

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по теоретической механике

Часть II. Динамика

(для студентов заочной формы обучения)

Краматорск 2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по теоретической механике
Часть II. Динамика

(для студентов заочной формы обучения)

УТВЕРЖДЕНО

на заседании кафедры

технической механики

Протокол №8 от 24.12.2002

Краматорск 2003

УДК 539.3

Конспект лекций по теоретической механике. Часть II. Динамика (для студентов заочной формы обучения) / Сост.: С.В.Подлесный, Ю.А. Ерфорт. Краматорск: ДГМА, 2003. – 248 с.

В конспекте изложены основы динамики точки, системы материальных точек и твердого тела. Рассмотрены общие теоремы динамики, элементы аналитической механики, теории малых колебаний и теории удара. Приведены примеры и задачи, решение которых сопровождается соответствующими методическими указаниями.

Конспект составлен на основе программы курса теоретической механики, читаемого в ДГМА для студентов механических специальностей. Вместе с тем конспект лекций может использоваться студентами немеханических специальностей и студентами стационара.

Составители:

С.В. Подлесный, доц.
Ю.А. Ерфорт, ст. преп.

Отв. за выпуск

С.В. Подлесный, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1 Основные положения динамики и уравнения движения точки

1.1 Основные аксиомы классической механики

1.2 Системы единиц

1.3 Дифференциальные уравнения движения материальной точки

1.4 Две основные задачи динамики точки

1.4.1 Прямая задача

1.4.2 Обратная задача

1.5 Основные виды прямолинейного движения точки*

2 Относительное движение материальной точки

2.1 Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

2.2 Частные случаи

2.2.1 Относительное движение по инерции

2.2.2 Относительное равновесие

2.2.3 Инерциальные системы отсчета

3 Геометрия масс

3.1 Центр масс

3.2 Моменты инерции

3.2.1 Моменты инерции относительно точки и оси

3.2.2 Моменты инерции относительно осей координат

3.3 Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

3.4 Моменты инерции простейших однородных тел

3.4.1 Однородный стержень

3.4.2 Прямоугольная пластина

3.4.3 Круглый диск

3.4.4 Круглый цилиндр*

3.4.5 Шар*

4 Общие теоремы динамики точки и системы

4.1 Простейшие свойства внутренних сил системы

4.2 Дифференциальные уравнения движения системы

4.3 Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс

4.3.1 Количество движения точки и системы

4.3.2 Вычисление количества движения системы

4.3.3 Элементарный и полный импульсы силы

- 4.3.4 Теорема об изменении количества движения точки
- 4.3.5 Теорема об изменении количества движения системы
- 4.3.6 Законы сохранения количества движения
- 4.3.7 Теорема о движении центра масс системы
- 4.3.8 Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела
- 4.4 Теорема об изменении кинетического момента
 - 4.4.1 Кинетический момент точки и системы
 - 4.4.2 Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела
 - 4.4.3 Теорема об изменении кинетического момента точки
 - 4.4.4 Теорема об изменении кинетического момента системы
 - 4.4.5 Законы сохранения кинетических моментов
 - 4.4.6 Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси
 - 4.4.7 Движение точки под действием центральной силы. Теорема площадей*
 - 4.4.8 Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс*
 - 4.4.9 Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела
 - 4.4.10 Теорема Резаля*
- 4.5 Теорема об изменении кинетической энергии
 - 4.5.1 Работа силы
 - 4.5.1.1 Элементарная работа силы
 - 4.5.1.2 Полная работа силы
 - 4.5.1.3 Мощность
 - 4.5.1.4 Примеры вычисления работы силы
 - 4.5.2 Кинетическая энергия
 - 4.5.2.1 Кинетическая энергия точки и системы
 - 4.5.2.2 Вычисление кинетической энергии системы (теорема Кёнига)
 - 4.5.2.3 Кинетическая энергия твердого тела
 - 4.5.3 Теорема об изменении кинетической энергии точки
 - 4.5.4 Теорема об изменении кинетической энергии системы
 - 4.5.5 Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении*
- 4.6 Потенциальное силовое поле
 - 4.6.1 Потенциальное силовое поле и силовая функция
 - 4.6.2 Поверхности уровня. Силовые линии
 - 4.6.3 Потенциальная энергия
 - 4.6.4 Примеры вычисления силовых функций
- 4.7 Закон сохранения механической энергии
 - 4.7.1 Закон сохранения механической энергии точки

4.7.2 Закон сохранения механической энергии системы

5 Принцип Даламбера. Динамические реакции при вращении тела вокруг неподвижной оси

5.1 Принцип Даламбера

5.1.1 Принцип Даламбера для материальной точки

5.1.2 Принцип Даламбера для системы материальных точек

5.2 Силы инерции твердого тела в частных случаях его движения

5.3 Динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси*

5.3.1 Формулы для реакций

5.3.2 Статическая уравновешенность

5.3.3 Динамическая уравновешенность

6 Аналитическая механика

6.1 Связи и их классификация

6.2 Возможные перемещения

6.3 Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи

6.4 Принцип возможных перемещений

6.5 Обобщенные координаты системы

6.6 Обобщенные силы

6.6.1 Определение обобщенных сил

6.6.2 Вычисление обобщенных сил.

6.7 Условия равновесия системы

6.8 Общее уравнение динамики

6.9 Уравнение Лагранжа

6.9.1 Тождества Лагранжа

6.9.2 Вывод уравнений Лагранжа

6.9.3 Структура уравнений Лагранжа и их составление

6.9.4 Уравнения Лагранжа для потенциальных сил

6.9.5 Циклические координаты и циклические интегралы

7 Теория малых колебаний

7.1 Понятие об устойчивости равновесия механической системы

7.2 Теорема Лагранжа-Дирихле

7.3 Общие сведения о малых колебаниях системы

7.4 Собственные линейные колебания системы

7.5 Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы

7.5.1 Линейное сопротивление и диссипативная функция

- 7.5.2 Дифференциальное уравнение собственных движений при действии линейного сопротивления
- 7.5.3 Интегрирование дифференциального уравнения движения
- 7.6 Вынужденные колебания системы без учёта сопротивления
- 7.7 Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания
 - 7.7.1 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его интегрирование
 - 7.7.2 Основные свойства вынужденных колебаний
 - 7.7.3 Исследование вынужденных колебаний
 - 7.7.4 Общие свойства вынужденных колебаний
 - 7.7.5 Основы виброзащиты

8 Теория удара

- 8.1 Основные положения и понятия теории удара
- 8.2 Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс для удара. Теорема Кельвина
- 8.3. Теорема об изменении кинетического момента при ударе
- 8.4. Удар точки о неподвижную поверхность
 - 8.4.1 Прямой удар
 - 8.4.2 Косой удар
- 8.5. Теорема Карно

Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка. Это модель материального тела любой формы, размерами которого в рассматриваемых задачах можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу. Более сложные материальные объекты — механические системы и сплошные тела — считают состоящими из материальных точек. Сплошное материальное тело представляют состоящим из малых по сравнению с размерами самого тела частиц, на которые мысленно разбивается тело. Каждую такую частицу считают материальной точкой.

Сила, как известно, является одной из мер действия одного тела на другое. В качестве силы берут векторную меру, модуль которой при действии, например, на пружину динамометра пропорционален деформации пружины в пределах ее упругости. Свойства сил, приложенных к твердому телу и одной точке, рассматривались в статике. В динамике силы оцениваются по их динамическому действию, т. е. по изменению ими характеристик движения материальных объектов.

Движение материальных объектов всегда следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике, в основу которой положены аксиомы Ньютона, пространство считается трехмерным, эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов. Положение точки в таком пространстве относительно какой-либо системы отсчета определяется тремя независимыми параметрами, или координатами, точки

Время в классической механике универсально. Оно не связано с пространством и движением материальных объектов.

Все положения динамики получают из ее аксиом, используя законы логики и вводя удобные для применения понятия. В основу классической механики положены аксиомы Ньютона, которые были даны в его труде «Математические начала натуральной философии», опубликованном впервые в 1687 г.

Для формулировки аксиом Ньютона необходимо дать определение инерциальных систем отсчета, для которых справедливы аксиомы Ньютона. Ньютон считал, что существует абсолютное, неподвижное пространство, с которым и следует скрепить исходную инерциальную систему отсчета. В настоящее время целесообразно определить исходную инерциальную систему отсчета как систему осей координат, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены все время на одни и те же удаленные звезды. Такую систему координат называют *ге-*

лиоцентрической. Ее использование в качестве инерциальной системы отсчета, как показывает опыт, не приводит к заметным погрешностям.

1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1.1 Основные аксиомы классической механики

Всякая система аксиом должна быть полной и независимой. Примем за основу аксиомы Ньютона в современной их форме применительно к простейшей модели тела — материальной точке.

Первой аксиомой, или законом, классической механики, является закон инерции, который был открыт еще Галилеем: *материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета*. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, называется изолированной материальной точкой.

Равномерное и прямолинейное движение точки называют движением по инерции. Частным случаем движения по инерции является покой точки, при котором скорость ее равна нулю. Первая аксиома содержит в себе утверждение, что простейшее материальное тело, а, следовательно, и любые другие материальные тела обладают свойством инерции, т. е. свойством сохранять свое прямолинейное и равномерное движение относительно инерциальной системы отсчета.

Вторая аксиома, или основной закон динамики, принадлежащий Ньютону, устанавливает зависимость ускорения точки относительно инерциальной системы отсчета от действующей на нее силы и массы точки: *ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе* (рис. 1.1). Если \bar{F} есть приложенная к точке сила и \bar{a} — ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$, то основной закон можно выразить в форме

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (1.1)$$

Положительный коэффициент пропорциональности m , характеризующий инертные свойства материальной точки, называется *инертной массой точки*. Инертная масса в классической механике считается величиной постоянной, зависящей только от самой материальной точки и не зависящей от характеристик ее движения, т. е. скорости и ускорения. Масса также не зависит от природы силы, приложенной к точке. Она

одна и та же для сил тяготения, сил упругости, электромагнитных сил, сил трения и других сил.

Массу обычно определяют по силе тяготения P и ускорению свободного падения g у поверхности Земли. Согласно выражению (1.1) в этом случае имеем:

$$mg = P ;$$

$$m = \frac{P}{g} . \quad (1.2)$$

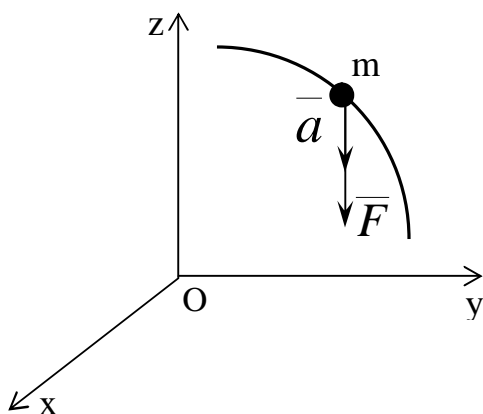


Рисунок 1.1

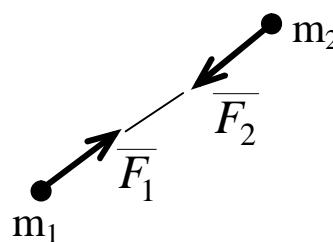


Рисунок 1.2

Из выражения (1.1), если сила $\vec{F} = 0$, следует, что ускорение $\vec{a} = 0$, т. е. материальная точка имеет постоянную по числовой величине и направлению скорость относительно инерциальной системы отсчета. В основном законе содержится часть утверждения аксиомы инерции. Другая часть этой аксиомы, о свойстве инерции материальной точки и всех других материальных тел, в основном законе динамики не содержится.

Третья аксиома, или закон о равенстве сил действия и противодействия, определяет свойство сил взаимодействия между двумя материальными точками с точки зрения инерциального наблюдателя: **силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению** (рис. 1.2), т. е.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (1.3)$$

независимо от удаления точек друг от друга. Эти силы в классической механике считаются действующими вдоль одной прямой.

Если сила действия, например \vec{F}_1 , изменяется, то синхронно с ней должна, согласно выражению (1.3), изменяться и сила противодействия. Это возможно для любых расстояний между взаимодействующими

точками только при условии, что силовое взаимодействие распространяется мгновенно, т. е. с бесконечно большой скоростью.

Четвертая аксиома, или закон независимого действия сил (закон суперпозиции сил), не является самостоятельной аксиомой, если принять, что силы, действующие на материальную точку, складываются по правилу параллелограмма. Эта аксиома следует из аксиомы сложения сил. Закон независимого действия сил утверждает: *при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других приложенных к точке сил, и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.* Между силами нет взаимного влияния друг на друга в создании ускорения точки. Если к материальной точке приложена система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$, то согласно этой аксиоме ускорение от действия каждой из этих сил определяется по формуле (1.1):

$$m\overline{a}_1 = \overline{F}_1; \quad m\overline{a}_2 = \overline{F}_2; \quad \dots; \quad m\overline{a}_n = \overline{F}_n. \quad (1.4)$$

Ускорение при одновременном действии всех сил является векторной суммой ускорений, созданных отдельными силами, т. е.

$$\overline{a} = \sum_{n=1}^k \overline{a}_k. \quad (1.5)$$

Суммируя уравнение (1.4) и используя выражение (1.5), получаем *основное уравнение динамики точки*:

$$m\overline{a} = \sum_{n=1}^k \overline{F}_k. \quad (1.6)$$

Основное уравнение динамики точки остается справедливым и для несвободной материальной точки, на которую наложены связи. Следует только в число приложенных сил включить и силы реакций связей.

1.2 Системы единиц

В общепринятой системе единиц СИ в качестве единицы времени принята секунда (с), длины – метр (м), массы – килограмм (кг). Для них существуют эталоны. Единица силы – ньютон (Н) – является производной от указанных независимых единиц. Сила в 1 Н равна силе, сообщаемой телу массой в 1 кг ускорение, равное 1 м/с^2 .

Существуют и другие системы единиц, как, например, абсолютная, или CGS, и техническая. Абсолютная система единиц отличается от СИ тем, что в ней используются более мелкие единицы. За единицу длины принят 1 см, за единицу массы – 1 г. Тогда сила выразится в динах:

$$1 \text{ дина} = 1 \text{ г} \cdot 1 \text{ см/с}^2; \quad 1 \text{ Н} = 10^6 \text{ дина}.$$

1.3 Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Используя основной закон динамики, можно вывести дифференциальные уравнения движения материальной точки в различных системах координат. По аксиоме о связях и силах реакций связей можно получить дифференциальные уравнения движения несвободной точки так же, как и для свободной, только ко всем приложенным к точке силам надо добавить силы реакций связей.

Обозначая равнодействующую всех заданных сил и сил реакций связей \bar{F} , а массу точки m , получаем

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (1.7)$$

Из кинематики точки известно, что ускорение \bar{a} выражается через радиус-вектор \bar{r} (рис. 1.3):

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \quad (1.8)$$

Если спроецировать обе части уравнения (1.7) или (1.8) на координатные оси, то можно получить дифференциальные уравнения движе-

ния точки в проекциях на эти оси.

В декартовой системе координат в общем случае

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Проекции ускорения на координатные оси можно выразить через вторые производные по времени от координат движущейся точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (1.9)$$

Частные случаи. Если известно, что материальная точка движется в одной и той же плоскости, то, принимая ее за координатную плоскость Oxy , имеем:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y. \quad (1.10)$$

Так как $z=0$, то, следовательно, $F_z=0$.

В случае движения точки по прямой линии, направив по ней координатную ось Ox , получим одно дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \quad (1.11)$$

Так как при движении $y=z=0$, то, следовательно, $F_y = F_z = 0$.

Для естественных подвижных осей координат (рис. 1.4), проецируя обе части выражения (1.7) на эти оси, получаем:

$$ma_t = F_t; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

где a_t, a_n, a_b и F_t, F_n, F_b - соответственно, проекции ускорения

и равнодействующей силы на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории в рассматриваемом положении движущейся точки.

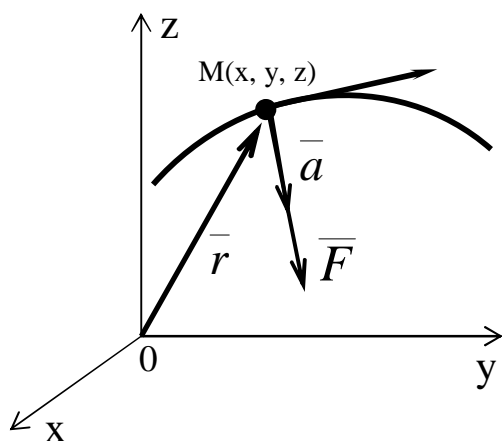


Рисунок 1.3

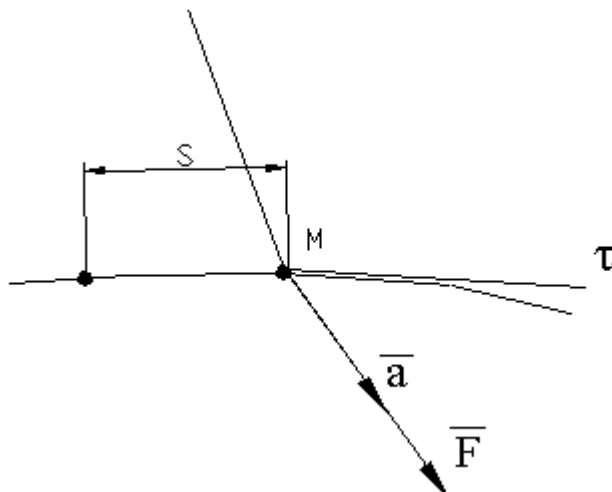


Рисунок 1.4

Учитывая, что

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}; a_n = \frac{V^2}{r}; a_b = 0,$$

где r — радиус кривизны траектории, дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси имеют вид

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_t; \\ m \frac{V^2}{r} = F_n; \\ 0 = F_b. \end{cases} \quad (1.12)$$

Дифференциальные уравнения движения точки можно представить в любой другой системе координат. Для этого надо знать выражения проекций ускорения на эти оси координат.

1.4 Две основные задачи динамики точки

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки в той или другой системе координат, можно решать две основные

задачи динамики точки.

1.4.1 Прямая задача

Зная массу точки и ее закон движения, можно найти действующую на точку силу. Действительно, если, например, заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t);$$

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциальных уравнений движения точки (1.9), т. е.

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 f_1}{dt^2};$$
$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{d^2 f_2}{dt^2};$$
$$F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{d^2 f_3}{dt^2}.$$

Зная проекции силы на координатные оси, легко определить модуль силы и косинусы углов силы с осями координат.

1.4.2 Обратная задача

По заданной массе и действующей на точку силе необходимо определить движение этой точки. Рассмотрим решение этой задачи в прямоугольной декартовой системе координат. В общем случае сила F , а следовательно, и ее проекции на координатные оси могут зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости, ускорения и т. д. Для простоты ограничимся случаем зависимости силы и ее проекций на оси координат от времени, координат и скорости. Дифференциальные уравнения движения точки (1.9) имеют вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z});$$
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z});$$
$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}).$$

Для нахождения уравнений движения точки в декартовых координа-

тах необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений (1.9) зависит от времени t и всех шести произвольных постоянных, т. е.

$$\begin{cases} x = f_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y = f_2(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z = f_3(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \quad (1.13)$$

Если продифференцировать уравнения (1.13) по времени, то определяются проекции скорости точки на координатные оси:

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = f_1'(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_y = \dot{y} = f_2'(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_z = \dot{z} = f_3'(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \quad (1.14)$$

Таким образом, задание силы не определяет конкретного движения материальной точки, а выделяет целый класс движений, характеризующихся шестью произвольными постоянными.

Для выделения конкретного вида движения материальной точки надо дополнительно задать условия, позволяющие определить произвольные постоянные. В качестве таких условий обычно задают так называемые начальные условия, т. е. в какой-то определенный момент времени, например при $t=0$ (рис. 1.5), задают координаты движущейся точки x_0, y_0, z_0 и проекции ее скорости V_{0x}, V_{0y}, V_{0z} :

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = V_{0x}, \quad \dot{y} = V_{0y}, \quad \dot{z} = V_{0z}. \quad (1.15)$$

Используя эти начальные условия и формулы (1.13) и (1.14), получаем шесть следующих уравнений для определения шести произвольных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(0; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6); \\ y_0 &= f_2(0; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6); \\ z_0 &= f_3(0; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6); \\ V_{0x} &= f_1'(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6); \\ V_{0y} &= f_2'(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6); \\ V_{0z} &= f_3'(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

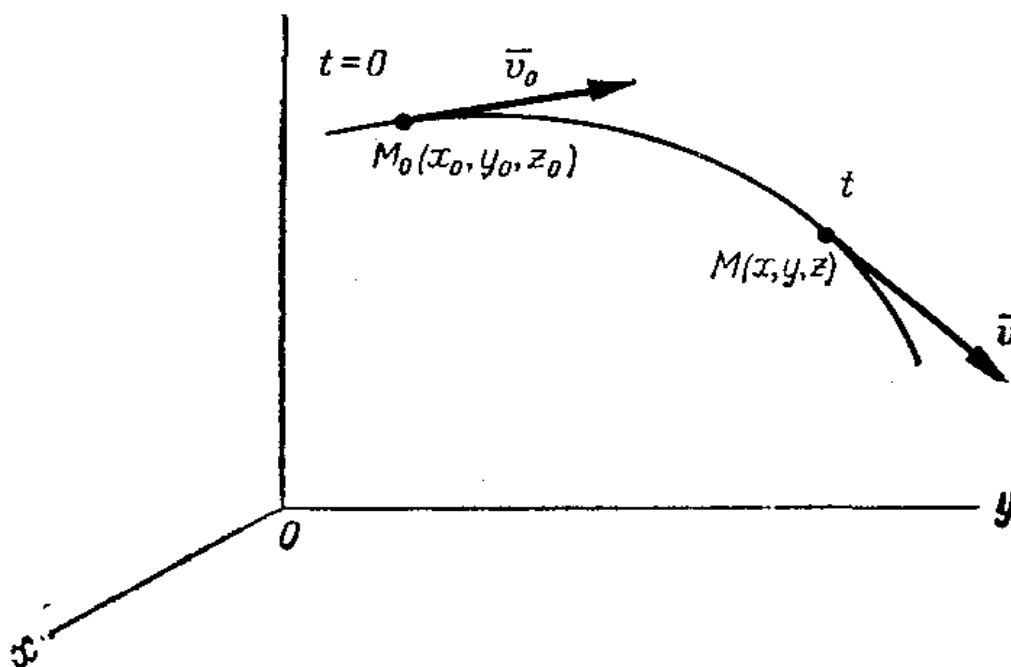


Рисунок 1.5

Если система уравнений (1.16) удовлетворяет условиям разрешимости, то из нее можно определить все шесть произвольных постоянных.

При движении точки в плоскости Oxy имеется два дифференциальных уравнения движения. В решения этих уравнений входят четыре произвольные постоянные. Постоянные определяются из начальных условий:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad \dot{x} = V_{0x}, \quad \dot{y} = V_{0y}.$$

В случае прямолинейного движения точки имеется только одно дифференциальное уравнение, и в его решение входят две произволь-

ные постоянные. Для их определения необходимо задать начальные условия:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = V_{0x}.$$

1.5 Основные виды прямолинейного движения точки*

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox , согласно выражению (1.11), имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t; x; v), \quad (1.17)$$

если рассматривается случай зависимости силы только от времени, координаты и скорости.

Начальные условия можно задать в форме:
 $t = 0, x = x_0, V_x = V_{0x}$.

Наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки получаются тогда, когда сила F постоянна, или зависит только от времени, или от координаты x , или от скорости v . Если сила постоянна, имеем случай равнопеременного движения, т. е. движения с постоянным ускорением. От времени сила обычно зависит, когда ее изменяют путем регулирования, например регулируют силу тяги самолета изменением режима работы его двигателей.

Силу, зависящую от координаты x , могут создать сжатая или растянутая пружина и другие упругие тела при их деформации. Силы, зависящие от скорости движения, — это, прежде всего, силы сопротивления, когда материальная точка движется в какой-либо среде, например в воздухе, воде и т. д.

Отметим, что в перечисленных случаях интегрирование дифференциального уравнения (1.17) выполняется наиболее просто, и его можно довести до конца в квадратурах. В общем случае, если сила одновременно зависит от времени t , координаты x и скорости u , в большинстве случаев дифференциальное уравнение можно проинтегрировать лишь приближенно.

*Здесь и далее звездочкой отмечены разделы, предназначенные для дополнительной проработки желающими углубить свои знания в области теоретической механики.

2 ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1 Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Во многих задачах динамики рассматривается движение материальной точки относительно системы отсчета, движущейся относительно инерциальной системы. Дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно таких подвижных, в общем случае – неинерциальных, систем отсчета получают из уравнений движения точки относительно инерциальной системы отсчета и кинематической теоремы Кориолиса о сложении ускорений.

Имеем инерциальную систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ и материальную точку массы m , на которую действуют приложенные силы \bar{F} и \bar{N} (рис. 2.1), где \bar{F} — равнодействующая заданных активных сил, \bar{N} — равнодействующая сил реакций связей.

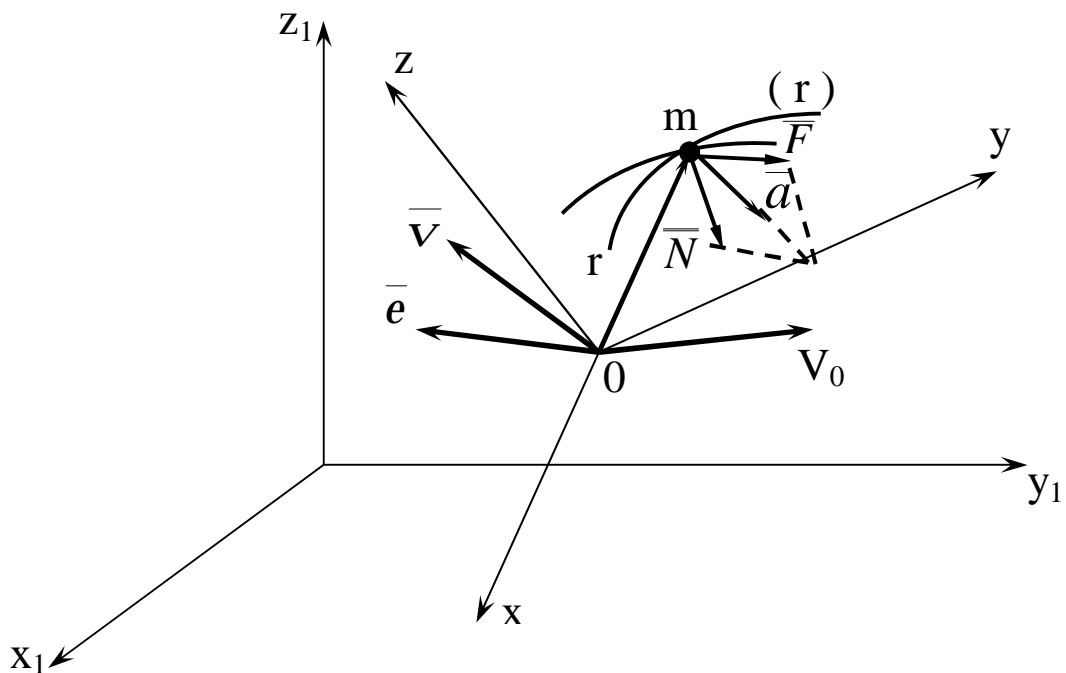


Рисунок 2.1

Если \bar{a} — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета (абсолютное ускорение), то согласно уравнению движения точки в векторной форме имеем:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}. \quad (2.1)$$

Если ввести другую, неинерциальную, систему отсчета $Oxuz$, которая в общем случае может двигаться относительно инерциальной как свободное твердое тело, то по теореме сложения ускорений имеем:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k, \quad (2.2)$$

где $\bar{a}_e, \bar{a}_r, \bar{a}_k$ — соответственно, *переносное, относительное и кориолисово* ускорения.

Подставляя значение абсолютного ускорения \bar{a} из выражения (2.2) в выражение (2.1) после переноса слагаемых, кроме $m\bar{a}_r$, из левой части в правую, получим:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (2.3)$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e; \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$ называются, соответственно, переносной и кориолисовой силами инерции. Получена динамическая теорема Кориолиса, или уравнение относительного движения точки в векторной форме: материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же, как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и реакциям связей следует добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ являются поправками на неинерциальность системы отсчета. Для инерциальной системы отсчета они равны нулю, так как в этом случае абсолютное и относительное движения точки совпадают. Переносная и кориолисова силы инерции участвуют в создании относительного ускорения совершенно так же, как и приложенные силы со стороны материальных тел. Но эти силы инерции по определению приложенных сил классической механики не приложены к материальной точке, так как не участвуют в создании ее ускорения относительно инерциальной системы отсчета.

Если координаты движущейся точки относительно подвижной системы координат $Oxuz$ в момент времени t есть x, y, z , то в проекциях на подвижные оси координат формула (2.3) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m \ddot{y} &= F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m \ddot{z} &= F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \right\} .$$

Это дифференциальные уравнения движения точки относительно

подвижной системы координат в проекциях на декартовы подвижные оси координат. Они отличаются от дифференциальных уравнений абсолютного движения относительно инерциальной системы отсчета только наличием поправок на неинерциальность системы отсчета.

2.2 Частные случаи

2.2.1 Относительное движение по инерции

Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение называют относительным движением по инерции. В этом случае относительная скорость \bar{v}_r постоянна по числовой величине и направлению, а потому относительное ускорение $\bar{a}_r = 0$. Из формулы (2.3) следует в этом случае:

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (2.4)$$

Это условие для сил при относительном движении точки по инерции.

2.2.2 Относительное равновесие

При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость и ускорение равны нулю, т. е. $\bar{v}_r = 0$ и $\bar{a}_r = 0$. Ускорение Кориолиса тоже равно нулю, так как

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r).$$

Из уравнения (2.3) получаем *условие относительного равновесия* для сил:

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (2.5)$$

При абсолютном движении по инерции или абсолютном равновесии относительно инерциальной системы отсчета имеем для сил одно и то же условие $\bar{F} + \bar{N} = 0$. Условие относительного равновесия для сил отличается от условия относительного движения по инерции.

2.2.3 Инерциальные системы отсчета

Переносное ускорение в общем случае вычисляется по формуле

$$\bar{a}_e = \bar{a}_o + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),$$

где a_o – ускорение точки, принятой за полюс, например начало координат подвижной системы координат;
 ω – угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса;
 $\bar{e} = d\omega/dt$ – угловое ускорение этого вращения;
 r – радиус-вектор движущейся точки относительно выбранного полюса.

