает векторный момент силы относительно точки O, если для построения векторного произведения силу F перенести параллельно самой себе в точку *O*.

По определению векторного произведения двух векторов известно, что

$$| r \times F| = Fr \sin\ (r, F)$$

Как показано на рис. 52, r sin (r, F) = Fh, причем это равенство справедливо для любой точки линии действия, куда проведен радиус вектор r. Итак,

$$| r \times F| = F h,$$

что совпадает с векторным моментом силы относительно точки *O*.

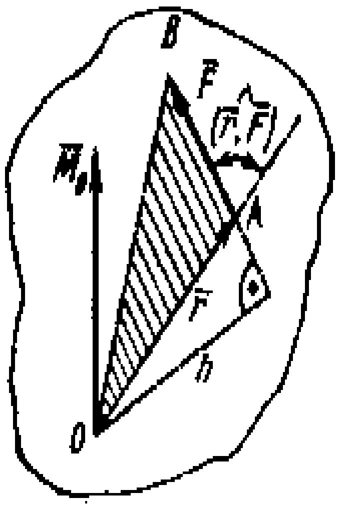


Рисунок 52

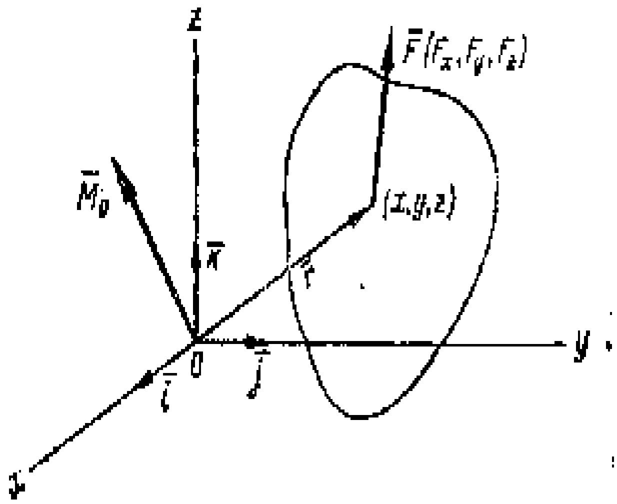


Рисунок 53

Вектор r xF, как известно, перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы r и F, т. е. плоскости треугольника OAB которой перпендикулярен и векторный момент Mo (F).

Направление r x F тоже совпадает с направлением Mo (F). Заметим, что векторный момент силы относительно точки считается вектором, приложенным к этой точке.

Векторный момент силы относительно точки не изменяется от переноса силы вдоль ее линии действия. Он станет равным нулю, если линия действия силы пройдет через моментную точку.

Если сила F дана своими проекциями Fx, Fy, Fz на оси координат и даны координаты x, y, z точки приложения этой силы (рис. 53), то векторный момент относительно начала координат, согласно формуле (78), после разложения по осям координат вычисляем по формуле

$$\boldsymbol{Mo(F)} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix} = (yFz - zFy)\boldsymbol{i} + (zFx - xFz)\boldsymbol{j} + (zFy - yFx)\boldsymbol{k} \qquad (79)$$

где i, j, k — единичные векторы, направленные по осям координат.

Используя формулу (79), можно выделить проекции Mo (F) на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} Mox(F) &= yFz - zFy \\ Moy(F) &= zFz - xFz \\ Moz(F) &= xFy - yFx \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Модуль векторного момента Mo(F) определяем по формуле

$$|Mo(F)| = \sqrt{(yFz - zFy)^2 + (zFx - xFz)^2 + (xFy - yFx)^2} \tag{81}$$

В формуле (81) числовую величину вектора |Mo(F)| берем со знаком плюс.

2.3.3 Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называют алгебраический момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 54).

Момент силы относительно оси считается положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси (проекция силы на плоскость является вектором), стремится вращать тело вокруг положительного направления оси против часовой стрелки, и отрицательным, если она стремится вращать тело по часовой стрелке.

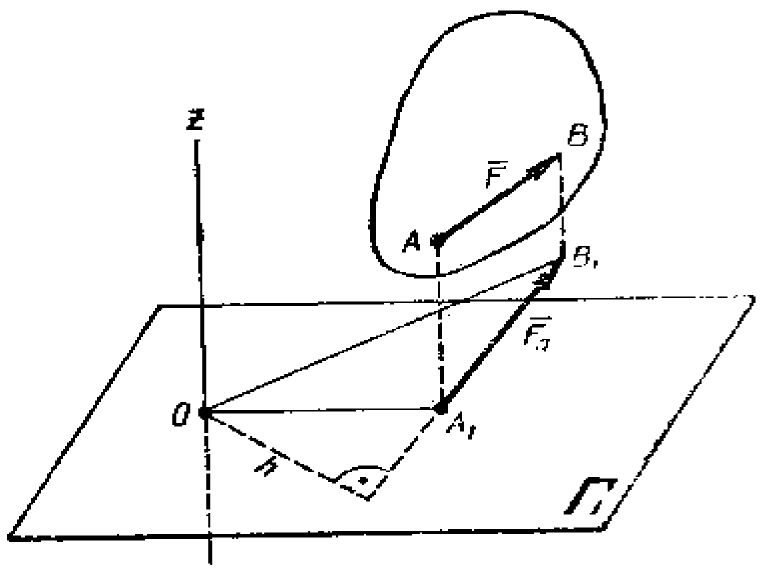


Рисунок 54

Момент силы, например, относительно оси Oz обозначим Mo (F).
По определению,

$$Mz\ (F) = Mo\ (Fn) = \pm\ hFn \tag{82}$$

где Fn - вектор проекции силы F на плоскость /7, перпендикулярную оси 0z, а точка O - точка пересечения оси Oz с плоскостью /7.

Из определения момента силы относительно оси следует, что введенный выше алгебраический момент силы относительно точки можно считать моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку, перпендикулярно плоскости в которой лежат сила и моментная точка.

Момент силы относительно оси можно выразить через площадь треугольника, построенного на проекции силы Fn и точка пересечения 0 оси с плоскостью:

$$M_Z(F) = \pm hFn = \pm 2 \text{ пл. } \Delta AO_1B_1. \qquad (83)$$

Из формулы (83) можно получить следующие важные свойства момента силы относительно оси.

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси.

2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает эту ось. В этом случае линия действия проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, проходит через точку пересечения оси Q плоскостью и, следовательно, равно нулю плечо силы Fп относительно точки О.

В обоих этих случаях ось и сила лежат в одной плоскости. Объединяя их, можно сказать, что *момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости*

.

2.3.3.1 Связь момента силы относительно оси с векторным моментом силы относительно точки на оси

Используя формулу (84), имеем (рис. 55)

$$|Mz(F)| = 2 \text{ пл. } \Delta OA_1B_1 \qquad (84)$$

Векторный момент силы ***F*** относительно точки О, взятой на пересечении оси ***0z*** с перпендикулярной плоскостью /7, выражается в виде.

$$|Mo(F)| = 2 \text{ пл } DOAB \qquad (85)$$

Векторный момент Мо (F) направлен перпендикулярно плоскости треугольника *OAB*. Аналогично для другой точки O_1 осн *Ог*

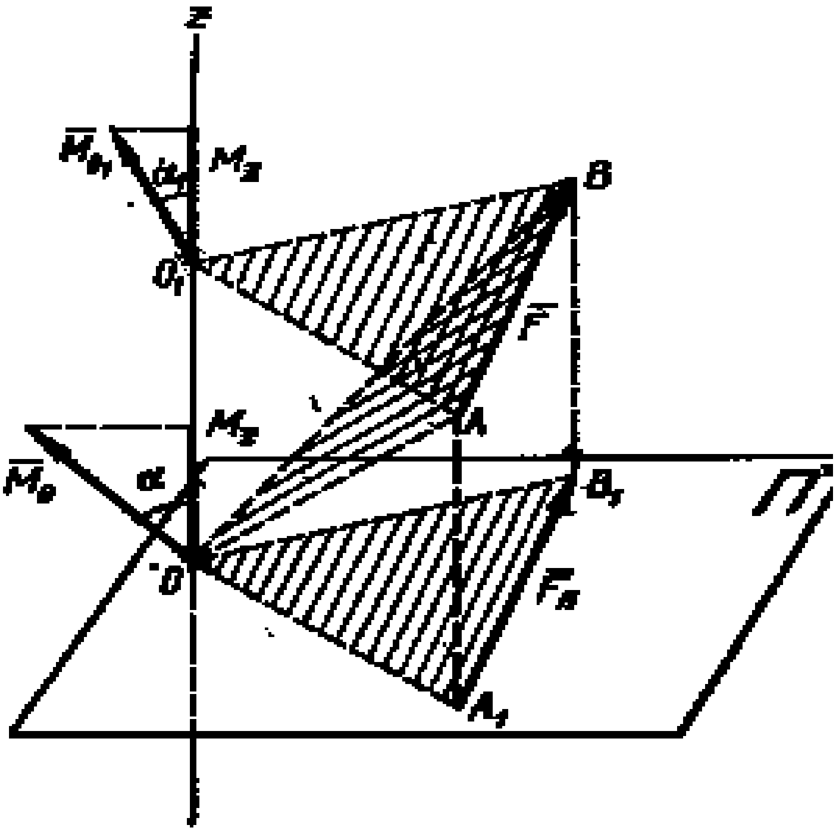
$$|Mo_1(F)| = 2 \text{ пл } DOA_1B_1 \qquad (86)$$

причем векторный момент *Mo(F)* направлен перпендикулярно плоскости треугольника O_1AB.

Треугольник OA_1B_1 является проекцией треугольников *OAB* и O_1AB на плоскость /7.

Из геометрии известно, что площадь проекции плоской фигуры равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостями, в которых расположено эти фигуры.

Угол между плоскостями измеряется углом между перпендикулярами к этим плоскостям.



Перпендикулярок плоскости треугольника OA_1B_1 является ось Ог, а перпендикулярами к плоскостям треугольников *OAB* и *O_1AB* – соответственно векторные моменты Mo (F) и |Mo_1(F)|. Таким образом, пл.ΔOA_1B_1 = пл.$\Delta OAB\cos\alpha$ ос, где α - угол между вектором Mo {F) и осью Oz

Отсюда по формулам (84) и (85)

Mz (F) = | (Mo (Fo)| cos α = Moг (F),

причем знак *Mг {F)* полностью определяется знаком cos *a*.

Аналогично, пл. *DOA_1B_1* = пл. *DO_1AB* cos *a_1*, т. е.

$$Mz\ (F) = |\ (Mo_1\ (F)|\ \cos.\ \alpha_1 = Mo_1г\ (F), \qquad (88)$$

где 0_1 — любая точка на оси *Oz.*

Формулы (87) и (88) отражают искомую связь между моментом силы относительно оси и векторными моментами силы относительно точек, лежащих на этой оси: *момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы относительно любой точки на оси.*

Эту зависимость между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно точки на оси можно принять за определение момента силы относительно оси.

2.3.3.2 Формулы для моментов силы относительно осей координат

Используя связь момента силы относительно оси с векторным моментом силы относительно точки па оси, можно получить формулы для вычисления моментов относительно осей координат, если даны проекции силы на оси координат и координаты точки приложения силы.

Для оси *Ox* Mx (F) = Mox (F).

Согласно (5), Mo = yF_z — zF_y

Следовательно,

$$Mx(F) = yF_z — zF_y \qquad (89)$$

$$My(F) = zF_x — xF_z$$

$$Mz(F) = xF_y — yF_z$$

По формулам (89) можно вычислить моменты силы относительно прямоугольных осей координат.

По этим формулам получаются необходимые знаки для

$$Mx\{F), \quad My (F), \quad Mz (F),$$

если проекции силы F_x, F_y, F_z на оси координат и координаты x, *у, г* точки приложения силы подставлять в них со знаками этих величин.

При решении задач момент силы относительно оси часто получают, используя его определение, т. е. проецируя силу на плоскость, перпендикулярную оси, и вычисляя затем алгебраический момент этой проекции относительно точки пересечения оси о этой плоскостью.

2.4 Приведение двух параллельных сил. Теория пар сил

2.4.1 Приведение двух параллельных сил к равнодействующей

Приведение двух сил, у которых линии действия параллельны, к одной силе - равнодействующей, или сложение этих сил, позволяет получить способ приведения любой системы параллельных сил к простейшему виду.

Кроме того, сложение двух равных по модулю, но противоположных по направлению параллельных сил приводит к введению понятия пары сил.

2.4.1.1 Параллельные силы, направленные в одну сторону

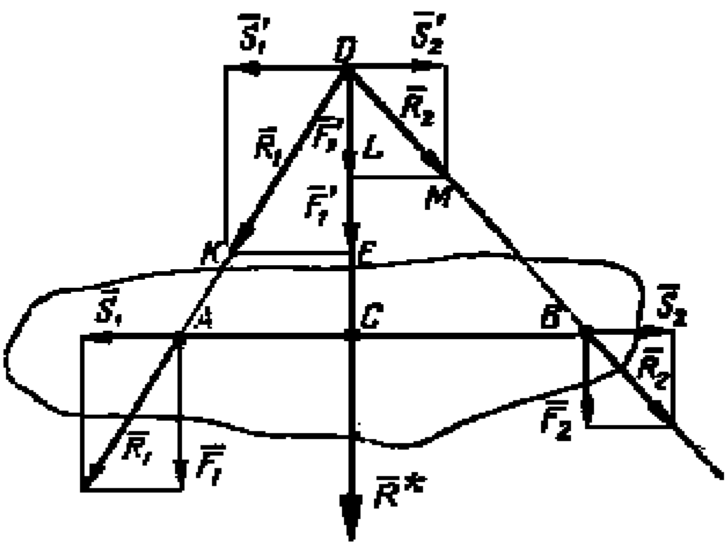


Рисунок 56

Пересечем линии действия параллельных сил F_1 и F_2 приложенных к твердому телу, прямой АВ и перенесем их в точки пересечения этой прямой с линиями действия сил (точки А и В на рис. 56).

Приложим в точках А и В равные по модулю, но противоположные по направлению силы S_1 и S_2, образующие систему сил, эквивалентную нулю.

Сложив отдельно силы по правилу параллелограмма в точках А и В, получим две силы R_1 и R_2 линии действия которых пересекутся в точке D.

После переноса этих сил в точку D разложим каждую из них на две составляющие по направлениям, параллельным силам F_1 и F_2 и прямой АВ. Получим составляющие силы, соответственно одинаковые по модулю и направлению силам в точках *A* и *B* до их сложения, т. е.

$$S_1` = S_1 ,\ S_2` = S_2 ,\ F_1` = F_1 ,\ F_2` = F_2 ,$$

Отбросив систему сил ($S_1`$, $S_2`$), эквивалентную нулю, получим две силы $F_1`$, $F_2`$, действующие вдоль одной прямой DC параллельно направлению заданных сил F_1 и F_2

Равнодействующая таких сил R^* равна по модулю сумме сил F_1 и F_2 и направлена по DC:

$$R^* = F_1` + F_2` = F_1 + F_2$$

Сила R* и будет равнодействующей заданных параллельных сил F_1 и F_2. Из подобия треугольников KDE и ADC, MDL и BDC

$$\frac{AC}{DC} = \frac{S_1^Б}{F_1^Б} = \frac{S_1}{F_1}; \qquad \frac{BC}{DC} = \frac{S_2^Б}{F_2^Б} = \frac{S_2}{F_2};$$

Разделив левые и правые части этих соотношений друг на друга, получаем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_{21}}{F_1}$$

Образовав производную пропорцию, окончательно имеем

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}, \qquad \text{где} \quad R^* = F_1 + F_2$$

Таким образом, *две параллельные силы, направленные в одну сторону имеют равнодействующую силу, параллельную им, равную по модулю их сумме и направленную в ту же сторону. Линия действия равнодействующей силы расположена между линиями действия заданных сил и делит отрезок прямой между линиями действия этих сил на части, обратно пропорциональные силам, внутренним образом.*

Если две параллельные силы, направленные в одну сторону, можно заменить одной равнодействующей, то и любую силу можно разложить на две параллельные ей силы, направленные в одну сторону.

Применяя последовательно правило приведения двух параллельных сил, направленных в одну сторону, к любой системе параллельных сил (направленных в одну сторону), можно привести эту систему к одной равнодействующей силе.

2.4.1.2 Неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны

Пусть сила F_1 больше силы F_2 Разложим силу F_2 на две параллельные силы R* и F_2\`, направленные в одну сторону (рис. 57). Возьмем силу $F_2$\`, равную силе F_2 и приложим ее в точке B, где приложена сила F_2. Тогда силу R* определим по формуле (91);

$$F_1 = R^* + F_2 \qquad (90)$$

откуда

$$R^* = F_2 = F_1 \qquad (91)$$

Точку приложения C силы R* определим по формуле (90), где равнодействующей силой для сил R* и F_2\` является сила F_1.

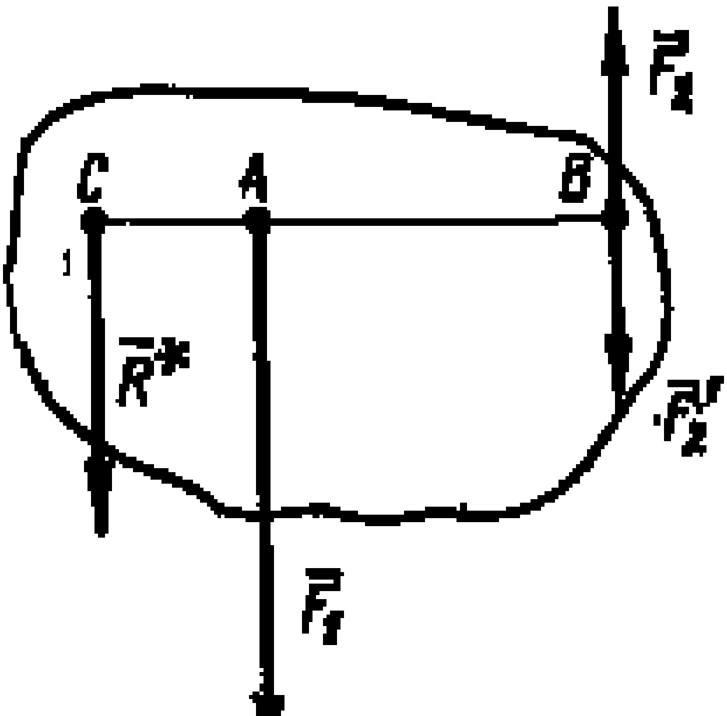


Рисунок 57

Окончательно

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}, \qquad (92)$$

где

$$R^* = F_1 - F_2,. \qquad (93)$$

Таким образом, система сил {F_1 , F_2 } эквивалентна одной силе R*, которая и является равнодействующей этих сил.

Равнодействующую силу определим по формуле (93), а точку С пересечения ее линии действия о продолжением отрезка прямой *АВ* - по формуле (92).

Итак, *две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны, приводятся к равнодействующей силе, параллельной им, равной их разности и направленной в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей расположена за линией действия большей силы и делит отрезок прямой между линиями действия заданных сил на части, обратно пропорциональные силам, внешним образом.*

Если две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны, можно заменить одной равнодействующей силой, то и любую силу можно разложить на две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны.

2.5 Пары сил

2.5.1 Пара сил и алгебраический момент пары сил

Пару сил в механике рассматривают как одно из основных понятий наряду о понятием силы.

Парой сил называют систему двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 58).

Пару сил можно рассматривать как предельный случай двух неравных параллельных сил, направленных в противоположные стороны, когда сила F_1 по модулю стремится к силе F_2.

По формуле (93), $R^* = F_1 - F_2 = 0$

По формуле (92) АС и ВС равны бесконечности, т. е. точка С находится в бесконечности

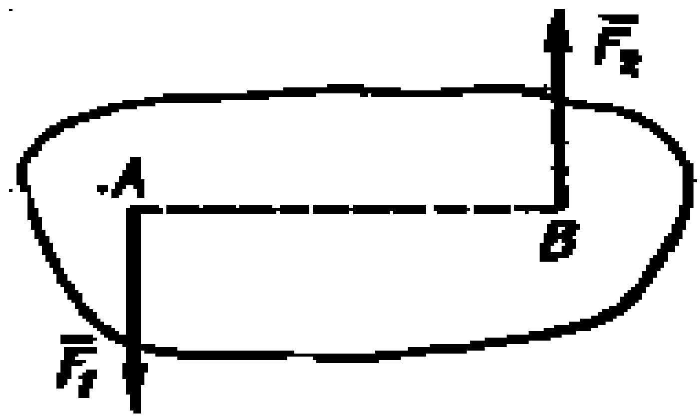


Рисунок 58

Таким образом, в этом предельном случае равнодействующая сила равна нулю, а ее точка приложения находится в бесконечности.

Но пара сил не составляет системы сил, эквивалентной нулю.

Известно, что под действием пары сил свободное твердое тело выходит из равновесия.

Обычно пару сил (F_1 , F_2) прикладывают к телу, которое должно вращаться, например к маховику вентиля при его закрывании и открывании (рис. 59). Поэтому пару сил нельзя заменить одной силой и, следовательно, она не имеет равнодействующей, а является такой системой сил, упростить которую нельзя. Каждая из сил, входящих в состав пары сил, имеет свойства обычных сил.

Пара сил, действующая на твердое тело, характеризуется прежде всего плоскостью действия, аналогично тому, как сила характеризуется линией действия. *Плоскостью действия пары сил* называют плоскость, в которой расположены силы пары.

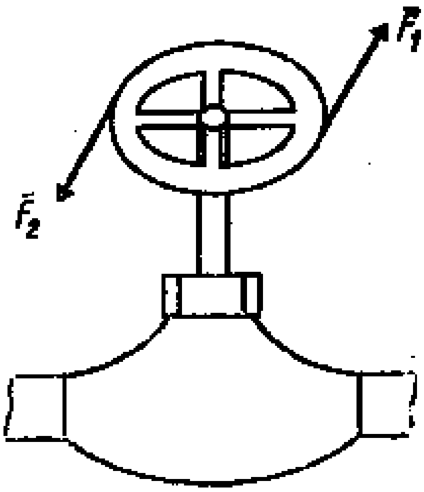


Рисунок 59

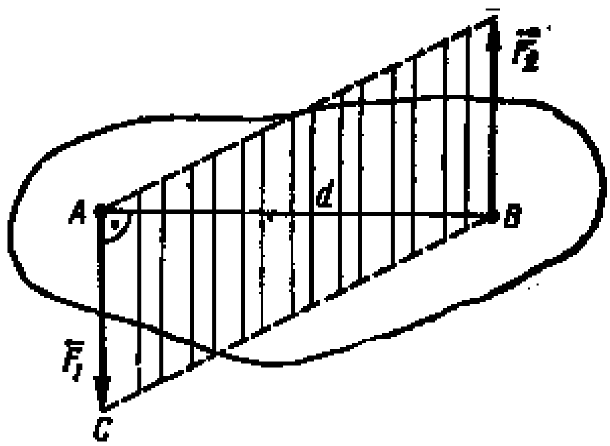


Рисунок 60

Для количественной характеристики действия пары сил на твердое тело и указания направления, в котором пара сил стремится вращать тело в плоскости действия, введем понятие алгебраического момента пары сил.

Алгебраическим моментом пары сил называют взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары сил *Плечом пары сил* d называют кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (рис. 60).

Алгебраический момент пары обозначим *M* или *M* (F_1 , F_2). Согласно определению,

$$M = M (F_1, F_2). = \pm Fd \qquad (94)$$

Алгебраический момент пары сил выражается в тех же единицах, что и алгебраический момент силы относительно точки.

Алгебраический момент пары сил имеет знак плюс, если пара сил стремится вращать тело против часовой стрелки, и знак минув, если пара сил стремится вращать тело по часовой стрелке.

Алгебраический момент пары сил не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, если линии действия сил пары совпадают, т. е в случае двух равных по модулю, не противоположных по направлению сил, действующих вдоль одной прямой. Такая система двух сил, как известно, эквивалентна нулю. Алгебраический момент пары сил численно равен площади параллелограмма, построенной на силах пары:

$$M = M(F_1, F_2). = \pm \text{пл.} \square ABCD = \pm 2 \text{ пл. } \Delta ABC = .\pm 2 \text{ пл. } \Delta ABD$$

2.5.2 Теорема об эквивалентности двух пар сил, расположенных в одной плоскости

Докажем, что пары сил, расположенные в одной плоскости, по своему действию на тело отличаются одна от другой только алгебраическими моментами.

Две пары сил называют эквивалентными, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях.

Докажем теперь следующую теорему об эквивалентности двух пар сил: *пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент*. Иначе: две пары сил, расположенные в одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты.

Пусть на твердое тело действует пара сил (F_1, F_2) с алгебраическим моментом M (рис. 61). Перенесем силу F_1 в точку O_1, а силу F_2 в точку O_2 и проведем через точки O_1, и O_2 две любые параллельные прямые, пересекающие линии действия сил пары и лежащие, следовательно, в плоскости действия заданной пары сил. Соединив прямой точки O_1 и O_2, разложим силы F_1 в точке O_1 и F_2 в точке O_2 по правилу параллелограмма, как указано на рис. 61. Тогда

$$F_1 = F_1` + F_1``;\ F_2 = F_2` + F_2``$$

Так как силы F_1 и F_2 образую пару сил, то

$$F_1 = -F_2$$

и следовательно $\quad F_1` = -F_2`;\ F_1`` = -F_2``$

Итак, $(F_1, F_2) \equiv (F_1`, F_1``, F_2`, F_2``) \equiv (F_1`, F_2`)$, так как $(F_1``, F_2``) \equiv 0$ следовательно, эту систему двух сил можно отбросить

Таким образом,

заданную пару сил (F_1, F_2) заменим другой парой сил ($F_1`$, $F_2`$).

Докажем, что алгебраические моменты у этих пар сил одинаковы. Направление вращения у них одно и то же. Имеем

$$M = M(F_1, F_2) = 2 \text{ пл. } \Delta O_1O_2A$$

$$M` = M(F_1`, F_2`) = 2 \text{ пл. } \Delta O_1O_2B$$

Но пл. DO_1O_2A = пл. DO_1O_2B, так как эти треугольники имеют общее основание O_1O_2 и равные высоты (их вершины расположены на общей прямой, параллельной основанию)

Таким образом, теорема доказана и можно сделать следующие выводы.

а) пару сил как жесткую фигуру можно как угодно поворачивать и переносить в ее плоскости действия;

б) у пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом алгебраический момент пары и плоскость действия.

Эти операции над парами сил не изменяют их действия на твердое тело.

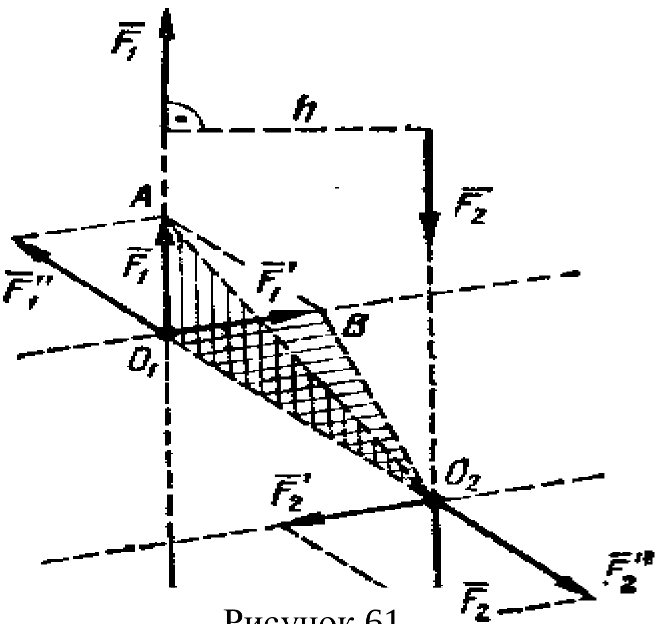


Рисунок 61

Рис. 29

2.5.3 Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость

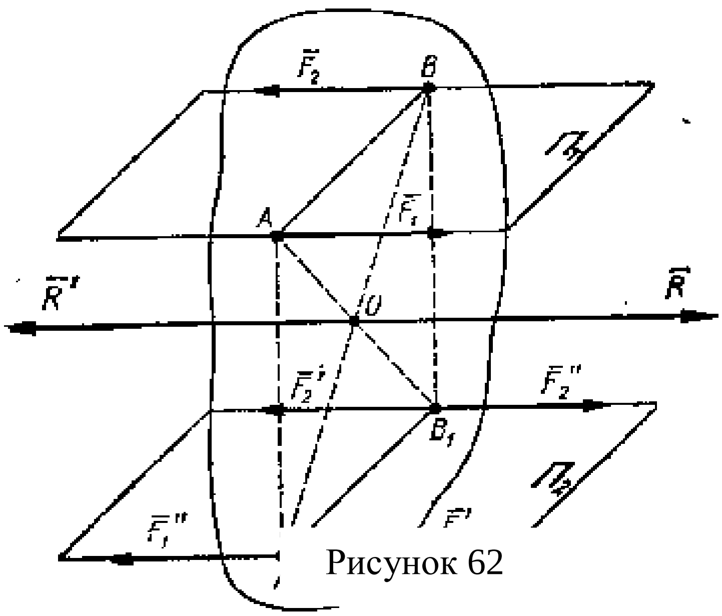


Рисунок 62

Рис. 30

Действие пары сил на твердое тело не изменяется от переноса этой пары сил в параллельную плоскость (рис. 62).

Для доказательства этой теоремы к паре сил (F_1, F_2) в точках A_1 и B_2 где перпендикуляры, опущенные из точек А и В плоскости $П_1$ пересекаются параллельной ей плоскостью ей плоскостью $П_2$, приложим две системы сил

($F`_1$, $F`_2$) и ($F``_1$, $F``_2$), каждая из которых эквивалентна нулю, т. е.

$$F_1` = F_2`; \quad F_1`` = F_2``$$

Выберем силы $F_1`$ и $F_2`$ так, чтобы они удовлетворяли условиям .

$$F_1` = F_1; \quad F_2` = F_2$$

Сложим две равные и параллельные силы F_1 и $F_2``$. Их равнодействующая R параллельна этим силам, равна их сумме и приложена посередине отрезка AB_1 в точке О, так как складываются равные параллельные силы.

Равнодействующая R' двух равных параллельных сил F_2 и F_1'' тоже равна их сумме, параллельна им и приложена на средине отрезка BA_1, т. е. в точке 0, где пересекаются диагонали прямоугольника ABA_1B_1.

Так как R = - R', то система сил (R, R') эквивалентна нулю и ее можно отбросить.

Таким образом, пара сил (F_1, F_2) эквивалентна такой же паре сил (F_1', F_2'), но лежащей в другой, параллельной плоскости.

Пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно перенести из одной плоскости в другую, параллельную ей.

2.5.4 Векторный момент пары сил

Пару сил, приложенную к твердому телу, можно охарактеризовать плоскостью действия, моментом пары сил и направлением вращения пары. Все эти элементы пары сил в пространстве можно выразить одной векторной величиной — векторным моментом пары сил.

Векторным моментом пары сил назовем вектор, числовая величина которого равна произведению силы пары на ее плечо. Векторный момент пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия пары сил так, чтобы можно было видеть стремление пары сил вращать тело против часовой стрелки.

Векторный момент пары сил условимся временно прикладывать посередине отрезка, соединяющего точки приложения сил пары (рис. 63). Его можно прикладывать также, как будет доказано, в любой точке тела. на которое действуют пара сил. Векторный момент пары сил (F_1, F_2) обозначим М или М (F_1, F_2). Согласно определению, числовое значение векторного момента пары сил |M| совпадает с модулем алгебраического момента пары сил и, следовательно, $|M| = hF_1 = hF_2$, где h — плечо пары сил.1

Векторный момент пары сил численно выражается площадью параллелограмма, построенного на силах пары:

$$|M| = M = hF_1 = \text{пл.} \square\ ACBD.$$

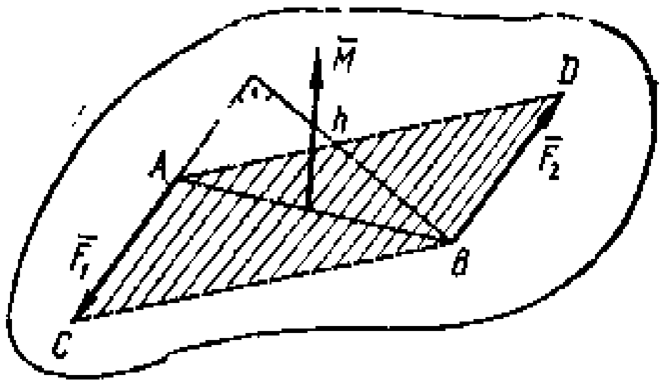


Рисунок 63

Отметим простейшие свойства векторного момента пары сил: его числовая величина не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия, и он может равняться нулю, если одна из сторон параллелограмма *ACBD* превратится в точку, т. е. плечо пары или сила пары становится равной нулю.

Векторный момент пары сил можно выразить в виде векторного произведения двух векторов:

$$M = AB \times F_1 = BA \times F_2 \tag{95}$$

Действительно,

$$| AB \times F_2 | = F_2\ AB \sin (AB\ \ F_2), \text{ но}$$

$$AB \sin (AB\ \ F_2) = h \qquad \text{и, следовательно,}$$

$$| AB \times F_2 | = F_2\, h$$

что совпадает с модулем векторного момента пары сил.

Направления векторных произведений $AB \times F_2$ и $BA \times F_1$ перпендикулярны плоскости, где лежат сомножители векторных произведений, а следовательно, и плоскости действия пары сил. Они совпадают с направлением векторного момента пары сил *M.*

2.5.5 Эквивалентность пар сил

Сформулируем условия эквивалентности двух пар сил, используя наиболее общую характеристику пары сил - ее векторный момент.

Известно, что пару сил можно как угодно поворачивать и переносить в плоскости ее действия; действие пары сил на твердое тело не изменяется, если алгебраический момент пары сил остается таким же.

Следовательно, векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку твердого тела, лежащую в плоскости действия пары сил. Так как к тому же пару сил можно переносить в параллельную плоскость, то векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела, не изменяя действия пары сил на твердое тело.

Поэтому *векторный момент пары сил, действующей на твердое тело, есть свободный вектор,* т. е. он характеризуется только модулем и направлением, а точкой приложения у него может быть любая точка тела; следовательно, векторный момент пары сил не обязательно прикладывать посередине отрезка, соединяющего точки приложения сил пары.

Итак, *две пары сил, действующие на одно и то же твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты.*

2.5.6 Теорема о сумме моментов сил пары

Сумма векторных моментов сил, входящих в состав пары, относительно любой точки не зависит от выбора точки и равна векторному моменту этой пары сил, т.е. для пары сил (F_1, F_2) (рис. 64).

$$Mo(F_1) + Mo(F_2) = M(F_1, F_2), \qquad (96)$$

где O - любая точка.