Пусть подвижная система отсчета все время движется относительно основной инерциальной системы поступательно, равномерно и прямолинейно. В этом случае переносная и кориолисова силы инерции равны нулю, т.е.

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = 0; \quad \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = 0,$$

так как при поступательном движении $\bar{\omega} = 0$ и $\bar{e} = d\omega/dt = 0$. При равномерном и прямолинейном движении $\bar{a}_o = 0$. Таким образом, в этом случае из уравнения (2.3) получаем уравнение относительного движения

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N}, \quad (2.6)$$

которое совпадает с уравнением движения относительно инерциальной системы отсчета (2.1).

Все подвижные системы отсчета, которые движутся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно основной инерциальной системы отсчета, называются тоже *инерциальными*. Относительно всех инерциальных систем отсчета получаются одинаковые уравнения движения материальной точки. Ускорения материальной точки относительно всех инерциальных систем отсчета одинаковы.

Отсутствие принципиальной возможности каким-либо механическим опытом, основанным на наблюдении за движением материальных тел, отличить одну инерциальную систему отсчета от другой находится в основе *принципа относительности* классической механики — принципа Галилея-Ньютона, который утверждает: *все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаково*, или: *никаким механическим опытом нельзя обнаружить инерциальное движение системы отсчета, участвуя вместе с ней в этом движении*. Наоборот, неинерциальные системы отсчета можно обнаружить и отличить одну от другой по поправкам на неинерциальность.

3 ГЕОМЕТРИЯ МАСС

3.1 Центр масс

При рассмотрении движения твердых тел и других механических систем большое значение имеет точка, называемая *центром масс*. Если механическая система состоит из конечного числа материальных точек N с массами m_1, m_2, \dots, m_N , радиус-векторы которых, проведенные из одной и той же точки O , — $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$ (рис. 3.1), то *центром масс* называется *геометрическая точка C* , радиус-вектор которой \bar{r}_C определяется выражением

$$\bar{r}_C = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k / M, \quad (3.1)$$

где $M = \sum_{k=1}^N m_k$ — масса системы.

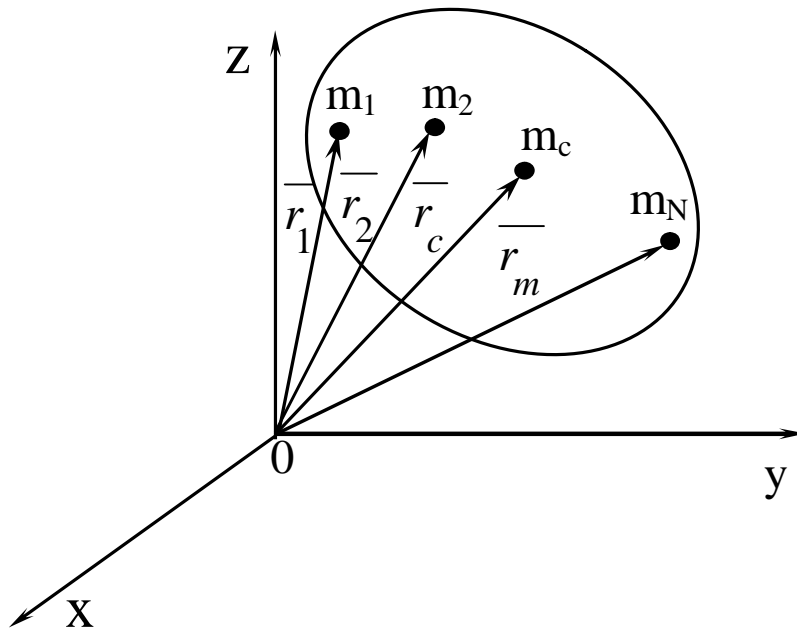


Рисунок 3.1

Обозначая декартовы координаты материальных точек $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$, из уравнения (3.1) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для

координат центра масс:

$$x_C = \sum_{k=1}^N m_k x_k / M; y_C = \sum_{k=1}^N m_k y_k / M; z_G = \sum_{k=1}^N m_k z_k / M. \quad (3.2)$$

Центр масс является не материальной точкой, а *геометрической*. Он может не совпадать ни с одной материальной точкой системы, как, например, в случае кольца. Центр масс системы характеризует распределение масс в системе.

Векторная величина $\bar{S} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k$ называется *статическим моментом*

массы относительно точки O. Скалярная величина $S_{Oyz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k$

называется статическим моментом массы относительно координатной плоскости Oyz.

Величины $S_{Oxz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k$ и $S_{Oxy} = \sum_{k=1}^N m_k z_k$ являются соответ-

ственно *статическими моментами массы относительно координатных плоскостей Oxz и Oxy*.

Радиус-вектор и координаты центра масс через статические моменты массы выражаются формулами:

$$\bar{r}_C = \bar{S}_O / M; x_C = S_{Oyz} / M; y_C = S_{Oxz} / M; z_C = S_{Oxy} / M.$$

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то его разбивают на элементарные частицы с бесконечно малыми массами dm и с изменяющимся от частицы к частице радиус-вектором \bar{r} .

Суммы в пределе переходят в интегралы. Формулы (3.1) и (3.2) принимают форму:

$$\bar{r}_C = \int \bar{r} dm / M,$$

$$x_C = \int x dm / M; y_C = \int y dm / M; z_C = \int z dm / M,$$

где $M = \int dm$ — масса тела.

Для однородных сплошных тел $dm = r dV; M = rV$, где r — плотность тела, общая для всех элементарных частиц; dV — объем

элементарной частицы; V — объем тела.

Для тел типа тонкого листа, которые можно принять за однородные материальные поверхности, $dm = r_S dS$; $M = r_S S$, где r_S — поверхностная плотность; dS — площадь поверхности элементарной частицы; S — площадь поверхности.

Для тонкой проволоки, которую можно принять за отрезок линии, $dm = r_l dl$, $M = r_l l$, где r_l — линейная плотность, dl — длина элемента линии и l — длина отрезка линии.

В этих случаях определение центра масс тел сводится к вычислению центра масс объемов, площадей и длин линий соответственно.

3.2 Моменты инерции

Для характеристики распределения масс в телах при рассмотрении вращательных движений требуется ввести понятие **моментов инерции**.

3.2.1 Моменты инерции относительно точки и оси

Моментом инерции механической системы, состоящей из N материальных точек, относительно точки O называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до точки O (рис. 3.2), т. е.:

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k d_k^2. \quad (3.3)$$

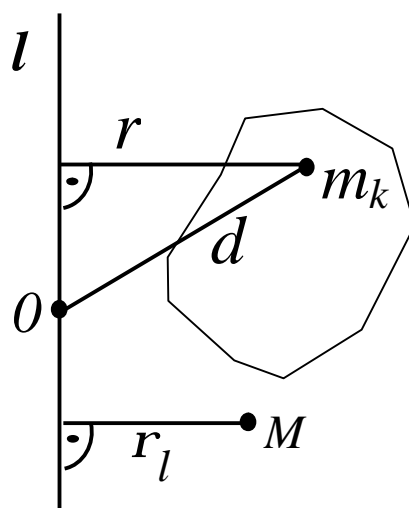


Рисунок 3.2

Момент инерции относительно точки часто называют **полярным мо-**

ментом инерции. В случае сплошного тела сумма переходит в интеграл, и для полярного момента инерции имеем:

$$J_O = \int d^2 dm,$$

где dm — масса элементарной частицы тела, принимаемой в пределе за точку;

d — ее расстояние до точки O .

Моментом инерции J_l системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний r_k до оси Ol (см. рис. 3.2), т.е.

$$J_l = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2. \quad (3.4)$$

В частном случае сплошного тела сумму следует заменить интегралом:

$$J_l = \int r^2 dm. \quad (3.5)$$

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является радиус инерции. Радиус инерции r_l относительно оси Ol определяется по формуле

$$r_l = \sqrt{J_l / M}, \quad (3.6)$$

где M — масса тела.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой оси определяется выражением:

$$J_l = Mr_l^2. \quad (3.7)$$

В справочниках по моментам инерции приводят таблицы значений радиусов инерции различных тел.

Формула (3.7) позволяет считать радиус инерции тела относительно оси расстоянием от этой оси до такой точки, в которой следует поместить массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Моменты инерции относительно оси и точки имеют одинаковую размерность — произведение массы на квадрат длины ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Кроме моментов инерции относительно точки и оси, используются также моменты инерции относительно плоскостей и центробежные моменты инерции. Эти моменты инерции удобно рассмотреть относительно координатных плоскостей и осей декартовой системы координат.

нат.

3.2.2 Моменты инерции относительно осей координат

Моменты инерции относительно декартовых осей координат Ox , Oy и Oz и их начала — точки O — определяются выражениями (рис. 3.3):

$$J_x = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2); J_y = \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2); J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad (3.8)$$

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \quad (3.9)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты материальных точек системы. Для сплошных тел эти формулы примут вид:

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm; J_y = \int (z^2 + x^2) dm; J_z = \int (x^2 + y^2) dm;$$

$$J_O = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

Из приведенных формул следует зависимость

$$2J_O = J_x + J_y + J_z. \quad (3.10)$$

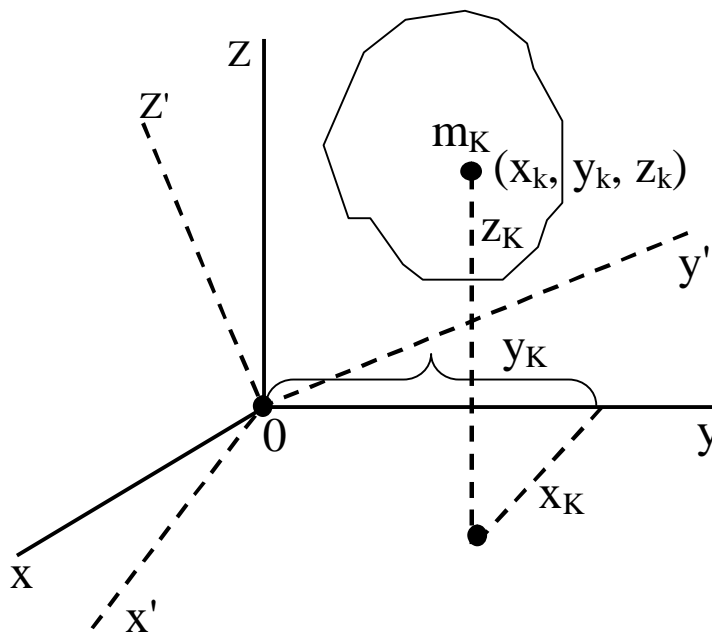


Рисунок 3.3

Если через точку O провести другую систему декартовых осей коор-

динат $Ox'y'z'$, то для них по формуле (3.10) получим

$$2J_O = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}. \quad (3.11)$$

Из сравнения выражений (3.10) и (3.11) следует, что $J_x + J_y + J_z = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}$.

Сумма моментов инерции относительно декартовых осей координат не зависит от ориентации этих осей в рассматриваемой точке, т. е. является величиной, инвариантной по отношению к направлению осей координат.

Для осей координат $Oxyz$ можно определить следующие три **центробежных момента инерции**:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k; J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k; J_{zx} = \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k. \quad (3.12)$$

Центробежные моменты инерции часто называют **произведениями инерции**.

Моменты инерции относительно осей и точек — величины положительные, так как в них входят квадраты координат. Центробежные моменты инерции содержат произведения координат и могут быть как положительными, так и отрицательными. В отличие от осевых центробежные моменты инерции зависят от точки, в которой выбраны оси координат.

Центробежные моменты инерции имеют большое значение при рассмотрении давлений на подшипники при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси и в других случаях.

Кроме рассмотренных моментов инерции иногда используются моменты инерции относительно координатных плоскостей $J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}$, которые определяются выражениями:

$$J_{Oxy} = \sum_{k=1}^N m_k z_k^2; J_{Oyz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k^2; J_{Ozx} = \sum_{k=1}^N m_k y_k^2.$$

3.3 Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

Установим зависимость между моментами инерции системы относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Пусть имеем две системы прямоугольных, взаимно параллельных осей координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$. Начало системы координат $Cx'y'z'$ находится в центре масс системы (рис. 3.4).

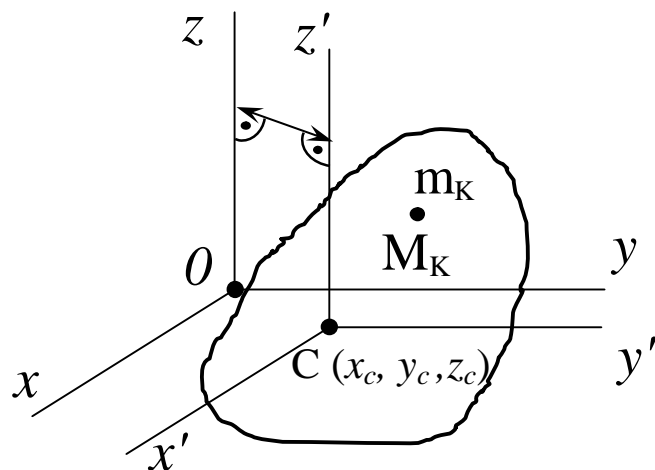


Рисунок 3.4

По определению момента инерции относительно оси имеем:

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

$$J_{Cz'} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2),$$

где m_k — масса точки M_k ;

x_k, y_k, z_k и x'_k, y'_k, z'_k — координаты этой точки относительно систем координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$ соответственно.

Если обозначить через x_c, y_c, z_c координаты центра масс относительно системы координат $Oxyz$, то для взаимно параллельных осей координаты одной и той же точки M_k связаны соотношениями параллельного переноса:

$$x_k = x'_k + x_c; y_k = y'_k + y_c; z_k = z'_k + z_c.$$

Подставим эти значения координат в выражение момента инерции J_{Oz} . После преобразований получим

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + 2x_C \sum_{k=1}^N m_k x_k' + 2y_C \sum_{k=1}^N m_k y_k' + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k=1}^N m_k$$

В этом соотношении $\sum_{k=1}^N m_k = M$ — масса системы,

$$\sum_{k=1}^N m_k x_k' = Mx_C' = 0 \text{ и } \sum_{k=1}^N m_k y_k' = My_C' = 0, \text{ так как } x_C' = 0 \text{ и } y_C' = 0$$

вследствие того, что по условию центр масс находится в начале координат этой системы координат.

Величина $x_C^2 + y_C^2 = d^2$, где d — расстояние между осями Oz и Cz' .
Окончательно

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2.$$

Связь моментов инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, составляет содержание так называемой теоремы Штейнера, или Гюйгенса-Штейнера: **момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями.**

Из теоремы Штейнера следует, что для совокупности параллельных осей момент инерции является наименьшим относительно оси, проходящей через центр масс.

3.4 Моменты инерции простейших однородных тел

Моменты инерции тел сложной формы часто удается вычислить, если их предварительно разбить на тела простой формы. Моменты инерции сложных тел получают, суммируя моменты инерции частей этих тел. Получим формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных простейших тел.

3.4.1 Однородный стержень

Имеем однородный стержень длиной l и массой M (рис. 3.5). Направим по стержню ось Ox . Вычислим момент инерции стержня относительно оси Oz , проходящей перпендикулярно стержню через его конец. Согласно определению момента инерции сплошного тела относительно оси имеем

$$J_{Oz} = \int_{(l)} x^2 dm = r \int_0^l x^2 dx,$$

так как $dm = r dx$, где $r = M / l$ — плотность стержня.

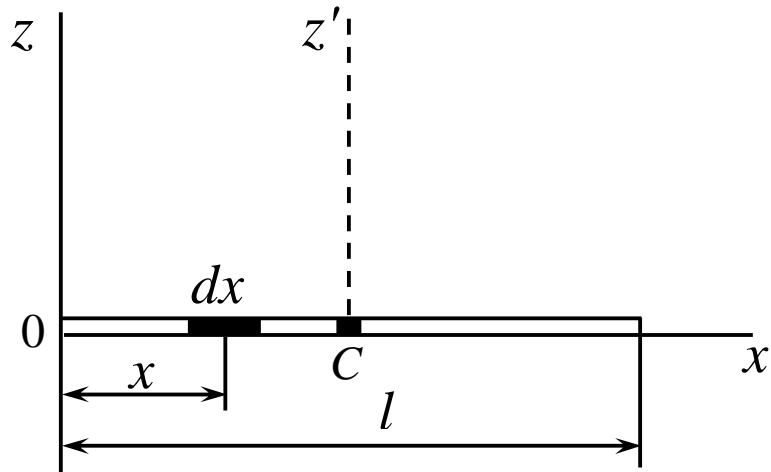


Рисунок 3.5

Вычисляя интеграл, получаем

$$J_{Oz} = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3}.$$

Таким образом,

$$J_{Oz} = M \frac{l^2}{3}. \quad (3.13)$$

Момент инерции стержня относительно оси Cz' , проходящей через центр масс и параллельной оси Oz , определяется по теореме Штейнера:

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2, \text{ где } d^2 = (l/2)^2 = l^2/4.$$

Следовательно,

$$J_{Cz'} = J_{Oz} - Md^2 = M \frac{l^2}{3} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{12},$$

т.е.

$$J_{Cz'} = M \frac{l^2}{12}. \quad (3.14)$$

3.4.2 Прямоугольная пластина

Прямоугольная тонкая пластина имеет размеры l и h и массу M

(рис. 3.6). Оси Ox и Oy расположим в плоскости пластины, а ось Oz — перпендикулярно ей. Для определения момента инерции пластины относительно оси Oy разобьем пластину на элементарные полоски шириной dx и массой $dm = rhdx$ и проинтегрируем по x от 0 до l . Получим

$$J_y = \int_0^l x^2 dm = rh \int_0^l x^2 dx = rh \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3},$$

так как $rh l = M$.

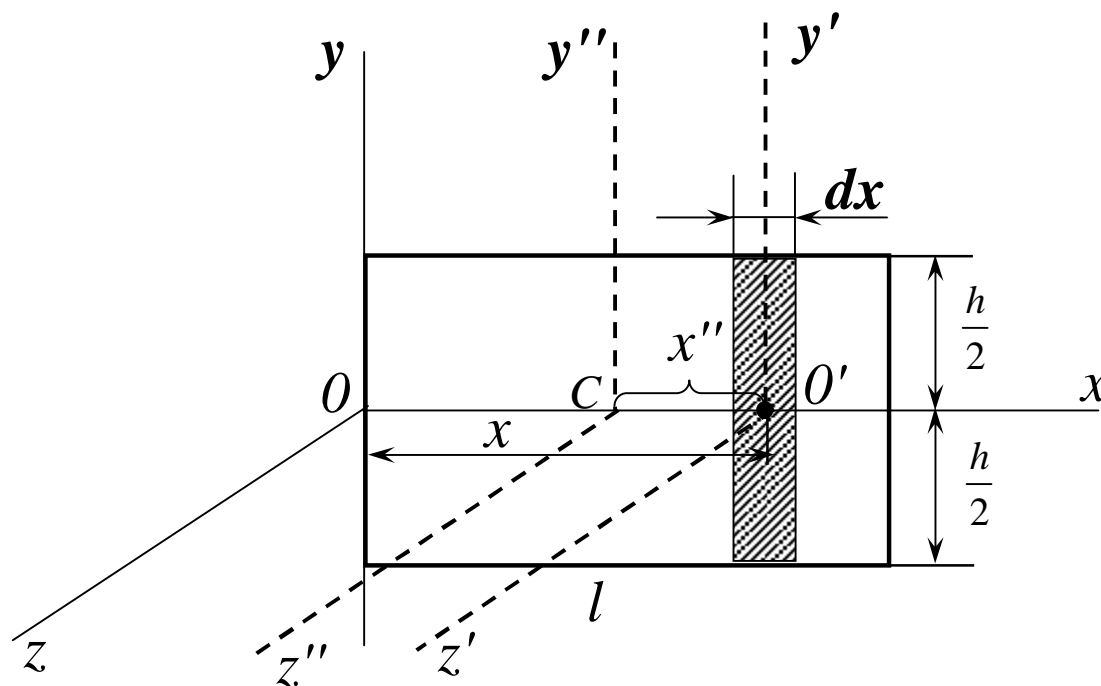


Рисунок 3.6

Аналогичные вычисления для оси Ox дадут

$$J_x = M \frac{h^2}{12},$$

так как ось Ox проходит через середину пластины.

Для определения момента инерции пластины относительно оси Oz следует предварительно вычислить момент инерции отдельной заштри-

хованной полоски относительно параллельной оси $O'z'$ по формуле (3.14) для стержня и применить затем теорему Штейнера. Для элементарной полоски имеем

$$dm \frac{h^2}{12} + x^2 dm.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до l , получим

$$J_z = \int_0^l \left(dm \frac{h^2}{12} + x^2 dm \right) = rh \left[\frac{h^2}{12} \int_0^l dx + \int_0^l x^2 dx \right] = M \left(\frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3} \right)$$

Итак, для моментов инерции пластины относительно осей координат получены следующие формулы:

$$J_x = M \frac{h^2}{12}; J_y = M \frac{l^2}{3}; J_z = M \left(\frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3} \right) \quad (3.15)$$

3.4.3 Круглый диск

Имеем тонкий однородный диск радиусом R и массой M (рис. 3.7).

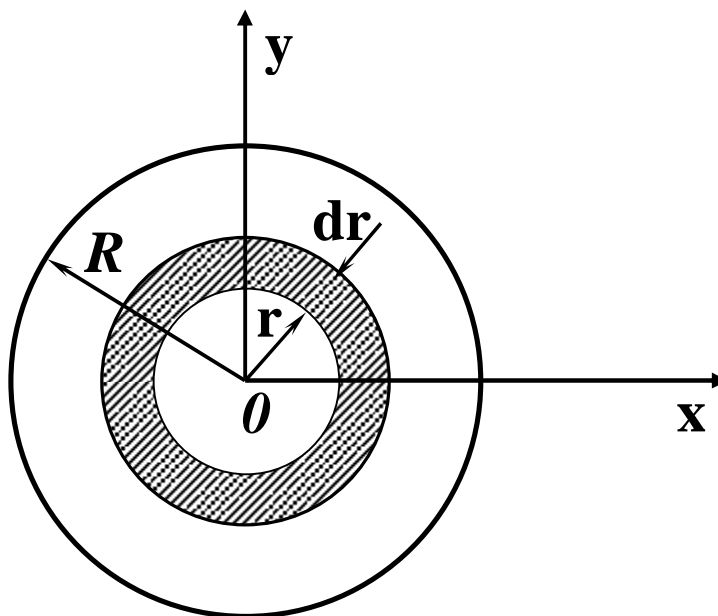


Рисунок 3.7

Вычислим момент его инерции J_o относительно точки O . Этот момент инерции для тонкого диска совпадает с моментом инерции J_z от-

носителем координатной оси Oz , перпендикулярной плоскости диска. Разобьем диск на concentрические полоски шириной dr , принимаемые в пределе за материальные окружности. Масса полоски равна ее площади $2p r dr$ умноженной на плотность $r = M / (pR^2)$, т.е. $dm = r \cdot 2p r dr$. Момент одной полоски относительно точки O равен $r^2 dm$. Для всего диска:

$$J_O = \int_0^R r^2 dm = r \cdot 2p \int_0^R r^3 dr = r \cdot 2p \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}.$$

Таким образом,

$$J_z = J_O = MR^2 / 2. \quad (3.16)$$

Для осей координат Ox и Oy , расположенных в плоскости диска, в силу симметрии $J_x = J_y$. Используя выражение (3.10), имеем $2J_O = J_x + J_y + J_z$, но $J_z = J_O$, поэтому

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_O = \frac{MR^2}{4}.$$

В случае тонкого проволочного кольца или круглого колеса, у которых масса распределена не по площади, а по ободу, имеем

$$J_z = J_O = MR^2; J_x = J_y = \frac{1}{2} MR^2 = MR^2 / 2. \quad (3.17)$$

3.4.4 Круглый цилиндр*

Для круглого однородного цилиндра, масса которого M , радиус R и длина l (рис. 3.8), вычислим прежде всего его момент инерции относительно продольной оси симметрии Oz . Для этого разобьем цилиндр плоскостями, перпендикулярными оси Oz , на тонкие диски массой dm и толщиной dz . Для такого диска момент инерции относительно оси Oz равен $\frac{R^2}{2} dm$. Для всего цилиндра:

$$J_z = \int_0^M \frac{R^2}{2} dm = \frac{R^2}{2} \int_0^M dm = M \frac{R^2}{2}.$$

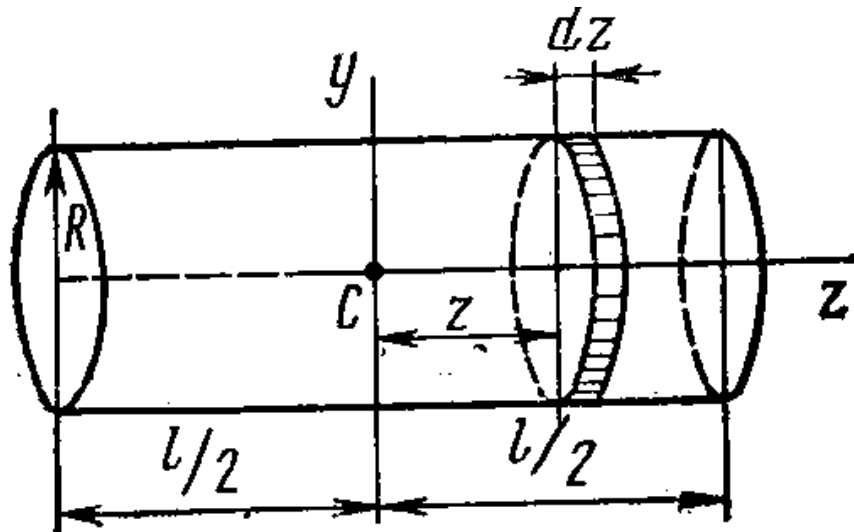


Рисунок 3.8

Вычислим момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии Cy . Для этого разобьем цилиндр поперечными сечениями, перпендикулярными его продольной оси, на элементарные диски толщиной dz . Момент инерции элементарного диска массой $dm = pR^2 r dz$ относительно оси Cy , по теореме Штейнера, $dm \frac{R^2}{4} + dmz^2$.

Чтобы получить момент инерции всего цилиндра относительно оси Cy , следует проинтегрировать полученное выражение по z в пределах от 0 до $l/2$ и результат удвоить. Получим

$$J_{Cy} = \int_0^M \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dm = 2pR^2 r \int_0^{l/2} \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz = pR^2 lr \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$$

Но $pR^2 lr = M$, где M — масса цилиндра. Следовательно,

$$J_{Cy} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right).$$

Таким образом, момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии определяется как сумма моментов инерции относительно этой оси диска и стержня, массы которых равны по отдельности массе цилиндра. Диск получается из цилиндра симметричным

сжатием его от торцов до срединной плоскости при сохранении радиуса, а стержень — сжатием цилиндра в однородный стержень, расположенный по оси цилиндра, при сохранении длины.

3.4.5 Шар*

Пусть масса шара M , радиус R (рис. 3.9). Разобьем шар на концентрические сферические слои радиусом r и толщиной dr . Масса такого слоя $dm = r dV$, где $r = \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$; dV — объем слоя, равный произведению площади поверхности сферы радиусом r и толщины слоя dr , т.е. $dV = 4\pi r dr$. Таким образом, масса элементарного слоя $dm = r dV = r 4\pi r^2 dr$.

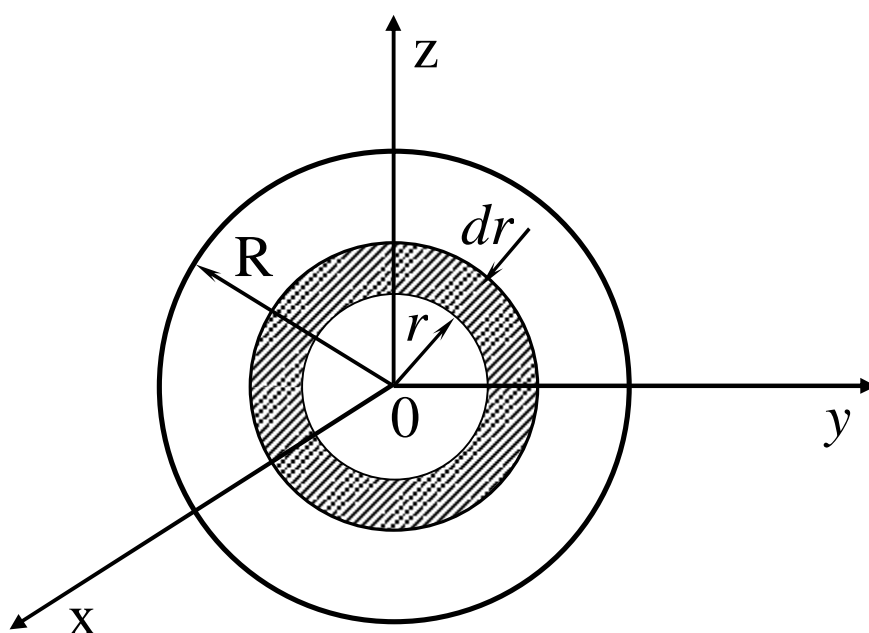


Рисунок 3.9

Для момента инерции шара относительно его центра O имеем:

$$J_O = \int_0^M r^2 dm = r 4\pi \int_0^R r^4 dr = r 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2,$$

т.е.

$$J_O = \frac{3}{5} MR^2. \quad (3.18)$$

Для осей координат, проходящих через центр шара, в силу симметрии $J_x = J_y = J_z$. Но $2J_O = J_x + J_y + J_z = 3J_x = 3J_y = 3J_z$.

Следовательно,

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_O = \frac{2}{5} MR^2. \quad (3.19)$$

4 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

4.1 Простейшие свойства внутренних сил системы

Внешними силами механической системы называются силы, с которыми действуют на точки системы тела и точки, не входящие в рассматриваемую систему.

Внутренними силами механической системы называют силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы.

Внешнюю силу, приложенную к какой-либо точке системы, обозначим $\overline{F}_k^{(e)}$, а внутреннюю – $F_k^{(i)}$. Заметим, что внутренние и внешние силы могут включать в себя как активные силы, так и силы реакций связей.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек. Рассмотрим некоторые простейшие свойства внутренних сил, действующих на всю механическую систему в любом ее состоянии. Докажем, что главный вектор всех внутренних сил системы и главный момент этих сил относительно произвольной точки равны нулю при любом состоянии системы, т. е. при ее равновесии и при произвольном движении.