Эту теорему докажем, вычисляя левую часть равенства (96)

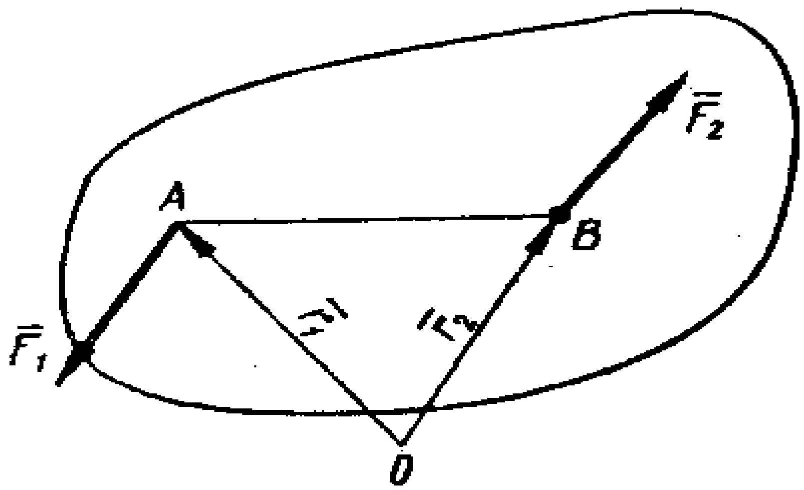


Рисунок 64

$$Mo(F_1) + Mo(F_2) = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2, = r_2 - r_1 \times F_2$$

так как для пары сил

$$F_1 = - F_2 \text{ , но } r_2 - r_1 = AB$$

и не зависит от выбора точки 0; следовательно,

$$Mo(F_1) + Mo(F_2) = AB \times F_2$$

на основании формулы (4) совпадает с векторным моментом пары сил M.

Таким образом,

$$Mo(F_1) + Mo(F_2) = M.$$

Взяв за точку O последовательно точки A и B, по формуле (96) имеем

$$M_A(F_1)=M_B(F_1) = M \qquad (97)$$

т. е. *векторный момент пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары.*

Эта теорема имеет важное значение при решении задач, когда надо вычислять сумму моментов сил пары относительно какой-либо точки. Для этого достаточно взять момент пары сил, что справедливо для любой точки.

Если моментная точка *O* выбирается в плоскости действия сил пары как частный случай, справедлива теорема о сумме алгебраических моментов сил пары: *сумма алгебраических моментов сил, входящих в состав пары сил, относительно точки, лежащей в плоскости действия пары сил, равна алгебраическому моменту пары сил и, следовательно, не зависит от выбора моментной точки,* т. е.

$$Mo(F_1) + Mo(F_2) = M(F_1, F_2) \qquad (98)$$

Выбирая за моментные точки *A* и *B,* лежащие на линиях действия сил пары, получаем

$$M_A(F_1)=M_B(F_1) = M(F_1, F_2) \qquad (99)$$

т. е. *алгебраический момент пары сил равен алгебраическому моменту одной из сил пары относительно точки, лежащей на линии действия другой силы пары.*

2.5.7 Сложение пар сил

Рассмотрим случай, когда пары сил не лежат в одной или параллельных плоскостях, а расположены в пересекающихся плоскостях.

Докажем, что *две пары сил, действующие на одно и то же тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил.*

Пусть имеются две пары сил (F_1, F_1\`) и ($F_2$, $F_2$\`) (рис. 65), лежащие в пересекающихся плоскостях. Эти пары сил можно получить из пар сил, как угодно расположенных в пересекающихся плоскостях, путем параллельного переноса, поворота в плоскости действия и одновременного изменения плеч и сил пар.

Сложим силы в точках *A* и *B* по правилу параллелограмма. После сложения получим две силы R и R\`

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} \\ \boldsymbol{R}` &= \boldsymbol{F_1}` + \boldsymbol{F_2}` \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

Силы R и R` составляют пару сил, так как они приложены в разных точках и R = -R` как равнодействующие равных, но противоположных сил, образующих пары сил.

Итак, *при сложении двух пар сил, лежащих в пересекающихся плоскостях, получается эквивалентная пара сил.*

Обозначим *M* векторный момент пары сил *(R, R').*

Тогда на основании формул (95) и (100)

$$M = BA \times R = BA \times (F_1 + F_2) = BA \times F_1 + BA \times F_2$$

Учитывая, что

$$BA \times F_1 = M_1; \quad BA \times F_2 = M_2$$

где M_1 и M_2 — векторные моменты заданных пар сил (F_1, F_1`) и ($F_2$, $F_2$`)

имеем
$$M = M_1 + M_2 \qquad (101)$$

т. е. *векторный момент эквивалентной пары сил равен сумме векторных моментов заданных пар.*

Таким образом, чтобы сложить две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях, надо сложить их векторные моменты по правилу параллелограмма в какой-либо точке тела, например в точке *B,* как показано на рис.65

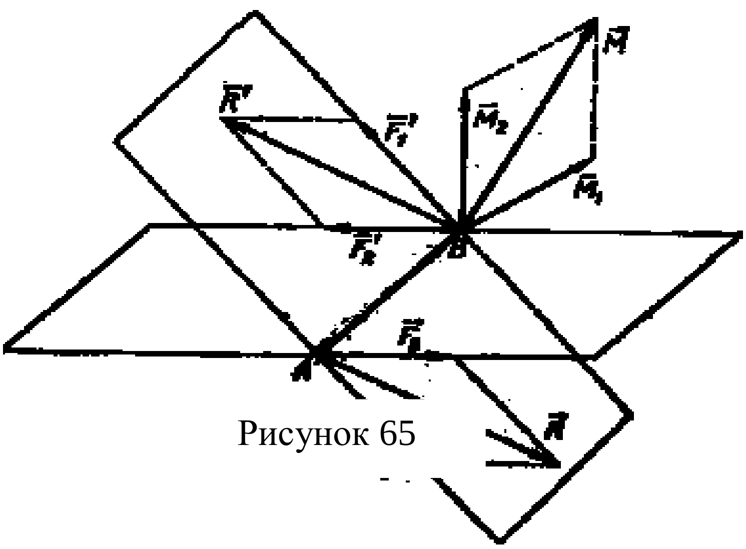


Рисунок 65

Рис. 33

Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, есть частный случай сложения пар сил в пересекающихся плоскостях, так как в этом случае их векторные моменты параллельны и, следовательно, векторное сложение перейдет в алгебраическое.

Последовательно применяя правило параллелограмма к каждым двум векторным моментам пар сил, можно любое количество пар сил в общем случае заменить одной парой сил, векторный момент которой M равен сумме векторных моментов заданных пар сил:

$$\boldsymbol{M} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i \tag{102}$$

Если это сложение выполнять графически, особенно когда векторные моменты пар сил находятся в одной плоскости, то векторный момент эквивалентной пары сил изобразится замыкающей векторного многоугольника, построенного из векторных моментов заданных пар сил.

Для пар сил, расположенных в одной плоскости, теорема об их сложении формулируется так: *пары сил, действующие на твердое тело и расположенные в одной плоскости, можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил*, т. е.

$$M = \sum\nolimits_{i=1}^{n} M_i$$

Так же складываются пары сил, расположенные в параллельных плоскостях, так как их предварительно можно перенести в одну плоскость.

2.5.8 Условия равновесия пар сил

Если на твердое тело действуют пары сил, как угодно расположенные в пространстве, то эти пары сил можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил, т. е.

$$M = \sum\nolimits_{i=1}^{n} M_i$$

Векторный момент M геометрически изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах заданных пар сил.

Для равновесия пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы модуль векторного момента эквивалентной пары сил равнялся нулю или чтобы векторный многоугольник, построенный на векторных моментах заданных пар сил, был замкнут. Итак, $M = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} M_{ix} \\ M_y &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} M_{iy} \\ M_z &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} M_{iz} \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Таким образом, *для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций векторных моментов пар сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю.*

В общем случае пары сил можно уравновесить только парой сил и нельзя уравновесить одной силой или какой-либо другой системой сил, отличной от пары сил.

В случае когда пары сил действуют на твердое тело, находясь в одной плоскости, их можно заменить одной эквивалентной парой сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

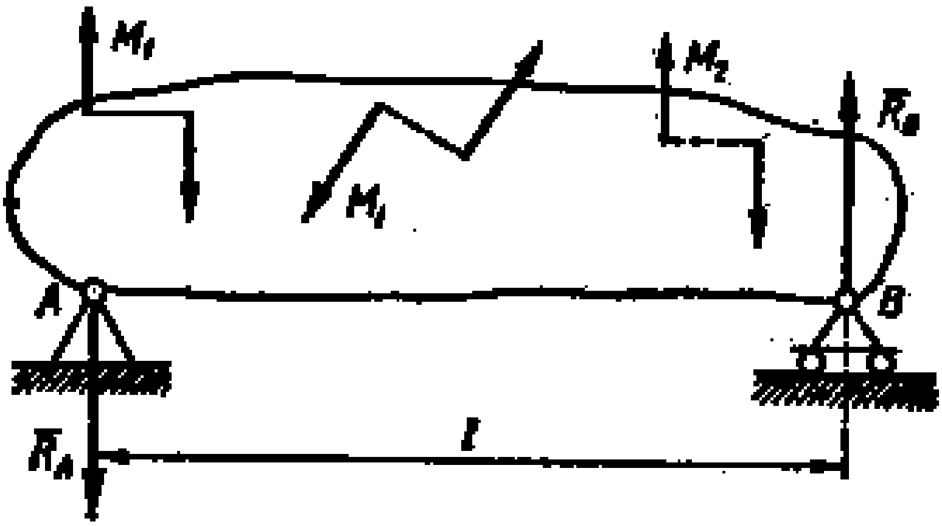


Рисунок 66

Для равновесия таких пар сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраический момент эквивалентной им пары сил был равен нулю, т. е. *для равновесия пар сил, действующих на твердое тело в одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы сумма алгебраических моментов этих пар сил была ровна нулю*.

Если на твердое тело действуют только пары сил, лежащие в одной плоскости, то реакции опор, уравновешивающие заданные пары сил, составляют пару сил.

Например, если одной из двух опор тела в его точке В является катковая опора (рис. 66), а другой - неподвижный шарнир в точке А, то направление реакции в шарнире А противоположно направлению реакции в точке В, так как эти реакции составляют пару сил. Реакция катковой опоры R_B перпендикулярна плоскости опоры катков и направлена вверх; следовательно, R_A направлена параллельно R_B вниз.

Величины этих реакций равны. Их можно найти, приравняв момент пары сил опорных реакций сумме алгебраических моментов пар сил, действующих на тело. Таким образом

$$R_A = - R_B \quad \text{и} \quad R_B L = \sum_{i=1}^{n} M_i \ ; \quad R_B = R_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{n} M_i$$

2.6 Приведение произвольной системы сил к простейшей системе. Условия равновесия

2.6.1 Приведение силы к заданному центру

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тело, добавляя при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

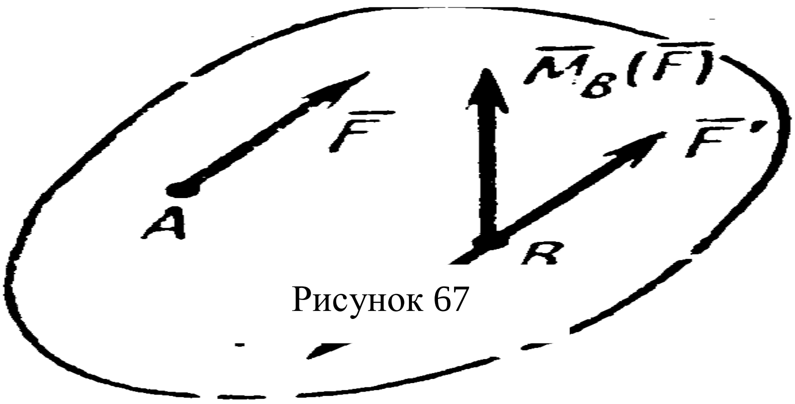


Рисунок 67

Рис. 36

Пусть имеем силу F, приложенную к твердому телу в точке A (рис. 67). Известно, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль ее линии действия, от чего действие силы на твердое тело не изменяется

Теперь докажем, что силу можно переносить на другую, параллельную линию действия. Но этот перенос следует компенсировать добавлением соответствующей пары сил.

Приложим в точке тела B, выбранной за центр приведения, систему двух равных по модулю, но противоположных по направлению сил F' и F'', параллельных заданной силе F.

Силы F' и F'' составляют систему сил, эквивалентную нулю, и ее можно добавить к любой заданной системе сил. Пусть по модулю

F = F` = F``, тогда

(F) ≡ (F, F`, F'')≡ {F`,(F, F'')}

Система двух равных но модулю и противоположных по направлению параллельных сил (F, F'') составляет пару сил, которую называют присоединенной парой сил.

Итак, вместо силы F приложенной в точке A, получены сила F`, равная ей по модулю и направлению, но приложенная в точке B, и присоединенная пара сил (F, F"), векторный момент которой

$$M(F, F'') = M_B(F) \qquad (104)$$

Процесс замены силы F силой F' и парой сил (F, F") называют приведением силы F к заданному центру B.

По теореме об эквивалентности пар сил пару (F, F") можно заменить любой другой парой сил с таким же векторным моментом.

2.6.2 Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил

Докажем основную теорему статики (теорему Пуансо): *любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил.*

Такой процесс замены системы сил одной силой и парой сил называют *приведением системы сил к заданному центру.*

Пусть дана произвольная система сил(F_1, F_2,..., Fn), приложенных к твердому телу. Выберем произвольную точку O тела за центр приведения и каждую силу заданной системы сил приведем к точке O (рис. 68). Получим

$$(F_1, F_2, ..., F_n) \equiv \{ F`_1, F`_2, ..., F_n`; (F_1, F_1``), (F_2, F_2``), ..., (F_n, F_n``)\}$$

Таким образом, система из п сил заменена системой из 3п сил, т.е. в точке O приложена система сходящихся сил ($F`_1$, $F_2`$,..., $F_n`$) и на твердое тело действует также система п присоединенных пар сил

$$(F_1, F``_1), (F_2, F``_2), ..., (F_n, F``_n)$$

Векторные моменты присоединенных пар сил, согласно формуле (104), можно выразить через векторные моменты заданных сил:

$$M_i = M(F_i, F_i`,) = Mo(F_i) \quad i = 1,2, ..., п. \qquad (105)$$

Систему сходящихся сил ($F`_1$, $F`_2$,..., $F_n`$) заменим их равнодействующей R, которая равна векторной сумме *сил* $F_1`$, $F_2`$,..., $F_n`$ и геометрически изображается замыкающим вектором силового многоугольника, построенного на этих силах (рис. 68). Итак,

$$(F`_1, F`_2, ..., F_n`) \equiv R, \quad \text{где}$$

$$R = F`_1 + F`_2 + ... + F_n` = F_1 + F_2 + ... + F_n = \Sigma Fi$$

Для системы сходящихся сил ($F`_1$, $F`_2$,..., $F_n`$) сила R является равнодействующей силой, а для заданной системы сил (F_1, F_2,..., F_n) сила R является лишь только ее векторной суммой, или главным вектором.

Главным вектором системы сил называют вектор, равный векторной сумме этих сил. Он изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на силах, т. е.

$$R = \Sigma Fi \qquad (106)$$

Систему присоединенных пар сил $\{(F_1, F_1``), (F_2, F_2``), \ldots, (F_n, F_n``)\}$ по теореме о сложении пар сил можно заменить одной парой сил (Ф, Ф') векторным моментом М (Ф, Ф'') = - Lo, который называют главным моментом.

Главный момент Lo равен сумме векторных моментов присоединенных пар. Учитывая формулу (105), для Lo имеем

$$Lo = Mo(F_1) + Mo(F_1) + \ldots + Mo(F_n) = \Sigma\, Mo(F_i) \qquad (108)$$

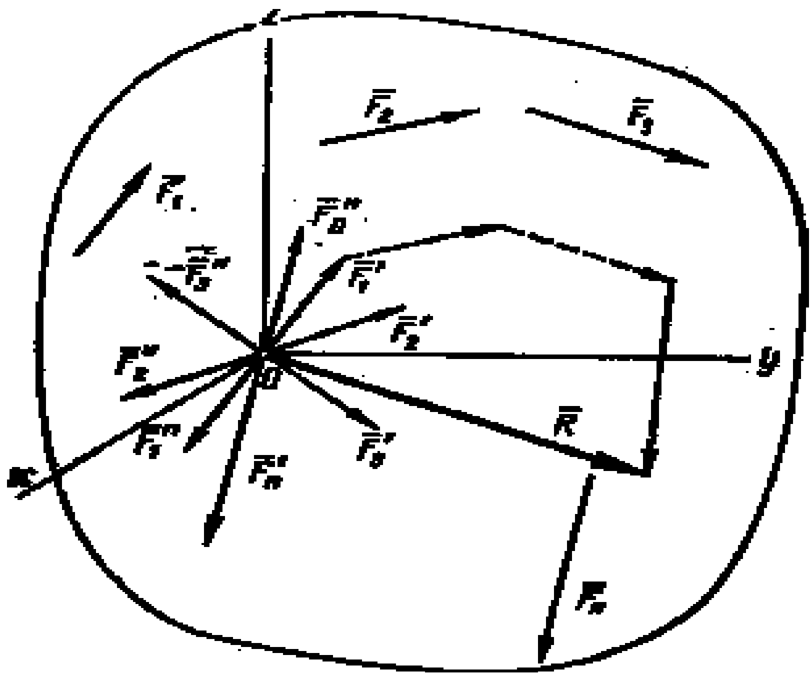


Рисунок 68

Индекс О у l.o означает, что за центр приведения взята точка О.

Итак, *главным моментом системы сил относительно точки О тела называют сумму векторных моментов всех. сил системы относительно той точки.*

Главный момент системы сил является вектором, замыкающим векторный многоугольник, образованный при сложении векторных моментов сил системы относительно выбранного центра.

Таким образом, доказана основная теорема статики: *любую систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к силе, равной главному вектору системы сил, и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту системы сил относительно точки, выбранной за центр приведения.*

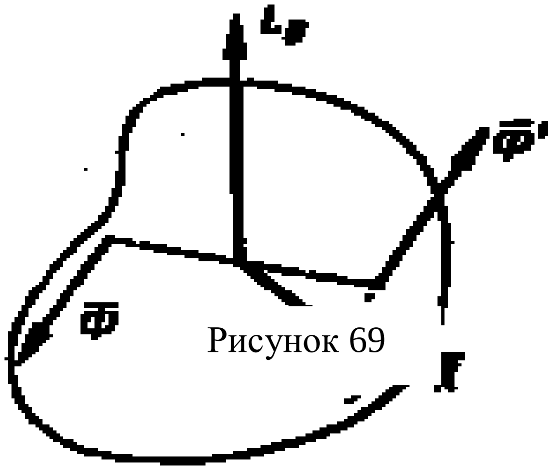


Рисунок 69

Рис. 38

т. е. *каждую систему сил можно привести к главному вектору и гласному моменту относительно произвольного центра.*

Следует учитывать, что это условная формулировка основной теоремы. Главный момент характеризует действие на тело пары сил *(Ф, Ф")* (рис. 69), лежащей в плоскости, перпендикулярной главному вектору.

2.6.3 Условия равновесия системы сил

2.6.3.1 Условия равновесия системы сил в векторной форме

Из теоремы о приведении системы сил к силе и паре сил можно вывести условия равновесия системы сил, действующих на тело. Очевидно, что если система сил находится в равновесии, то в равновесии находится и эквивалентная ей система, состоящая из силы и пары сил.

Чтобы такая система сил была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно равенства нулю как силы R. так и момента пары (Ф, Ф'), равного главному моменту Lo.

Получаются следующие векторные условия равновесия произвольной системы сил: *для равновесия системы сил приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительного любого центра приведения также был равен нулю.*

Иначе: для того чтобы $(F`_1, F`_2, ..., F`n) \equiv 0$, необходимы и достаточны

условия $R = 0, \quad Lo=0$ (116)

Условия (108) являются векторными условиями равновесия для любой системы сил.

2.6.3.2 Условия равновесия пространственной системы сил в аналитической форме

Если при равновесии системы сил, приложенных к твердому телу, главный вектор $\boldsymbol{R}$ равен нулю, то его проекция на каждую координатную ось также равна нулю. Это справедливо и для главного момента Lo. Таким образом, из векторных условий равновесия пространственной системы сил следует шесть условий:

$$\left.\begin{array}{l} R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0 \\ L_x = 0, L_y = 0,: L_z = 0 \end{array}\right\} \qquad (117)$$

Учитывая формулы (110) и (112), эти шесть условий через силы системы выражаются в форме

$$\left.\begin{array}{c} \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_x(F_i) = 0, \sum M_y(F_i) = 0, \sum M_z(F_i) = 0 \end{array}\right\} \qquad (118)$$

Таким образом, *для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси декартовых координат были равны нулю и три суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также, были равны нулю.*

Из общих условий равновесия для произвольной пространственной системы сил получаются условия равновесия для частных систем сил, приложенных к твердому телу.

2.6.3.3 Условия равновесия пространственной системы параллельных сил

Направим ось *Oz* параллельно силам (рис. 70). Тогда проекции параллельных сил на перпендикулярные им оси *Ox* и *Oy* будут равны нулю и условия

$$\Sigma F_{ix}=0,\ \Sigma F_{iy}=0$$

окажутся справедливыми для всех систем параллельных сил, т.е. превратятся в тождества. Момент относительно оси *Oz* каждой из параллельных сил равен нулю, и условие

$$\Sigma M_z(F) = 0$$

тоже выполняется для всех систем параллельных сил. Отбрасывая условия равновесия, которые выполняются тождественно при выбранном направлении оси *Oz*, и учитывая, что сумма проекций сил на эту ось является алгебраической суммой сил, из (118) получаем следующие три условия равновесия пространственной системы параллельных сил:

$$\Sigma F_{iz} = \Sigma F = 0; \Sigma M_x(F_i) = 0; \Sigma M_y(F_i) = 0 \quad (119)$$

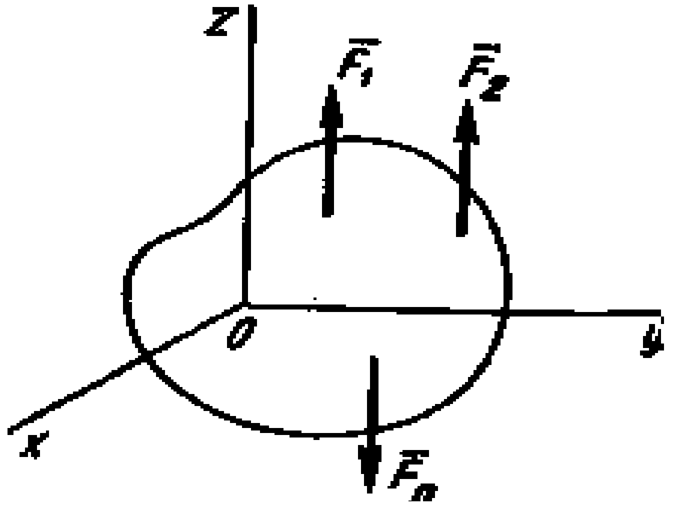


Рисунок 70

т. е. *для равновесия пространственной системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма этих сил была равна нулю и суммы моментов сил относительно двух координатных осей, перпендикулярных силам, также были равны нулю.*

2.6.3.4 Условия равновесия плоской системы сил

Расположим оси *Ox* и *Oy* в плоскости действия сил (рис. 71). Так как ось *Oz* перпендикулярна силам, то выполняется для всех плоских систем сил, т. е. является тождеством.

Каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат *Ox* и *Oy,* и поэтому ее моменты относительно этих осей равны нулю.

Таким образом, условия равновесия становятся тождествами.

$$\Sigma M_x(F_i) = 0; \Sigma M_y(F_i) = 0$$

Моменты сил относительно оси *Oz,* перпендикулярной силам, равны алгебраическим моментам этих сил относительно точки *O.*

Таким образом,

$$\Sigma M_x(F_i) = \Sigma M_o(F_i)$$

Из (118) для плоской системы сил после отбрасывания тождеств имеем следующие три условия равновесия:

$$\Sigma F_{ix}=0, \Sigma F_{iy}=0, \Sigma M_o(F_i) = 0 \quad (120)$$

т. е. *для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил, также была равна нулю.*

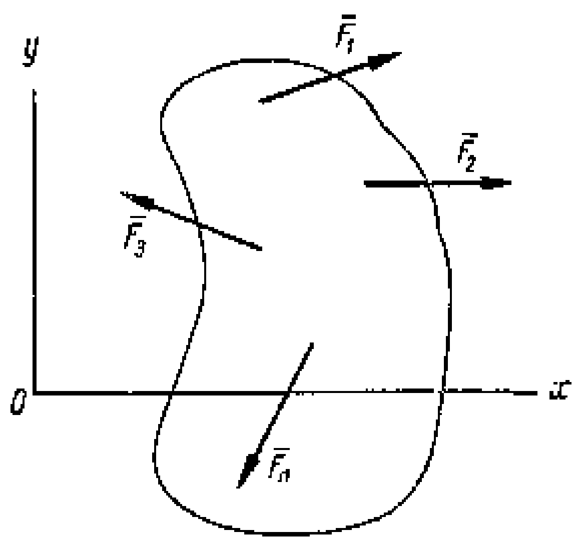


Рисунок 71

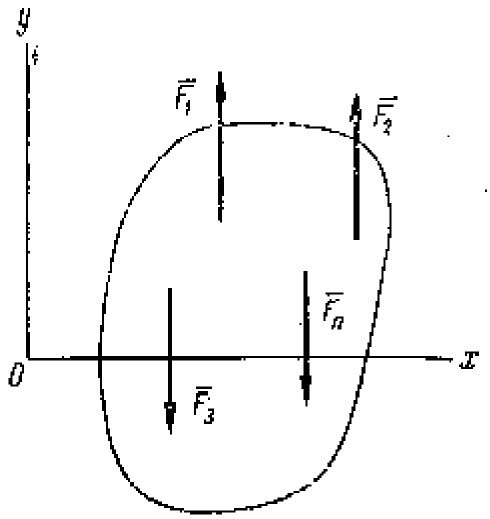


Рисунок 72

Для плоской системы параллельных вил (рис. 72) одну из осей координат, например Оу, можно выбрать параллельной силам. Тогда сумма проекций параллельных сил на эту ось превратится в алгебраическую суммы сил. Проекция каждой из сил на ось Ох равна нулю; следовательно, сумма проекций сил на ось Ох равна нулю, даже если система сил не находится в равновесии. Это условие выполняется тождественно, и его следует отбросить.

Итак, для плоской системы параллельных сил из (120) имеем следующие условия равновесия:

$$\Sigma F_i=0,\ \Sigma M_o(F_i) = 0 \qquad (121)$$

т. е. *для равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма сил была равна нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости сил, также была равна нулю.*

Из условий равновесия плоской системы сил (121) можно получить и условия равновесия плоской системы сходящихся сил, для чего за моментную точку надо взять точку пересечения линий действия сходящихся сил. Тогда последнее из условий станет тождеством и в качестве условий равновесия для плоской системы сходящихся сил останутся только два первых условия из (121).

2.6.3.5 Приведение плоской системы сил

Плоской системой сил, приложенных к твердому телу, называют такую систему сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Основная теорема статики справедлива для любой системы сил. Она справедлива и для плоской системы сил, действующих на твердое тело: *любую плоскую систему сил можно в общем случае привести к силе и паре сил.*

Для плоской системы сил главный вектор R лежит в плоскости действия сил, если за центр приведения выбрать точку в плоскости действия сил. Все присоединенные пары сил тоже лежат в этой плоскости, а следовательно, векторные моменты этих пар перпендикулярны ей и взаимно параллельны.

Главный момент Lo, характеризующий векторный момент пары сил, эквивалентный присоединенным парам, перпендикулярен главному вектору. Он является векторной суммой параллельных векторов.
В этом случае главный момент равен сумме алгебраических моментов присоединенных пар и, следовательно, сумме алгебраических моментов сил относительно центра приведения.

Для плоской системы сил вместо векторного главного момента используют понятие алгебраического главного момента. *Алгебраическим главным моментом* плоской системы сил L_O относительно центра приведения, лежащего в плоскости действия сил» называют сумму алгебраических моментов этих сил относительно центра приведения.

2.6.4 Формулы для вычисления главного вектора и главного момента

Для любой системы сил (F_1, F_2,..., Fn) главный вектор R является векторной суммой этих сил:

$$R = \Sigma Fi \tag{107}$$

а главный момент Lo — суммой векторных моментов сил относительно центра приведения:

$$Lo = \Sigma Mo(Fi)i \tag{109}$$

Главный вектор R геометрически изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на заданных силах. Проецируя
обе части векторного равенства (3') на координатные оси, для произвольной пространственной системы сил получаем

$$Rx = \Sigma Fix;\ Ry = \Sigma Fiy;\ Rz = \Sigma Fiz \tag{110}$$

По проекциям определяют модуль главного вектора и косинусы его углов с осями координат:

$$\left.\begin{array}{c} \left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos(x, R) = \dfrac{R_x}{\left|\overline{R}\right|} \cos(y, R) = \dfrac{R_y}{\left|\overline{R}\right|} \\ \cos(y, R) = \dfrac{R_y}{\left|\overline{R}\right|} \end{array}\right\} \tag{111}$$

Главный момент Lo геометрически тоже изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах сил относительно центра приведения. Проецируя обе части векторного равенства (109) на прямоугольные оси координат и используя связь момента силы относительно оси с проекцией векторного момента этой силы относительно точки на оси, имеем

$$\left.\begin{aligned} Lo_x = L_x = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) = \sum(y_i Fiz - z_i F_{iy}) \\ Lo_y = L_y = \sum M_y(\boldsymbol{F}_i) = \sum(z_i F_{iz} - x_i F_{iz}) \\ Lo_z = L_z = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i) = \sum(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Модуль главного момента и косинусы его углов с осями координат равны

$$\left.\begin{aligned} |\vec{L}o| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \\ \cos(x, \vec{L}o) = \frac{L_x}{|\vec{L}o|} \cos(y, \vec{L}o) = \frac{L_y}{|\vec{L}o|} \\ \cos(y, \vec{L}o) = \frac{L_y}{|\vec{L}o|} \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

Если выбрать ось Oz перпендикулярно плоскости действия плоской системы сил, а оси Ox и Oy - в плоскости сил, то главный вектор R будет лежать в плоскости Oxy и, следовательно, для плоской системы сил

$$\left.\begin{aligned} R_x = \sum F_{ix}, R_x = \sum F_{ix}, R_z = 0 \\ |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Главный момент плоской системы сил перпендикулярен главному вектору и, следовательно, параллелен оси Oz. Тогда

$$Lx \equiv 0,\ Ly \equiv 0,\ Lo = Lz = \Sigma Mz(Fi) = \Sigma Mo(Fi) \qquad (115)$$

где Lo — алгебраический главный момент.

2.7 Плоская система сил. теорема Вариньона

2.7.1 Частные случаи приведения плоской системы сил

Плоскую систему сил можно привести к более простой системе сил, состоящей из силы пли пары сил. Эти случаи возможны, если система сил не находится в равновесии, т.е. если одновременно не равняются нулю главные вектор и момент системы сил. Рассмотрим эти частные случаи.

Случай приведения к равнодействующей силе

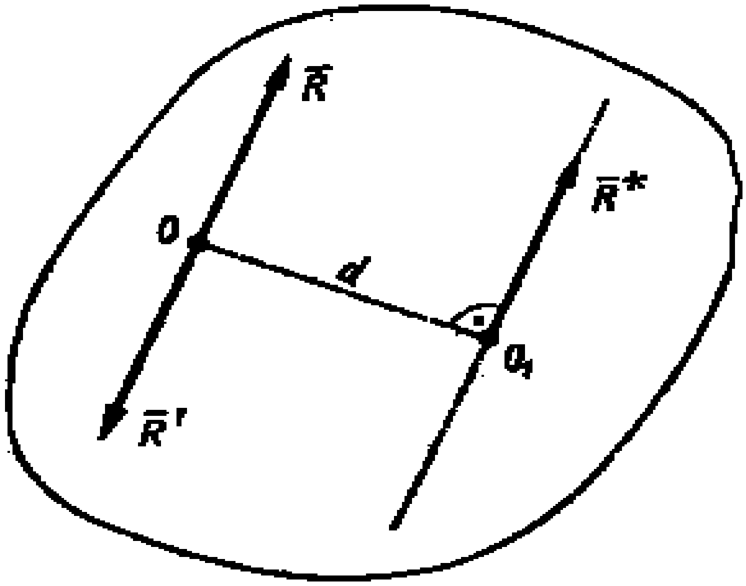


Рисунок 73

1) *Если при приведении плоской системы сил к какому-либо центру окажется, что главный вектор R ¹ 0,* а главный момент *Lo* = 0, *то такая плоская система сил приводится к одной силе R* — равнодействующей системы сил.*

Равнодействующая сила R* в этом случае проходит через центр приведения, а по величине и направлению совпадает с главным вектором R.

2) *Если при приведении плоской системы сил главный вектор R ¹ 0 и главный момент Lo ¹ 0, то такую систему можно упростить и привести к одной равнодействующей силе R*,*

Эта сила по величине и направлению совпадает с главным вектором *R,* но ее линия действия отстоит от первоначального центра приведения на расстоянии *d,* которое определяют из соотношения (рис. 73)

$$d = Lo/R.$$

Действительно, пусть при приведении к точке О получается главный вектор и пара сил, алгебраический момент которой равен главному моменту Lo.

По теореме об эквивалентности пар сил, расположенных в одной плоскости, пару сил можно поворачивать, передвигать в плоскости ее действия и изменять плечо и силы пары, сохраняя ее алгебраический момент.

Выберем силы R_1, R*, входящие в пару сил, равными по величине главному вектору. Тогда плечо пары сил d определим по формуле

$$d = Lo/R; \quad R` = R^* = R. \tag{122}$$

Повернем пару сил, чтобы ее силы были параллельны главному вектору R, а точку приложения силы пары, противоположной по направлению главному вектору, совместим с центром приведения 0. Тогда

$$(R,\ R`,\ R^*) \equiv (R^*).$$

Так как *$(R,\ R^*)^{o}\ 0$*, то такую систему сил можно отбросить. Итак, *систему сил,* приведенную к силе с парой сил, *в случае когда $R\ ^{1}\ 0$* и *$Lo\ ^{1}$* 0, *можно упростить и привести к одной силе, R^* - равнодействующей заданной системе сил, отстоящей от центра приведения на расстоянии*

$$00_1 = d = Lo/R$$

Равнодействующую силу R*, приложенную к твердому телу, можно перенести в любую точку линии ее действия. Случай, когда Lo=0, возможен, если за центр приведения О взять точку, лежащую на линии действия равнодействующей силы R*.