Пусть система состоит из N точек, где N — любое конечное число (рис. 4.1).

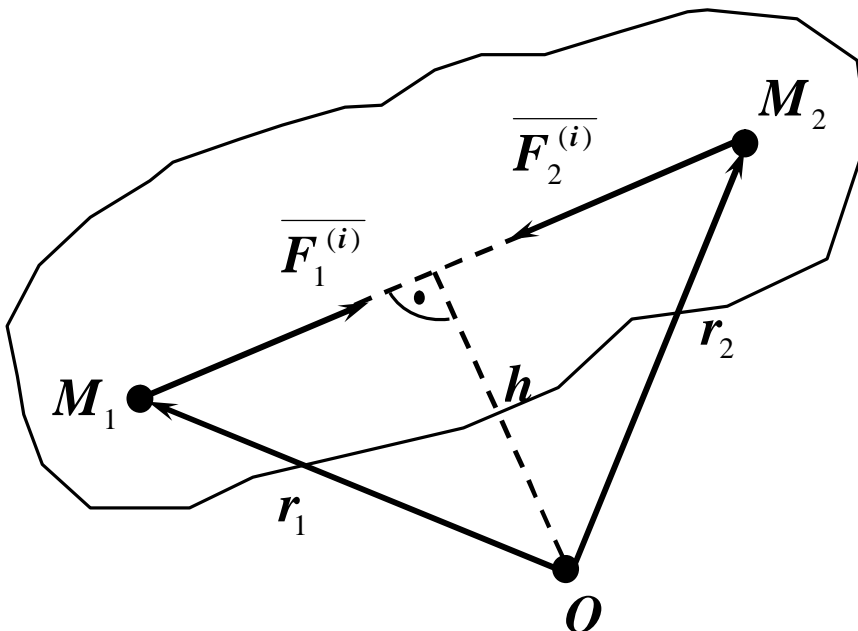


Рисунок 4.1

Условимся пределы у суммы не ставить, когда суммирование производится по всем N точкам системы. Если рассмотреть какие-либо две произвольные точки системы, например M_1 и M_2 , то для них $\bar{F}_1^{(i)} + \bar{F}_2^{(i)} = 0$, так как силы действия и противодействия всегда равны друг другу по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой линии, соединяющей взаимодействующие точки. Главный вектор внутренних сил $\bar{R}^{(i)}$ состоит из векторной суммы таких сил действия и противодействия, так как вся система состоит из пар взаимодействующих точек. Следовательно,

$$\bar{R}^{(i)} = \sum \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (4.1)$$

В проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} R_x^{(i)} &= \sum F_{kx}^{(i)} = 0; \\ R_y^{(i)} &= \sum F_{ky}^{(i)} = 0; \\ R_z^{(i)} &= \sum F_{kz}^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Внешние силы тоже являются силами взаимодействия, но для них силы действия приложены к точкам рассматриваемой системы, а силы противодействия приложены к телам и точкам, не входящим в эту систему.

Рассмотрим теперь сумму моментов сил $F_1^{(i)}$ и $F_2^{(i)}$ относительно точки O . Легко видеть, что

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1^{(i)}) + \bar{M}_0(\bar{F}_2^{(i)}) = 0,$$

так как обе силы имеют одинаковые плечи и противоположные направления векторных моментов. Главный момент внутренних сил $\bar{L}_0^{(i)}$ относительно точки O состоит из векторной суммы таких выражений, равных нулю. Следовательно,

$$\bar{L}_0^{(i)} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0,$$

и, соответственно, в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned}\bar{L}_x^{(i)} &= \sum \bar{M}_x (\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \\ \bar{L}_y^{(i)} &= \sum \bar{M}_y (\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \\ \bar{L}_z^{(i)} &= \sum \bar{M}_z (\bar{F}_k^{(i)}) = 0.\end{aligned}$$

4.2 Дифференциальные уравнения движения системы

Пусть даны внешние и внутренние силы, действующие на систему, состоящую из N точек (рис. 4.2). Если к каждой точке системы приложить равнодействующую силу внешних сил $\bar{F}_k^{(e)}$ и равнодействующую силу всех внутренних сил $\bar{F}_k^{(i)}$, то для любой k -й точки системы можно составить дифференциальное уравнение движения, например в векторной форме, т.е.

$$\begin{aligned}m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} &= \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}; \\ k &= 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Систему N дифференциальных уравнений (4.3) называют дифференциальными уравнениями движения механической системы в векторной форме. Если спроецировать векторные дифференциальные уравнения (4.3) на прямоугольные декартовы оси координат, то получим систему $3N$ дифференциальных уравнений, описывающих движение точек механической системы.

Для нахождения движения механической системы по заданным силам и начальным условиям для каждой точки системы нужно проинтегрировать систему $3N$ дифференциальных уравнений. Эту задачу не удастся точно решить в общем случае даже для одной точки. Она исключительно трудна в случае двух материальных точек, которые движутся только под действием сил взаимодействия по закону всемирного притяжения (задача о двух телах), и совершенно неразрешима в случае трех взаимодействующих точек (задача о трех телах).

Первые интегралы системы дифференциальных уравнений удобно получать из так называемых общих теорем динамики, когда выполняются некоторые дополнительные условия для действующих сил.

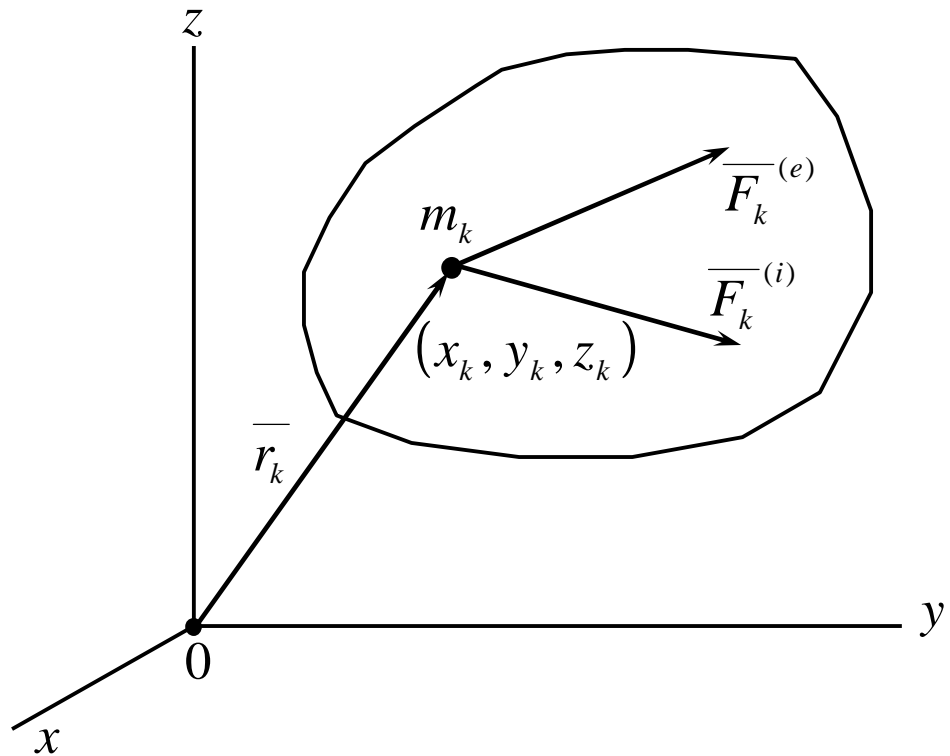


Рисунок 4.2

Общие теоремы динамики являются следствиями системы дифференциальных уравнений движения точки или, соответственно, системы точек.

4.3 Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс

4.3.1 Количество движения точки и системы

Одной из мер движения точки или системы является количество их движения.

Количеством движения материальной точки \bar{q} называют вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость \bar{V} , т.е.

$$\bar{q} = m\bar{V}. \quad (4.4)$$

Количество движения точки в физике часто называют *импульсом материальной точки*.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат:

$$q_x = mV_x = m\dot{x} \quad q_y = mV_y = m\dot{y} \quad q_z = mV_z = m\dot{z} \quad (4.5)$$

Единицы измерения количества движения в СИ – килограмм-метр в секунду (кг·м/с) или ньютон-секунда (Н·с).

Количеством движения системы \bar{Q} называют векторную сумму количеств движений отдельных точек системы, т. е.

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k, \quad (4.6)$$

и, следовательно, проекции количества движения системы на прямоугольные декартовы оси координат:

$$Q_x = \sum m_k V_{kx}; \quad Q_y = \sum m_k V_{ky}; \quad Q_z = \sum m_k V_{kz}.$$

Вектор количества движения системы Q в отличие от вектора количества движения точки q не имеет точки приложения. Вектор количества движения точки считается приложенным в самой движущейся материальной точке, а вектор Q является свободным вектором.

4.3.2 Вычисление количества движения системы

Количество движения системы можно выразить через массу системы M и скорость центра масс \bar{V}_c :

$$\bar{Q} = M\bar{V}_c. \quad (4.7)$$

В проекциях на прямоугольные декартовы оси соответственно:

$$Q_x = MV_{cx} = Mx_c; \quad Q_y = MV_{cy} = My_c; \quad Q_z = MV_{cz} = Mz_c; \quad (4.8)$$

где x_c, y_c, z_c — координаты центра масс системы. Выведем из формулы (4.7) следующее выражение:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k, \quad (4.9)$$

где \bar{r}_k — радиус-вектор k -й точки системы (рис. 4.3). По формуле для радиус-вектора центра масс:

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_c. \quad (4.10)$$

Подставляя значение статического момента массы (4.10) в уравнение (4.9), имеем

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt}(M\bar{r}_c) = M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = M\bar{V}_c,$$

так как масса системы M не изменяется при движении системы.

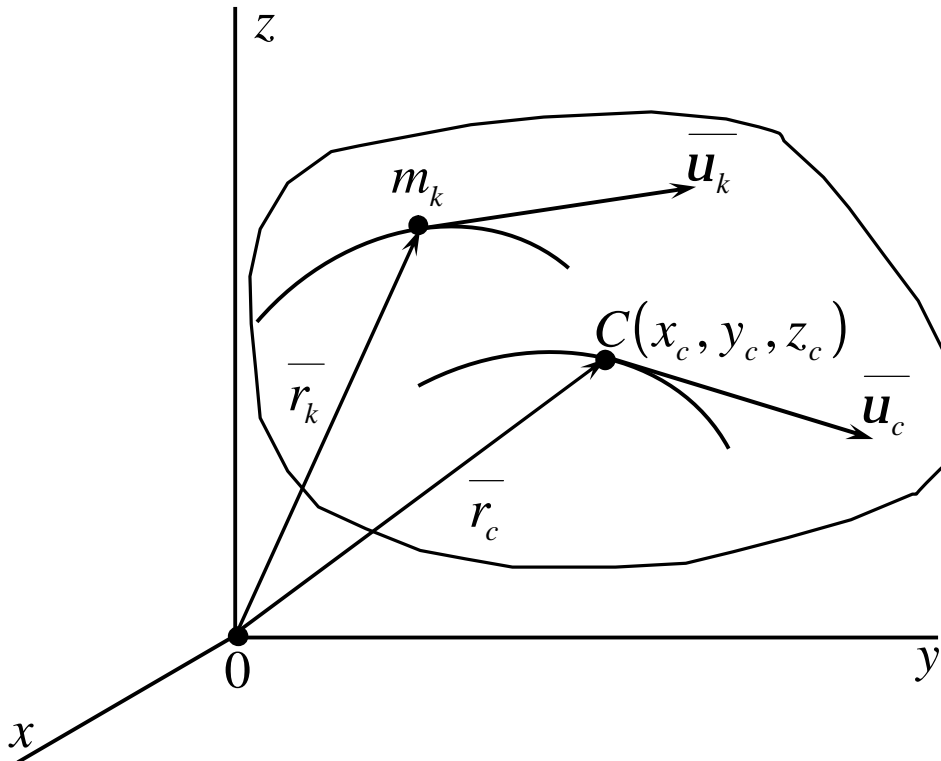


Рисунок 4.3

4.3.3 Элементарный и полный импульсы силы

Действие силы \bar{F} на материальную точку в течение времени dt можно охарактеризовать так называемым **элементарным импульсом силы** $\bar{F}dt$. **Полный импульс силы F** за время t , или импульс силы \bar{S} , определяют по формуле

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (4.11)$$

Проекции импульса силы на прямоугольные оси координат выражаются формулами:

$$S_x = \int_0^t F_x dt; S_y = \int_0^t F_y dt; S_z = \int_0^t F_z dt; \quad (4.12)$$

Единица импульса силы – ньютон-секунда (Н·с).

4.3.4 Теорема об изменении количества движения точки

Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы \bar{F} можно представить в следующей векторной форме:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Так как масса точки m принята постоянной, то ее можно внести под знак производной. Тогда

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F}. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) выражает **теорему об изменении количества движения точки** в дифференциальной форме: *первая производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе.*

В проекциях на координатные оси уравнение (4.13) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(mV_x) = F_x; \frac{d}{dt}(mV_y) = F_y; \frac{d}{dt}(mV_z) = F_z. \quad (4.14)$$

Если обе части уравнения (4.13) умножить на dt , то получим другую форму этой же теоремы — **теорему импульсов в дифференциальной форме**:

$$d(m\bar{V}) = \bar{F} dt. \quad (4.15)$$

т.е. *дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.*

Проецируя обе части уравнения (4.15) на координатные оси, получаем

$$d(m\bar{V}_x) = \bar{F}_x dt; d(m\bar{V}_y) = \bar{F}_y dt; d(m\bar{V}_z) = \bar{F}_z dt. \quad (4.16)$$

Интегрируя обе части уравнений (4.16) в пределах от нуля до t (рис. 4.4), имеем

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}, \quad (4.17)$$

где \bar{V} – скорость точки в момент t ;

\bar{V}_0 – скорость при $t=0$;

S – импульс силы за время t .

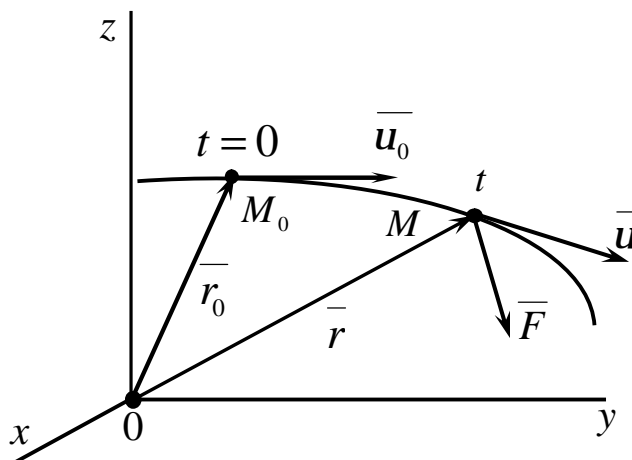


Рисунок 4.4

Выражение в форме (4.17) часто называют **теоремой импульсов в конечной** (или интегральной) **форме**: *изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток времени*. В проекциях на координатные оси эту теорему можно представить в следующем виде:

$$m\bar{V}_x - m\bar{V}_{0x} = \bar{S}_x; m\bar{V}_y - m\bar{V}_{0y} = \bar{S}_{0y}; m\bar{V}_z - m\bar{V}_{0z} = \bar{S}_z. \quad (4.18)$$

Для материальной точки теорема об изменении количества движения в любой из форм, по существу, не отличается от дифференциальных уравнений движения точки.

4.3.5 Теорема об изменении количества движения системы

Аналогично случаю для одной материальной точки, выведем теорему об изменении количества движения для системы в различных формах. Пусть к точкам системы приложены внешняя и внутренняя силы. Тогда для каждой точки можно применить теорему об изменении количества движения, например в форме уравнения (4.13) (см. рис. 4.2):

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{V}_k) = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Суммируя по всем точкам системы правые и левые части этих соотношений и учитывая, что сумма производных равна производной от суммы, получаем

$$\frac{d}{dt} \sum m_k V_k = \sum \bar{F}_k^{(i)} + \sum \bar{F}_k^{(e)}.$$

Так как по свойству внутренних сил и определению количества движения системы

$$\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0; \sum m_k \bar{V}_k = \bar{Q},$$

то приведенное соотношение можно представить в виде

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}. \quad (4.19)$$

Выражение (4.19) является **теоремой об изменении количества движения системы** в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему*. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат:

$$\frac{d\bar{Q}_x}{dt} = \sum \bar{F}_{kx}^{(e)}; \quad \frac{d\bar{Q}_y}{dt} = \sum \bar{F}_{ky}^{(e)}; \quad \frac{d\bar{Q}_z}{dt} = \sum \bar{F}_{kz}^{(e)}, \quad (4.20)$$

т.е. производная по времени от проекции количества движения системы на какую-либо координатную ось равна сумме проекций всех внешних сил системы на ту же ось.

Умножая обе части уравнения (4.19) на dt , получаем теорему импульсов для системы в дифференциальной форме:

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^{(e)} dt, \quad (4.21)$$

т. е. *дифференциал количества движения системы равен векторной сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему*.

В проекциях на координатные оси эта теорема примет вид:

$$d\bar{Q}_x = \sum \bar{F}_{kx}^{(e)} dt; \quad d\bar{Q}_y = \sum \bar{F}_{ky}^{(e)} dt; \quad d\bar{Q}_z = \sum \bar{F}_{kz}^{(e)} dt \quad (4.22)$$

Беря интегралы от обеих частей (4.21) по времени от нуля до t , выво-

дим теорему импульсов для системы в конечной или интегральной форме:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}, \quad (4.23)$$

где \bar{Q}_0 – количество движения системы в момент $t = 0$;

\bar{Q} – количество движения в момент t ;

$\bar{S}_k^{(e)}$ – импульс внешней силы, действующей на k -ю точку за время t :

$$\bar{S}_k^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt.$$

Теорема импульсов для системы в конечной форме формулируется так: *изменение количества движения системы за какое-либо время равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему за то же время.*

В проекциях на прямоугольные оси, согласно уравнению (4.23), имеем

$$\bar{S}_{kx}^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_{kx}^{(e)} dt, \quad \bar{S}_{ky}^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_{ky}^{(e)} dt, \quad \bar{S}_{kz}^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_{kz}^{(e)} dt. \quad (4.24)$$

Внутренние силы системы не входят явно в теорему об изменении количества движения системы в любой из форм и, следовательно, не влияют непосредственно на изменение количества движения системы. Они могут влиять на изменение количества движения только неявно, через внешние силы.

4.3.6 Законы сохранения количества движения

Законы сохранения количества движения системы получаются как частные случаи теоремы об изменении количества движения для системы в зависимости от особенностей системы внешних сил, приложенных к рассматриваемой механической системе, а для одной точки — от особенностей сил, действующих на точку. Внутренние силы при этом могут быть любыми, так как они не влияют на изменение количества движения системы.

Возможны *два частных случая*.

1 Если векторная сумма всех внешних сил, приложенных к системе, равна нулю, т. е. $\sum \bar{F}_k^{(e)} = 0$, то из теоремы об изменении количества

движения системы следует, что

$$\overline{Q} = \overline{const}. \quad (4.25)$$

Этот закон (точнее, частный случай теоремы) формулируется так: *если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы постоянно по величине и направлению.*

В проекциях на координатные оси по этому закону:

$$Q_x = C_1; \quad Q_y = C_2; \quad Q_z = C_3, \quad (4.26)$$

где C_1, C_2, C_3 - постоянные величины.

В соотношения (4.25) и (4.26) входят производные от координат точек по времени не выше первого порядка и не входят вторые производные от этих координат. Следовательно, эти соотношения являются первыми интегралами дифференциальных уравнений системы (4.3).

2 Если равна нулю проекция главного вектора внешних сил на какую-либо координатную ось Ox , т.е. $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$, то из (4.20):

$$Q_x = const. \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) является **законом сохранения проекции количества движения системы**: *если проекция главного вектора всех внешних сил системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на ту же ось является постоянной величиной.*

4.3.7 Теорема о движении центра масс системы

Следствием теоремы об изменении количества движения системы является теорема о движении центра масс системы.

По теореме об изменении количества движения системы (4.19)

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum F_k^{(e)}.$$

Но количество движения системы можно вычислить по формуле (4.7):

$$\overline{Q} = M\overline{V}_c,$$

где V_c – скорость центра масс;

M — масса системы.

Подставляя уравнение (4.7) в уравнение (4.19) и учитывая, что масса системы постоянна, получаем **теорему о движении центра масс** в векторной форме:

$$M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \quad (4.28)$$

или

$$M \bar{a}_c = \sum \bar{F}_r^{(e)},$$

где \bar{a}_c – ускорение центра масс.

Теорема о движении центра масс формулируется так: *центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе.*

Проецируя уравнение (4.28) на прямоугольные декартовы оси координат (рис. 4.5), получаем дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e; \\ M \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e; \\ M \frac{d^2 z_c}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следствия, аналогичные законам сохранения количества движения, и проекции количества движения на ось.

1 Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е. $\sum \bar{F}_k^e = 0$, то из уравнения (4.28) следует, что ускорение центра масс \bar{a}_c равно нулю, а следовательно, скорость центра масс является постоянной по модулю и направлению, т. е. центр масс движется прямолинейно и равномерно по инерции или находится в покое. Если, в частности, в начальный момент он находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

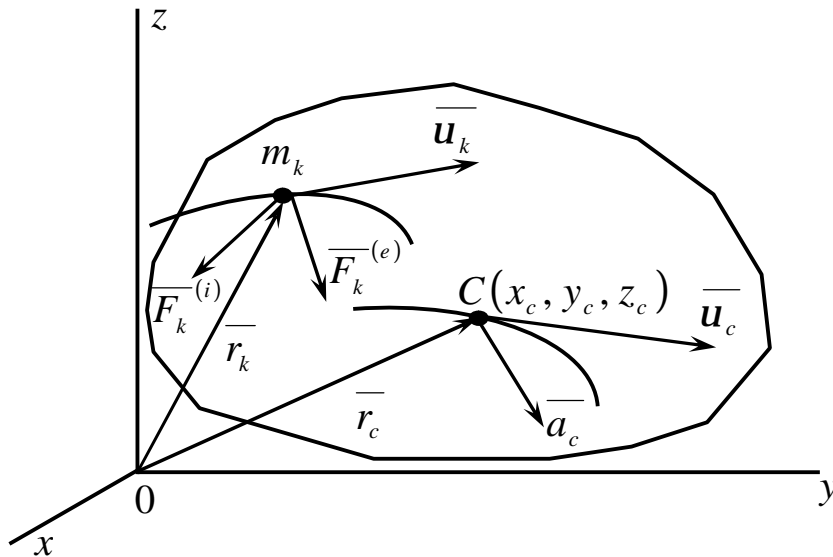


Рисунок 4.5

2 Если проекция, например, на ось Ox , главного вектора внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т. е. $\sum \overline{F}_{kx}^e = 0$, то из уравнения (4.29) следует, что проекция ускорения \ddot{x}_c центра масс на эту ось равна нулю, а следовательно, проекция скорости центра масс является постоянной величиной, т.е. $V_{cx} = \dot{x}_c = const$.

Если дополнительно в начальный момент $V_{cx} = 0$, то тогда

$x_c = const$, т.е. координата x_c центра масс не изменяется при движении системы.

Внутренние силы не влияют явно на движение центра масс. Они могут влиять только неявно, через внешние силы. Следовательно, одними внутренними силами, без внешних, нельзя вывести из равновесия или изменить движение центра масс системы. Но внутренними силами для неизолированной механической системы можно создать движение отдельных частей системы и, следовательно, взаимодействие с внешними телами, вызывая этим внешние силы реакций связей или изменяя активные силы. Это может изменить движение центра масс или вывести его из равновесия.

4.3.8 Дифференциальные уравнения поступательного

движения твердого тела

Из теоремы о движении центра масс системы получаются дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

Имеем

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e.$$

Но при поступательном движении твердого тела ускорения всех точек тела одинаковы по модулю и направлению, т. е. $\bar{a}_c = \bar{a}$, где \bar{a} — ускорение произвольной точки тела. Учитывая это, из теоремы о движении центра масс получаем следующее дифференциальное уравнение поступательного движения тела в векторной форме:

$$M\bar{a} = \sum \bar{F}_k^e.$$

Проецируя на оси координат, имеем

$$M\bar{a}_x = \sum \bar{F}_{kx}^e; \quad M\bar{a}_y = \sum \bar{F}_{ky}^e; \quad M\bar{a}_z = \sum \bar{F}_{kz}^e.$$

Это и есть дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела в проекциях на прямоугольные оси координат.

4.4 Теорема об изменении кинетического момента

4.4.1 Кинетический момент точки и системы

Наряду с количеством движения, в качестве векторной меры движения можно использовать *кинетический момент*, или *момент количества движения*. Для материальной точки массой m , движущейся со скоростью V , кинетическим моментом k_0 относительно какого-либо центра O называют момент количества движения точки относительно этого центра O (рис. 4.6), т. е.

$$\bar{k}_0 = \bar{M}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (4.30)$$

Кинетический момент \bar{k}_0 приложен к точке O , относительно которой он вычисляется.

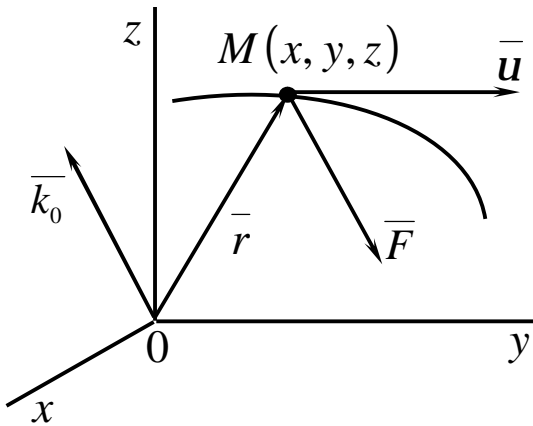


Рисунок 4.6

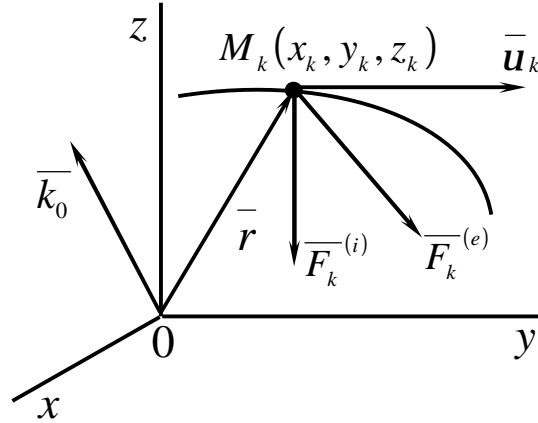


Рисунок 4.7

Проецируя обе части уравнения (4.30) на прямоугольные декартовы оси, получаем кинетические моменты точки относительно этих осей координат, если точка O является началом осей координат:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x(m\bar{V}) = m(yV_z - zV_y) = m(\& - z\&); \\ k_y &= M_y(m\bar{V}) = m(zV_x - xV_z) = m(\& - \&); \\ k_z &= M_z(m\bar{V}) = m(xV_y - yV_x) = m(x\& - \&). \end{aligned} \right\}$$

В физике кинетический момент точки иногда называют **моментом импульса точки**. Единица кинетического момента в СИ – килограмм-метр в квадрате на секунду ($\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$), или ньютон-метр-секунда ($\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$).

Для механической системы кинетическим моментом K_0 (или главным моментом количества движения системы относительно какой-либо точки O) называют векторную сумму кинетических моментов точек этой системы, взятых относительно точки O (рис. 4.7), т. е.

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{M}_0(m_k \bar{V}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k. \quad (4.31)$$

Кинетический момент системы \bar{K}_0 приложен к точке O , относительно которой он вычисляется.

Если спроецировать уравнение (4.31) на прямоугольные декартовы оси координат, то получим проекции кинетического момента на эти оси, или кинетические моменты относительно осей координат:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (y_k z_k - z_k y_k); \\ K_y &= \sum M_y(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (z_k x_k - x_k z_k); \\ K_z &= \sum M_z(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (x_k y_k - y_k x_k). \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

4.4.2 Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Вычислим кинетический момент твердого тела относительно оси вращения, когда тело вращается вокруг этой неподвижной оси с угловой скоростью ω (рис. 4.8). По определению кинетического момента относительно оси (4.32) имеем

$$K_z = \sum M_z(m_k \bar{V}_k).$$

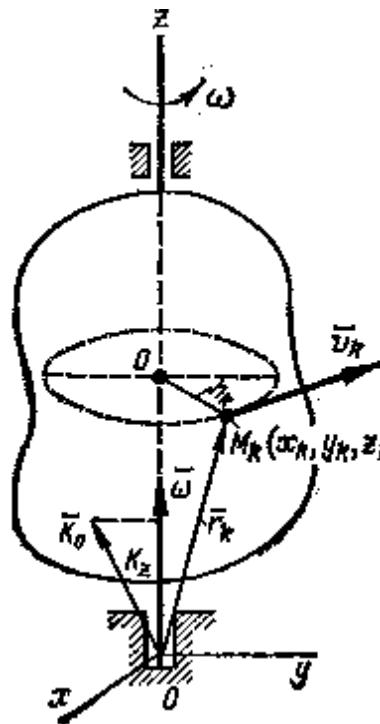


Рисунок 4.8

Но при вращении тела вокруг оси $V_k = h_k \omega$, причем количество движения точки $m_k V_k$ перпендикулярно отрезку h_k и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения Oz . Следовательно, момент коли-

чества движения относительно оси Oz для одной точки $m_k v_k h_k$.

Для всего тела:

$$K_z = \sum m_k h_k^2 \omega = \omega \sum m_k h_k^2 = \omega J_z,$$

т. е.

$$K_z = J_z \omega. \quad (4.33)$$

Таким образом, кинетический момент тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения. Знак кинетического момента относительно оси совпадает со знаком угловой скорости вращения вокруг этой оси: *при вращении против часовой стрелки кинетический момент положительный, при вращении по часовой стрелке он отрицательный.*

Дополнительно без вывода приведем формулы для кинетических моментов относительно двух других осей координат Ox и Oy , перпендикулярных оси вращения Oz . Имеем:

$$K_x = -J_{xz} \omega; \quad K_y = -J_{yz} \omega,$$

где $J_{xz} = \sum m_k x_k z_k$ и $J_{yz} = \sum m_k y_k z_k$ – центробежные моменты инерции.