2.7.2 Случай приведения к паре сил

Если при приведении плоской системы сил к какому-либо центру окажется, что главный вектор R =0, а главный момент $Lo\ ^{1}\ 0$, то такую плоскую систему сил можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен главному моменту системы сил относительно центра приведения, и в этом случае главный момент не зависит от выбора центра приведения.

Если главный вектор равен нулю при приведении к одному какому-либо центру, то он равен нулю и при приведении к любому другому центру, гак как главный вектор, являясь векторной суммой сил системы, не завили г от выбора центра приведения.

Главный момент не зависит от центра приведения. Только в случае, когда *$R = 0$*. В других случаях главный момент системы зависит от выбора центра приведения.

Если бы при *$R = 0$* главный момент зависел от центра приведения, то одна и та же плоская система сил была бы эквивалентна парам сил, имеющим разные алгебраические моменты, что невозможно, так как эквивалентные пары сил, лежащие в одной плоскости, имеют одинаковые алгебраические моменты.

Таким образом, рассмотрены случаи, которые возможны при приведении плоской системы сил к какому-либо центру.

Если *R* = 0 и *$Lo = 0$*, то система сил находится в равновесии; если *$R\ ^{1}$* 0, *$Lo = 0$*, или *$R\ ^{1}$* 0, *$Lo\ ^{1}\ 0$*, то система сил приводится к равнодействующей силе; если *R* =0, *$Lo\ ^{1}$* 0, то система сил приводится к одной паре сил.

2.7.3 Теорема о моменте равнодействующей силы (теорема Вариньона)

Для случая, когда любая система сил, приложенных к твердому телу, плоская или пространственная, приводится к равнодействующей силе, часто применяют так называемую теорему Вариньона: *векторный момент равнодействующей рассмат-*

риваемой системы сил относительно любой точки равен сумме векторных моментов всех сил этой системы относительно той же точки,

Пусть на твердое тело действует любая система сил (F_1, F_2, ..., Fn) (рис. 74), имеющая равнодействующую R*, т. е.

$$(F_1, F_2,..., Fn) \equiv R^* \quad (123)$$

Добавим к заданной системе сил ее уравновешивающую силу R*', которая равна по модулю, но противоположна по направлению равнодействующей силе R* и имеет с ней общую линию действия. Тогда

$$(F_1, F_2,..., Fn, R^{*\prime}) \equiv (R^*, R^{*\prime}) \equiv 0 \quad (124)$$

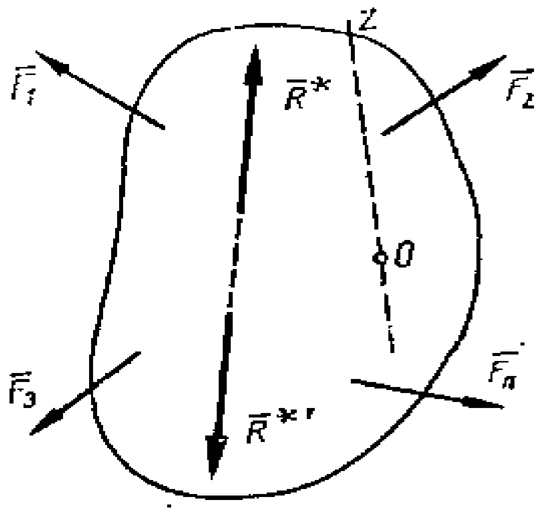


Рисунок 74

т. е. при добавлении к системе сил уравновешивающей силы, согласно определению уравновешивающей силы. образуется новая система
сил, эквивалентная нулю и, следовательно, удовлетворяющая условиям равновесия системы сил, приложенных к твердому телу. В частности, сумма векторных моментов сил этой новой системы сил относительно любой точки *0* равна нулю:

$$\Sigma\, Mo(Fi) + Mo(R`^*) = 0, \quad \text{но} \quad (125)$$

$$Mo(R`^*) = - Mo(R^*) \quad (126)$$

так как R*' и R* - две равные и противоположно направленные силы, действующие вдоль одной прямой. Подставляя (126) в (125), получаем

$$\Sigma\, Mo(Fi) - Mo(R^*) = 0$$

откуда следует теорема Вариньона

$$Mo(R^*) = \Sigma\, Mo(Fi) \quad (127)$$

Если правую и левую части векторного равенства (127) спроецировать на произвольную ось *Oz,* проходящую через точку O, то учитывая связь момента силы относительно оси G проекцией векторного момента относительно точки на оси, получим теорему Вариньона относительно оси*:*

$$Mz(R^*) = \Sigma\ Mz(Fi) \qquad (128)$$

т. е. *момент равнодействующей силы относительно произвольной оси равен сумме моментов сил системы относительно той же оси.*
Для случая плоской системы сил, если точку *О* выбрать в плоскости действия сил, из (127) получаем

$$Mo(R^*) = \Sigma\ Mo(Fi) \qquad (129)$$

Это теорема Вариньона для плоской системы сил: *алгебраический момент равнодействующей плоской системы сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равен сумме алгебраических моментов всех сил этой системы относительно той же точки.*

2.7.4 Различные формы условий равновесия плоской системы сил

Ранее были получены общие условия равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, в следующей форме;

$$\Sigma F_{ix}=0,\ \ \Sigma F_{iy}=0,\ \ \Sigma M_o(F_i) = 0 \qquad (130)$$

Условия равновесия (128) назовем *условиями равновесия плоской системы сил в первой форме.*

Условия равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, можно сформулировать в других эквивалентных формах. Существуют еще две эквивалентные формы необходимых и достаточных условий равновесия.

Рассмотрим эти условия равновесия в виде теоремы о трех моментах и третьей формы условий равновесия.

2.7.4.1 Теорема о трех моментах (вторая форма условий равновесия)

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю, т.е.

$$\Sigma\ M_A(Fi)=0;\quad \Sigma\ M_B(Fi)=0;\quad \Sigma\ M_C(Fi)=0;$$

Необходимость этих условий равновесия плоской системы сил обусловлена тем, что если плоская система сил находится в равновесии, силы этой системы удовлетворяют условиям равновесия в первой основной форме (128). А тогда из последнего условия (128) следует, что сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки (следовательно, и точек *А, В, С)* равна нулю. Для доказательства достаточности условий (129) для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, можно привести следующие рассуждения. Так как главные моменты относительно трех точек *А, В,* и С равны нулю, то для любой из этих точек, взятых за центр приведения, система приводится или к равнодействующей, если главный вектор системы отличен от нуля, или система сил оказывается в равновесии, если главный вектор системы равен нулю. Предположим, что она приводится к равнодействующей силе R^*.

Тогда если выбрать за центр приведения точку A, то, используя теорему Ва-

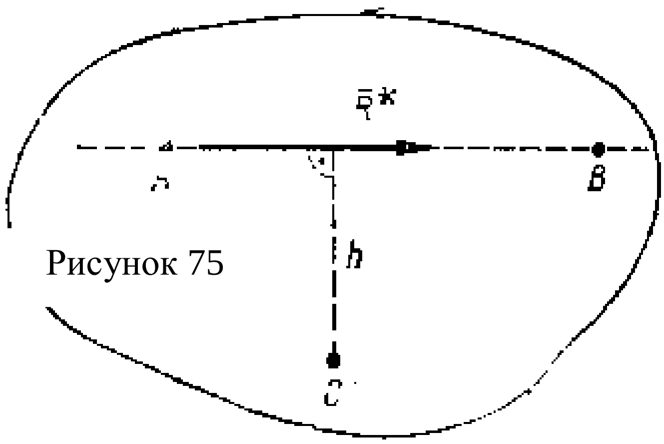


Рисунок 75

риньона (127) и согласно (129) получим

$$\Sigma M_A(Fi)= \Sigma M_A(R) = 0;$$

Выбрав за центр приведения точку В, аналогично имеем

$$\Sigma M_B(Fi)= \Sigma M_B(R) = 0;$$

Эти условия для равнодействующей силы R^*, отличной от нуля, могут выполняться в случае, если линия действия равнодействующей силы R^* проходит через точки A и B (рис. 31).

Из последнего условия (10) после применения теоремы Вариньона получаем

$$\Sigma M_C(Fi)= \Sigma M_C(R) = \pm hR^* = 0;$$

Но $h \neq 0$; так как точка С не находится на прямой, проходящей через точки A и B. Следовательно, равнодействующая сила равна нулю, что и является достаточным условием равновесия плоской системы сил приложенных к твердому телу.

2.7.4.2 Третья форма условий равновесия

Условия равновесия плоской системы сил можно сформулировать и так: *для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов сил относительны двух .любых точек лежащих в плоскости действия сил были равны нулю и алгебраическая сумма проекций этих сил на какую-либо ось плоскости не перпендикулярную прямой, проходящей через две моментные точки, также была ровна нулю* т.е.

$$\Sigma M_A(Fi)=0; \Sigma M_B(Fi)=0; \Sigma (Fix)=0;$$

где за ось *Ox* принята любая прямая, не перпендикулярная *A B*.

Необходимость условий (II) для равновесия плоской системы сил следует из первой формы условий равновесия (128). Первая часть теоремы о достаточности условий (130) для равновесия (линия действия равнодействующей силы проходит через точки *A и B)* доказывается так же, как и в теореме о трех моментах.
Из последнего условия (130) следует, что

$$\Sigma (Fix)=R^{*}x = R^{*}\cos(x,R^{*}) = 0 ;$$

Но $\cos(x,R^{*}) \neq 0$

так как ось *Ox* не перпендикулярна прямой, проходящей через точки *A* и *B*.

Следовательно, равнодействующая сила ***R**** равна нулю, что и доказывает достаточность условий (130) для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу.

В частном случае плоской системы параллельных сил можно сформулировать другую форму условий равновесия этой системы сил: *для равновесия плоской системы параллельных сил приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических, моментов сил относительно двух любых точек лежащих в плоскости сил были равны нулю*, т.е.

$$\Sigma M_A(Fi)=0; \Sigma M_B(Fi)=0 \qquad (131)$$

Точки *A* и *B* нельзя брать на прямой линии, параллельной силам. При применении условий равновесия (131) удобно за моментные точки *A* и ***B*** брать точки, через которые проходят искомые силы, например реакции связей.

В этом случае получаются такие уравнения для определения искомых сил, в каждое из которых входит только по одной неизвестной силе; эти уравнения, как правило, решаются проще, чем уравнения, в каждое из которых входят обе неизвестные силы.

2.7.5 Статически определимые и статически неопределимые задачи

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется только три независимых условия равновесия, каждое из которых не является следствием двух других. Независимые условия равновесия можно брать в трех различных формах.

Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных, а для плоских систем параллельных и сходящихся сил - не более двух неизвестных. Если в какой-либо задаче число неизвестных окажется больше числа независимых условий равновесия, то такую задачу нельзя решить методами статики без рассмотрения прежде всего деформаций тела, т. е. без отказа от основной гипотезы статики об абсолютно твердом теле. Задачи, в которых число неизвестных не больше числа независимых условий равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называют *статически определимыми*. Для любой плоской системы сил, приложенных к твердому телу, в статически определимой задаче число неизвестных должно быть не больше трех, а для плоских систем параллельных и сходящихся сил - не больше двух.

Пример простейшей о статически неопределимой задачи приведен на рис. 32, где представлена балка заданной длины, закрепленная на концах с помощью двух неподвижных цилиндрических шарниров А и В. На балку действуют активные силы F_1 и F_2. Известны также и точки приложения этих сил. Так как для цилиндриче-

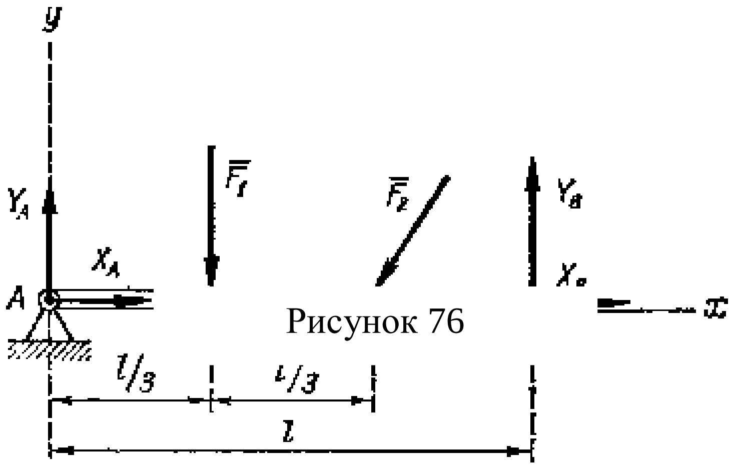


Рис. 46

ского шарнира имеются две неизвестные, например составляющие силы реакции по осям координат, то число неизвестных будет четыре, а независимых условий равновесия можно составить только три.

Чтобы сделать задачу статически определимой, надо балку на одном конце закрепить, например 6 помощью так называемой катковой опоры. Тогда одна неизвестная будет равна нулю: если катковая опора находится в точке *B* и плоскость опоры катков параллельна оси *Ox*, то сила *Xв* равна нулю.

2.7.6 Равновесие системы тел

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к системе нескольких взаимодействующих между собой тел. Тела могут быть соединены между собой с помощью шарниров, соприкасаться друг с другом и взаимодействовать одно с другим, вызывая силы взаимодействия Такую систему взаимодействующих тел иногда называют сочлененной системой тел.

Силы, действующие на рассматриваемую систему тел, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, с которыми на тела рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему тел.

Внутренними называют силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Если, например, рассматриваемой системой тел является железнодорожный поезд, то внешними силами являются силы веса вагонов и тепловоза, действие рельсов на колеса вагонов и тепловоза, силы сопротивления воздуха. Внутренними силами являются натяжения в стяжках, сила давления газа и т. п.

Силы веса для любой системы тел, в которую не входит Земля, всегда являются внешними.

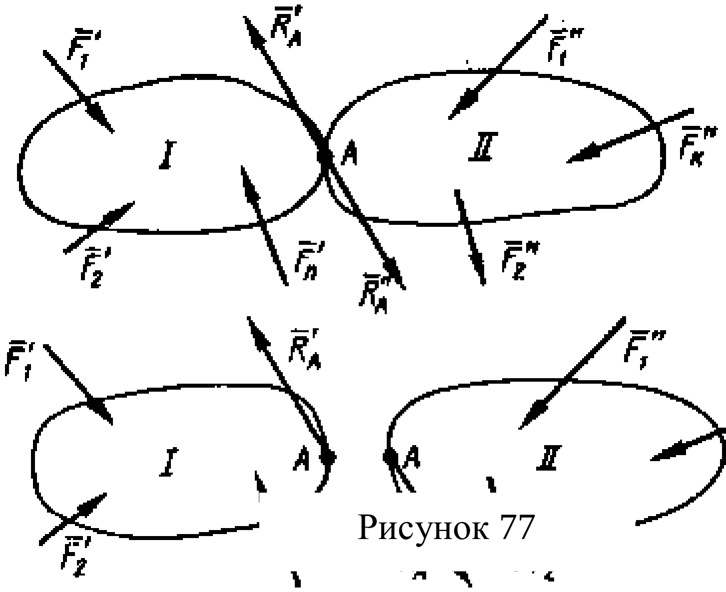


Рисунок 77

Рис. 47

При рассмотрении равновесия сил, приложенных к системе тел, можно мысленно расчленить систему тел на отдельные твердые тела и к силам, действующим на эти тела, применить условия равновесия, полученные для одного тела. В эти условия равновесия войдут как внешние, так и внутренние силы системы тел.

Внутренние силы на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия в каждой точке сочленения двух тел образуют равновесную систему сил (силы RA и RA, рис. 77).

Поэтому *внешние силы, действующие на систему тел отдельно, без внутренних сил, удовлетворяют условиям равновесия вил, приложенных к твердому телу, за которое следует принять эту систему тел.*

Покажем это на примере системы двух тел и плоской системы (рис.77). Если составить условия равновесия для каждого твердого тела системы тел, то для тела I

$$\Sigma F`_i + R`_A = 0; \qquad \Sigma Mo(F`_i) + Mo(R`_A) = 0 \tag{132}$$

для тела II

$$\Sigma F``_i + R``_A = 0; \quad \Sigma Mo(F``_i) + Mo(R``_A) = 0 \tag{133}$$

Кроме того, из аксиомы о равенстве сил действия и противодействия для двух взаимодействующих тел имеем

$$R`_A = - R``_A \tag{134}$$

$$Mo(R`_A) = - Mo(R``_A) \tag{135}$$

Если сложить (13) и (14), учитывая (15) и (16), то

$$\Sigma F`_i + \Sigma F``_i = 0; \quad \Sigma Mo(F`_i) + \Sigma Mo(F``_i) = 0$$

Представленные равенства и есть условия равновесия внешних сил, действующих на систему двух тел.

Для системы N тел в случае, когда на каждое тело действует любая плоская система сил, можно составить $2N$ условий равновесия и, следовательно, определить $3N$ неизвестных.

Если число неизвестных больше $3N$, то задача является статически неопределимой.

В случае статически определимой задачи $3N$ условий равновесия можно получить, если составлять их для каждого тела отдельно, учитывая и силы взаимодействия тел, или составлять условия равновесия для любых комбинаций групп тел, в том числе и для всей рассматриваемой системы тел. При этом внутренние силы для отдельных групп тел учитывать не надо.

2.7.7 Распределенные силы

В статике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке, и поэтому такие силы называют *сосредоточенными.* В действительности обычно силы бывают приложены к какой-либо части объема тела или его поверхности, а иногда к некоторой части линий.

Так как все аксиомы и теоремы статики формулируются для сосредоточенных сил, приложенных к твердому телу, то необходимо рассмотреть способы перехода от распределенных сил к сосредоточенным в простейших, наиболее часто возникающих случаях.

Распределенные силы прежде всего характеризуются интенсивностью распределенной силы, т. е. силой, приходящейся на единицу объема, поверхности или длины линии. В основном встречаются параллельные и сходящиеся распределенные силы.

К параллельным силам, распределенным по объему тела, относится вес частиц этого тела. Сила давления воды на плотину относится к распределенным параллельным силам по поверхности плотины. Сила тяжести частиц тонкой проволоки характеризует распределенные силы по длине линии.

Рассмотрим замену сосредоточенными силами только распределенных сил подлине линии» т. е. линейных распределенных сил.

Для простоты возьмем случаи, когда отрезок линии, по которому распределены силы, является отрезком прямой, а интенсивность этих сил или постоянна (силы распределены по прямоугольнику), или распределена по линейному закону, в простейшем случае - по треугольнику. Комбинируя эти два случая, можно получить линейное распределение интенсивности распределенной силы в более общем случае.

Параллельные силы постоянной интенсивности, распределенные по отрезку прямой линии

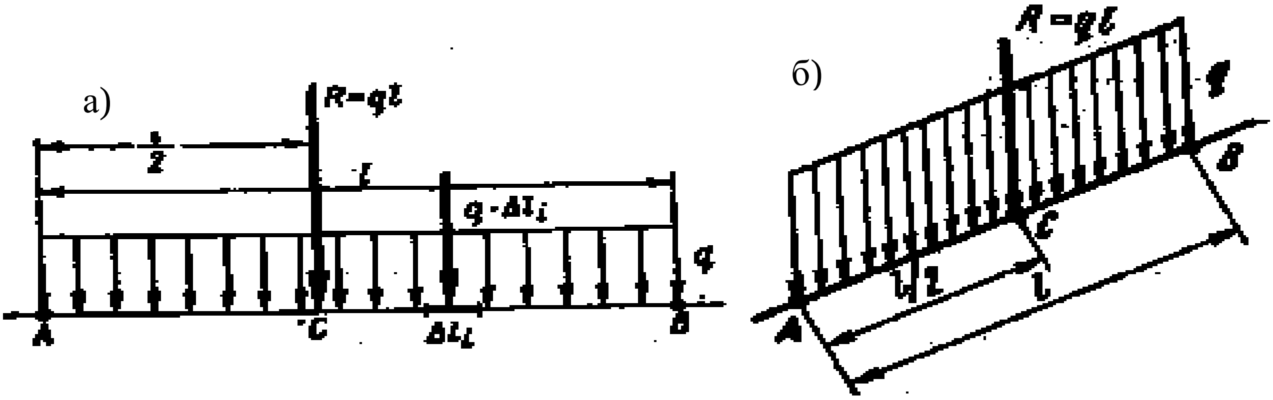


Рисунок 78

Пусть на участке *AB* прямой линии длиной *1* распределены параллельные силы, интенсивность которых *q* постоянна (рис. 78, *а).*

Заменим эти распределенные силы сосредоточенными. Для этого отрезок AB разобьем на отрезки достаточно малых размеров по сравнению с его длиной. На каждый такой малый отрезок действует сила $q\Delta l_i$ которую при достаточной малости длины отрезка Δl_i, можно считать сосредоточенной силой.

Заменяя полученную таким образом систему сосредоточенных параллельных сил $q\Delta l_i$ одной равнодействующей силой, получим

$$R = \Sigma\, q\Delta l_i = q\, \Sigma\, \Delta l_i = ql$$

Равнодействующая R параллельна распределенным силам и приложена, вследствие симметрии распределения сил, в середине отрезка AB.

Если параллельные силы постоянной интенсивности *q* распределены по отрезку прямой, наклоненному к распределенным силам, то модуль равнодействующей *R* таких сил равен *ql.* Линия действия ее, параллельная распределенным силам, проходит через середину отрезка (рис. 78, б).

Модуль равнодействующей в этом случае не равен площади параллелограмма, образованного прямой *AB* и распределенными силами.

Параллельные силы, распределенные по отрезку прямой с интенсивностью, изменяющейся по линейному закону Рассмотрим распределенные параллельные силы, изменяющиеся по линейному закону (рис. 79, а). Обычно считают, что такие силы распределены по треугольнику.

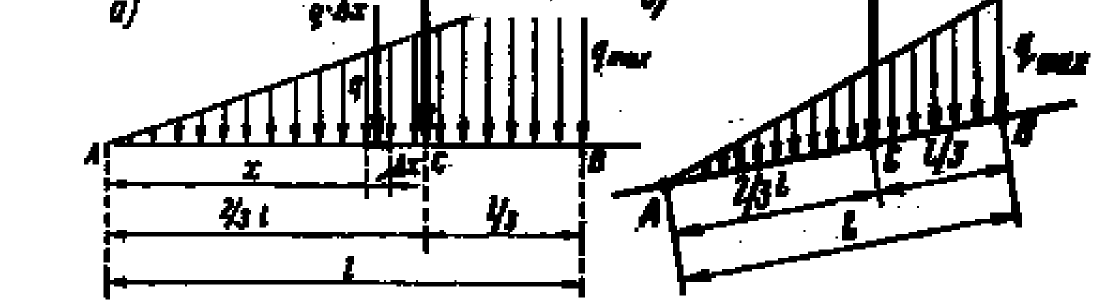


Рисунок 79

Параллельные распределенные по треугольнику силы приводятся к равнодействующей R, по модулю равной

$$R = q_{max}\, l/2$$

где q_{max} - наибольшая интенсивность силы. Это легко можно проверить путем вложения параллельных сосредоточенных сил $q\Delta x$, приложенных к каждому элементарному отрезку длиной Δx. Наиболее просто это можно сделать путем интегрирования. Действительно,

$$R = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum q\Delta x = \int_0^l q dx$$

Если x отсчитывать от точки *A*, то из подобия треугольников

$$q/x = q_{max}/l$$

После этого, вставляя под интеграл вместо *q* его значение, получаем

$$R = \int_0^l \frac{q_{\max}}{l} x dx = \frac{q_{\max}}{l} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = \frac{q_{\max} l}{2}$$

Точка приложения *C* равнодействующей силы смещается в сторону, где интенсивность силы больше, и совпадает с центром тяжести площади треугольника, который находится в точке пересечения медиан, расположенной на расстоянии 1/3 от основания треугольника и 2/3 от его вершины *A*, т. е. *AC*= 2/3*1*. Точку приложения равнодействующей силы можно также определить, вычислив момент элементарных сосредоточенных сил *qDx,* например относительно точки *A*, и применив затем теорему Вариньона о моменте равнодействующей силы. Имеем

$$R \cdot AC = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum xq\Delta x = \int_0^l qxdx$$

Заменяя q его значением $q = q_{max}x/l$, получаем

$$R \cdot AC = \frac{q_{\max}}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{q_{\max}}{l} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{q_{\max} l^2}{3}$$

Учитывая, что $R = q_{max}l/2$, найдем

$$AC = \frac{q_{\max} l^2}{3R} = \frac{2}{3} l$$

Если параллельные силы с интенсивностью, изменяющейся по линейному закону, распределены по отрезку прямой, наклоненному к направлению сил (рис. 79, б), то их равнодействующая $R = q_{max}l/2$ и делит отрезок АВ так же, как и в случае, когда распределенные силы перпендикулярны отрезку АВ. Величина равнодействующей в этом случае не равна площади треугольника, образованного отрезком прямой АВ и распределенными силами.

В более сложных случаях распределенных сил равнодействующую силу и ее точку приложения обычно определяют путем интегрирования и применения теоремы Вариньона. Величину равнодействующей в случае непараллельных распределенных сил находят так же, как и для параллельных, только суммируют (и, следовательно, интегрируют) не элементарные сосредоточенные силы q_iDl_i, а их проекции на оси координат. По проекциям уже вычисляют равнодействующую силу и косинусы ее углов с осями координат.

2.7.8 Реакция заделки

Пусть имеем тело, например балку АВ, один конец которой АА' заделан в стену (рис. 80, а). Такое крепление конца балки АА' называют заделкой в точке А. Пусть на балку действует плоская система сил (F_1, F_2,..., Fn) Определим силы, которые надо приложить в точке (сечении) А балки, если часть балки АА' отбросить.

К части балки АА' при освобождении ее от заделки в стене приложены распределенные силы. Если эти силы заменить элементарными сосредоточенными силами и затем привести их к точке А, то в точке А получим силу R_A (главный вектор элементарных сосредоточенных сил $q_i\Delta l$ и пару сил с моментом M_A (главный момент относительно точки А элементарных сил $q_i\Delta i$). Момент M_A называют моментом заделки.

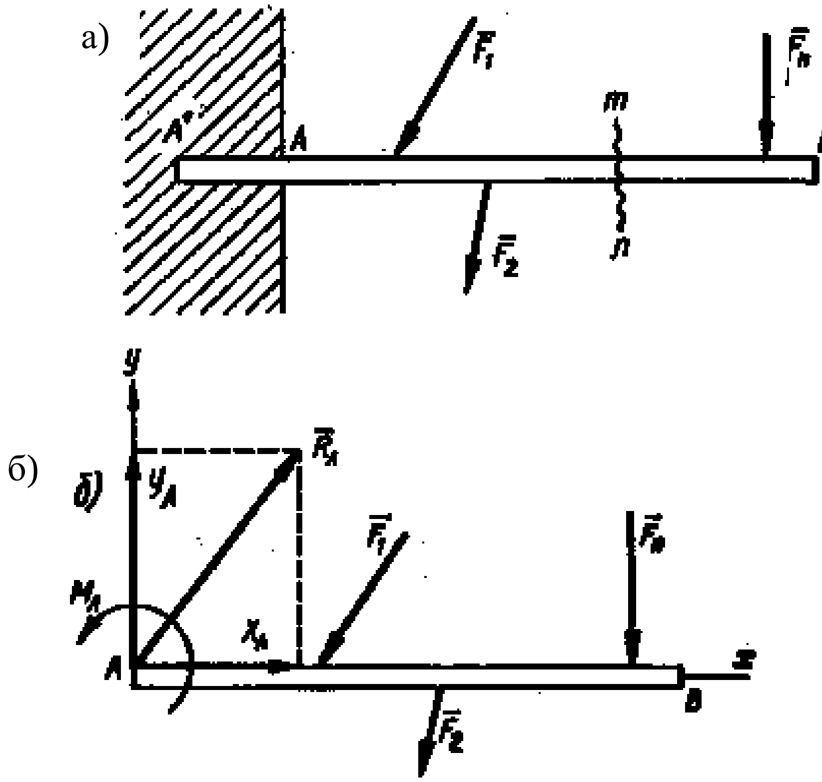


Рисунок 80

Таким образом, заделка в отличие от шарнира создает не только неизвестную по величине и направлению реакцию *R* д, но еще и пару сил с не известным заранее моментом в заделке M_A (рис. 80, *б*).

Очевидно, если рассмотреть любую часть балки, расчленив ее мысленно по сечению *mn*, то в месте расчленения надо приложить неизвестные силу и пару сил, заменяющее действие отброшенной части балки на рассматриваемую ее часть, причем сила и момент пары сил, действующие на различные части балки, будут иметь противоположные направления действия и вращения соответственно, как всякое действие и противодействие.

2.7.9 Решение задач на равновесие плоской системы сил, приложенных к твердому телу и системе тел

Рассмотрим общие положения о решении задач на равновесие плоской системы сил, действующих на одно твердое тело и на систему тел. Весь процесс решения задачи на равновесие сил можно расчленить на ряд этапов, которые характерны для большинства задач.

К выбранному для рассмотрения телу или системе тел надо приложить все действующие силы, как активные, так и реакции связей; если нужно, расчленить систему тел на отдельные тела или группы тел.

Если связью является абсолютно гладкая поверхность какого-либо тела. то реакция связи в этом случае направлена по нормали к общей касательной в точке соприкосновения в сторону, противоположную тому направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела

Если связью является цилиндрический шарнир, позволяющий телу вращаться вокруг его оси, то реакцию шарнира, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, следует разложить на две заранее не известные составляющие по положительным направлениям осей координат.

Если эти составляющие после их определения из уравнений равновесия будут иметь знак минус, то составляющие реакции направлены противоположно положительному направлению осей координат.

Все гибкие связи (канаты, тросы, ремни и т. п.) создают реакции, направленные по касательной к гибкой связи в данной точке.

Если связью является заделка, которая в отличие от цилиндрического шарнира не позволяет телу поворачиваться, то кроме двух неизвестных составляющих реакций в этой точке надо еще приложить пару сил с не известным заранее моментом заделки. Эти же случаи связей возможны и при расчленении систем тел.

Выявление всех сил, действующих на рассматриваемое тело или систему тел, особенно правильная замена различных видов связей их реакциями, является одним из главных этапов при решении задач на равновесие.

При расчленении системы тел надо следить, чтобы силы взаимодействия между телами или группами тел сочлененной системы в точках сочленения были равны по модулю, но противоположны по направлению.

При рассмотрении системы тел (или их группы) силы взаимодействия между телами системы (или их группы) прикладывать не нужно, так как эти силы являются внутренними и в уравнения равновесия для системы тел (или группы) не войдут.

После выявления всех сил надо выбрать оси координат и моментные точки, а затем, составив условия равновесия сил в одной из форм, решить полученные уравнения относительно неизвестных.

Решение уравнений будет более простым, если при их составлении в каждое из уравнений добавляется по одной новой неизвестной. Этого удается достичь, если за моментную точку брать такую, в которой пересекаются две искомые силы. Такой точкой обычно является цилиндрический шарнир.

Оси координат надо брать так, чтобы одна или две неизвестные силы были перпендикулярны одной из осей координат и, следовательно, параллельны другой оси. В этом случае в соответствующее условие равновесия для одного тела войдет только одна неизвестная сила

2.8 Трение .

2.8.1 Трение скольжения.

Исследованием трения впервые занимался Леонардо да Винчи. В конце XVII века французский физик Амонтон (1663-1705) установил независимость силы трения от величины поверхности соприкасающихся тел. Законы трения были сформулированы французским физиком Кулоном (1736-1806).

Пусть на тело 1 действует плоская система активных сил и тело находится в равновесии, соприкасаясь в точке A с поверхностью тела 2, являющегося связью для рассматриваемого тела (рис 81).

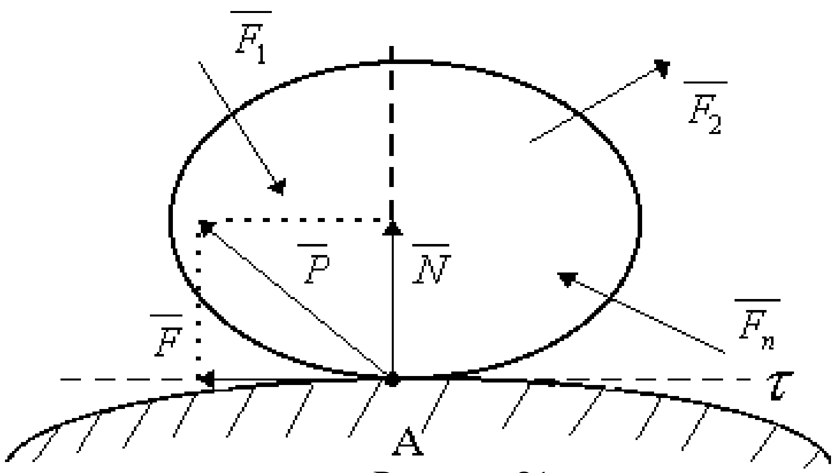


Рисунок 81

Реакцию R можно разложить на две составляющие: $\overline{N}$, направленной по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в т. А и $\overline{F}$, лежащую в касательной плоскости. Составляющая $\overline{N}$ называется нормальной реакцией, сила $\overline{F}$ называется силой трения скольжения.

$\overline{F}$ = 0, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие.

В теоретической механике обычно рассматривают только сухое трение. Различают трение скольжения при покое и трение скольжения при движении.

К 1781 году Кулон установил основные приближенные законы для сухого терния скольжения при покое.

Основные свойства сил трения можно установить на приборе, схема которого дана на рис.82. Изменяя вес гири, можно изменять нормальное давление $\overline{P}$. Изменяя вес гирь $\overline{Q}$, можно изменять силу, которая стремиться двигать тело вдоль поверхности другого тела, являющегося связью.Увеличивая $\overline{Q}$ при одном и том же P , можно достичь такого положения, когда ничтожно малое давление силы $\overline{Q}$ выведет тело из равновесия. Очевидно будет достигнуто предельное положение, при котором сила трения станет наибольшей и не сможет уравновешивать силу $\overline{Q}$ при ее дальнейшем увеличении. Изменяя силу нормального давления $\overline{P}$, можно исследовать, как изменяется при этом предельная сила трения $\overline{F_{\max}}$. Можно также исследовать влияние на предельную силу трения площади соприкасающихся тел, материала тел, характер обработки и др. факторы. Такие опыты позволяют проверить законы Кулона для сухого трения.