Эти формулы можно получить как частный случай более общих формул для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O , то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и, следовательно, $K_x = K_y = 0$ для этой точки. В этом случае кинетический момент K_O относительно точки O направлен по оси вращения. В общем случае момент K_O не направлен по оси вращения, так как имеет не равные нулю проекции K_x и K_y на оси координат, перпендикулярные оси вращения Oz .

4.4.3 Теорема об изменении кинетического момента точки

Для материальной точки основной закон динамики можно представить в виде

$$\frac{m d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения слева векторно на радиус-вектор \bar{r} (см. рис. 4.6), получаем

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (4.34)$$

В правой части этой формулы имеем момент силы относительно неподвижной точки O . Преобразуем левую часть, применив формулу производной от векторного произведения:

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}.$$

Но

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0,$$

как векторное произведение параллельных векторов. После этого из уравнения (4.34) получаем:

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (4.35)$$

или

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}). \quad (4.36)$$

Таким образом, *первая производная по времени от кинетического момента точки относительно какого-либо центра равна моменту силы относительно того же центра.*

Это и есть **теорема об изменении кинетического момента для точки.**

Проецируя уравнение (4.36) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента точки относительно этих осей координат:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (4.37)$$

4.4.4 Теорема об изменении кинетического момента системы

Если к точкам системы приложить все внешние и внутренние силы (см. рис. 4.7), то для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетического момента в форме уравнения (4.35), т. е.

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, N..$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и заменяя суммы производных производной от суммы, получаем

$$\frac{d}{dt} \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Так как, по свойству внутренних сил,

$$\sum d\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0,$$

а по определению кинетического момента системы

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = K_0,$$

то

$$\frac{dK_0}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Если обозначить главный момент всех внешних сил $\bar{L}_0^{(e)}$, т.е.

$$\bar{L}_0^{(e)} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}),$$

то теорему об изменении кинетического момента системы можно представить в виде

$$\frac{dK_0}{dt} = \bar{L}_0^{(e)}.$$

Следовательно, первая производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-либо точки равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему, относительно той же точки.

В эту теорему входит кинетический момент системы K_0 в ее движении относительно инерциальной системы отсчета, причем кинетический момент и моменты внешних сил вычисляются относительно неподвижной в этой системе отсчета точки O . Получим теорему об изменении кинетического момента системы в ее движении относительно

инерциальной системы отсчета, но выберем в качестве точки при вычислении кинетического момента и моментов внешних сил точку A , движущуюся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью \bar{v}_a .

По определению кинетического момента системы относительно точки A имеем (рис. 4.9)

$$\bar{K}_a = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k.$$

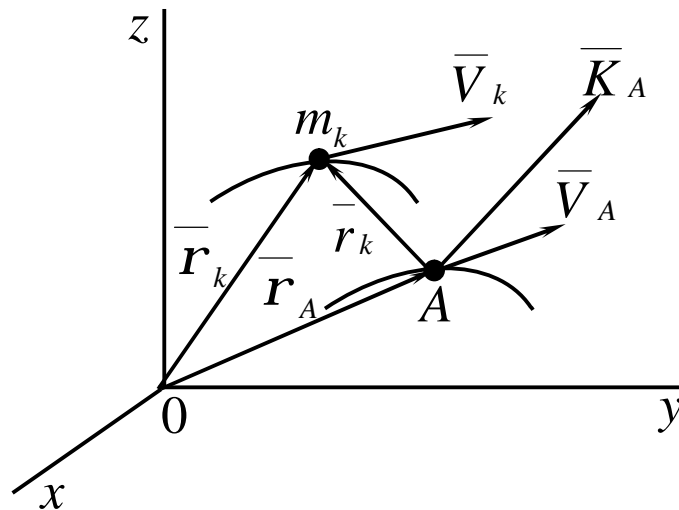


Рисунок 4.9

Вычислим производную по времени от кинетического момента \bar{K}_a по правилу дифференцирования векторных произведений. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_a}{dt} &= \sum \left(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k + \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) = \\ &= \sum \left((\bar{v}_k - \bar{v}_a) \times m_k \bar{v}_k + \bar{r}_k \times (\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}) \right) = -\bar{v}_a \times \sum m_k \bar{v}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}, \end{aligned}$$

так как

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k - \bar{r}_a; \quad \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\bar{r}_k - \bar{r}_a}{dt} = \bar{v}_k - \bar{v}_a;$$

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)};$$

$$\bar{v}_k \times m \bar{v}_k = 0; \quad \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

Учитывая, что $\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_c$, получим

$$\frac{d\bar{K}_a}{dt} = -\bar{v}_a \times M\bar{v}_a + \sum r_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

или

$$\frac{d\bar{K}_a}{dt} = M\bar{v}_c \times \bar{v}_a + \bar{L}_a^{(e)}.$$

Рассмотрим *частные случаи* этой теоремы.

1 Если точка A совпадает с центром масс C , то теорема принимает форму:

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{L}_c^{(e)}.$$

2 Если в случае плоского движения твердого тела выбрать в качестве точки A мгновенный центр скоростей P , то $\bar{v}_a = \bar{v}_p \neq 0$, так как в рассматриваемом случае \bar{v}_p есть скорость движения мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде, а она не равна нулю, в отличие от скорости точки тела, совпадающей с точкой P , которая равна нулю. Очевидно, что $\bar{v}_p + \bar{v}_c = 0$, если \bar{v}_p параллельна \bar{V}_c , т.е. если касательные к центроидам и траектории центра масс параллельны, или, что то же самое, центр масс находится на нормали к центроидам в точке P . Тогда

$$\frac{d\bar{K}_p}{dt} = \bar{L}_p^{(e)}. \quad (4.38)$$

Эти частные случаи показывают, что для подвижных точек центра масс для любой системы и мгновенного центра скоростей при плоском движении твердого тела в рассмотренном случае теорема об изменении кинетического момента для абсолютного движения имеет ту же форму, что и для неподвижной точки O .

Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы. Они могут влиять на него только через внешние силы, т. е. неявно.

Проецируя выражение (4.38) на прямоугольные декартовы оси координат, получаем теоремы об изменении кинетического момента систе-

мы относительно этих осей координат, т. е.

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^{(e)}. \quad (4.39)$$

Теорема об изменении кинетического момента позволяет изучать вращательное движение твердого тела вокруг оси и точки или вращательную часть движения тела в общем случае движения свободного твердого тела.

4.4.5 Законы сохранения кинетических моментов

Выведем законы сохранения кинетических моментов для системы, рассматривая материальную точку как механическую систему, у которой число точек равно единице. Естественно, что для одной материальной точки все действующие на нее силы являются внешними. Возможны следующие *частные случаи* теоремы об изменении кинетического момента системы.

1 Если главный момент внешних сил системы относительно точки O равен нулю, т.е. $\bar{L}_O^{(e)} = 0$, то согласно уравнению (4.38) кинетический момент системы K_O относительно той же точки постоянен по модулю и направлению, т.е.

$$\bar{K}_O = \text{const} \quad (4.40)$$

Этот частный случай теоремы об изменении кинетического момента системы называют *законом сохранения кинетического момента*. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат по этому закону

$$K_x = C_1; \quad K_y = C_2; \quad K_z = C_3, \quad (4.41)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные величины.

Соотношения (4.41) являются первыми интегралами дифференциальных уравнений движения системы (4.32). Закон сохранения кинетического момента системы показывает, что одни внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы так же, как они не изменяют ее количество движения.

2 Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси Ox равна нулю, т.е. $\bar{L}_z^{(e)} = \sum M_x(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$, то из уравнений (4.39) следует, что

$$K_x = \text{const}. \quad (4.42)$$

Следовательно, кинетический момент системы относительно какой-либо координатной оси постоянен, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю, что, в частности, наблюдается, когда внешние силы параллельны оси или пересекают ее. В частном случае для тела или системы тел, которые все вместе могут вращаться вокруг неподвижной оси, и если при этом

$$L_z^{(e)} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

то

$$K_z = J_z \omega = \text{const},$$

или

$$J_z \omega = J_{z_0} \omega_0, \quad (4.43)$$

где J_z и ω — момент инерции системы тел и их угловая скорость относительно оси вращения в произвольный момент времени;

J_{z_0} и ω_0 — момент инерции тел и их угловая скорость в момент времени, выбранный за начальный, например при $t=0$.

Закон сохранения кинетического момента в форме (4.43) используют в своей деятельности акробаты, прыгуны, танцоры и т. д. Наглядно его можно продемонстрировать в опыте на скамье Жуковского (рис. 4.10). Если человек с гирями в руках встанет на горизонтальную платформу скамьи Жуковского, которая может вращаться вокруг вертикальной оси почти без трения, и затем сообщить ему угловую скорость вокруг этой оси, то

$$J_{z_0} \omega_0 = J_z \omega,$$

так как внешние силы или параллельны оси вращения (силы веса человека, гири и платформы), или пересекают ось (реакции подшипника, если пренебречь силами трения), как показано на рисунке 4.11.

Следовательно, если человек увеличит момент инерции, например разведением рук с гирями в стороны, то угловая скорость вращения уменьшится, и наоборот. В действительности угловая скорость хотя и медленно, но все время уменьшается вследствие наличия сопротивления воздуха и трения в подшипнике скамьи.

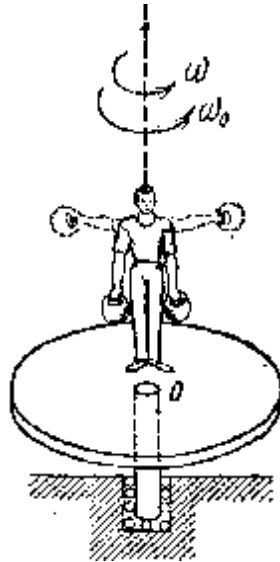


Рисунок 4.10

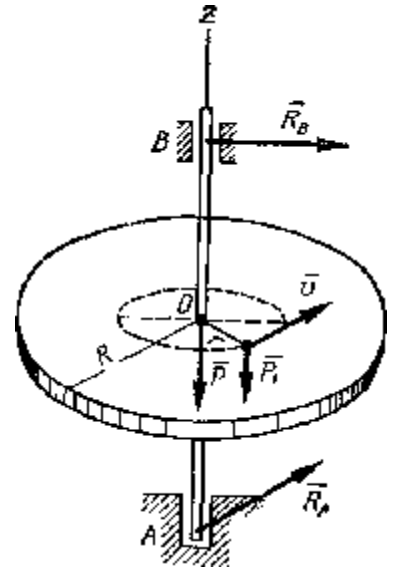


Рисунок 4.11

4.4.6 Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Из теоремы об изменении кинетического момента (4.39) получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz (рис. 4.12). Имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, согласно уравнению (4.35),

$$K_z = J_k w,$$

где J_z – постоянный для твердого тела момент инерции относительно неподвижной оси вращения;

w – угловая скорость.

Учитывая это, получаем

$$J_z \frac{dw}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Если ввести угол поворота тела φ , то, учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$ имеем

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z (\bar{F}_k^{(e)})$$

Это и есть дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Оно полностью аналогично дифференциальному уравнению поступательного движения твердого тела в проекции на какую-либо ось, например на ось Ox .

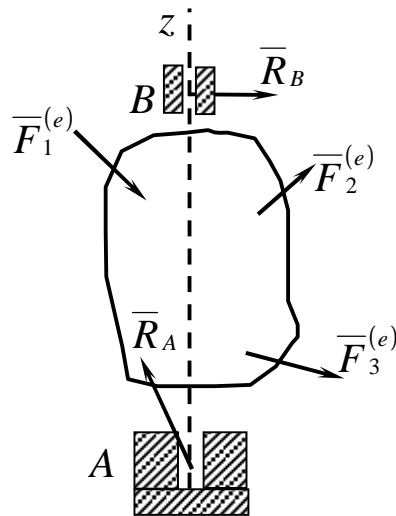


Рисунок 4.12

В дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси вместо координаты x входит угол поворота φ , вместо массы тела M — момент инерции относительно оси вращения J_z , вместо суммы проекций внешних сил на ось Ox — сумма моментов внешних сил относительно оси вращения Oz , или так называемый вращательный момент внешних сил.

Реакции подшипников \bar{R}_a и \bar{R}_b оси вращения являются внешними силами, но их моменты относительно оси вращения равны нулю, так как они пересекают ось, если пренебречь силами трения.

В частном случае, когда

$$\sum M_z (\bar{F}_k^{(e)}) = L^{(e)} = const,$$

то $e = \ddot{\varphi} = \bar{L}_z^{(e)} / J_z = const$,

т. е. вращение тела происходит с постоянным угловым ускорением.

Если

$$\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = L_z^{(e)} = 0,$$

то

$$\mathcal{M} = \frac{dw}{dt} = 0 \text{ и } w = \text{const.}$$

Это случай равномерного вращения тела по инерции без действия вращательного момента внешних сил.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела в общем случае позволяет решать две основные задачи: по заданному вращению тела определять вращающий момент внешних сил и по заданному вращательному моменту и начальным условиям находить вращение тела. При решении второй задачи для нахождения угла поворота как функции времени приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращательного движения. Методы его интегрирования полностью аналогичны выше рассмотренным методам интегрирования дифференциального уравнения прямолинейного движения точки.

4.4.7 Движение точки под действием центральной силы. Теорема площадей*

Секторная скорость. Теорема площадей. Наряду с введенными в кинематике точки скоростью \bar{v} и ускорением \bar{a} можно ввести другие характеристики движения точки, например секторные скорость и ускорение. Секторной скоростью точки O , или $d\bar{a}/dt$ относительно точки O , называют векторную величину, определяемую по формуле (рис. 4.13)

$$\bar{v}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{q}}{\Delta t} = \frac{d\bar{q}}{dt}, \quad (4.44)$$

где $\Delta \bar{q}$ — вектор, численно равный заштрихованной на рисунке площади, описываемой радиус-вектором \bar{r} движущейся точки за время Δt .

Направление вектора $\Delta \bar{q}$ берется по перпендикуляру к заштрихованной площади так, чтобы с конца этого вектора при описании заштрихованной площади видеть поворот радиус-вектора \bar{r} против часовой стрелки.

Для случая движения точки по плоскости секторная скорость перпендикулярна этой плоскости, если точка O выбрана в той же плоско-

сти, в которой движется точка. Секторная скорость всегда приложена в той точке, относительно которой она вычисляется.

Секторное ускорение \bar{a}_0 можно ввести как производную по времени от вектора секторной скорости, т.е.

$$\bar{a}_q = \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_q}{dt}.$$

Секторную скорость можно выразить через момент линейной скорости относительно точки O:

$$\bar{v}_q = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \bar{v}). \quad (4.45)$$

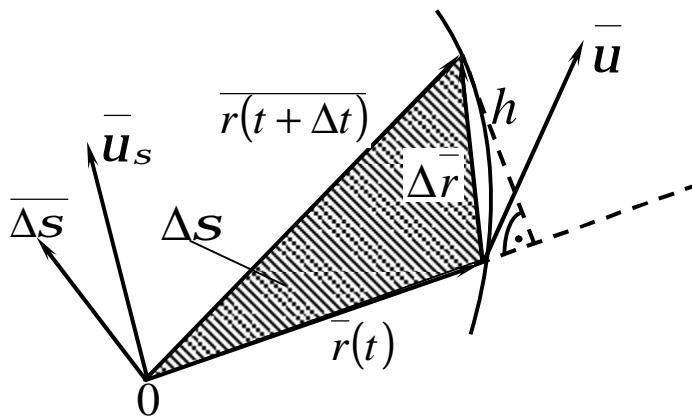


Рисунок 4.13

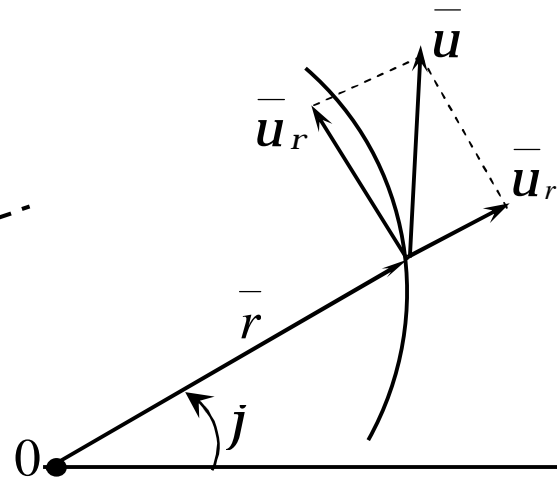


Рисунок 4.14

Векторное произведение $\bar{r} \times \bar{v}$, согласно определению, имеет такое же направление, как и v_q . Следовательно, для доказательства формулы (4.45) достаточно показать, что величины левой и правой частей одинаковы. Вычислим левую часть формулы (4.45):

$$|\bar{v}_0| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{q}|}{\Delta t},$$

но

$$|\Delta \bar{q}| = \frac{1}{2} rh = \frac{1}{2} r |\Delta \bar{r}| \sin(r, |\Delta \bar{r}|).$$

Следовательно,

$$|\bar{v}_q| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{q}|}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} \sin(\bar{r}, \Delta \bar{r}) \right) = \frac{1}{2} r v \sin(\bar{r}, \bar{v}),$$

что совпадает с модулем векторного произведения, стоящим справа в формуле (4.45).

Если движение точки происходит в плоскости, то секторную скорость можно считать алгебраической величиной.

В этом случае секторную скорость точки часто выражают в полярных координатах.

Из формулы (4.45) секторная скорость

$$v_q = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dj}{dt}$$

Но из кинематики точки в полярной системе координат на плоскости известно (рис. 4.14), что

$$v \sin(\bar{r}, \bar{v}) = v_p = r \frac{dj}{dt}.$$

Следовательно,

$$v_q = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dj}{dt}. \quad (4.46)$$

Формула (4.46) выражает секторную скорость в полярных координатах в случае плоского движения точки.

Используя формулу (4.45), кинетический момент через секторную скорость можно выразить в виде

$$\bar{k}_0 = \bar{r} \times m \bar{v} = 2m \bar{v}_q. \quad (4.47)$$

Соответственно, теорему об изменении кинетического момента (4.37) для точки можно выразить через секторную скорость формулой

$$2m \frac{d\bar{v}_q}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}). \quad (4.48)$$

В форме (4.48) теорему об изменении кинетического момента для точки называют **теоремой площадей**.

Центральной силой F называют такую силу, линия действия которой при движении точки ее приложения проходит через одну и ту же точку O , называемую центром центральной силы.

Центральная сила может быть притягивающей (направленной к центру) и отталкивающей (направленной от центра). Так как для централь-

ной силы момент силы относительно своего центра равен нулю, т. е. $\bar{M}_0(\bar{F}) = 0$, то, следовательно, по теореме об изменении кинетического момента для точки (4.38),

$$\bar{k}_0 = const.$$

В проекциях на прямоугольные оси декартовой системы с началом в точке O по формуле (4.48) имеем

$$\begin{aligned} k_x &= m(yz - zy) = C_1; \\ k_y &= m(zx - xz) = C_2; \\ k_z &= m(xy - yx) = C_3, \end{aligned} \tag{4.49}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные величины.

Умножая первое из соотношений (4.49) на x , второе – на y , третье – на z и складывая, получаем

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0,$$

т. е. координаты движущейся точки x, y, z удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начало координат.

Следовательно, траектория точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.

Так как при движении точки под действием центральной силы

$$\bar{k}_0 = const,$$

то, учитывая формулу (4.31), имеем

$$\bar{v}_q = \frac{d\bar{q}}{dt} = const$$

и, следовательно,

$$v_q = \frac{dq}{dt} = const = C, \tag{4.50}$$

или $q = q_0 + Ct$.

Формула (4.50) выражает так называемый **интеграл площадей**: при движении точки под действием центральной силы секторная скорость является постоянной величиной, и, следовательно, сметаемая радиус-вектором площадь пропорциональна времени.

Учитывая формулу (4.46), интеграл площадей (4.50) в полярных координатах можно представить в виде

$$r^2 \frac{dj}{dt} = const.$$

В этой форме интеграл площадей широко используется при рассмотрении движения планет вокруг Солнца и других небесных тел, в частности, искусственных спутников Земли.

4.4.8 Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс*

Рассмотрим относительное движение системы только относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы.

Прежде чем рассмотреть теорему, выведем формулу для вычисления кинетического момента системы.

Формула для кинетического момента системы. Пусть механическая система совершает движение относительно основной системы координат $O_{x_1y_1z_1}$. Возьмем подвижную систему координат $Sxyz$ с началом в центре масс системы C , движущуюся поступательно относительно основной системы координат.

Из рисунка 4.15 следует, что для любого момента времени

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_c + \bar{\mathbf{r}}_{kr}.$$

Дифференцируя это тождество по времени, получаем

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_c}{dt} + \frac{d\bar{\mathbf{r}}_{kr}}{dt}$$

или

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \bar{\mathbf{v}}_c + \bar{\mathbf{v}}_{kr},$$

где $\bar{\mathbf{v}}_k$ – абсолютная скорость точки M_k , $\bar{\mathbf{v}}_c$ – абсолютная скорость центра масс; $\bar{\mathbf{v}}_{kr} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_{kr}}{dt}$ – относительная скорость точки M_k относительно подвижной системы координат $Sxyz$.

При поступательном движении подвижной системы координат ее угловая скорость $\bar{\omega}$ равна нулю.

лю и по формуле Бура полная производная по времени от радиус-вектора \bar{r} совпадает с локальной производной, равной относительной скорости.

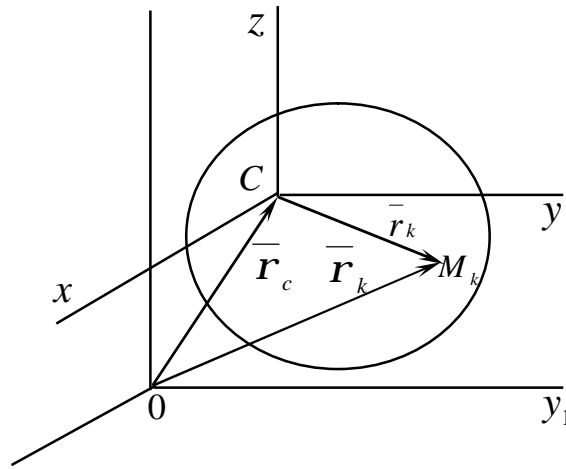


Рисунок 4.15

Согласно определению кинетического момента K_0 относительно неподвижной точки O , для абсолютного движения системы относительно системы координат $Ox_1 y_1 z_1$ по формуле (4.31) имеем

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k .$$

Подставляя в эту формулу значения \bar{r}_k и \bar{v}_k , после небольших преобразований получаем

$$\bar{K}_0 = \bar{r}_c \times \bar{v}_c \sum m_k + \sum r_h \times m_k \bar{v}_{kr} + \bar{r}_c \times \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} + (\sum m_k \bar{r}_k) \times \bar{v}_c . \quad (4.51)$$

В этой формуле $\sum m_k = M$ – масса системы. Кроме того, последние два слагаемых равняются нулю. Действительно, по определению радиус-вектора центра масс относительно этого центра масс имеем

$$0 = \bar{r}_c = \sum m_k \bar{r}_k / M .$$

Следовательно, $\sum m_k \bar{r}_k = 0$, и последнее слагаемое в формуле (4.51) тоже равно нулю

Другое слагаемое можно предварительно преобразовать:

$$\bar{\mathbf{r}}_C \times \sum m_k \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt} = \bar{\mathbf{r}}_C \times \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{\mathbf{r}}_k).$$

Это слагаемое также равно нулю, так как все время $\sum m_k \bar{\mathbf{r}}_k = 0$.
Формула (4.51) принимает следующий окончательный вид:

$$\bar{K}_0 = \bar{\mathbf{r}}_C \times M\bar{\mathbf{v}}_C + \bar{K}_C^{(r)}, \text{ где } \bar{K}_C^{(r)} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times m_k \bar{\mathbf{v}}_{kr}. \quad (4.52)$$

Величина $\bar{K}_C^{(r)}$ является кинетическим моментом системы относительно центра масс для относительного движения относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс, т. е. системы координат $S_{хуz}$.

Формула (4.52) показывает, что кинетический момент абсолютного движения системы относительно неподвижной точки O равен векторной сумме кинетического момента центра масс относительно той же точки, если бы в центре масс была сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс.

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс. Для абсолютного движения системы и неподвижной точки O теорема об изменении кинетического момента имеет вид

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}.$$

Подставляя сюда значения $\bar{\mathbf{r}}_k$ и \bar{K}_0 по формуле (4.52) и производя дифференцирование и группировку членов, получаем

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}_C}{dt} \times M\bar{\mathbf{v}}_C + \bar{\mathbf{r}}_C \times M \frac{d\bar{\mathbf{v}}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{\mathbf{r}}_C \times \sum \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)} + \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}.$$

Перенося из правой части в левую первое слагаемое и учитывая, что

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}_C}{dt} \times M\bar{\mathbf{v}}_C = \bar{\mathbf{v}}_C \times M\bar{\mathbf{v}}_C = 0,$$

как векторное произведение параллельных векторов, после объединения слагаемых имеем

$$\bar{\mathbf{r}}_C \times \left(M \frac{d\bar{\mathbf{v}}_C}{dt} - \sum \bar{\mathbf{F}}_R^{(e)} \right) + \frac{d\bar{K}_C^{(e)}}{dt} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}.$$

В этой формуле выражение в квадратных скобках равно 0 на основании теоремы о движении центра масс системы (4.26), и, следовательно, формула примет вид

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)},$$

или

$$d\bar{K}_C^{(r)} / dt = \bar{L}_C^{(e)}, \quad (4.53)$$

где $\bar{L}_C^{(e)} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}$ является **главным моментом всех внешних сил относительно центра масс**.

Формула (4.53) и выражает *рассматриваемую теорему об изменении кинетического момента системы* относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно с центром масс, формулируемую так же, как если бы центр масс был неподвижной точкой.

Эту теорему применяют для изучения вращательной части плоского движения и движения свободного твердого тела вокруг центра масс.

4.4.9 Дифференциальные уравнения плоского движения

твердого тела

Используя теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно с центром масс, получим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

В плоскости движения центра масс тела, совершающего плоское движение, выберем неподвижную систему координат Ox_1y_1 , относи-

тельно которой рассматривается движение, и движущуюся поступательно вместе с центром масс систему Cxy (рис. 4.16). Пусть x_c и y_c — координаты центра масс тела относительно неподвижной системы координат. Тогда по теореме о движении центра масс получим два следующих дифференциальных уравнения плоского движения твердого тела:

$$M \ddot{x} = \sum \bar{F}_{kx}^{(e)}; \quad M \ddot{y} = \sum \bar{F}_{ky}^{(e)}$$

где M — масса тела.

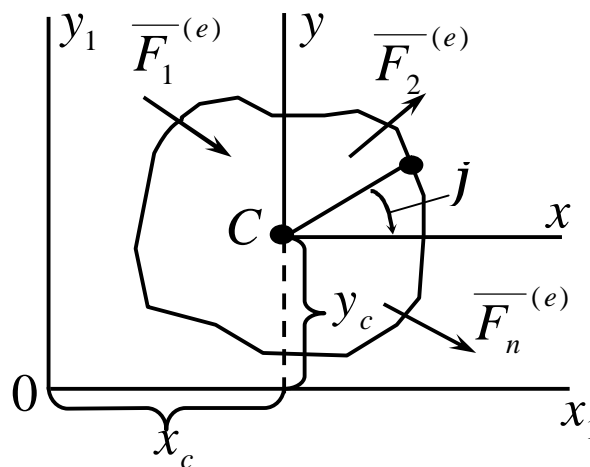


Рисунок 4.16

Третье дифференциальное уравнение плоского движения твердого тела получим из теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс (4.53) в проекции на подвижную ось Cz :

$$\frac{d\bar{K}_{Cz}^{(r)}}{dt} = \sum M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Плоское движение твердого тела можно считать состоящим из поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси Cz . Для случая вращения вокруг оси кинетический момент относительно этой оси вычисляется по формуле

$$\bar{K}_{Cz}^{(r)} = J_{Cz} \omega,$$

где W — угловая скорость и J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси C_Z

Так как J_{CZ} является величиной постоянной, то после подстановки $\bar{K}_{CZ}^{(r)}$ в теорему об изменении кинетического момента в относительном движении получим

$$J_{CZ} \frac{dW}{dt} = \sum M_{CZ} (\bar{F}_k^{(e)}).$$

Если ввести угол поворота j вокруг подвижной оси C_Z , то получим следующее дифференциальное уравнение:

$$J_{CZ} \dot{j} = \sum M_{CZ} (\bar{F}_k^{(e)}).$$

Таким образом, для твердого тела, совершающего плоское движение и, следовательно, имеющего три степени свободы, соответственно получим следующие дифференциальные уравнения:

$$M \ddot{x}_C = \sum \bar{F}_{kx}^{(e)}; \quad M \ddot{y}_C = \sum \bar{F}_{ky}^{(e)}; \quad M \ddot{z}_C = \sum \bar{F}_{kz}^{(e)}.$$

С помощью этих уравнений можно решать две основные задачи: по заданному плоскому движению твердого тела находить действующие на тело внешние силы и по заданным внешним силам и начальным условиям определять его движение. При решении этих задач должны быть заданы масса тела M и его момент инерции.

4.4.10 Теорема Резаля*

Теореме об изменении кинетического момента системы можно дать следующее кинематическое истолкование. Из кинематики точки известно, что скорость точки можно рассматривать как скорость конца радиус-вектора, следящего за движущейся точкой, или как скорость изменения самого радиус-вектора, если он проведен в движущуюся точку из какой-либо неподвижной точки (рис. 4.17). Траектория движущейся точки при этом является годографом радиус-вектора \bar{r} , а скорость точки направлена по касательной к этому годографу и равна первой производной по времени от радиус-вектора. Аналогично этому, и производную по времени от кинетического момента можно рассматривать как своеобразную скорость конца этого вектора при движении по

годографу кинетического момента (рис. 4.18). Эта скорость не является обычной скоростью точки, так как кинетический момент имеет иную размерность, чем радиус-вектор. Это есть скорость изменения вектора кинетического момента.