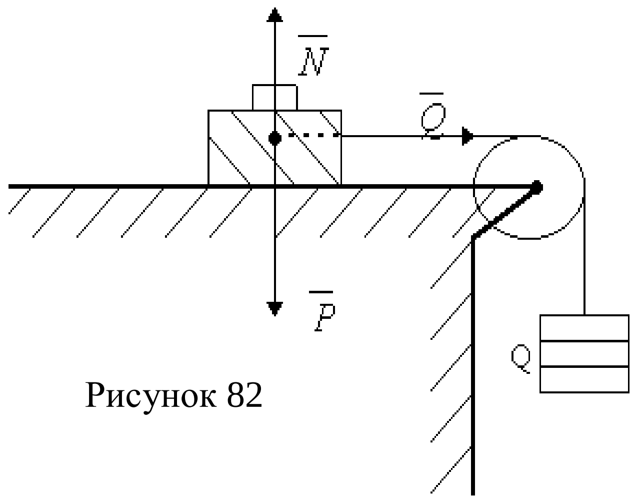


Рисунок 82

2.8.1.1 Законы Кулона

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела под действием активных сил. Сила трения зависит от активных сил, и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, т.

$$0 \leq F \leq \overline{F_{\max}}$$

2. Максимальная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона сле-

дует, что для того, чтобы сдвинуть, например, кирпич, надо приложить одну и ту же силу независимо от того, какой гранью он положен на поверхность.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна параллельному давлению, т.е.

$$\overline{F_{\max}} = f\,N \tag{136}$$

где f - коэффициент трения скольжения, он не зависит от нормального давления.

Соотношение (136) еще называют законом Кулона.

4.Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.Закон Кулона (136) справедлив и для скольжения одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

2.8.1.2 Угол и конус трения.

Пусть твердое тело под действием активных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, т.е. таком состоянии, когда сила трения достигает своего наибольшего значения при данном значении нормальной реакции (рис.83).

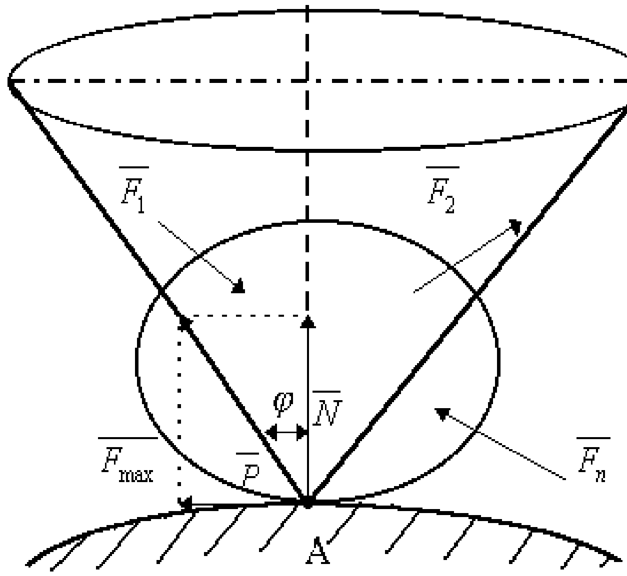


Рисунок 83

В этом случае полная реакция шероховатой поверхности R отклонена от нормали общей касательной плоскости трущихся поверхностей наибольший угол. Этот наибольший угол между полной реакцией, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции называется углом трения j .

Как следует из рис.83 $$tg\,j = \frac{F_{\max}}{N}$$

Но по третьему закону Кулона $\overline{F_{\max}} = f\,N$

следовательно, $$tg\,\varphi = f \qquad (137)$$

т.е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Конусом трения называется конус, описанной полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции.

Его можно получить, изменяя активные силы так, чтобы тело на шероховатой поверхности находились в пределах положения равновесия, стремясь выйти из равновесия по всем возможным направлениям, лежащим в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей.
Если коэффициент трения во всех направлениях одинаков, то конус трения круговой. Если f неодинаков - то конус не круговой.

2.8.1.3 Равновесие тела на шероховатой поверхности.

При равновесии сил, действующих на твердое тело, находящееся в равновесии на шероховатой поверхности, возникает дополнительно неизвестная сила реакции шероховатой поверхности - сила трения.

В случае предельного равновесия сила трения достигает своего максимального значения и по формуле (136) выражается через нормальную реакцию. В общем случае равновесия сила трения находится между нулем и ее максимальным значением. Поэтому соответствующие условия равновесия, в которые входит сила трения после замены ее максимальным значением становятся неравенствами. После этого неизвестные находят путем совместного решения уравнений и неравенств.Можно сформулировать условия равновесия, используя конус трения. Если активные силы, действующие на тело, приводят к равнодействующей силе $\overline{R^{(a)}}$, то при равновесии тела на шероховатой поверхности равнодействующая активных сил $\overline{R^{(a)}}$ по аксиоме о равновесии двух сил, приложенных к твердому телу, уравновешивается полной реакцией $\overline{R}$ шероховатой поверхности (рис 84). Полная реакция проходит через вершину конуса, а, следовательно, через вершину конуса проходит и равнодействующая активных сил. Очевидно, при изменении равнодействующей активных сил тело на-ходится в равновесии до тех пор, пока составляющая $\overline{Q}$ равнодействующей активных сил, лежащая в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей, не будет превышать наибольшего значения силы трения $\overline{F_{\max}}$. Предельным положением равновесия тела является случай, когда сила $\overline{Q}$ равна силе $\overline{F_{\max}}$. В этом случае равнодействующая активных сил $\overline{R^{(a)}}$ направлена по образующей конуса трения, т.к. $\overline{P}$ - составляющая равнодействующей активных сил по нормали - уравновешена нормальной реакцией N, если только активные силы не отделяют тело от шероховатой поверхности.

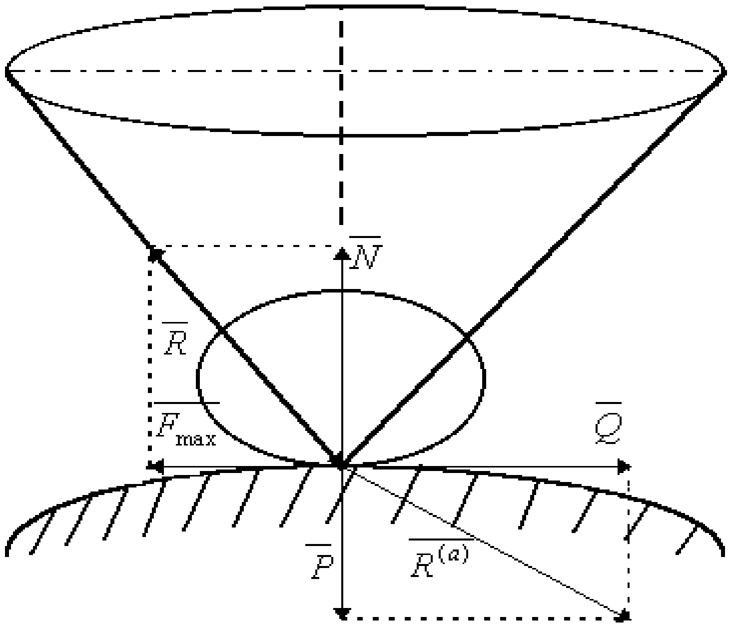


Рисунок 84

Поэтому условие равновесия тела на шероховатой поверхности можно сформулировать так: для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину (рис.85).

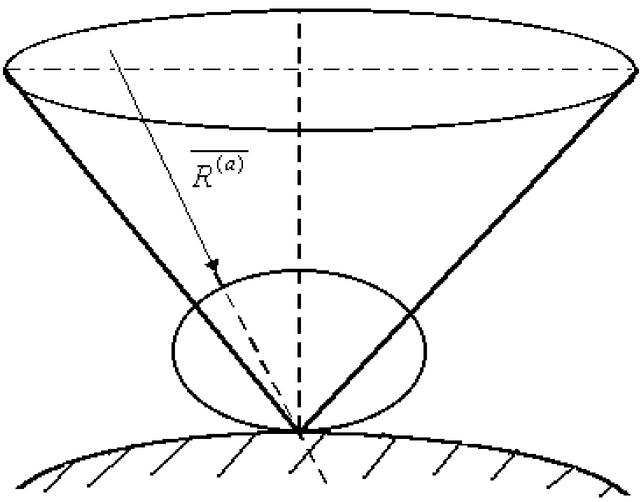


Рисунок 85

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения.

Если линия действия равнодействующей активных сил не проходит внутри конуса трения или по его образующей, то тело на шероховатой поверхности не может находиться в равновесии (рис.85).

2.8.2 Трение качения.

Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению.

Пусть цилиндрический каток находится на горизонтальной плоскости под действием активных сил. Соприкосновение катка с плоскостью из-за деформации фактически происходит не вдоль одной образующей, как в случае абсолютно твердых тел, а по некоторой площадке. Если активные силы приложены симметрично относительно среднего сечения катка, т.е. вызывают одинаковые деформации вдоль всей его образующей, то можно изучать только одно среднее сечение катка.

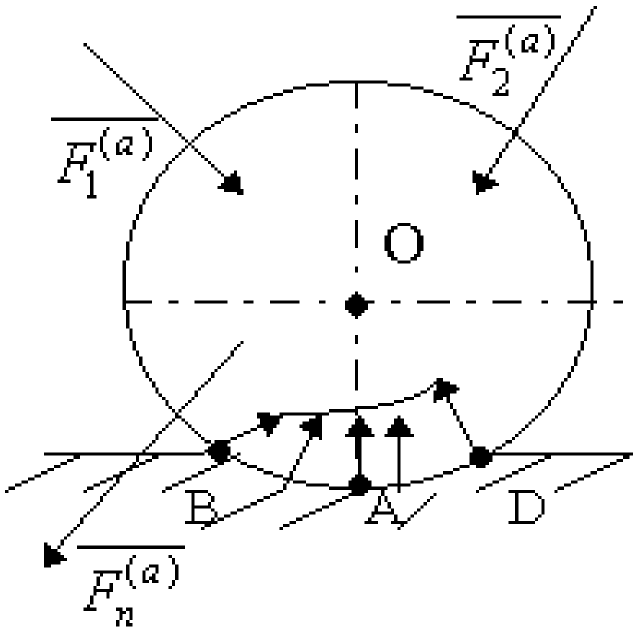


Рисунок 86

Активные силы, действующие на каток (рис.86), кроме силы тяжести P обычно состоят из силы $\overline{Q}$, приложенной к центру колеса параллельно общей касательной в т. A, и пары сил с моментом L, стремящейся катить колесо, называемое в этом случае ведомо-ведущим. Если L =0 , а Q≠0 , то колесо называется ведомым, а если L≠0 , а Q = 0 , то ведущим.

Если активные силы, действующие на колесо привести к точке *A*, то в общем случае получим силу и пару сил, стремящие каток скользить и катиться.

Следует различать *чистое качение*, когда точка соприкосновения *A* катка не скользит по неподвижной плоскости, и *качения со скольжением*, когда наряду с вращением катка есть и скольжение, т.е. точка *A* катка движется по плоскости. При чистом скольжении, наоборот, каток движется по плоскости не имея вращения. Соприкосновение среднего сечения колеса с неподвижной плоскостью из-за деформации колеса и плоскости происходит по некоторой линии *BD*

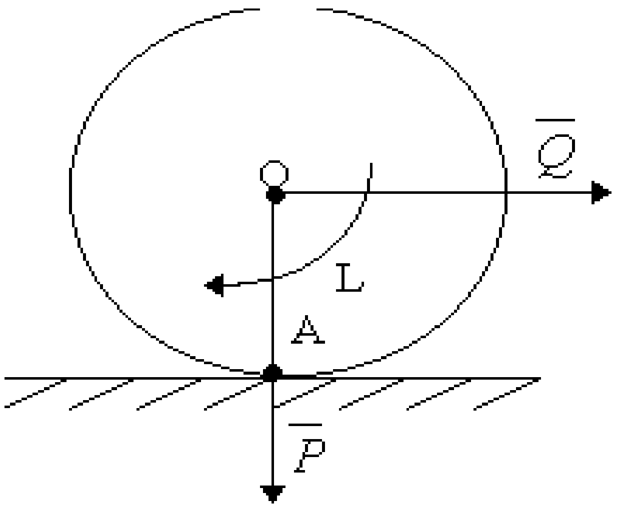


Рисунок 87

. По этой линии на колесо действуют распределенные силы реакции (рис.88).

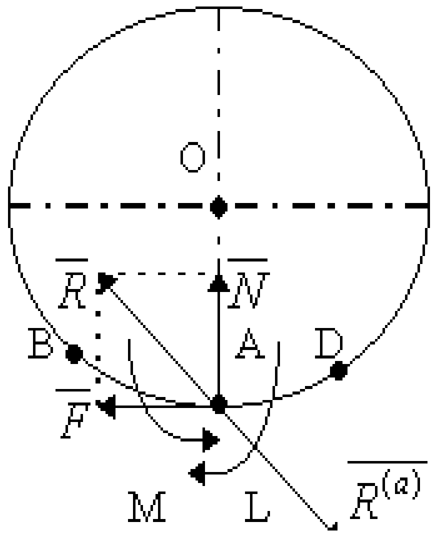


Рисунок 88

Если привести распределенные силы к точке А, то в этой точке получим главный вектор $\overline{R}$ этих распределенных сил с составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F}$, а также пару сил с моментом М (рис.88).

При симметричном распределении сил по линии *BD* относительно точки *A* момент М пары сил равен нулю. В этом случае нет активных сил, стремящихся катить каток в каком либо направлении.

Приведем активные силы ($\overline{F_1^{(a)}}, \overline{F_2^{(a)}}$, ... , $\overline{F_n^{(a)}}$) в общем случае к точке *A*. В этой точке получим главный вектор этих сил $\overline{R^{(a)}}$ и пару сил, момент которой равен главному моменту L (рис.89).

При равновесии катка, т.е. когда каток не катится и не скользит по плоскости, активные силы уравновешиваются силами реакций связей и,

следовательно,

$$-\overline{R} = \overline{R^{(a)}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i^{(a)}} \qquad -M = L = \sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F_i^{(a)}})$$

Изменим активные силы, приложенные к катку так, чтобы увеличивался момент L пары активных сил, стремящихся катить каток.

Пока каток находится в равновесии, увеличивается и равный ему по числовой величине, но противоположный по направлению момент M пары сил, препятствующий качению катка и возникающий от действия на каток неподвижной плоскости.

Наибольший момент M достигается в момент начала качения катка по плоскости.

Установлены следующие приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующей качению в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента $M_{\max}$ пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции N :

$$M_{\max} = d.N, \tag{138}$$

где d - коэффициент трения качения при покое или коэффициент трения второго рода.

3. Коэффициент зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения качения в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольже-

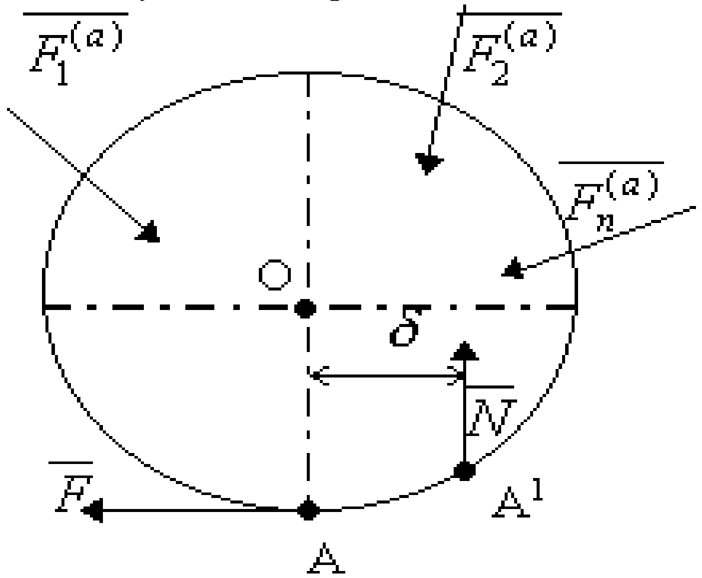


Рисунок 89

ния по плоскости. Коэффициент d равен длине, которую вычисляют следующим образом. Сложим нормальную реакцию $\overline{N}$ с парой сил, препятствующей качению в момент, когда $M = M_{\max}$. Получим ту же силу $\overline{N}$, но сдвинутую параллельно самой себе на расстояние

$$d = \frac{M_{max}}{N} = d\,\frac{N}{N} = d$$

В предельном случае равновесия катка $d = d$ эту величину следует отложить в направлении, в котором активные силы стремятся катить каток (рис.89).

Для того, чтобы каток не скользил, необходимо выполнение условия

$$\left|\overline{F}\right| < F_{max} = f\,N \qquad (139)$$

Для заданных активных сил соответственно

$$\left|\overline{F}\right| = \left|\sum_{i-1}^{n} F_{it}^{(a)}\right| = F_{max}$$

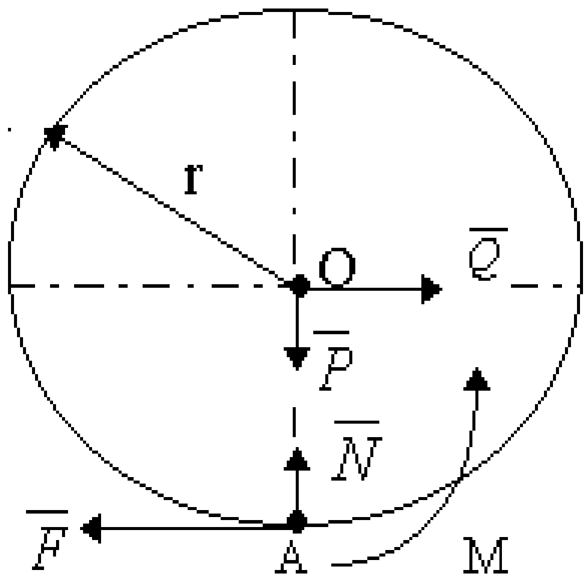


Рисунок 90

Для того чтобы каток не катился, должно выполняться условие

$$|M| < M_{\max} = d\,.\,N \qquad (140)$$

Для активных сил оно имеет вид

$$|-M| = \left|\sum_{i-1}^{n} M_A(F_{it}^{(a)})\right| < M_{\max}$$

Для примера рассмотрим случай ведомого колеса, к которому кроме силы тяжести Р приложена еще горизонтальная активная сила $\overline{Q}$ (рис.90).