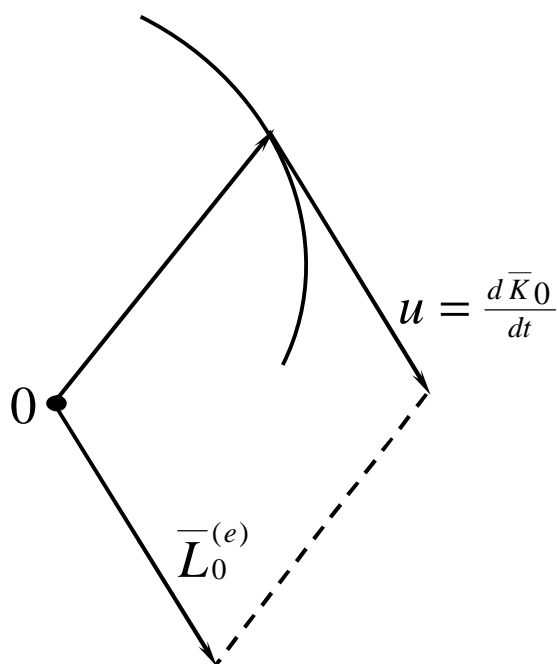


Рисунок 4.17

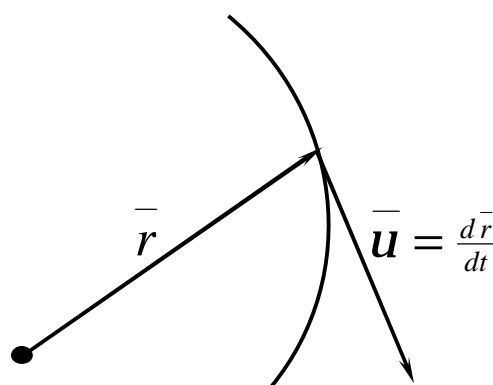


Рисунок 4.17

Таким образом, если обозначить через U эту скорость конца кинетического момента, т. е. $U = dK_0/dt$, то теорему об изменении кинетического момента системы (4.37) можно представить в новой форме — в виде так называемой *теоремы Резаля*:

$$\bar{U} = \bar{L}_0^{(e)}.$$

Теорему Резаля можно сформулировать так: *при движении механической системы скорость точки, совпадающей с концом вектора кинетического момента при движении по годографу этого вектора, равна по величине и параллельна по направлению главному моменту всех внешних сил системы.* Точка, относительно которой вычисляются кинетический момент системы и главный момент внешних сил, одна и та же.

В форме теоремы Резаля может быть сформулирована и теорема об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс.

Теорема Резаля особенно удобна для приближенного исследования движения быстровращающихся гироскопов.

Аналогично и теорему об изменении количества движения для

системы можно сформулировать в форме **теоремы Резаля для количества движения**: *при движении механической системы скорость точки, совпадающей с концом вектора количества движения при движении по его годографу, равна по величине и параллельна по направлению главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.*

4.5 Теорема об изменении кинетической энергии

Для рассмотрения теоремы об изменении кинетической энергии необходимо ввести новое понятие для силы – работу силы и рассмотреть некоторые простейшие способы ее вычисления.

4.5.1 Работа силы

Работа силы на каком-либо перемещении является одной из основных характеристик, оценивающих действие силы на этом перемещении. Рассмотрим элементарную работу, полную работу и мощность.

4.5.1.1 Элементарная работа силы

Элементарная работа dA силы F на элементарном (бесконечно малом) перемещении определяется следующим образом (рис. 4.19):

$$dA = F_t j dS, \quad (4.54)$$

где F_t – проекция силы F на направление скорости точки приложения силы или на направление элементарного перемещения, которое считается направленным по скорости точки.

Элементарная работа является скалярной величиной. Ее знак определяется знаком проекции силы F_t , так как перемещение ds принимаем положительным. При $F_t > 0$ элементарная работа $dA > 0$, а при $F_t < 0$ – наоборот. Так как $F_t = F \cos j$, где j — угол между силой F и направлением скорости точки v , то выражение (4.54) можно представить в виде

$$dA = F \cos j dS. \quad (4.55)$$

В этой формуле величины F и ds положительны, и знак dA определяется знаком $\cos j$. Если j – острый угол, то dA положительна; если j – тупой угол, то dA отрицательна.

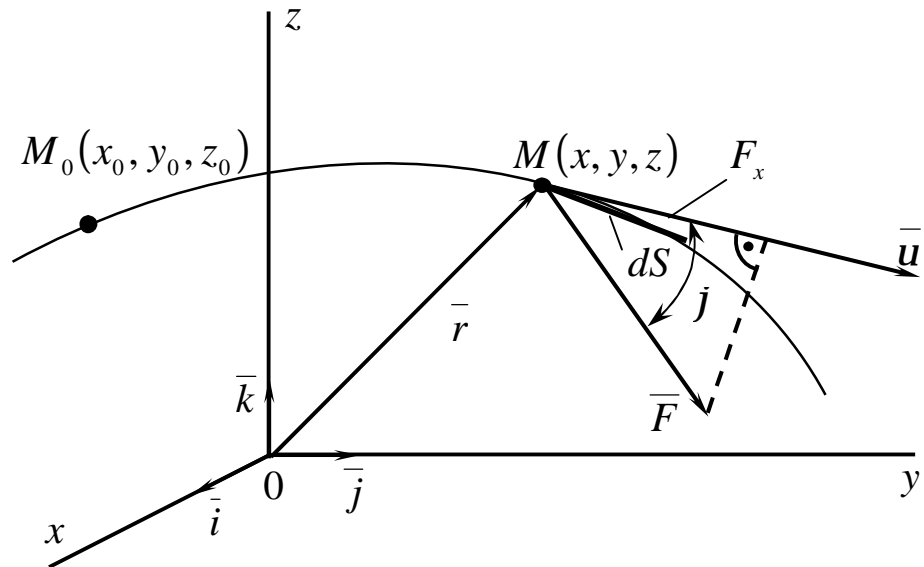


Рисунок 4,19

Итак, элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение. Таким образом, если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю. В частности, работа нормальной составляющей к скорости силы F_n всегда равна нулю.

Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Из кинематики точки известно, что $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$; $v = |\bar{v}| = \frac{ds}{dt}$. Следовательно,

$$ds = |d\bar{r}| = v dt.$$

После этого, согласно формуле (4.55), элементарная работа

$$dA = F |d\bar{r}| \cos j = \bar{F} d\bar{r}. \quad (4.56)$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на дифференциал радиус-вектора точки приложения силы.

Так как $d\bar{r} = \bar{v} dt$, то, согласно формуле (4.56),

$$dA = \bar{F} d\bar{r} = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} dt \bar{v}. \quad (4.57)$$

Элементарная работа равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

Если силу F и радиус-вектор \bar{r} разложить по осям координат, то

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}; \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Из последней формулы

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}.$$

Подставляя в (4.56) значения \bar{F} и $d\bar{r}$, получаем

$$dA = F_x dz + F_y dy + F_z dz. \quad (4.58)$$

Формулу (4.58) называют обычно *аналитическим выражением элементарной работы*. Хотя выражение для элементарной работы (4.58) по форме и напоминает полный дифференциал функции координат точки, в действительности в общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом. Элементарная работа является полным дифференциалом функции координат точки только для специального класса сил — так называемых **потенциальных сил**, которые рассмотрены ниже.

4.5.1.2 Полная работа силы

Для определения полной работы силы F на перемещении от точки M_0 до точки M разобьем это перемещение на n перемещений, каждое из которых в пределе переходит в элементарное. Тогда работу A можно выразить формулой

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n dA_k,$$

где dA_k — работа на k -м элементарном перемещении, на которые разбито полное перемещение.

Так как сумма в определении работы является интегральной суммой определения криволинейного интеграла на участке кривой M_0M , то, используя для элементарной работы формулу (4.54), получаем

$$A = \int_{M_0}^M F_t dS. \quad (4.59)$$

Используя другие выражения для элементарной работы, полную работу силы можно представить также в виде

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (4.60)$$

или

$$A = \int_0^t \bar{F} \bar{v} dt, \quad (4.61)$$

где момент времени $t = 0$ соответствует точке M_0 , а момент времени t — точке M .

Формула (4.61) особенно удобна для вычисления работы силы, когда сила известна как функция времени. Отметим, что из определения элементарной и полной работы следует:

1) работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении;

2) работа силы на полном перемещении равна сумме работ этой же силы на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.

Первое свойство, очевидно, достаточно доказать только для элементарной работы равнодействующей силы.

Если сила R является равнодействующей силой системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k)$, приложенных к рассматриваемой точке, то она выражается геометрической суммой этих сил. Тогда по определению элементарной работы силы имеем

$$\bar{R} d\bar{r} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_k) d\bar{r} = \bar{F}_1 d\bar{r} + \bar{F}_2 d\bar{r} + \dots + \bar{F}_k d\bar{r}.$$

Первое свойство доказано.

Второе из отмеченных свойств непосредственно следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим. Единицей полной работы, так же как и элементарной, в СИ является джоуль: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Если проекция силы на направление скорости является величиной постоянной, то из формулы (4.59) получим

$$A = F_t S,$$

где s — путь, пройденный точкой.

Так как $A = F \cos j$, то последнюю формулу можно представить в

виде

$$A = FS \cos j .$$

Следует отметить, что в этой формуле как F , так и j могут быть переменными, но $F \cos j$ является постоянной величиной. Это выполняется, если F и j постоянны. Если дополнительно угол $j = 0$ или 180° , то тогда

$$A = \pm Fs,$$

причем эта формула применима как для прямолинейного, так и для криволинейного движения. Для этого необходимо, чтобы сила F была постоянной по модулю и все время направленной по касательной к траектории точки. В случае прямолинейной траектории сила F , следовательно, должна быть все время направлена по траектории в одну и ту же сторону.

4.5.1.3 Мощность

Мощность силы, или работоспособность какого-либо источника силы, часто оценивают той работой, которую он может совершить за единицу времени.

Итак, по определению, мощность

$$W = \frac{dA}{dt}.$$

Учитывая формулу (4.57) для элементарной работы, мощность W можно представить в виде

$$W = \bar{F} \bar{v} = Fv \cos j . \quad (4.62)$$

Таким образом, **мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки**. Из формулы (4.62) получаем, что чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то ее можно получить только при малой скорости. Так, например, когда железнодорожному локомотиву надо увеличить силу тяги, то для этого надо уменьшить скорость поезда.

В СИ единицей мощности является ватт: $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$.

4.5.1.4 Примеры вычисления работы силы

Работа силы в общем случае зависит от характера движения точки приложения силы. Следовательно, для вычисления работы надо знать движение этой точки. Но в природе имеются силы и примеры движения, для которых работу можно вычислить сравнительно просто, зная начальное и конечное положения точки.

Рассмотрим работу силы тяжести и линейной силы упругости, изменяющейся по закону Гука, и вычисление работы силы, приложенной к какой-либо точке твердого тела в различных случаях его движения. В качестве простейших примеров движения укажем случаи, когда работа равна нулю. Так, работа любой силы равна нулю, если она приложена все время в неподвижной точке или в точках, скорость которых равна нулю, как, например, в случае, когда сила все время приложена в мгновенном центре скоростей при плоском движении тела или все время в точках, лежащих на мгновенной оси вращения, в случае вращения тела вокруг неподвижной точки. Эти случаи возможны в задачах, когда рассматривают работу силы трения в точке соприкосновения двух тел при отсутствии скольжения одного тела по другому. При этом работа силы трения равна нулю.

Работа силы тяжести. Силу тяжести P материальной точки массой m вблизи поверхности Земли можно считать постоянной, равной mg и направленной по вертикали вниз. Если взять оси координат $Oxyz$, у которых ось Oz направлена по вертикали вверх, то

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$

Вычисляя работу A силы \vec{P} на перемещении от точки M_0 до точки M по формуле (4.60), имеем

$$A = \int_{M_0}^M (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{z_0}^z dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

или

$$A = mgh,$$

где $h = z_0 - z_1$ – высота, до которой опускается точка.

При подъеме точки высота h является отрицательной. Следовательно, в общем случае работа силы тяжести $P = mg$:

$$A = \pm Ph.$$

Работа линейной силы упругости. Линейной силой упругости (или линейной восстанавливающей силой) называют силу, действующую по закону Гука (рис. 4.20):

$$\vec{F} = -c\vec{r}.$$

где \vec{r} — расстояние от точки статического равновесия, где сила равна нулю, до рассматриваемой точки M .; c — постоянный коэффициент — коэффициент жесткости.

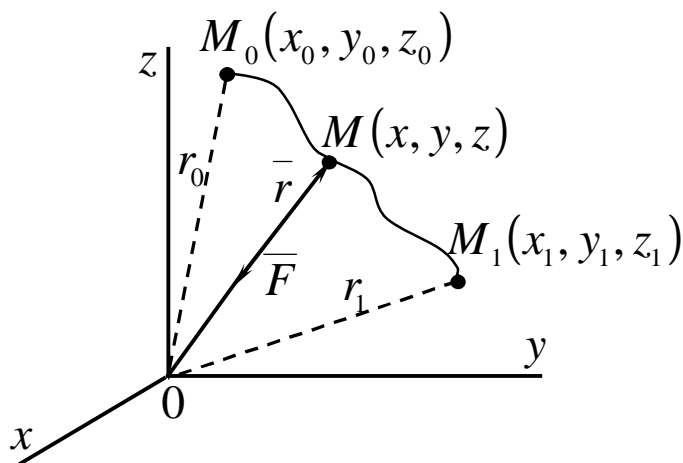


Рисунок 4.20

Выберем начало координат в точке статического равновесия, тогда

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

После этого работу на перемещении от точки M_0 до точки M определим по формуле

$$A = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c \int_{M_0}^M (x dx + y dy + z dz) = -c \int_{r_0}^{r_1} r dr,$$

так как

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$A = -\frac{c}{2} (r_1^2 - r_0^2). \quad (4.63)$$

По этой формуле и вычисляют работу линейной силы упругости. Если точка M_0 совпадает с точкой статического равновесия O , то тогда $r_0 = 0$, и для работы силы на перемещении от точки O до точки M имеем $A = -\frac{c}{2}r^2$.

Величина r – кратчайшее расстояние между рассматриваемой точкой и точкой статического равновесия. Обозначим его l и назовем деформацией. Тогда

$$A = -\frac{c}{2}l^2. \quad (4.64)$$

Работа линейной силы упругости на перемещении из состояния статического равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации. Из формулы (4.63) или (4.64) следует, что работа линейной силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю. Она также равна нулю, если точки M_0 и M лежат на одной сфере, описанной из точки статического равновесия.

Работа силы, приложенной к твердому телу. Получим формулы для вычисления элементарной и полной работы силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, которое совершает то или иное движение. Сначала рассмотрим поступательное и вращательное движения тела, а затем – общий случай движения твердого тела.

При поступательном движении твердого тела все точки тела имеют одинаковые по модулю и направлению скорости (рис.4.21).

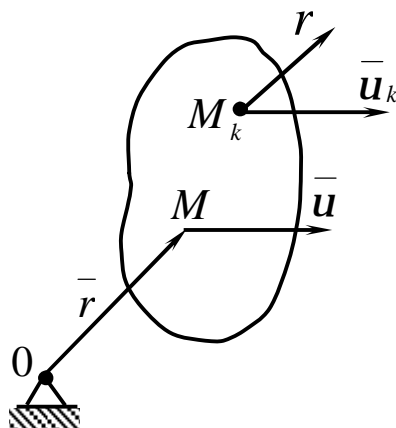


Рисунок 4.21

Следовательно, если сила F приложена к точке M_k , то, так как

$$\bar{v}_k = \bar{v},$$

$$dA = \bar{F} \bar{v}_k dt = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} d\bar{r},$$

где \bar{r} — радиус-вектор произвольной точки твердого тела.

На каком-либо перемещении полная работа

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} d\bar{r}.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость точки M можно вычислить по векторной формуле Эйлера (рис. 4.22):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

тогда элементарную работу силы F определим по формуле

$$dA = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$

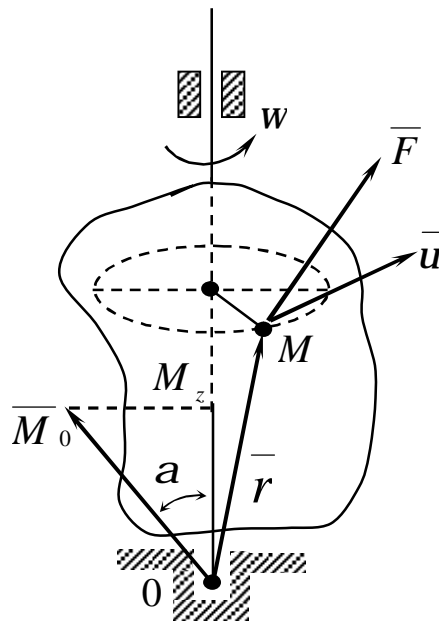


Рисунок 4.22

В смешанном векторном произведении, которое выражается в виде определителя, можно переставлять сомножители в круговом порядке:

$$\bar{F} (\bar{w} \times \bar{r}) = \bar{w} (\bar{r} \times \bar{F})$$

и

$$dA = \bar{w} (\bar{r} \times \bar{F}) dt = \bar{w} \bar{M}_0 dt = w dt M_0 \cos a ,$$

так как

$$\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0 (\bar{F}) = \bar{M}_0$$

является моментом силы относительно точки O .

Учитывая, что $M_0 \cos a = M_z$ — момент силы относительно оси вращения Oz и $w dt = dj$, окончательно получаем

$$dA = M_z dj . \quad (4.65)$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.

Полная работа

$$A = \int_0^j M_z dj . \quad (4.66)$$

В частном случае, если момент силы относительно оси вращения является постоянным, т. е. $M_z (\bar{F}) = const$, работу определяют по формуле

$$A = M_z j , \quad (4.67)$$

где j — угол поворота тела, на котором вычисляют работу силы.

Так как $dA = \bar{w} \bar{M}_0 (\bar{F}) dt$, то мощность в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$W = \frac{dA}{dt} \bar{w} \bar{M}_0 (\bar{F}) = w M_z (\bar{F}) . \quad (4.68)$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся вокруг неподвижной оси твердому телу, равна произведению угловой скорости тела на

момент силы относительно оси вращения тела.

Для свободного тела в общем случае движения скорость точки M , в которой приложена сила P (рис. 4.23),

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

следовательно,

$$dA = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} \bar{v}_0 dt + \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$

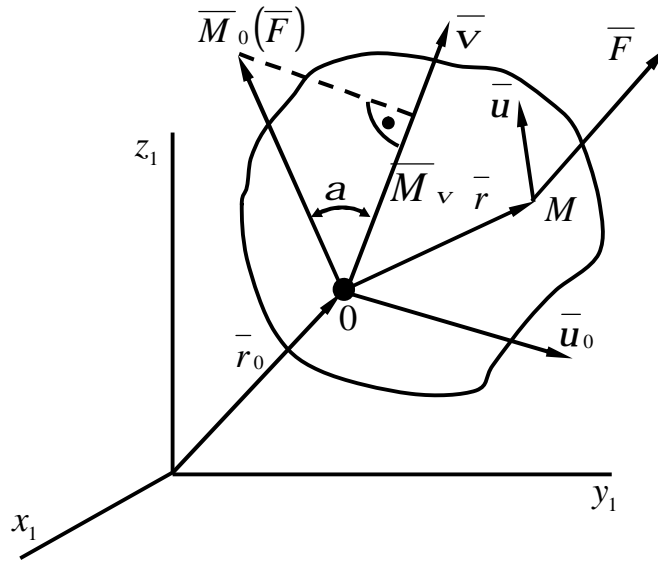


Рисунок 4.23

Учитывая, что

$$\bar{v}_0 dt = d\bar{r}_0 \quad \text{и} \quad \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} (\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{\omega} M_0,$$

имеем

$$dA = \bar{F} d\bar{r}_0 + \bar{\omega} \bar{M}_0 (\bar{F}) dt = \bar{F} d\bar{r}_0 + \omega dt M_0 \cos a.$$

Но так как $M_0 \cos a = M_w$ – момент силы относительно мгновенной оси относительного вращения вокруг точки O , и $\omega dt = dj$ – элементарный угол поворота вокруг этой оси, то окончательно получаем

$$dA = \bar{F} d\bar{r}_0 + M_w (\bar{F}) dj. \quad (4.69)$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае движения складывается из

элементарной работы на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, выбрав эту точку за полюс O , по формуле (4.69) для элементарной работы имеем

$$dA = M_w(\bar{F})dj. \quad (4.70)$$

Поворот на угол J следует рассматривать в каждый момент времени вокруг своей мгновенной оси вращения.

Формулу (4.69) применяют и для плоского движения твердого тела, только в этом случае мгновенная ось относительного вращения перпендикулярна плоскости движения и проходит через произвольную точку тела. Если в качестве этой точки берется мгновенный центр скоростей, то элементарная работа от поступательного перемещения равна нулю, и в этом случае элементарную работу можно вычислить по формуле (4.70), т. е. так же, как при вращении тела вокруг неподвижной точки.

Работа внутренних сил твердого тела. Докажем, что для твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю при любом его перемещении. Очевидно, достаточно доказать, что сумма элементарных работ всех внутренних сил равна нулю. Рассмотрим две любые точки твердого тела: M_1 , и M_2 (рис. 4.24) Так как внутренние силы есть силы взаимодействия точек тела, то для этих двух точек

$$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}; \quad F_1^{(i)} = -F_2^{(i)}.$$

Введем единичный вектор \bar{l}^0 , направленный по силе $\bar{F}_1^{(i)}$. Тогда

$$\bar{F}_1^{(i)} = \bar{l}^0 F_1^{(i)}; \quad \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_2^{(i)} = \bar{l}^0 F_1^{(i)}.$$

Сумма элементарных работ сил $\bar{F}_1^{(i)}$ и $\bar{F}_2^{(i)}$:

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \bar{v}_1 dt + \bar{F}_2^{(i)} \bar{v}_2 dt = \bar{F}_1^{(i)} dt (\bar{v}_1 \bar{l}^0 - \bar{v}_2 \bar{l}^0).$$

Раскрывая скалярные произведения векторов в скобках, получаем

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = F_1^{(i)} dt (v_1 \cos a_1 - v_2 \cos a_2) = 0,$$

так как в кинематике твердого тела доказано, что проекции скоростей любых двух точек твердого тела на направление прямой линии, соединяющей эти точки, равны друг другу при любом движении твердого тела. В полученном выражении в скобках стоит разность этих проекций

скоростей двух точек, т. е. величина, равная нулю.

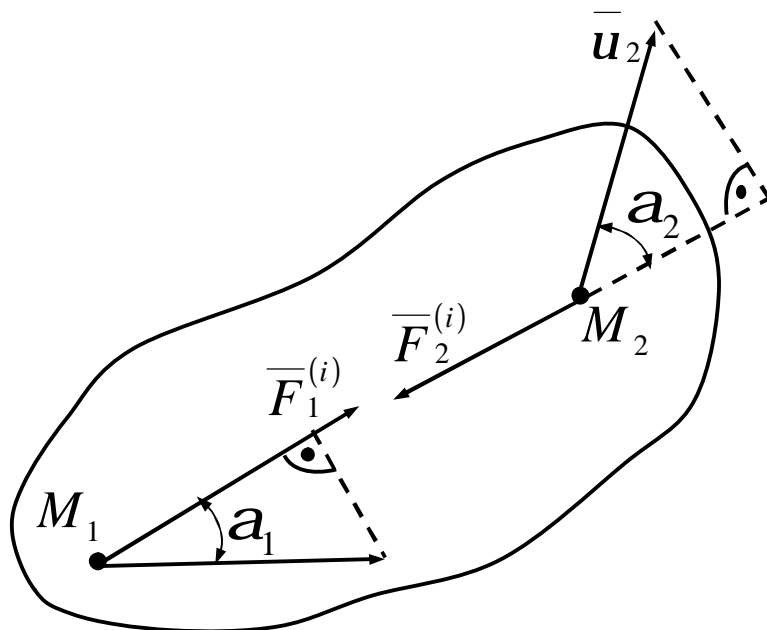


Рисунок 4.24

Твердое тело можно считать состоящим из пар взаимодействующих точек, для каждой из которых сумма элементарных работ внутренних сил равна нулю.

Суммируя элементарные работы для всех пар точек, получаем $\sum dA_k^{(i)} = 0$.

Как уже известно, главный вектор и главный момент всех внутренних сил для любой механической системы равны нулю. Сумма работ внутренних сил равна нулю только в случае твердого тела, а для любой механической системы в общем случае она не равна нулю.

В задачах в качестве механической системы часто рассматривают систему сочлененных твердых тел. При вычислении работы всех сил, приложенных к такой системе тел, очевидно, достаточно учесть работу внутренних сил в местах сочленения твердых тел. Если твердые тела сочленяются с помощью шарниров без трения, сумма работ таких двух внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы в точке сочленения, как действие и противодействие, равны по модулю, но противоположны по направлению, а перемещение у точек приложения сил общее.

Таким образом, сочленение твердых тел с помощью шарниров без трения при вычислении работы внутренних сил не нарушает жесткости системы тел, так как сумма работ внутренних сил в этих шарнирах равна нулю при любых перемещениях системы сочлененных твердых тел. Систему сочлененных с помощью таких шарниров твердых тел при вычислении работы всех внутренних сил можно считать одним твердым телом. Это характерно и для случая сочленения системы твердых тел с

помощью нерастяжимых нитей, канатов и т. п. В этом случае работа внутренних сил натяжения также равна нулю.

4.5.2 Кинетическая энергия

4.5.2.1 Кинетическая энергия точки и системы

Кинетической энергией материальной точки, или ее живой силой, называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости, т. е. $\frac{mv^2}{2}$ или $\frac{m\bar{v}^2}{2}$, так как скалярный квадрат любого вектора равен квадрату модуля этого вектора. Кинетическая энергия является скалярной, положительной величиной. В СИ единицей кинетической энергии является джоуль: 1 Дж = 1 Н·м.

Кинетической энергией системы T называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т. е.:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}. \quad (4.71)$$

Кинетическая энергия, как точки, так и системы, не зависит от направления скоростей точек. Кинетическая энергия может быть равна нулю для системы только при условии, если все точки системы находятся в покое.

4.5.2.2 Вычисление кинетической энергии системы

(теорема Кёнига)

Разложим движение механической системы на переносное поступательное вместе с центром масс системы и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. Аналогично тому, как это производилось при выводе формулы для кинетического момента при таком разложении абсолютного движения, для каждой точки системы M_k (см. рис. 4.9) имеем

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_c + \bar{\mathbf{r}}_k$$

и, соответственно,

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \bar{\mathbf{v}}_c + \bar{\mathbf{v}}_{kr},$$

где $\bar{\mathbf{v}}_{kr} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt}$ является относительной скоростью точки, так как под-

вижная система координат движется поступательно ($\bar{w} = 0$) и, следовательно, полная производная по времени от \bar{r}_k совпадает с локальной производной, равной относительной скорости точки.

Подставляя значение скорости \bar{v}_k в выражение кинетической энергии абсолютного движения системы, т.е. ее движения относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, после очевидных преобразований получаем

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \frac{\bar{v}_C^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \bar{v}_{kr}^2}{2} + \bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr}. \quad (4.72)$$

Но

$$\bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr} = \bar{v}_C \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_C \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k) = 0,$$

так как

$$\sum m_k \bar{r}_k = const = 0.$$

Учитывая, что $\sum m_k = M$ – масса системы, и обозначая $T_C^{(r)}$ второе слагаемое в формуле (4.72), имеем

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_C^{(r)}, \quad (4.73)$$

где $T_C^{(r)} = \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2}$.

Величина $T_C^{(r)}$ является кинетической энергией относительного движения системы относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с ее центром масс, или кинетической энергией системы относительно центра масс.

Формула (4.73) выражает так называемую **теорему Кёнига**: *кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.*

4.5.2.3 Кинетическая энергия твердого тела

При **поступательном движении** твёрдого тела кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = M \frac{v^2}{2}, \quad (4.74)$$

так как при поступательном движении твердого тела скорости всех точек тела одинаковы, т.е. $\bar{v}_k = \bar{v}$, где \bar{v} — общая скорость для всех точек тела.

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе всего тела.

При **вращении тела вокруг неподвижной оси** кинетическую энергию можно вычислить, если учесть, что скорость какой-либо точки тела M_k можно выразить как

$$v_k = \omega h_k,$$

где h_k — кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения;

ω — угловая скорость тела.

Тогда

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z,$$

или

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}, \quad (4.75)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz .

Следовательно, кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

Из сравнения формул (4.74) и (4.75) следует, что эти формулы подобны, только при вращательном движении аналогом массы является момент инерции тела относительно оси вращения, а скорости — угловая скорость тела. Такая аналогия между поступательным и вращательным движениями твердого тела может наблюдаться во многих формулах, относящихся к этим двум движениям.

При **плоском движении твердого тела** кинетическую энергию можно вычислить по теореме Кёнига. Так как в этом случае относительное движение относительно центра масс (точнее, относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс) является

вращением вокруг центра масс с угловой скоростью W ,

$$T_C^{(r)} = J_{CZ} \frac{W^2}{2},$$

тогда J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси Cz , проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, на основании формулы (4.73) для плоского движения тела имеем

$$T = \frac{M\bar{v}_C^2}{2} + J_{CZ} \frac{W^2}{2}. \quad (4.76)$$

Таким образом, при плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то следует вычислить кинетическую энергию каждого тела, а затем полученные кинетические энергии сложить. Так определяется кинетическая энергия системы тел.

4.5.3 Теорема об изменении кинетической энергии точки

Для материальной точки массой m , движущейся под действием силы F , основной закон динамики можно представить в виде

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения скалярно на дифференциал радиус-вектора точки $d\bar{r}$, имеем

$$m d\bar{v} \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} d\bar{r},$$

или

$$m\bar{v} d\bar{v} = \bar{F} d\bar{r},$$

где $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ — скорость точки.

Учитывая, что $dA = \bar{F} d\bar{r}$ — элементарная работа, получаем

$$m\bar{v} d\bar{v} = dA.$$

Так как

$$m\bar{v} d\bar{v} = d\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

то окончательно

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \quad (4.77)$$

Формула (4.77) выражает **теорему об изменении кинетической энергии для точки** в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Если обе части формулы (4.77) разделить на dt и учесть, что $dA/dt = W$ — мощность, то теорему можно также выразить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = W. \quad (4.77a)$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.

Интегрируя обе части формулы (4.77) от точки M_0 до точки M , получаем **теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме:**

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (4.78)$$

т.е. изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.

4.5.4 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Приложив к точкам системы все внешние и внутренние силы, для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетической энергии (4.77а) в форме

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k, k = 1, 2, \dots, N.$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и вынося знак дифференциала за знак суммы, получаем

$$d\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k,$$

или

$$dT = \sum dA_k^{(e)} + \sum dA_k^{(i)}, \quad (4.79)$$

где кинетическая энергия системы

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2},$$

элементарная работа внешних и внутренних сил, соответственно,

$$dA_k^{(e)} = \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k, dA_k^{(i)} = \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k.$$

Формула (4.79) и выражает **теорему об изменении кинетической энергии системы** в дифференциальной форме: *дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Если обе части формулы (4.79) проинтегрировать между двумя положениями системы — начальным и конечным, в которых, соответственно, кинетическая энергия T_0 и T , то, изменяя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$T - T_0 = \sum \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(e)} + \sum \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(i)},$$

или

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}, \quad (4.80)$$

где $A_k^{(e)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(e)}$ – работа внешней силы для точки системы

M_k при ее перемещении из начального положения M_{k0} в конечное положение M_k ;

$A_k^{(i)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(i)}$ – соответственно, работа внутренней силы,

действующей на точку M_k .

Формула (4.80) выражает **теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной, или интегральной, форме**: *изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы.*

Частный случай. Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum A_k^{(i)} = 0.$$

Следовательно, теорему об изменении кинетической энергии, например, в конечной форме можно представить в виде

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)}.$$

Изменение кинетической энергии твердого тела при каком-либо перемещении равно сумме работ всех внешних сил, действующих на тело, на соответствующих перемещениях точек тела при том же перемещении твердого тела.

Таким образом, в отличие от рассмотренных других общих теорем динамики системы, в теорему об изменении кинетической энергии могут входить внутренние силы. Они не входят в эту теорему в случае абсолютно твердого тела.

4.5.5 Теорема об изменении кинетической энергии

в относительном движении*

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Пусть точка M совершает переносное движение вместе с подвижной системой координат $Ox_1y_1z_1$ относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и относительное движение по отношению к системе коор-

динат $Oxyz$ (рис. 4.25). Абсолютным движением точки M является ее сложное движение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Дифференциальное уравнение относительного движения точки M в векторной форме можно представить в виде

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (4.81)$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ - сила инерции переносного движения точки;

$\bar{\Phi}_r = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$ сила инерции Кориолиса.

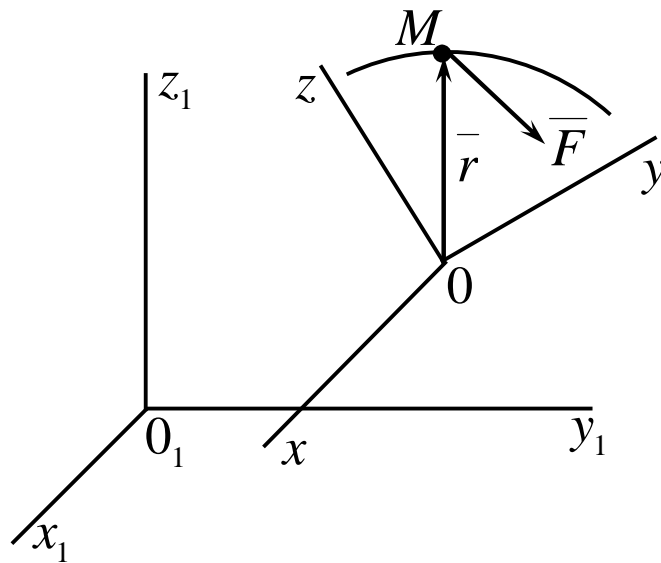


Рисунок 4.25

Вывод теоремы об изменении кинетической энергии для точки в относительном движении произведем так же, как и вывод аналогичной теоремы в абсолютном движении, умножив обе части уравнения (4.81) скалярно на вектор элементарного относительного перемещения $d\bar{r}$, и преобразуем левую часть полученного выражения. Значок «~» над дифференциалом радиус-вектора \bar{r} и других векторов указывает, что при дифференцировании надо брать изменение соответствующего вектора относительно подвижной системы координат $Oxyz$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
m\bar{a}_r \cdot d\tilde{r} &= m \frac{d\bar{v}_r}{dt} \cdot d\tilde{r} = m d\bar{v}_r \cdot \frac{d\tilde{r}}{dt} = \\
&= m d\bar{v}_r \cdot \bar{v}_r = d\left(\frac{m\bar{v}_r^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

В правую часть входят элементарные работы сил \bar{F} , $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ на относительном перемещении $d\tilde{r}$. Оказывается, что элементарная работа силы инерции Кориолиса на относительном элементарном перемещении всегда равна нулю, так как эта сила перпендикулярна относительной скорости \bar{v}_r и, следовательно, перпендикулярна относительному перемещению $d\tilde{r} = \bar{v}_r dt$. В выражение силы инерции Кориолиса входит векторное произведение $\bar{W} \times \bar{v}_r$, а оно всегда перпендикулярно каждому из векторов сомножителей, в частности \bar{v}_r .

Итак, **теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме** имеет вид

$$d\frac{m\bar{v}_r^2}{2} = \bar{F} d\tilde{r} + \bar{\Phi}_e d\tilde{r}. \quad (4.82)$$

Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении точки выражается так же, как и в абсолютном движении, только к элементарной работе приложенной силы добавляют элементарную работу силы инерции переносного движения на относительном перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии системы. Для системы рассмотрим наиболее важный случай, когда в качестве переносного движения берется поступательное движение системы вместе с центром масс, и, следовательно, кинетическую энергию системы в абсолютном движении можно вычислить на основании теоремы Кёнига (4.73):

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + T_c^{(r)}.$$

Теорему об изменении кинетической энергии системы для абсолютного движения можно представить в виде

$$dT = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k. \quad (4.83)$$

Так как

$$\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{r}_k,$$

и, следовательно,

$$d\bar{r}_k = d\bar{r}_C + d\bar{r}_k,$$

то, заменяя в уравнении (5.83) $d\bar{r}_k$ и T их значениями, получаем:

$$d\left(\frac{M\bar{v}_C^2}{2}\right) + dT_C^{(r)} = \left(\sum \bar{F}_k^{(e)}\right) d\bar{r}_C + \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \left(\sum \bar{F}_k^{(i)}\right) d\bar{r}_C + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k. \quad (4.84)$$

По свойству внутренних сил, $\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$.

Если теорему об изменении кинетической энергии для центра масс выразить так же, как и для точки, у которой масса равна массе всей системы, и эта точка находится под действием всех внешних сил, действующих на систему, то

$$I\left(\frac{M\bar{v}_C^2}{2}\right) = \left(\sum \bar{F}_k^{(e)}\right) d\bar{r}_C.$$

Отбросив в уравнении (4.84) эти члены, получим следующую теорему об изменении кинетической энергии системы в относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс:

$$dT_C^{(r)} = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k.$$

Сравнивая уравнение (76) с уравнением (74), видим, что теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы, формулируется так же, как и для абсолютного движения системы.

4.6 Потенциальное силовое поле

Для вычисления работы силы на каком-либо перемещении в общем случае необходимо знать закон движения точки на этом перемещении. Есть класс сил, для которых работа не зависит от характера движения точки на рассматриваемом перемещении. Эти силы называются *потенциальными*, и они имеют большое значение в различных областях механики и физики.

4.6.1 Потенциальное силовое поле и силовая функция

Силовым полем называют часть пространства, в каждой точке которого на материальную точку действует определённая сила, зависящая от координат точки и времени. Силовое поле считают *стационарным*, если действующие силы не зависят от времени. Если же силы зависят от времени, то силовое поле является нестационарным.

Силовое поле называют *потенциальным*, если имеется силовая функция U , зависящая от координат точки и времени для нестационарного силового поля. Через силовую функцию U проекции силы на координатные оси в каждой точке поля (рис. 4.26) определяются по формулам:

$$F_x = \partial U / \partial x; F_y = \partial U / \partial y; F_z = \partial U / \partial z. \quad (4.85)$$

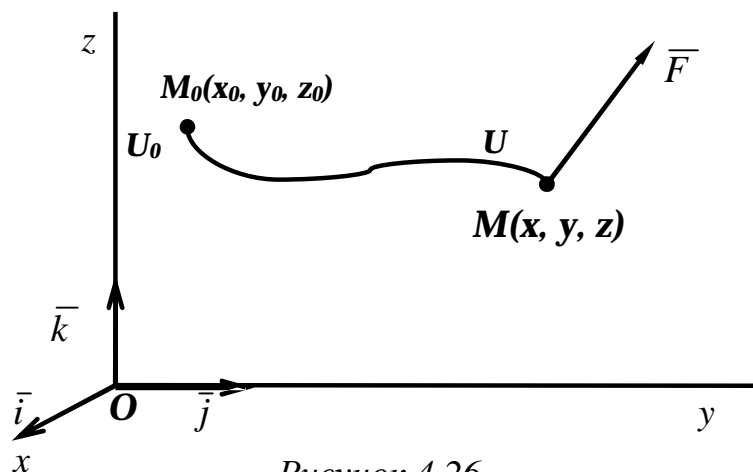


Рисунок 4.26

Функцию $U(x, y, z, t)$ называют *силовой функцией*.

Рассмотрим основные свойства силовой функции стационарного силового поля. Из уравнения (4.85) следует, что силовая функция определяется с точностью до постоянной, так как для проекций силы на координатные оси требуются только частные производные к координатам от этой функции, и добавление постоянной к функции U не влияет на значения F_x, F_y, F_z . Элементарная работа

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

т. е.

$$dA = dU. \quad (4.86).$$

Таким образом, *элементарная работа силы в потенциальном силовом поле равна полному дифференциалу силовой функции*. Иногда это свойство силовой функции принимают за её определение; тогда уравнение (4.85) получают из уравнения (4.86).

Полная работа силы \bar{F} на участке от точки M_0 до точки M

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0,$$

т. е.

$$A = U - U_0, \quad (4.87)$$

где $U_0 = U(x_0, y_0, z_0), U = U(x, y, z)$.

Следовательно, *полная работа силы на каком-либо перемещении точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от формы траектории, по которой оно совершается, если силовая функция является однозначной*.

Из уравнения (4.87) следует, что работа силы в потенциальном силовом поле по любому замкнутому пути равна нулю, так как значение силовой функции в начальной и конечной точках перемещения одинаково, если силовая функция не принимает других значений после возвращения в первоначальную точку.

Силовая функция может принимать другие значения после возвращения в первоначальную точку, в зависимости от количества обходов, если область, ограниченная замкнутым путём обхода, содержит в себе специальные особые точки силовой функции.

Если применить понятие вектор - градиента от скалярной функции U

$$\text{grad}U = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные векторы, направленные по осям координат, то силу \bar{F} можно выразить как градиент силовой функции U : $\bar{F} = \text{grad}U$.

Определим условия, которые позволяют по силам силового поля устанавливать, будет ли силовое поле потенциальным.

Если силовая функция U существует, то

$$\partial F_x / \partial y = \partial^2 U (\partial y \partial x); \partial F_y / \partial x = \partial^2 U (\partial x \partial y).$$

Так как

$$\partial^2 U (\partial y \partial x) = \partial^2 U / (\partial x \partial y),$$

то

$$\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x \quad \text{или} \quad \partial F_x / \partial y - \partial F_y / \partial x = 0.$$

Аналогично,

$$\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z = 0; \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x = 0.$$

Таким образом, полученные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (4.88)$$

В векторном счислении доказывается, что условия уравнения (4.88) не только необходимы, но и достаточны для существования силовой функции. Если использовать вектор вихря $\text{rot}\bar{F}$ от вектора силы \bar{F}

$$\text{rot}\bar{F} = \bar{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

то условия уравнения (80) можно выразить более кратко:

$$\text{rot}\bar{F} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Непотенциальными силами являются силы сопротивления, зависящие от скорости, и силы трения. Силы сухого трения не будут потенциальными, так как, хотя сила трения постоянна и не зависит от скорости, но направление силы трения от скорости не зависит.

4.6.2 Поверхности уровня. Силовые линии

Если рассматривать точки потенциального силового поля, в которых силовая функция имеет одно и то же значение, например $U = C$, то все эти точки располагаются на поверхности, которую называют *поверхностью равного уровня* или *поверхностью уровня*.

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$U(x, y, z) = C.$$

Отметим некоторые свойства поверхностей уровня.

1 *Работа силы равна нулю, если начальная и конечная точки перемещения лежат на одной поверхности уровня. Действительно,*

$$A = U - U_0.$$

Если начальная и конечная точки лежат на одной поверхности уровня, то $U = U_0$, и, следовательно, $A = 0$. Работа силы на перемещении между точками M_0 и M не зависит от положения этих точек на своих поверхностях уровня. На любом перемещении между двумя точками рассматриваемых поверхностей уровня она одинакова (рис. 4.27).

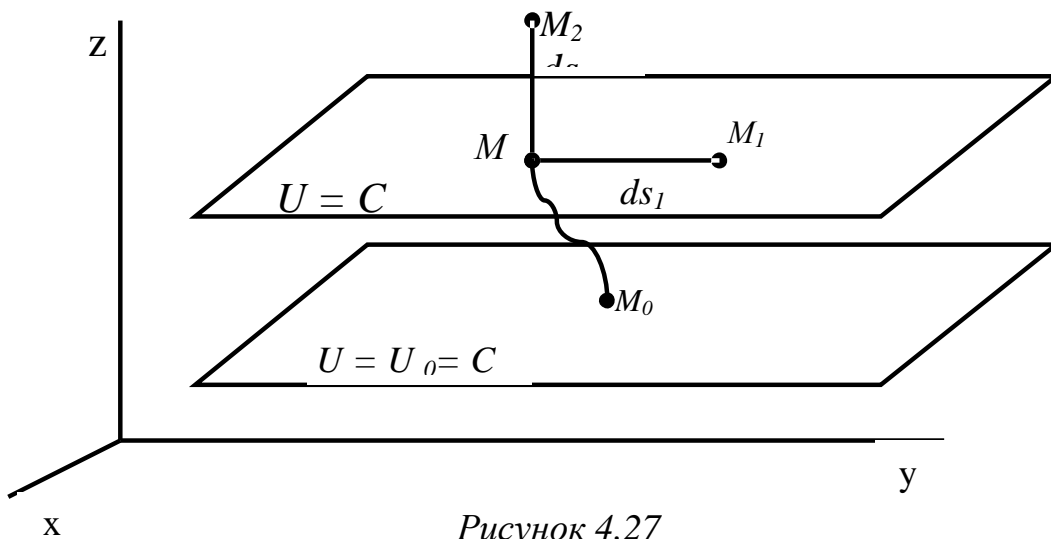


Рисунок 4.27

2 *Сила в потенциальном силовом поле всегда перпендикулярна поверхности уровня или, точнее, касательной плоскости поверхности уровня. Действительно, пусть имеем поверхность уровня $U = C$. Возьмём на ней две бесконечно близкие точки M и M_1 и вычислим элементарную работу на перемещении ds_1 между этими точками:*

$$dA = F ds_1 \cos(\vec{F}, \overline{MM_1}).$$

С другой стороны:

$$dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0.$$

Так как F и ds_1 не равны нулю, то $\cos(\bar{F}, \wedge \overline{MM}_1) = 0$, и, следовательно, угол между силой \bar{F} и перемещением \overline{MM}_1 , лежащим в касательной плоскости к поверхности уровня, является прямым.

3 *Сила в потенциальном силовом поле всегда направлена в сторону возрастающих значений силовой функции.* Для доказательства этого свойства силы возьмём точку M_2 на перпендикуляре к поверхности уровня, восстановленном в точку M в направлении возрастающих значений силовой функции. Тогда элементарная работа на элементарном перемещении \overline{MM}_2 , равном ds_2 , вычисляется по формуле

$$Fds_2 \cos(\bar{F}, \wedge \overline{MM}_2) = C_2 - C > 0,$$

так как $C_2 > C$.

Следовательно, $\cos(\bar{F}, \wedge \overline{MM}_2) > 0$; поэтому угол, равный 180° , исключается, и получается, что сила \bar{F} направлена по \overline{MM}_2 в сторону возрастающих значений силовой функции.

4 Если всё силовое поле разбить поверхностями уровня на n равных значений так, что для первой поверхности уровня $C_1 = C/n$, для второй - $C_2 = 2C/n$ и для последней $C_n = nC/n = C$, но там, где соседние поверхности уровня ближе друг к другу, модуль силы \bar{F} больше, чем в местах, где поверхности уровня дальше отстоят друг от друга. Это свойство можно проверить, если заметить, что работа между точками любых двух соседних поверхностей в этом случае одна и та же. Следовательно, там, где расстояние между поверхностями меньше, сила по числовому значению больше, и наоборот.

Наряду с поверхностями уровня в силовом поле вводят понятие *силовой линии*, т.е. такой линии, в каждой точке которой сила направлена по касательной к этой линии (рис. 4.28). Так как вектор $d\bar{r}$ с проекциями на оси dx, dy, dz всегда направлен по касательной к кривой, то из условия параллельности $d\bar{r}$ и \bar{F} следует, что

$$dx/F_x = dy/F_y = dz/F_z. \quad (4.89)$$

Эти дифференциальные уравнения относительно координат x, y, z являются дифференциальными уравнениями силовой линии.

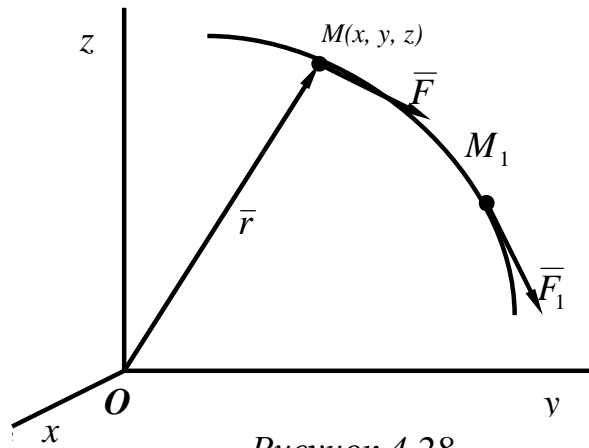


Рисунок 4.28

4.6.3 Потенциальная энергия

В случае потенциального силового поля наряду с силовой функцией можно ввести другую функцию, характеризующую запас энергии в данной точке поля, — потенциальную энергию в этой точке (рис. 75), или потенциальную энергию материальной точки в рассматриваемой точке силового поля.

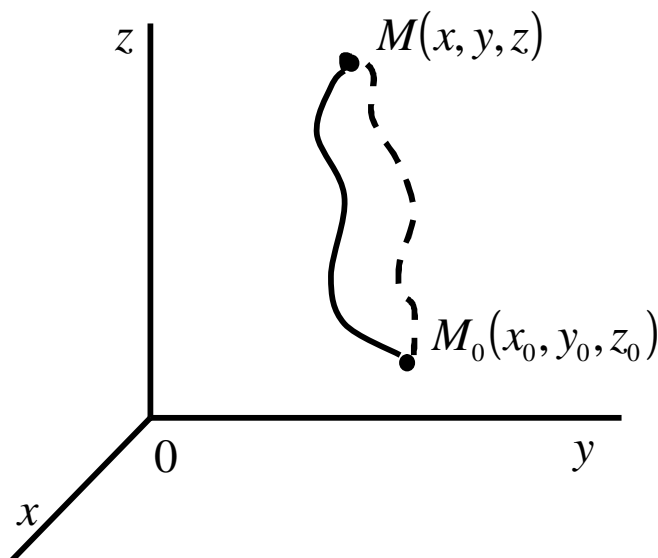


Рисунок 4.29

Потенциальной энергией Π материальной точки в рассматриваемой точке силового поля M называют работу, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из точки M в начальную точку M_0 , т. е.

$$\Pi = A_{MM_0},$$

$$\Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = C_0 - U \quad (4.90)$$

Постоянная C_0 одна и та же для всех точек поля, зависящая от того, какая точка поля выбрана за начальную. Очевидно, что потенциальную энергию можно ввести только для потенциального силового поля, в котором работа не зависит от формы перемещения между точками M и M_0 . Непотенциальное силовое поле не имеет потенциальной энергии, для него не существует и силовой функции.

На основании уравнений (4.85) и (4.90) имеем:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Из уравнений (4.86), (4.87) и (4.90), соответственно, получаем:

$$dA = dU = -d\Pi; \quad A = U - U_0 = \Pi - \Pi_0.$$

Из приведенных формул следует, что Π определяется с точностью до произвольной постоянной, которая зависит от выбора начальной точки, но эта произвольная постоянная не влияет на вычисляемые через потенциальную энергию силы и работу этих сил. Учитывая это, формулу (4.90) можно выразить так:

$$\Pi = -U + const, \tag{4.90a}$$

или

$$\Pi = -U.$$

Потенциальную энергию в какой-либо точке поля с точностью до произвольной постоянной можно определить как значение силовой функции в этой же точке, взятое со знаком минус. По существу, достаточно одной из функций – Π или U .

Понятие потенциальной энергии было введено раньше, чем силовая функция. Силовая функция более удобна, так как некоторые формулы, содержащие эту функцию, не имеют знака минус.

4.6.4 Примеры вычисления силовых функций

Если вычислить силовую функцию, то на основании уравнения (4.90a) будет известна и потенциальная энергия. Вычислим силовые функции однородного поля силы тяжести, силового поля линейной силы упругости и силового поля силы притяжения, действующей по зако-

ну Ньютона.

Силовая функция однородного поля силы тяжести. Если ось Oz (рис. 4.30) направить вертикально вверх, то проекции силы тяжести на координатные оси будут равны:

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$

Вычисляя элементарную работу силы \vec{P} , получаем

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mg dz = d(-mgz).$$

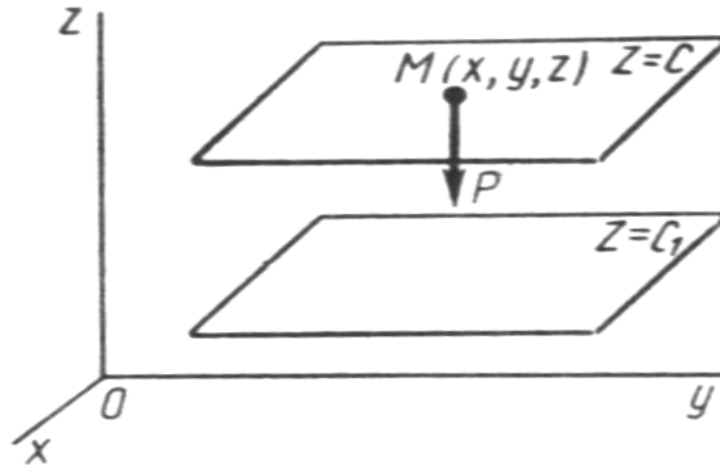


Рисунок 4.30

Так как элементарная работа является полным дифференциалом, то силовое поле силы тяжести является потенциальным, и силовая функция этого поля определяется по формуле

$$U = -mgz + const. \quad (4.91)$$

По формуле (4.91) определяют силовую функцию однородного поля силы тяжести, т.е. поля, в котором сила тяжести постоянна по модулю и направлению. Уравнение поверхности уровня $U = C$ или $z = const$, т. е. поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости.

Силовая функция линейной силы упругости. Для линейной силы упругости (см. рис. 4.30) имеем:

$$\vec{F} = -c\vec{r}; \quad F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

Следовательно,

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c(xdx + ydy + zdz) = -crdr = d(-cr^2 / 2),$$

так как $xdx + ydy + zdz = rdr$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Силовую функцию линейной силы упругости определяют по формуле

$$U = -\frac{cr^2}{2} + const = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + const \quad (4.92)$$

Поверхностями уровня $U = C$ являются сферы $r = const$.

Силовая функция силы притяжения по закону Ньютона. Вычислим силовую функцию поля земного притяжения. Если выбрать начало координат в центре Земли, то сила притяжения точки земным шаром $F = k / r^2$.

Сила \vec{F} направлена к центру Земли; следовательно, вводя единичный вектор \vec{r}^0 по радиус-вектору от этого центра в рассматриваемую точку М, имеем:

$$\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}; \quad \vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{r}^0 = -\frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{k}{r^3} \vec{r}.$$

Проецируя силу \vec{F} на координатные оси, получаем:

$$F_x = -\frac{k}{r^3} x; \quad F_y = -\frac{k}{r^3} y; \quad F_z = -\frac{k}{r^3} z.$$

Тогда

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{k}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -\frac{k}{r^3} rdr = d\left(\frac{k}{r}\right),$$

так как $xdx + ydy + zdz = rdr$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Таким образом, силовая функция силы притяжения, по закону Ньютона,

$$U = \frac{k}{r} + const = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + const. \quad (4.93)$$

Постоянную k для случая Земли можно выразить так:

$$k = GmM = mgR^2,$$

где M – масса Земли;

R – радиус Земли;

g – ускорение силы тяжести на поверхности Земли;

m – масса точки;

G – постоянная тяготения.

Если вместо Земли рассматривается другое небесное тело, изменяется только постоянная k .

Силовая функция и потенциальная энергия системы. Для механической системы в потенциальном силовом поле можно ввести силовую функцию как функцию, зависящую от координат всех точек системы, т.е. от положения системы в силовом поле. Если система состоит из N точек, то силовая функция $U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N)$ зависит в общем случае от координат всех точек. Проекция силы, действующей на каждую точку системы:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.94)$$

Сумма элементарных работ всех сил, действующих на точки системы, определяется по формуле

$$\sum dA_k = \sum (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \sum \left(\frac{dU}{dx_k} dx_k + \frac{dU}{dy_k} dy_k + \frac{dU}{dz_k} dz_k \right) = dU,$$

или

$$\sum dA_k = dU. \quad (4.95)$$

Таким образом, сумма элементарных работ сил поля, действующих на механическую систему, равна полному дифференциалу от силовой функции. Если вычислить сумму работ, которую совершат силы поля, действующие на механическую систему при перемещении системы из положения (M_0) , в котором имеется силовая функция U_0 , в положение (M) , в котором есть силовая функция U , то

$$\sum A_k = \sum_{(M_0)}^{(M)} \int dA_k = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0,$$

или

$$\sum A_k = U - U_0. \quad (4.96)$$

Следовательно, сумма работ сил поля, действующих на систему при перемещении системы из одного начального положения в другое, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы.

Потенциальной энергией системы Π в рассматриваемом положении (М) потенциального силового поля называют сумму работ сил поля, действующих на систему, которую эти силы совершают при перемещении системы из рассматриваемого положения в начальное положение (M_1), т.е.

$$\Pi = \sum A_k = U_1 - U = -U + const, \quad (4.97)$$

где U – значение силовой функции для системы сил в положении (М); U_1 – значение силовой функции в начальном положении.

Из уравнений (4.94) – (4.97) следует:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k};$$

$$F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}; \quad \sum dA_k = dU = -d\Pi;$$

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

4.7 Закон сохранения механической энергии

4.7.1 Закон сохранения механической энергии точки

Для материальной точки теорему об изменении кинетической энергии можно выразить в следующем виде:

$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = A.$$

Если материальная точка движется в стационарном потенциальном

силовом поле, то

$$A = \Pi_0 - \Pi.$$

Следовательно,

$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = \Pi_0 - \Pi,$$

или

$$mv^2 / 2 + \Pi = mv_0^2 / 2 + \Pi_0 = h,$$

где h – постоянная величина.

Обозначая через E полную механическую энергию точки, состоящую из ее кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$E = mv^2 / 2 + \Pi = h.$$

Таким образом, *при движении точки в стационарном потенциальном силовом поле ее полная механическая энергия остается постоянной величиной*, что является **законом сохранения механической энергии для точки**, который и есть *первый интеграл дифференциальных уравнений движения точки*.

4.7.2 Закон сохранения механической энергии системы

Теорему об изменении кинетической энергии для системы можно представить в виде

$$T - T_0 = \sum (A_k^{(e)} + A_k^{(i)}) = \sum A_k. \quad (4.98)$$

Если система движется в стационарном потенциальном силовом поле, то

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi,$$

где Π – потенциальная энергия внутренних и внешних сил, действующих на систему.

Следовательно,

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

или

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h,$$

где h —постоянная величина.

Обозначая через E полную механическую энергию системы,

имеем

$$E = T + \Pi = h. \quad (4.99)$$

Формула (4.99) выражает **закон сохранения механической энергии для системы**: *полная механическая энергия при движении системы в стационарном потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил является постоянной величиной.*

В случае абсолютно твердого тела работа всех внутренних сил равна нулю, и, следовательно, потенциальная энергия внутренних сил является постоянной величиной, которую можно считать равной нулю. Тогда в уравнении (4.99) за потенциальную энергию следует принять только потенциальную энергию внешних сил, которая вместе с кинетической энергией является постоянной величиной. При движении изменяемой механической системы сумма кинетической энергии системы и потенциальной энергии внешних сил не является постоянной. Она становится постоянной только вместе с потенциальной энергией внутренних сил. Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называют консервативными.

При движении точки или системы в непотенциальном силовом поле, встречающемся в действительности, когда непотенциальность связана с действием сил сопротивления, механическая энергия изменяется, причем она всегда уменьшается на работу сил сопротивления. Потерянная системой часть механической энергии обычно переходит в тепловую энергию. Полная энергия всех видов (механическая, тепловая, химическая и т.д.) не изменяется при движении точки или системы в любом силовом поле. При этом происходит только преобразование одного вида энергии в другой.

5 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

5.1 Принцип Даламбера

5.1.1 Принцип Даламбера для материальной точки

Законы Ньютона содержат в себе все необходимое для рассмотрения движения любых механических систем. Но первоначально они применялись только для рассмотрения движения свободной материальной точки и свободного твердого тела до тех пор, пока не была дополнительно сформулирована аксиома связей. Для рассмотрения движения несвободных систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название *принципа Даламбера*. Этот принцип был сформулирован в терминах «потерянных» движений.

В настоящее время, когда считается справедливой аксиома связей, уравнения движения несвободной материальной точки являются такими же, как и для свободной, только к действующим на точку активным или заданным силам добавляют силы реакций связей.

Современное выражение принципа Даламбера не отличается по содержанию от уравнений движения материальной точки, но для многих задач оно более удобно. Принцип Даламбера для свободной материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Для несвободной точки он эквивалентен основному закону вместе с аксиомой связей.

Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (5.1)$$

Сила \bar{F} является равнодействующей активных сил, \bar{R} — равнодействующей реакций связей и \bar{a} — ускорением точки относительно инерциальной системы отсчета. Назовем *силой инерции* материальной точки произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т.е. $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$. Если использовать понятие силы инерции точки и перенести все слагаемые уравнения (5.1) в правую часть уравнения, то получим (рис. 5.1):

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (5.2)$$

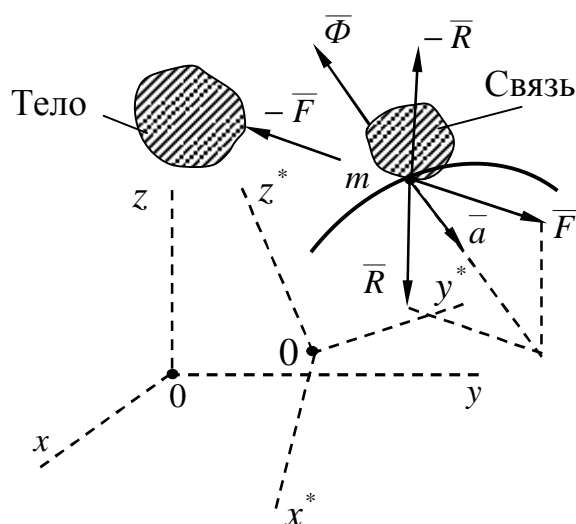


Рисунок 5.1

Так как силы \bar{F} , \bar{R} и $\bar{\Phi}$ образуют систему сходящихся сил и удовлетворяют условию (5.2), то они являются системой сил, эквивалентной нулю, т.е.:

$$\{\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}\} \propto 0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) или эквивалентное ему условие (5.3) выражают **принцип Даламбера для точки**: *при движении материальной точки активные силы реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил.*

Из уравнения (5.2) в проекциях на координатные оси получаем три условия равновесия сил:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0; \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0; \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат, а также на касательное и нормальное ускорения и на переносное, относительное ускорения и ускорение Кориолиса, если движение точки считать сложным, состоящим из переносного и относительного. Соответственно, силу инерции $\bar{\Phi}$ можно разложить на такие же составляющие:

$$\bar{\Phi} = \Phi_x \bar{i} + \Phi_y \bar{j} + \Phi_z \bar{k} = \bar{\Phi}_t + \bar{\Phi}_n = \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_r + \bar{\Phi}_k. \quad (5.5)$$

Касательная сила инерции

$$\bar{\Phi}_t = -m\bar{a}_t,$$

где \bar{a}_t – касательное ускорение.

Нормальная (или центробежная) сила инерции

$$\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,$$

где \bar{a}_n – нормальное ускорение.

Переносная и относительная силы инерции, а также сила инерции Кориолиса через ускорения выражаются, соответственно, так:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e; \quad \bar{\Phi}_r = -m\bar{a}_r; \quad \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k.$$

Аналогично выражаются через проекции ускорения на прямоугольные оси координат проекции силы инерции Φ_x, Φ_y, Φ_z . На силы инерции существует несколько точек зрения. Согласно первой точке зрения, сила инерции условно прикладывается к точке, чтобы уравнению движения (5.1) придать более удобную форму условия равновесия (5.2). Поэтому силу инерции $\bar{\Phi}$ называют **фиктивной, даламберовой, условной** и т.д. С этой точки зрения силы инерции в принципе Даламбера не являются настоящими, реальными силами и отличаются не только от обычных сил, создаваемых действием тел, но даже и от сил инерции в относительном движении.

Согласно другой, наиболее распространенной точке зрения, сила инерции считается приложенной по частям к «ускоряющим» телам.

5.1.2 Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим систему N материальных точек. К каждой точке системы в общем случае приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}, N, \quad (5.6)$$

где $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ – сила инерции для k -й точки (рис. 5.2).

Условия (5.6) можно представить в эквивалентной форме:

$$\{\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k\} \propto 0, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}, N.$$

N векторных условий (5.6) выражают **принцип Даламбера для системы**: при движении механической системы активная сила и реакция связей вместе с силой инерции составляют равновесную систему сил для каждой точки системы.

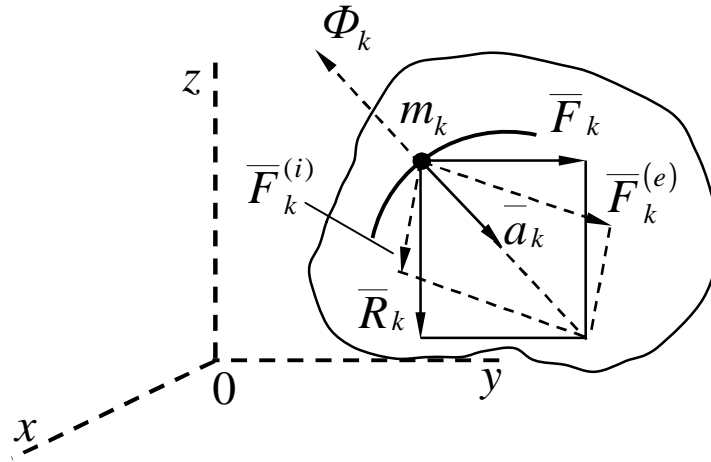


Рисунок 5.2

Принцип Даламбера для системы по своему содержанию не отличается от уравнений движения точек системы.

Представим равнодействующую силу, приложенную к каждой точке системы, разложенной не на активную силу и реакцию связей, а на внутреннюю и внешнюю силы по отношению ко всей системе:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}.$$

Тогда принцип Даламбера для системы можно представить в другой форме:

$$\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}, N. \quad (5.7)$$

Из принципа Даламбера для системы в форме (5.6) или (5.7) можно получить следствия в виде шести условий равновесия для сил, действующих на точки системы, и сил инерции.

Если просуммировать левые части (5.6) по всем точкам системы, то:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0. \quad (5.8)$$

Умножая векторно каждое из соотношений (5.6) слева на радиус-вектор точки \bar{r}_k и опять суммируя по точкам системы, получаем:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = 0, \\ & \text{или} \\ & \sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{\Phi}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Условия (5.8) и (5.9), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Если использовать принцип Даламбера в форме (5.7), то получим следствия в форме:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0; \quad (5.10)$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{\Phi}_k) = 0, \quad (5.11)$$

так как внутренние силы системы по свойству этих сил удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Если спроецировать уравнения (5.10) и (5.11) на координатные оси, то опять получим шесть условий равновесия для сил. Особенностью условий равновесия сил в форме уравнений (5.10) и (5.11) является отсутствие в них внутренних сил, что делает их особенно удобными при решении многих задач динамики системы.

В действительности условие (5.10) представляет собой теорему об изменении количества движения, а (5.11) – теорему об изменении кинетического момента для системы, если их представить в форме:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} - \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0; \quad (5.12)$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_o (\bar{F}_k^{(e)}) - \frac{d\bar{K}_o}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Сравнивая уравнение (5.10) с (5.12) и (5.11) с (5.13), получаем формулы для вычисления главного вектора и момента сил инерции системы через количество движения и кинетический момент:

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = -\frac{d\bar{Q}}{dt}; \quad (5.14)$$

$$\bar{L}_o^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_o (\bar{\Phi}_k) = -\frac{d\bar{K}_o}{dt}. \quad (5.15)$$

Так как $\bar{Q} = M\bar{v}_C$, то для главного вектора сил инерции получаем формулу:

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = -\frac{d\bar{Q}}{dt} = -M\bar{a}_C. \quad (5.16)$$

Здесь M – масса системы, \bar{v}_C и \bar{a}_C – скорость и ускорение центра масс, соответственно.

В тех случаях движения твердого тела, когда силы инерции приводятся к равнодействующей, последняя совпадает по величине и направлению с главным вектором этих сил. Но равнодействующая сил инерции необязательно проходит через центр масс тела, хотя величина и ее направление всегда определяются по формуле (5.16).

Проецируя векторы из уравнения (5.15) на ось Oz , получаем

$$L_z^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N M_z (\bar{\Phi}_k) = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (5.17)$$

Аналогичные формулы можно получить и для других координатных осей. В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz , как известно,

$$K_z = J_z \omega.$$

Подставляя это значение K_z в уравнение (5.17), имеем

$$\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) = -\frac{dK_z}{dt} = -J_z \frac{d\omega}{dt} = -J_z \mathbf{e},$$

или

$$L_z^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) = -J_z \mathbf{e}. \quad (5.18)$$

По формуле (5.18) вычисляют момент сил инерции относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси. Этот момент создают касательные силы инерции, так как нормальные силы инерции для каждой точки тела пересекают ось вращения и, следовательно, момента не создают.

5.2 Силы инерции твердого тела в частных случаях его движения

Поступательное движение. Если твердое тело движется поступательно, то ускорения его точек одинаковы. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей силе $\bar{\Phi}^*$, которая равна главному вектору, т. е.

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Линия действия равнодействующей силы инерции в этом случае проходит через центр масс, так как главный момент сил инерции точек тела относительно центра масс

$$\bar{L}_C^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{\Phi}_k) = 0.$$

Действительно, согласно следствию из принципа Даламбера (5.11) для центра масс, имеем:

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{\Phi}_k) + \bar{L}_C^{(\Phi)} = 0.$$

При поступательном движении тело не совершает вращения вокруг центра масс, и поэтому $\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$. Следовательно, и

$$\bar{L}_C^{(\Phi)} = 0.$$

Вращение вокруг неподвижной оси. Если выбрать за центр приведения сил инерции точку O на оси вращения Oz , то в этой точке получим главный вектор и главный момент сил инерции:

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C; \bar{L}_O^{(\Phi)} = -d\bar{K}_O / dt.$$

Если центр масс находится на оси вращения, то $\bar{\Phi} = 0$. Проекции главного момента сил инерции на неподвижные оси координат в общем случае можно вычислить по формулам:

$$L_x^{(\Phi)} = -dK_x / dt \neq 0;$$

$$L_y^{(\Phi)} = -dK_y / dt \neq 0;$$

$$L_z^{(\Phi)} = -dK_z / dt = -J_z \epsilon.$$

Моменты сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ вычисляются в следующем параграфе. Они равны нулю, если ось Oz является главной осью инерции для точки O .

Плоское движение. Выбрав за центр приведения сил инерции центр масс, получим в этой точке главный вектор и главный момент сил инерции. Для главного вектора сил инерции имеем

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Для главного момента сил инерции относительно центра масс C , который является движущейся точкой при плоском движении тела, получим формулы, аналогичные формуле (5.15), выведенной для неподвижной точки O .

Согласно следствию из принципа Даламбера (5.11), главный момент сил инерции относительно центра масс удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_C (\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{L}_C^{(\Phi)} = 0.$$

С другой стороны, из теорем об изменении кинетического момента относительно центра масс для абсолютного и относительного движений имеем

$$d\bar{K}_C / dt = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C (\bar{F}_k^{(e)}); \quad d\bar{K}_C^{(r)} / dt = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C (\bar{F}_k^{(e)}).$$

Из этих соотношений следует:

$$\bar{L}_C^{(\Phi)} = -d\bar{K}_C / dt = -d\bar{K}_C^{(r)} / dt.$$

Проекции $L_{Cx}^{(\Phi)}$, $L_{Cy}^{(\Phi)}$ на оси координат с началом в центре масс соответственно:

$$L_{Cx}^{(\Phi)} = -dK_{Cx}^{(r)} \neq 0;$$

$$L_{Cy}^{(\Phi)} = -dK_{Cy}^{(\Phi)} / dt \neq 0;$$

$$L_{Cz}^{(\Phi)} = -dK_{Cz}^{(r)} / dt = -J_{Cz} \mathbf{e},$$

где ось Cz перпендикулярна плоскости, параллельно которой совершают движение точки тела.

Моменты сил инерции $L_{Cx}^{(\Phi)}$ и $L_{Cy}^{(\Phi)}$ вычисляются так же, как и при вращении тела вокруг неподвижной оси. Они равны нулю, если ось Cz является главной осью инерции для точки C . Это, в частности, выполняется, если тело имеет плоскость симметрии, проходящую через центр масс и параллельную плоскости движения тела.

5.3 Динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси*

5.3.1 Формулы для реакций

Твердое тело, имеющее две закрепленные точки A и B , вращается вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через эти точки, под действием внешних приложенных сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \mathbf{K}, \bar{F}_N$ (рис. 5.3). Освободив тело от связей в точках A и B , приложим к телу силы реакций связей \bar{R}_A и \bar{R}_B , проекции которых на оси координат обозначим соответственно X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B . Эти силы тоже являются внешними силами для тела.

Приложив к точкам тела силы инерции, применим к телу следствия из принципа Даламбера для системы, считая, что тело разбито на N частиц (малых), принимаемых за точки. Для этого следует приравнять нулю главный вектор и главный момент всех внешних сил и сил инерции точек тела. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{\Phi} &= 0; \\
 \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) + \bar{M}_O(\bar{R}_A) + \bar{M}_O(\bar{R}_B) + \bar{L}_O^{(\Phi)} &= 0.
 \end{aligned} \right\}$$

(5.19)

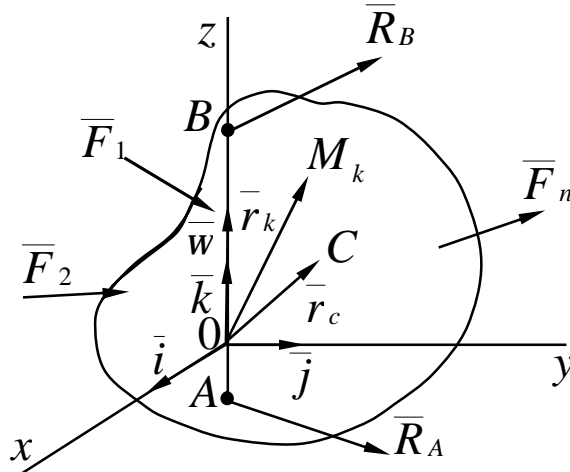


Рисунок 5.3

Для определения из уравнения (5.19) сил реакций \bar{R}_A и \bar{R}_B необходимо выразить главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}$ и главный момент этих сил $\bar{L}_O^{(\Phi)}$ через величины, характеризующие само тело и его вращение. Для главного вектора сил инерции используем выражение

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = \sum_{k=1}^N (-m_k \bar{a}_k) = -M \bar{a}_C, \quad (5.20)$$

где M — масса тела; \bar{a}_C — ускорение центра масс.

При вращении тела вокруг неподвижной оси ускорение любой точки тела вычисляется по формуле

$$\bar{a}_k = \bar{e} \times \bar{r}_k + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_k), \quad (5.21)$$

где \bar{r}_k — радиус-вектор рассматриваемой точки;

\bar{e} и \bar{w} — соответственно, векторы углового ускорения и угловой скорости тела, направленные по оси вращения.

Для центра масс в уравнении (5.21) вектор \bar{r}_k следует заменить радиус-вектором центра масс \bar{r}_C .

Векторное произведение двух векторов выражается определителем, в первой строке которого расположены единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, направленные вдоль осей координат, а в двух других строках — проекции на оси координат векторов сомножителей. Определитель можно разложить по элементам первой строки. Получим:

$$\bar{w} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & w \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \bar{i}(-wy_C) + \bar{j}wx_C + \bar{k}0,$$

так как $w_x = w_y = 0$ и $w_z = w$. Здесь x_C, y_C, z_C — координаты центра масс. Используя полученные величины для ускорения центра масс \bar{a}_C , имеем

$$\bar{a}_C = \bar{e} \times \bar{r}_C + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_C) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & e \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & w \\ -wy_C & wx_C & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-ey_C - w^2x_C) + \bar{j}(ex_C - w^2y_C) + \bar{k}0$$

так как $e_x = e_y = 0, e_z = e$.

Из уравнения (5.20), с учетом выражения (5.22), для проекций главного вектора сил инерции на оси координат получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= -Ma_{Cx} = My_C e + Mx_C w^2; \\ \Phi_y &= -Ma_{Cy} = Mx_C e + My_C w^2; \\ \Phi_z &= -Ma_{Cz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Формулы (5.23) можно применять не только для главного вектора

сил инерции, но и для силы инерции отдельной точки тела. Для этого следует массу тела M в них заменить массой точки m_k , а координаты x_C, y_C, z_C центра масс – координатами x_k, y_k, z_k точки. Так, для силы инерции k -й точки $\overline{\Phi}_k$, согласно уравнению (5.23), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{kx} &= -m_k a_{kx} = m_k y_k \mathbf{e} + m_k x_k \mathbf{w}^2; \\ \Phi_{ky} &= -m_k a_{ky} = m_k x_k \mathbf{e} + m_k y_k \mathbf{w}^2; \\ \Phi_{kz} &= -m_k a_{kz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Проекции главного момента сил инерции $\overline{L}_O^{(\Phi)}$ на оси координат вычисляем по формулам для моментов сил относительно этих осей. Используя уравнения (5.24) и вынося \mathbf{w} и \mathbf{e} за знаки сумм, получаем:

$$\begin{aligned} L_x^{(\Phi)} &= \sum_{k=1}^N (y_k \Phi_{kz} - z_k \Phi_{ky}) = \mathbf{e} \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k - \mathbf{w}^2 \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k = \mathbf{e} J_{xz} - \mathbf{w}^2 J_{yz}; \\ L_y^{(\Phi)} &= \sum_{k=1}^N (z_k \Phi_{kz} - x_k \Phi_{ky}) = \mathbf{e} \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k + \mathbf{w}^2 \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k = \mathbf{e} J_{yz} + \mathbf{w}^2 J_{xz}; \\ L_z^{(\Phi)} &= \sum_{k=1}^N (x_k \Phi_{kz} - y_k \Phi_{ky}) = -\mathbf{e} \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = -\mathbf{e} J_z, \end{aligned}$$

где $J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k$; $J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k$; $J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2)$ – центробежные и осевой моменты инерции. Получены формулы для вычисления проекций главного момента сил инерции $\overline{L}_O^{(\Phi)}$ на координатные оси:

$$L_x^{(\Phi)} = \mathbf{e} J_{xz} - \mathbf{w}^2 J_{yz}; L_y^{(\Phi)} = \mathbf{e} J_{yz} + \mathbf{w}^2 J_{xz}; L_z^{(\Phi)} = -\mathbf{e} J_z. \quad (5.25)$$

При выводе формул (5.23) и (5.25) для проекций главного вектора и главного момента сил инерции на оси координат не делалось никаких предположений относительно этих осей. Они могут быть как неподвижными осями, относительно которых рассматривается вращение тела, так и подвижными осями, скрепленными с вращающимся телом. Поэтому эти формулы можно применять как для неподвижных осей ко-

ординат, так и для осей координат, вращающихся вместе с телом.

Из уравнений (5.19) в проекциях на координатные оси, с учетом уравнений (5.23) и (5.25), получаем следующую систему уравнений для определения проекций полных реакций X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} + X_A + X_B + My_C \mathbf{e} + Mx_C w^2 &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} + Y_A + Y_B - Mx_C \mathbf{e} + My_C w^2 &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} + Z_A + Z_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) + Y_A h_A - Y_B h_B + \mathbf{e} J_{xz} - w^2 J_{yz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) + X_A h_A - X_B h_B + \mathbf{e} J_{yz} - w^2 J_{xz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k) - \mathbf{e} J_z &= 0, \end{aligned} \right\} (5.26)$$

так как

$$M_x(\bar{R}_A) + M_x(\bar{R}_B) = Y_A h_A - Y_B h_B; M_y(\bar{R}_A) + M_y(\bar{R}_B) = -X_A h_A + X_B h_B.$$

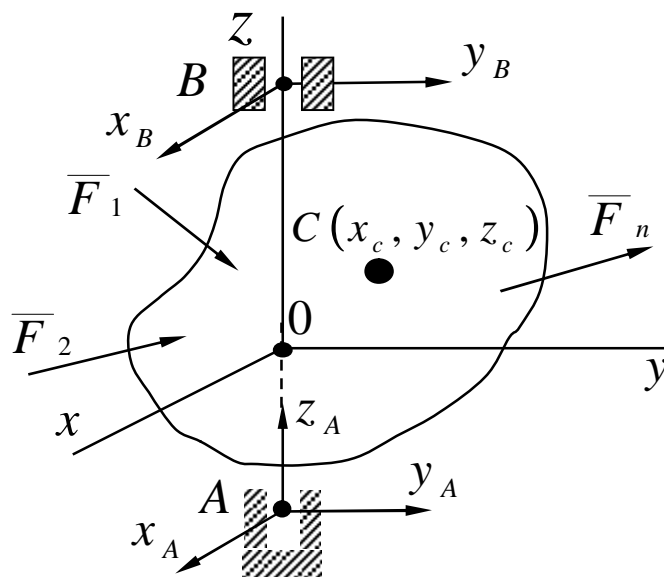
В последнее уравнение системы (5.26) не входят силы реакции закрепленных точек. Это уравнение является уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz . Из него по заданным силам определяется угловое ускорение \mathbf{e} , если известен момент инерции тела относительно оси вращения. По угловому ускорению интегрированием определяется угловая скорость, если известно ее значение в начальный момент. Для определения шести неизвестных проекций сил реакций остается пять уравнений. Система уравнений (5.26) не позволяет определить каждую из неизвестных Z_A и Z_B . Из третьего уравнения системы можно определить только сумму этих неизвестных. Для того чтобы из этой системы можно было определить все неизвестные, необходимо закрепить тело в точках A и B так, чтобы неизвестных проекций сил реак-

ций в них было не более пяти. Этого можно достигнуть, например, поместив в точке A подпятник, а в точке B – подшипник (рис.5.4). Для таких опор оси тела $Z_B = 0$ и все оставшиеся неизвестные могут быть определены из системы уравнений (5.4).

Разложим полные реакции \bar{R}_A и \bar{R}_B на статические и динамические составляющие:

$$\bar{R}_A = \bar{R}_A^{CT} + \bar{R}_A^D; \quad \bar{R}_B = \bar{R}_B^{CT} + \bar{R}_B^D.$$

Рисунок 5.4



Статическими реакциями \bar{R}_A^{CT} и \bar{R}_B^{CT} называют части полных реакций, которые статически уравновешивают приложенные внешние силы. Уравнения для их определения получим из первых пяти уравнений системы (5.26), положив в них $e = 0$ и $w = 0$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=1}^N F_{kx} + X_A^{CT} + X_B^{CT} &= 0; \\
\sum_{k=1}^N F_{ky} + Y_A^{CT} + Y_B^{CT} &= 0; \\
\sum_{k=1}^N F_{kz} + Z_A^{CT} &= 0; \\
\sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) + Y_A^{CT} h_A - Y_B^{CT} h_B &= 0; \\
\sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) + X_A^{CT} h_A - X_B^{CT} h_B &= 0.
\end{aligned} \right\} (5.27)$$

Это известные из статики уравнения равновесия для сил, приложенных к твердому телу, имеющему неподвижную ось вращения. Но под действием приложенных внешних сил тело может вращаться вокруг неподвижной оси Oz . От вращения у точек тела возникнут силы инерции. Части полных реакций \bar{R}_A^D и \bar{R}_B^D , которые уравновешивают силы инерции точек тела, называют **динамическими реакциями**.

Уравнения для определения динамических реакций получим из первых пяти уравнений системы (5.26), если учтем, что приложенные внешние силы уравновешены статическими реакциями. Получим:

$$\left. \begin{aligned}
X_A^D + X_B^D + M y_c e + M x_c w^2 &= 0; \\
Y_A^D + Y_B^D - M x_c e + M y_c w^2 &= 0; \\
Y_A^D h_A - Y_B^D h_B + e J_{xz} - w^2 J_{yz} &= 0; \\
- X_A^D h_A + X_B^D h_B + e J_{yz} + w^2 J_{xz} &= 0.
\end{aligned} \right\} (5.28)$$

Составляющих динамических реакций опор в направлении оси вращения Oz не возникает, так как у точек тела нет составляющих сил инерции в этом направлении. В неподвижных точках тела имеются только поперечные по отношению к оси вращения составляющие динамических реакций. Это справедливо при любом закреплении точек A и B , позволяющем телу вращаться вокруг оси, проходящей через эти

точки. Из системы уравнений (5.28) определяются все проекции динамических реакций на оси координат.

5.3.2 Статическая уравновешенность

Тело, имеющее неподвижную ось вращения, называют **статически уравновешенным**, если центр масс этого тела находится на оси вращения. Для статически уравновешенного тела с осью вращения Oz координаты центра масс тела $x_C = y_C = 0$. Из первых двух уравнений системы (5.28) в этом случае следует:

$$X_A^D + X_B^D = 0; \quad Y_A^D + Y_B^D = 0. \quad (5.29)$$

Динамические реакции для статически уравновешенного тела образуют пару сил. Пара сил может уравновешиваться только парой сил. Следовательно, силы инерции точек тела, уравновешивающие динамические реакции, в этом случае тоже приводятся к одной паре сил.

Используя уравнения (5.29), из двух последних уравнений системы (5.28) получим:

$$X_A^D = -X_B^D = \frac{eJ_{yz} + w^2 J_{xz}}{h_A + h_B}; \quad -Y_A^D = Y_B^D = \frac{eJ_{xz} - w^2 J_{yz}}{h_A + h_B}$$

и

$$R_A^D = R_B^D = \frac{1}{h_A + h_B} \sqrt{(e^2 + w^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}, \quad (5.30)$$

где $R_A^D = \sqrt{(X_A^D)^2 + (Y_A^D)^2}; R_B^D = \sqrt{(X_B^D)^2 + (Y_B^D)^2}$.

Из уравнения (5.30) следует, что динамические реакции зависят не только от углового ускорения, но и от угловой скорости, т.е. они возникают даже при вращении тела по инерции с постоянной угловой скоростью. Динамические реакции пропорциональны квадрату угловой скорости, как в частном случае статической уравновешенности, так и в общем случае, и при вращении тела с большой угловой скоростью могут достигать довольно значительных величин.

Формулы (5.23) и (5.25) справедливы как для неподвижных, так и для подвижных осей координат. Этим же свойством обладают и формулы (5.28). Поэтому динамические реакции, как в частном случае статиче-

ски уравновешенного тела, так и в общем случае, когда центр масс не находится на оси вращения, можно считать вращающимися вместе с подвижными осями координат, если угловая скорость постоянна. Опоры оси вращения тела будут испытывать действие циклически изменяющихся динамических давлений, что может привести к их усталостному разрушению или разрушению от вибраций, если собственная круговая частота мест их закрепления совпадает или близка к угловой скорости вращения тел

5.3.3 Динамическая уравновешенность

Динамической уравновешенностью называется случай обращения в нуль динамических реакций. Динамические реакции обратятся в нуль, как следует из уравнения (5.30), если равны нулю центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} , т.е. дополнительно к статической уравновешенности ось вращения Oz должна быть главной осью инерции для любой точки O этой оси. Так как центр масс в этом случае расположен на этой оси, то **ось вращения при динамической уравновешенности является главной центральной осью инерции**. При вращении тела вокруг главной центральной оси инерции динамические реакции обращаются в нуль. Следовательно, силы инерции точек тела, создающие динамические реакции, в этом случае образуют равновесную систему сил. Главный вектор и моменты сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ равны нулю. Момент сил инерции $L_z^{(\Phi)}$ при этом может быть отличным от нуля.

Главную центральную ось инерции называют **свободной** осью вращения – свободной от динамических реакций опор. При вращении тела вокруг свободной оси вращения могут возникнуть только статические реакции. Если тяжелое тело вращается по инерции с постоянной угловой скоростью вокруг свободной оси вращения, то статические реакции должны уравновесить только силу тяготения тела. При специальном дополнительном движении тела кроме вращения его вокруг оси с постоянной угловой скоростью может возникнуть положение, при котором силы инерции точек тела приведутся к равнодействующей силе, уравновешивающей силу тяготения. В этом случае статические реакции тоже обратятся в нуль, и подшипник и подпятник для крепления оси вращения окажутся ненужными. Такое положение имеет место при вращении земного шара вокруг оси и его дополнительном движении по орбите вокруг Солнца. То же имеет место для других планет Солнечной системы, а также при движении Луны вокруг Земли и при движении естественных и искусственных спутников планет.

Для того чтобы сделать ось вращения тела свободной осью враще-

ния, в технике осуществляют его балансировку на специальных балансировочных установках. При этом прибегают иногда к высверливанию в теле отверстий и при необходимости заполняют их более тяжелым металлом, например свинцом.

6 АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В аналитической механике изучаются равновесие и движение механических систем. При этом широко используется понятие возможного перемещения точки и системы. Наиболее удобная для применения форма условий равновесия и уравнений движения системы получается при применении обобщенных координат и обобщенных сил.

6.1 Связи и их классификация

В аналитической механике необходимо более подробно рассмотреть связи, налагаемые на точки механической системы. *Механической системой*, как известно, называют любую совокупность материальных точек. *Условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы, называются связями*. Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени различных порядков. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме:

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}; \dots; t) = 0. \quad (6.1)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением связей, в уравнения которых могут входить производные по времени от координат не выше первого порядка.

Для механической системы, состоящей из N точек, l уравнений связей представляется системой уравнений

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (6.2)$$

Считается, что индекс k принимает все или часть значений от 1 до N , как для координат, так и для их производных.

Если в уравнения связей (6.2) входят только координаты точек и не входят производные от координат, то связи называются *геометрическими*. Уравнение геометрической связи для системы имеет форму:

$$f(x_k; y_k, z_k, t) = 0.$$

Если в уравнения связей кроме координат входят еще и их производные по времени (проекции скоростей точек на оси координат) или только одни производные, кроме времени, то связи называются **кинематическими**. В этом случае уравнения связей являются дифференциальными уравнениями для координат точек. Из геометрических связей дифференцированием можно получить связи кинематические. Из кинематических связей геометрические получаются не всегда, так как дифференциальные уравнения не всегда, могут быть проинтегрированы. Иногда дифференциальное уравнение связи можно представить как производную по времени от некоторой функции координат и, возможно, времени

$$\frac{d}{dt}j(x_k, y_k, z_k, t) = 0.$$

После интегрирования такая кинематическая связь становится геометрической.

Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называются **голономными**. Неинтегрируемые кинематические связи, которые нельзя свести к геометрическим, являются **неголономными**. Важный класс механических систем с неголономными связями (неголономных систем) интенсивно исследуется в настоящее время, и эти исследования еще далеки от завершения. В дальнейшем изложении систематически системы с такими связями не рассматриваются. При движении механической системы координаты точек и их производные по времени, входящие в уравнения связей, могут зависеть от времени. Кроме того, в уравнения связей время может входить явно, помимо координат и их производных. Связи, в уравнения которых время явно не входит, называются **стационарными**, или **склерономными**. Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется **нестационарной**, или **реономной**. Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. В простейшем случае одной точки нестационарная геометрическая связь в форме движущейся или деформируемой поверхности имеет уравнение

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Связи называют **неосвобождающими** или **двусторонними**, если они выражаются математически уравнениями, и **освобождающими** или **односторонними**, если они выражаются неравенствами. Для одной точки М, скрепленной с концом жесткого стержня, другой конец которого закреплен в неподвижной точке О, связь (жесткий стержень) является геометрической, неосвобождающей (рис. 6.1). Её уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

где l - длина стержня.