Если каток находится в равновесии, то из условий равновесия плоской системы сил, приложенных к катку, получаем

$$F = Q; \quad N = P; \quad rQ = M,$$

где за моментную точку взята точка *A*.

В случае отсутствия скольжения по формуле (139) с учетом условий равновесия

$$Q = F \le fP$$

Аналогично, при отсутствии качения по формуле (140)

$$rQ = M \le d\,P$$

Таким образом при отсутствии скольжения сила $\overline{Q}$ должна удовлетворять условию:

$$Q \le fP\ ,$$

а при отсутствии качения эта же сила $\overline{Q}$ - удовлетворять другому условию:

$$Q \le \frac{d}{r}P$$

Если $\frac{d}{r} < f$, то пока $Q \le \frac{d}{r} = P$, каток находится в равновесии.

Если $fP > Q \ge \frac{d}{r}P$, то каток катится без скольжения (чистое качение). При $Q \ge fP$ кроме качения появляется еще и скольжение.

При $\frac{d}{r} > f$ каток находится в равновесии, пока $Q \le fP$.

Если $\frac{d}{r} > Q \ge fP$ он скользит не вращаясь (поступательное движение)

При $Q \ge \frac{d}{r}P$ наряду со скольжением возникает качение.

В случае если $\frac{d}{r}=f$, каток находится в равновесии, пока $Q \le \frac{d}{r} fP$. Если же, $Q \ge \frac{d}{r} P$ то он катится со скольжением.

Обычно $\frac{d}{r} \ll f$ и, следовательно, для начала качения катка требуется значительно меньшая сила $\overline{Q}$, чем для начала его скольжения.

Поэтому по мере увеличения силы $\overline{Q}$ каток сначала начинает катиться, а при дальнейшем ее росте к качению добавляется еще и скольжение.

С точки зрения затрат энергии выгодно заменять скольжение качением. Аналогично трению качения можно рассмотреть и явление возникновения так называемого трения верчения, т.е. случая, когда активные силы стремятся вращать тело.

2.9 Центр системы параллельных сил.

Предположим, что на твердое тело действует система параллельных сил $\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}\right)$, приводящаяся к равнодействующей, силы которой приложены в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$.

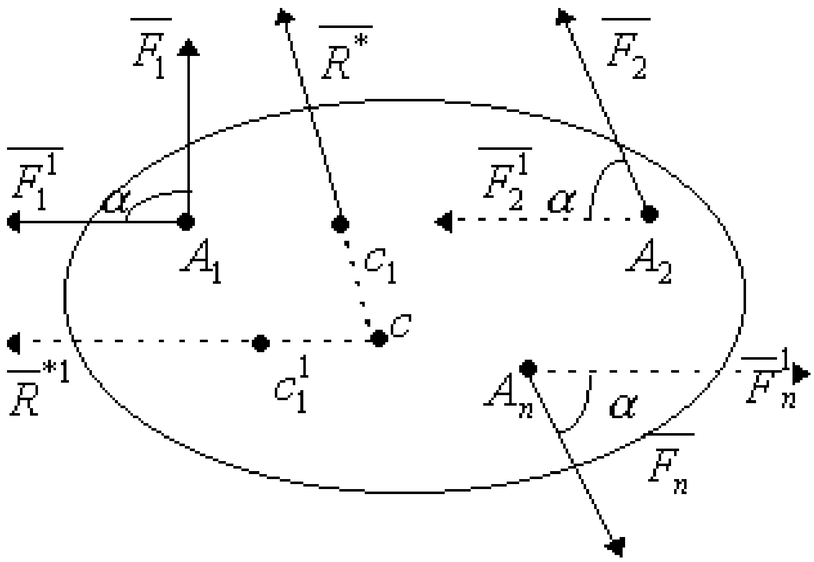


Рисунок 91

Определим линию действия равнодействующей R^* параллельных сил для заданного направления этих сил.

Через точки приложения параллельных сил проведем взаимно-параллельные оси, перпендикулярные силам. Повернем параллельные силы вокруг этих сил на общий угол в одном и том же направлении (рис.91).

Получим новую систему параллельных сил

$$\left(\overline{F_1^1}, \overline{F_2^1}, ..., \overline{F_n^1}\right).$$

Равнодействующая этой системы параллельных сил $\overline{R}^{*1}$ равна по модулю равнодействующей силе $\overline{R}^{*}$, т.к. при повороте числовые величины параллельных сил не изменялись.

Линии действия двух равнодействующих сил $\overline{R}^{*}$ и $\overline{R}^{*1}$ пересекутся в точке *C*, которая и называется центром параллельных сил. Центр параллельных сил не зависит от угла поворота и направления параллельных осей.

Из определения параллельных сил следует, что его (рис.91) положение зависит от не зависит от точек приложения параллельных сил. Поэтому параллельные силы следует считать приложенными в точках твердого тела параллельных сил

$$\overline{F_i} = F_i \cdot \overline{l}$$

где F_i - алгебраическое значение силы.

Она положительна, если сила F_i направлена в одну сторону с единичным вектором $\overline{l}$, и отрицательна, если направление силы противоположно направлению единичного вектора.

Для равнодействующей силы соответственно имеем

$$\overline{R}^{*} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \overline{l} \sum_{i=1}^{n} F_i$$

По теореме Вариньона

$$\overline{M_O}(\overline{R}^{*}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_O}(\overline{F_i}) \tag{141}$$

Для векторных моментов сил относительно точки *O* имеем

$$\overline{M_O}(\overline{R}^{*}) = \overline{r_C} x \overline{R}^{*} = \overline{r_C} x \overline{l} \cdot \sum_{i=1}^{N} F_i; \quad \overline{M_O}(\overline{F_i}) = \overline{r_i} x \overline{F_i} = \overline{r_i} x \overline{l} \cdot \overline{F_i}$$

где r_c - радиус вектор центра параллельных сил;

r_i - радиус вектор точки приложения силы $\overline{F_i}$ (рис.92)

Если подставить эти значения векторных моментов сил в (141), то после переноса всех слагаемых в левую часть равенства и вынесение за скобку общего множителя $\overline{l}$, получим

$$(\overline{r_c} \sum_{i=1}^{n} F_i - \overline{r_i} \sum_{i=1}^{n} F_i) x \overline{l} = 0 \tag{142}$$

Т.к. центр параллельных сил, а следовательно, и его радиус вектор не зависят от направления параллельных сил, характеризуемого единичным вектором $\bar{l}$, то условие (1’) должно выполняться при любом направлении этого вектора. Это возможно только при обращении в нуль векторной величины, стоящей в скобках, т.е.

$$\bar{r}_c \sum_{i=1}^{n} F_i - \bar{r}_i \sum_{i=1}^{n} F_i) x \bar{l} = 0$$

или

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (143)$$

В проекциях на оси координат

$$x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad y_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad z_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (144)$$

Векторную величину

$$\bar{S}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i$$

называют *статическим моментом* системы параллельных сил относительно точки *O*.

Алгебраические величины

$$\overline{S_{o_{yz}}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i F_i \qquad \overline{S_{o_{xz}}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i F_i \qquad \overline{S_{o_{xy}}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i F_i$$

называют статическими моментами относительно координатных плоскостей.

.10 Центр тяжести тел

2.10.1 Определение центра тяжести тела.

Центром тяжести тела называют точку, являющуюся центром параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частицам тела.

Рассмотрим тело, имеющее объем V. Разобьем это тело на элементарные частицы и обозначим вес каждой из них $\Delta\overline{P_i}$. Будем иметь систему параллельных сил тяжести с центром параллельных сил C (рис.92).

Положение центра тяжести можно определить по формуле

$$\overline{r_i} = \frac{\sum \Delta P_i \overline{r_i}}{\sum \Delta P_i}$$

$$\sum DP_i = P$$ - вес тела

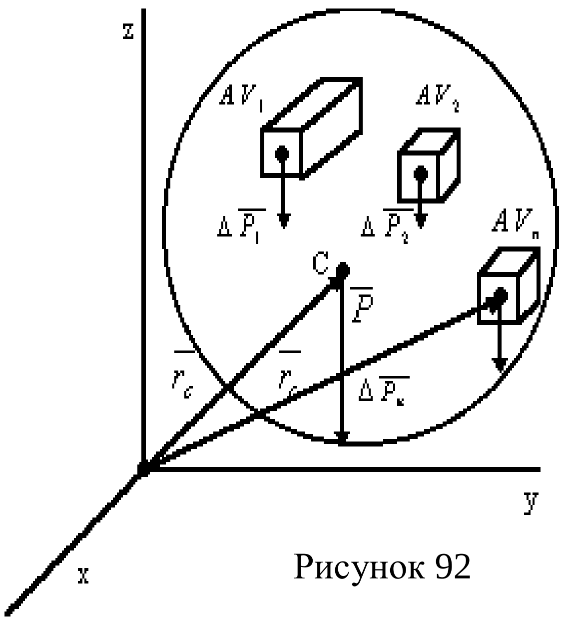


Рисунок 92

Сила тяжести частицы равна произведению массы частицы m на ускорение g, т.е.

$$\sum DP_i = D m_i g$$

Если частица имеет объем ΔV_i, то

$$D m_i = r_i D V_i$$

где r_i - объемная плотность.

Если тело представляет собой материальную поверхность, то

$$D m_i = r_i D s_i$$

где r_i - поверхностная плотность, Δs_i - площадь элемента поверхности.

В случае материальной линии

$$D m_i = r_i D l_i$$

где r_i - линейная плотность, Δl_i - длина элемента линии.

Если рассматриваемое тело является однородным, то плотность одинакова во всех точках; она сократится в формуле (4), если в нее подставить

$$D P_i = g\, r_i D V_i$$

Положение центра тяжести для объема выражается формулами

$$\overline{r_c} = \frac{\sum \overline{r_i} \Delta V_i}{V}$$

$$\overline{x_c} = \frac{\sum \overline{x_i} \Delta V_i}{V} \qquad \overline{y_c} = \frac{\sum \overline{y_i} \Delta V_i}{V} \qquad \overline{z_c} = \frac{\sum \overline{z_i} \Delta V_i}{V} \tag{145}$$

Для центра тяжести поверхности $\overline{r_c} = \dfrac{\sum \overline{r_i} \Delta s_i}{s}$

$$\overline{x_c} = \frac{\sum \overline{x_i} \Delta s_i}{s} \qquad \overline{y_c} = \frac{\sum \overline{y_i} D s_i}{s} \qquad \overline{z_c} = \frac{\sum \overline{z_i} \Delta s_i}{s} \tag{146}$$

Для линии $\overline{r_c} = \dfrac{\sum \overline{r_i} \Delta l_i}{l}$

$$\overline{x_c} = \frac{\sum \overline{x_i} \Delta l_i}{l} \qquad \overline{y_c} = \frac{\sum \overline{y_i} \Delta l_i}{l} \qquad \overline{z_c} = \frac{\sum \overline{z_i} \Delta l_i}{l} \tag{147}$$

Числители в приведенных формулах называют статическими моментами объема, площади или длины тела относительно точки или координатных осей.

2.10.2 Методы нахождения центров тяжести.

2.10.2.1.Центры тяжести симметричных однородных тел.

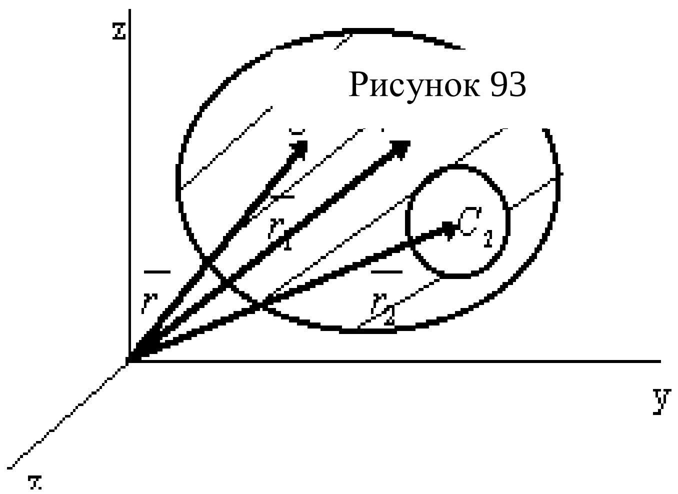
Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости, или на оси, или в центре симметрии.

2.10.2.2. Метод разбиения тел на части.

Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то положение центра тяжести всего тела можно определить по формулам (144) - (147).

2.10.2.3.Метод отрицательных масс.

Предположим, что тело имеет пустые полости. Пусть пустая полость имеет объем V_2; координаты ее центра тяжести C_2, x_2, y_2, z_2. Центр тяжести тела фактически заполненного материей (без V_2) - C, а объем V. Вообразим теперь, что пустая полость заполнена. Рассмотрим сплошное тело (без пустой полости), объем которого V_1: $V_1 = V + V_2$; центр тяжести этого тела обозначим C_1.Используя метод разбиения на части, можно выразить радиус вектор центра тяжести всего объема



t_1 в таком виде

$$\bar{r}_1 = \frac{V\bar{r}_c + V_2\bar{r}_2}{V_1};$$

отсюда $$\bar{r}_c = \frac{V_1\bar{r}_1 + V_2\bar{r}_2}{V_1 - V_2};$$

или $$x_c = \frac{x_1V_1 + x_2V_2}{V_1 - V_2} \qquad y_c = \frac{y_1V_1 + y_2V_2}{V_1 - V_2} \qquad z_c = \frac{z_1V_1 + z_2V_2}{V_1 - V_2}$$

2.10.3.Центры тяжести простейших тел.

2.10.3.1.Центр тяжести площади треугольника.

Разобьем треугольник на полоски малой ширины, параллельные одной из сторон треугольника. Центр тяжести каждой плоскости лежит на ее середине.

Таким образом, вес всего треугольника распределяется как бы вдоль соответствующей медианы треугольника. Иначе: каждая точка медианы имеет вес, равный весу соответствующей полоски.

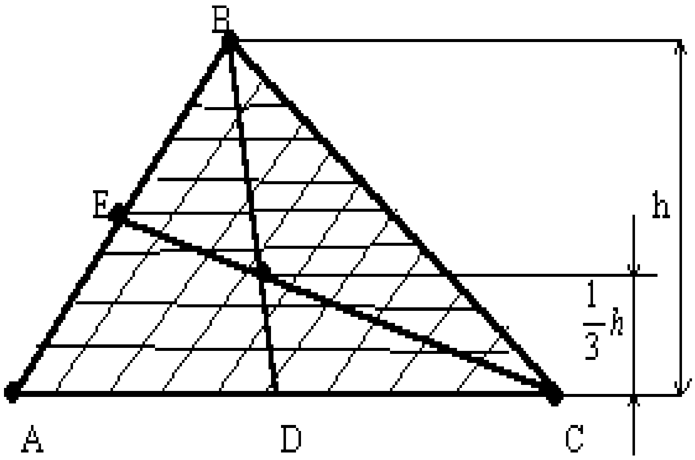


Рисунок 94

Следовательно, центр тяжести треугольника лежит на медиане *BD*. Разобьем теперь треугольник на полоски, параллельные стороне *BA*. Центр тяжести лежит на медиане *CE*. Следовательно, центр тяжести находится на пересечении медиан и отстоит от середины каждого основания треугольника на расстоянии $\frac{1}{3}$ соответствующей медианы или на $\frac{1}{3}h$ от основания.

2.10.3.2 Центр тяжести дуги окружности

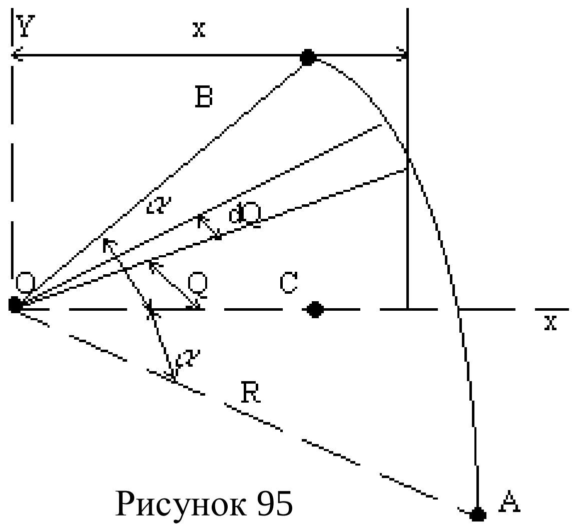


Рисунок 95

Ось O_x - ось симметрии на которой находится центр тяжести. (без вывода)

$x_c = R\frac{sin a}{a}$. Центр тяжести дуги полуокружности получаются при $a = \frac{p}{2}$

$$x_c = \frac{2R}{p}$$