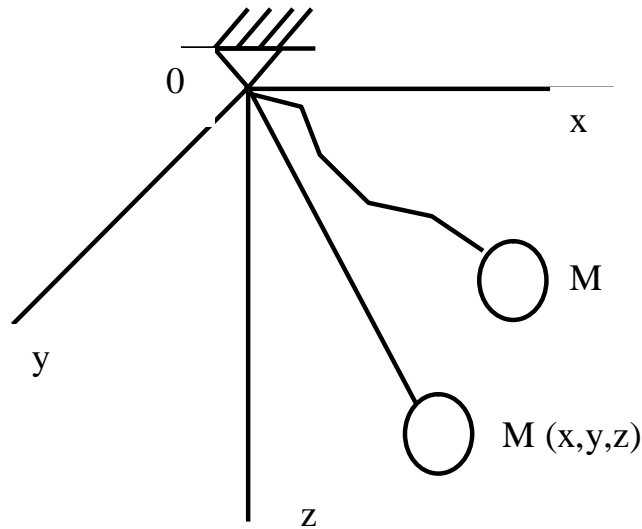


Рисунок 6.1

Если стержень заменить нитью такой же длины, то связь (нить) будет освобождающей. Она математически выражается неравенством $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$. Если при движении точка M окажется от точки O на расстоянии, меньшем длины нити, то нить уже не стесняет свободу перемещения точки. Связь освобождает точку от своего действия (пунктир на рис. 6.1). В дальнейшем освобождающие связи рассматривать не будем.

Все связи можно разделить на реальные и идеальные. К идеальным связям относятся все связи без трения. Некоторые связи с трением тоже относятся к идеальным. Понятие идеальных связей дается после введения понятия возможного перемещения системы.

6.2 Возможные перемещения

Для формулирования принципа возможных перемещений, определяющего условия равновесия механической системы, требуется ввести понятие возможного, или виртуального, перемещения. *Для одной точки возможным перемещением называется такое бесконечно малое (элементарное) мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями.* Для возможного перемещения не требуется времени на его совершение. Это мысленное перемещение, которое могла бы совершить точ-

ка при наложенных на нее связях в рассматриваемый момент времени. В отличие от элементарного (бесконечно малого) действительного перемещения точки $d\bar{r}$, которое совершает точка за время dt под действием приложенных сил при заданных начальных условиях и наложенных связях, возможное перемещение $d\bar{r}$ определяется только связями в данный момент. Проекции возможного перемещения $d\bar{r}$ на оси координат, или вариации координат, обозначают dx, dy, dz , а проекции элементарного действительного перемещения на оси координат, или дифференциалы координат при изменении времени на dt , обозначают dx, dy, dz .

Если связью для точки является, например, движущаяся поверхность, уравнение которой $f(x, y, z, t) = 0$, то действительное перемещение точки $d\bar{r}$ за время dt является в общем случае векторной суммой перемещений по поверхности и вместе с поверхностью. Все возможные перемещения точки $d\bar{r}$ в данный момент времени t расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах, которое точка может совершить от момента времени t до момента $t + dt$, только одно. Возможных перемещений у точки в момент времени t бесконечно много. Все они допускаются связью (поверхностью) и как отрезки бесконечно малой длины расположатся в касательной плоскости к поверхности в точке, в которой находится рассматриваемая точка в данный момент времени

Возможное перемещение $d\bar{r}$, как и действительное $d\bar{r}$, является вектором и потому всегда изображается направленным прямолинейным отрезком. Очевидно, **что элементарное действительное перемещение точки принадлежит к числу возможных, если связь стационарна**, т.е. действительное перемещение не содержит перемещения вместе со связью.

Возможное перемещение точки $d\bar{r}$ считают **изохронной вариацией** радиус-вектора, т.е. его полным дифференциалом, но при фиксированном времени, когда изменяются (варьируются) только координаты точки. Соответственно dx, dy, dz - **изохронные вариации координат** точки, допускаемые связями. Действительное перемещение $d\bar{r}$ является полным дифференциалом радиус-вектора, который определяется по изменению координат точки в зависимости от изменения времени;

dx, dy, dz - полные дифференциалы координат точки при изменении независимого переменного t на величину dt .

Возможным перемещением системы называют любую совокупность возможных перемещений точек системы. В общем случае система может иметь несколько и даже бесконечно много возможных перемещений. Вследствие уравнений связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми. **Число независимых возможных перемещений называют числом степеней свободы системы.**

Свободная точка имеет три степени свободы. В этом случае возможные перемещения (вариации) dx, dy, dz (или выраженные через вариации каких-либо других координат) являются независимыми. Если точка движется по поверхности $f(x, y, z, t) = 0$, то dx, dy, dz связаны соотношением

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \quad (6.3)$$

которое получают разложением в степенной ряд функции $f(x + dx, y + dy, z + dz, t) = 0$ при пренебрежении слагаемыми второго и более высокого порядка по отношению к dx, dy, dz . Независимых вариаций координат, а, следовательно, и степеней свободы, будет две. Время при этом не варьируется, оно фиксировано. Связь между вариациями координат не зависит от того, входит время явно в уравнения связей или нет. Проекция на оси координат действительного перемещения точки dx, dy, dz связаны зависимостью

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (6.4)$$

которая тоже получается разложением в степенной ряд функции $f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0$ и отбрасыванием слагаемых второй и более высоких степеней величин dx, dy, dz, dt . Если точка движется по кривой линии, то степень свободы у нее будет только одна, так как кривую линию можно представить как пересечение двух поверхностей.

6.3 Элементарная работа силы на возможном перемещении.

Идеальные связи

Элементарную работу силы на возможном перемещении ее точки приложения вычисляют по обычным формулам для элементарной работы, например, $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, и другим формулам для элементарной работы. Для механической системы, состоящей из N точек, к которым приложены силы, элементарная работа этих сил на каком-либо возможном перемещении системы, соответственно, выразится так:

$$dA = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k. \quad (6.5)$$

Элементарная работа сил при этом зависит от выбора возможного перемещения системы.

Обозначим силы реакций связей для точек системы \overline{R}_k . Тогда *связи системы называются идеальными, если для любого возможного перемещения системы выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^N \overline{R}_k \cdot d\overline{r}_k. \quad (6.6)$$

Условие (6.6) является **определением идеальных связей**. Важно отметить, что это условие должно выполняться для всех возможных перемещений системы. При этом вся совокупность связей является идеальной. Может быть идеальной каждая из связей в отдельности. Приведем примеры идеальных связей.

1 В абсолютно твердом теле точки связаны идеальными связями. Силами реакций связей в этом случае являются внутренние силы, для которых было доказано, что сумма элементарных работ этих сил на любых элементарных перемещениях точек тела равна нулю.

2 Абсолютно гладкая поверхность или абсолютно гладкая линия являются идеальной связью для точки. Возможные перемещения точки с такими связями направлены по касательным к поверхности или линии. Силы реакций в этих случаях направлены по нормальям к ним, т.е. перпендикулярны силам. Так, например, все шарниры (поверхности) без трения, подвижные и неподвижные, являются связями, идеальными для тел, соединенных такими связями. Шарниры без трения, как связи идеальные, эквивалентны связям между точками в твердом теле.

3 Гибкие нерастяжимые связи типа нитей, канатов, тросов и т.п., соединяющих точки системы, являются связями идеальными. В каждом сечении такой связи силы реакций (силы натяжения) равны по модулю и противоположны по направлению, а возможные перемещения у их точек приложения одни и те же. Сумма элементарных работ сил натяжений для всех мыслимых сечений таких связей равна нулю.

4 Закрепленные точки системы по отдельности являются связями идеальными, так как их возможные перемещения равны нулю.

5 Шероховатая поверхность для катков, катящихся по ней без скольжения, при отсутствии трения качения является связью идеальной. Возможные перемещения в точке или в точках линии соприкосновения равны нулю в каждый момент времени, так как равны нулю скорости в точках соприкосновения, как и для закрепленных точек.

6.4 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений, или принцип Лагранжа, содержит необходимые и достаточные условия равновесия некоторых механических систем. Он формулируется следующим образом: *для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю*, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = 0 \quad (6.7)$$

где \overline{F}_k — активная сила, приложенная к k-й точке системы;

\overline{r}_k — радиус-вектор этой точки (рис. 6.2).

Докажем необходимость условия (6.7) для равновесия системы, т.е. докажем, что *если система находится в равновесии, то активные силы удовлетворяют условию (6.7)*. Действительно, если механическая система находится в равновесии, то для каждой ее точки активная сила \overline{F}_k и сила реакции связей \overline{R}_k удовлетворяют условию равновесия статики для сил, приложенных к точке:

$$\sum_{k=1}^N \overline{R}_k \cdot d\overline{r}_k + \sum_{k=1}^N \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = 0$$

По условию идеальности связей, $\sum_{k=1}^N \overline{R}_k \cdot d\overline{r}_k = 0$, и для активных сил получаем условие (6.7).

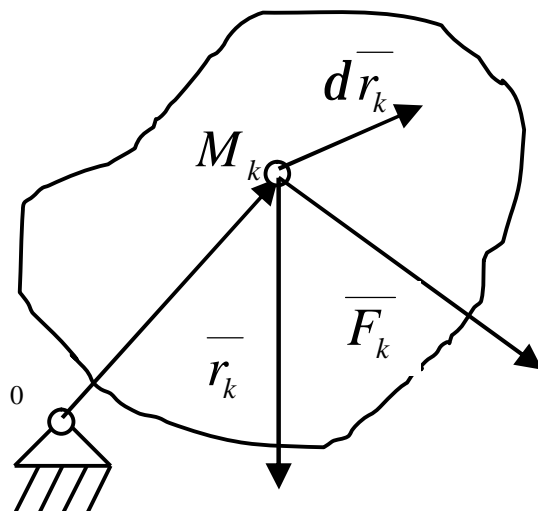


Рисунок 6.2

Докажем достаточность условия (6.7) для равновесия системы, т. е. что *если это условие выполняется для активных сил, действующих на точки системы, то система находится в равновесии при выполнении других условий принципа возможных перемещений*. Теорема о достаточности условия (6.7) для равновесия системы доказывается методом от противного. Предполагается, что условие (6.7) и все остальные условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. Если теорема о достаточности справедлива, то должно возникнуть противоречие с условиями теоремы. Итак, пусть все условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. При этом, по крайней мере, для одной точки системы не будет выполняться условие равновесия для сил, т. е.

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k \neq 0. \quad (6.8)$$

Дадим системе возможное перемещение. Так как связи стационарные, то элементарное действительное перемещение для каждой точки системы под действием не равной нулю равнодействующей силы принадлежит к числу возможных перемещений. и их совокупность можно выбрать в качестве возможного перемещения системы. Скорости точек системы в рассматриваемый момент времени по условию равны нулю; следовательно, элементарные действительные перемещения будут на-

правлены по ускорениям точек, т.е. по равнодействующим силам. Умножая уравнение (6.8) скалярно на $\overline{dr_k} = \overline{dr_k}$, получим

$$(\overline{F_k} + \overline{R_k}) \cdot \overline{dr_k} > 0, \quad (6.9)$$

по крайней мере, для одной точки системы, вышедшей из равновесия.

Суммируя уравнение (6.9) по всем точкам системы, будем иметь

$$\sum_{k=1}^N \overline{F_k} \cdot \overline{dr_k} + \sum_{k=1}^N \overline{R_k} \cdot \overline{dr_k} > 0. \quad (6.9a)$$

Для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^N \overline{R_k} \cdot \overline{dr_k} = 0.$$

Поэтому из уравнения (6.9a) получаем

$$\sum_{k=1}^N \overline{F_k} \cdot \overline{dr_k} > 0.$$

что находится в противоречии с условием (6.7). Следовательно, система не может выйти из равновесия при выполнении условий принципа возможных перемещений. Принцип полностью доказан.

Без дополнительного условия о равенстве нулю скоростей точек системы в рассматриваемый момент принцип возможных перемещений утверждает только то, что равны нулю ускорения точек системы. Вместе с равенством нулю скоростей точек это дает равновесие системы в тот момент, в который выполняется для активных сил условие (6.7). При длительном выполнении этого условия система, соответственно, будет находиться в равновесии тоже длительно, т.е. скорости и ускорения точек равны нулю, если скорости точек системы равны нулю в начале интервала длительности.

В принцип возможных перемещений не входят силы реакций связей. Но его можно применять также и для определения неизвестных сил реакций связей. Для этого связь, силы реакции которой необходимо определить, отбрасывают (освобождают систему от этой связи), заменяя ее силами реакции. Эти силы добавляются к активным силам. Оставшиеся связи системы должны быть идеальными. Иногда неидеальную связь заменяют идеальной, компенсируя неидеальность соответствующими силами. Так, если связью для тела является шероховатая поверхность,

то ее можно заменить гладкой поверхностью, добавляя к активным силам силу трения скольжения и в более общем случае – еще и пару сил, препятствующую качению. Связь в виде заделки для твердого тела можно заменить неподвижным шарниром, плоским или шаровым соответственно, добавляя момент заделки, векторный или алгебраический. Таким образом, в принцип возможных перемещений входят в действительности не активные силы, а все приложенные к точкам системы силы, кроме сил реакций идеальных связей, которые по условиям задач не требуется определять.

Пример 1. В механизме (рис. 6.3) кривошип OA может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . По стержню OA может перемещаться ползун B , шарнирно соединенный со стержнем BC , который может скользить вдоль вертикальных направляющих. К кривошипу OA приложена пара сил с моментом M ; $OD = l$.

Определить при равновесии механизма вертикальную силу \bar{F} , приложенную к стержню BC в зависимости от угла j . Силами трения и тяжести звеньев механизма пренебречь.

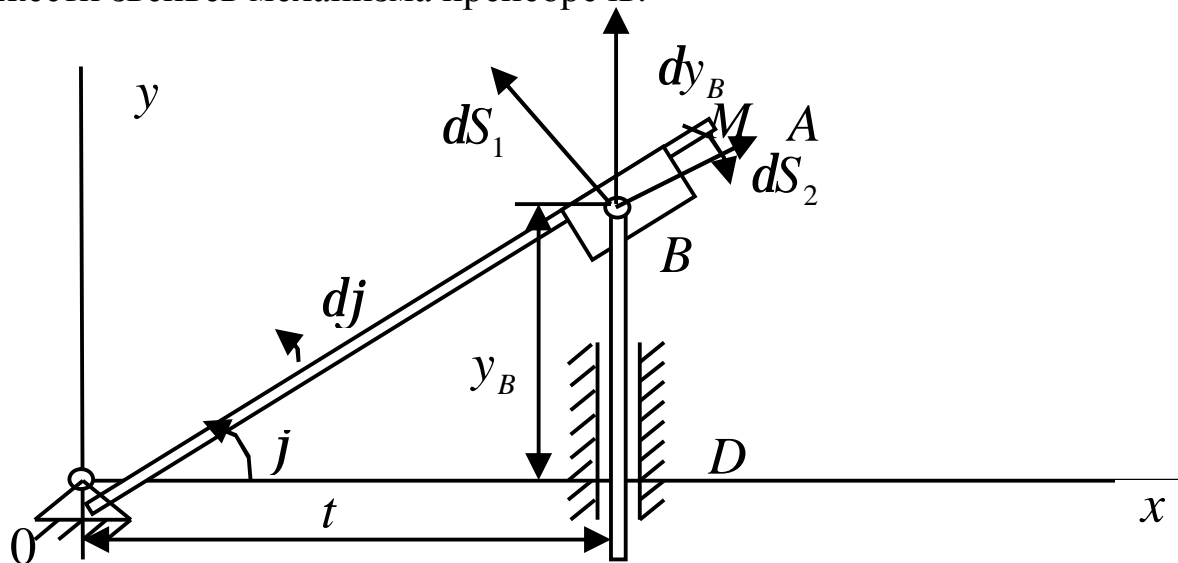


Рисунок 6.3

Решение. Связи в механизме стационарные и неосвобождающие. Они не имеют трения, а потому идеальные. Применим к механизму принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k = 0$$

Активными силами являются пара сил с моментом M и сила \overline{F} . Дадим системе возможное перемещение, повернув мысленно стержень OA на элементарный угол dj в сторону возрастания угла j . Тогда, согласно принципу возможных перемещений,

$$-Mdj + Fdy_c = 0 \quad (a)$$

где dy_c – возможное перемещение точки C . Стержень BC твердый, поэтому перемещения его концов B и C равны, т.е. $dy_c = dy_B$.

У механизма только одна степень свободы, следовательно, dj и dy_B зависят друг от друга. Установим предварительно зависимость y_B от j . Имеем $y_B = l \operatorname{tg} j$. Путем варьирования этого уравнения связи, аналогичного вычислению полного дифференциала от обеих частей уравнения, получим

$$dy_B = l \frac{1}{\cos^2 j} dj .$$

Подставляя полученное значение dy_B в уравнение (a) и вынося dj за скобки, имеем

$$dj \left(-M + \frac{Fl}{\cos^2 j} \right) = 0 .$$

Величину dj можно выбрать отличной от нуля, а потому равно 0 выражение в скобках, т.е.:

$$-M + \frac{Fl}{\cos^2 j} = 0; F = M \cos^2 j / l$$

Дополнительно установим зависимость между dj и dy_B непосредственно, не используя процесс варьирования уравнения связи. При повороте стержня OA на угол dj точка B переместится вместе с соответствующей точкой стержня перпендикулярно стержню на $ds_1 = OBdj$, и, кроме того, ползун B передвинется вдоль стержня на ds_2 , для того, чтобы точка B переместилась только по вертикали на dy_B , так как другие направления перемещения точки B не разрешаются вертикальными направляющими стержня BC . Вектор возможного пе-

перемещения точки B изобразится диагональю прямоугольника, построенного на составляющих перемещениях. Из прямоугольника для его диагонали имеем

$$dy_B = ds_1 / \cos j, \text{ или } dy_B = \frac{OB}{\cos j} dj = \frac{l}{\cos^2 j} dj,$$

так как

$$OB = l / \cos j.$$

Пример 2. Стержневая система (рис 6.4), расположенная в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием двух пар сил с моментами M_1 и M_2 . Стержни AC и BD параллельны. Стержень BC составляет с ними угол α .

Пренебрегая силами тяжести стержней и трением в шарнирах, определить реакции в заделке и усилие в стержне BD ,

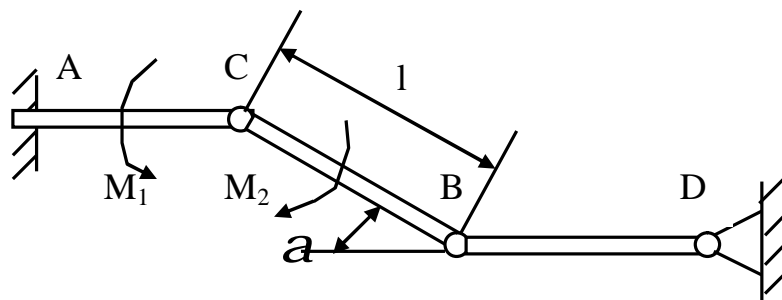


Рисунок 6.4

Решение. Освободим систему стержней от заделки, приложив силы X_a , Y_a и момент в заделке M_a (рис. 6.5). Оставшиеся связи являются идеальными, если в них не возникает сил трения.

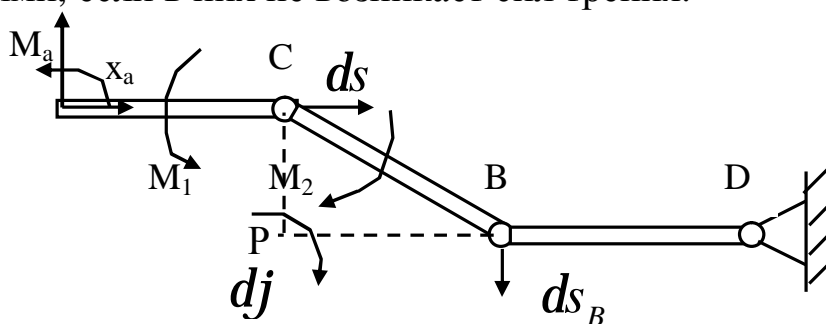


Рисунок 6.5

Дадим стержню AC возможное перемещение ds , допускаемое оставшимися связями, в направлении оси Ax . Точка B может иметь перемещение ds_B , перпендикулярное только BD .

Для возможных перемещений точек твердого тела, аналогично мгновенному центру скоростей при плоском движении, можно построить мгновенный центр перемещений. Для установления связи между возможными перемещениями точек твердого тела можно использовать и другие положения о связи скоростей точек твердого тела при плоском движении и в других случаях движения. Мгновенный центр перемещений стержня ВС находится на перпендикулярах возможным перемещениям точек В и С. Вокруг Р стержень ВС повернется угол dj , который определяется отношением перемещения ds к расстоянию CP, т. е.

$$dj = \frac{ds}{CP} = \frac{ds}{l_2 \sin a} . \quad (б)$$

Из принципа возможных перемещений имеем

$$X_A ds + M_2 dj = 0 . \quad (с)$$

Моменты пары сил M_2 и угол dj_2 имеют одинаковые направления – по часовой стрелке, поэтому элементарная работа пары сил является положительной. Подставляя (б) в (с), получаем

$$X_A = - \frac{M_2}{l_2 \sin a} .$$

Для определения M_A дадим системе возможное перемещение, повернув стержень AC вокруг точки A на угол dj_1 (рис. 6.6). Из принципа возможных перемещений в этом случае имеем

$$M_A dj_1 + M_1 dj_1 = 0 .$$

Следовательно, $M_A = - M_1$.

Чтобы определить Y_A (рис.6.7), дадим стержню AC возможное перемещение, повернув его на угол dj_2 вокруг точки С. Получим

$$M_1 dj_2 - Y_A l dj_2 + M_A dj_1 = 0 ,$$

$$Y_A = 0 .$$

Для определения усилия в стержне BD отбросим этот стержень, заменив действие силой \bar{S} , направленной по стержню, сохранив заделку (рис. 6.8).

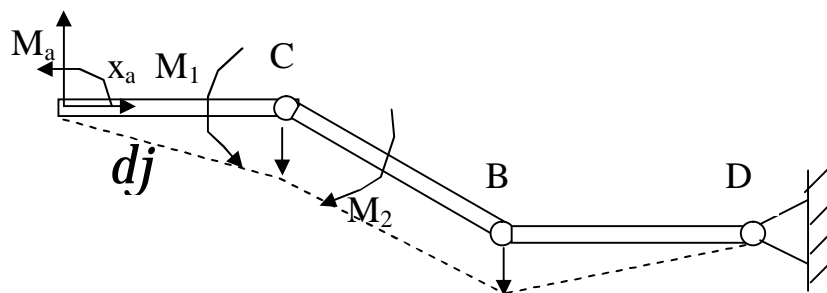


Рисунок 6.6

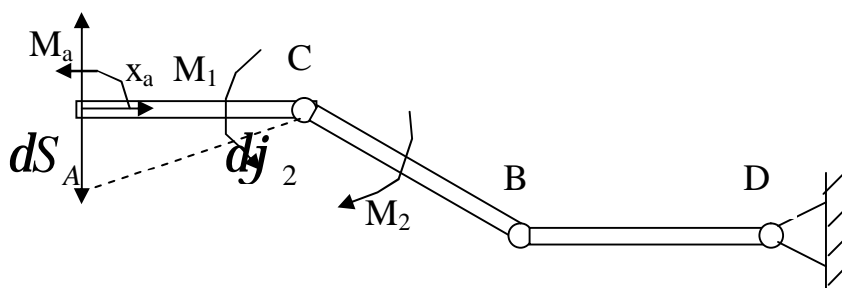


Рисунок 6.7

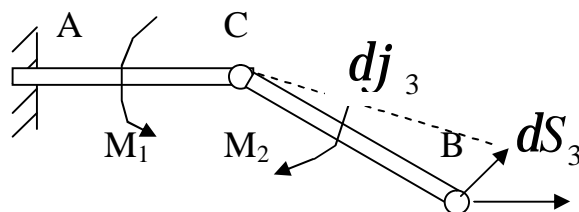


Рисунок 6.8

В этом случае связи допускают поворот стержня BC на угол dj_3 . Точка B при этом переместится на dS_B . Проекция перемещения на направление силы S при этом равна $dS_B \sin a = l_2 dj_3 \sin a$. Составляя сумму элементарных работ

на этом возможном перемещении и приравнивая ее нулю, согласно принципу возможных перемещений имеем

$$M_2 dj_3 + S ds_B \sin a = 0,$$

откуда получаем

$$S = \frac{M_2}{l_2 \sin a}.$$

6.5 Обобщенные координаты системы

Пусть система состоит из N точек, и, следовательно, ее положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например декартовыми x_k, y_k, z_k . Предположим, что на систему наложены голономные связи, уравнения которых в общем случае могут содержать и производные от координат точек, но после их интегрирования они свелись к геометрическим и имеют форму

$$f_s(x_x, y_x, z_x) = 0; s = 1, 2, \dots, l. \quad (6.10)$$

Освобождающие связи, выражающиеся неравенствами, не рассматриваются. Таким образом, $3N$ координат связаны l уравнениями, и независимых координат будет $n = 3N - l$.

Любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга. Остальные координаты определяются из уравнений связей. Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры q_1, q_2, \dots, q_n , зависящие от всех или части декартовых координат точек системы. Эти *независимые параметры, определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами системы*. В общем случае они могут зависеть от всех декартовых координат точек системы, т. е.

$$q_i = q_i(x_k, y_k, z_k), \quad (6.11)$$

где k изменяется от 1 до N . Задание обобщенных координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчета, например декартовых осей координат.

У свободной точки три обобщенные координаты. Если точка должна двигаться по заданной поверхности, то обобщенных координат только две, и т. д. Используя уравнения связей (6.10) и выражения обобщен-

ных координат через декартовы (6.11), можно при выполнении условий разрешимости этой системы уравнений выразить декартовы координаты через обобщенные, т.е. получить

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t); y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t); z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Соответственно, для радиус-вектора каждой точки системы

$$\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k}$$

получим

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (6.12)$$

В случае стационарных связей время явно не входит в уравнения связей. Поэтому и в уравнение (6.12) оно войдет только неявно, через обобщенные координаты, если система движется. Для голономных систем вектор возможного перемещения точки $d\bar{r}_k$, в соответствии с уравнением (6.12), можно выразить в форме

$$d\bar{r}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dq_1} dq_1 + \frac{d\bar{r}_k}{dq_2} dq_2 + \dots + \frac{d\bar{r}_k}{dq_n} dq_n = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} dq_i \quad (6.13)$$

Система, имеющая n независимых обобщенных координат, характеризуется также n независимыми возможными перемещениями, или вариациями, dq_1, dq_2, \dots, dq_n , если связи голономны. Для голономных систем число независимых возможных перемещений совпадает с числом независимых обобщенных координат. Следовательно, **число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы**, т.е. $n = 3N - 1$.

Для неголономных систем в уравнения связей (6.10) могут входить производные от декартовых координат точек, и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат ограничения на вариации dq_1, dq_2, \dots, dq_n и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не связывая функциональной зависимостью сами обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n голономных систем. В общем случае число независимых вариаций (возможных перемещений) меньше числа обобщенных координат. **Число степеней свободы неголономной системы, равно числу**

независимых возможных перемещений, тоже меньше числа обобщенных координат системы.

В дальнейшем рассматриваются только голономные системы, т. е. системы с голономными связями. Рассмотрим вопрос обобщенных координат на примере простого механизма (рис. 6.9)

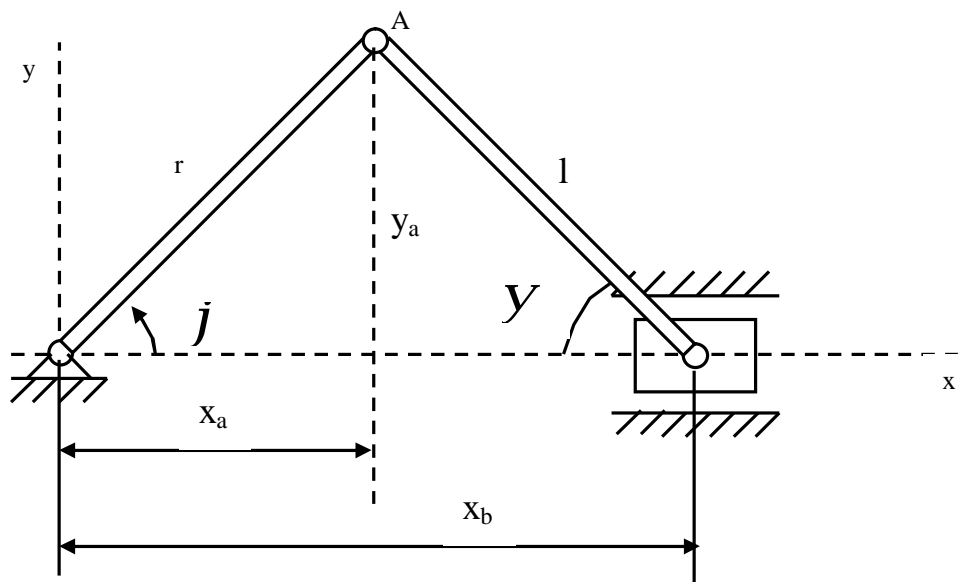


Рисунок 6.9

Пусть имеем кривошипно-шатунный механизм (см. рис. 6.9). Его положение на плоскости вполне определяется заданием положения трех его точек O , A и B с координатами, соответственно, $(0, 0)$, (x_A, y_A) , $(x_B, 0)$. Координат, не равных нулю, только 3, т.е. $3N = 3$. Можно составить два уравнения связей, учитывая постоянство длин $OA = r$ и $AB = l$. Имеем

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2. \quad (a)$$

Число степеней свободы $n = 3N - 1 = 3 - 2 = 1$.

Из трех не равных нулю координат только одну можно задать независимо. Две другие выразятся через нее как решения уравнений связей. В качестве независимой координаты можно выбрать любую из трех координат x_A , y_A , x_B или любую комбинацию этих координат. Нужно только, чтобы она однозначно определяла положение механизма относительно осей координат Oxy . Координаты x_A и x_B следует исключить. Они неоднозначно определяют положение механизма. Удобно в качестве независимой обобщенной координаты q выбрать угол j , т. е.

$$q = j = \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A} . \quad (6)$$

Из уравнений (а) и (б) координаты x_A, y_A, x_B можно выразить через угол j . Для этого следует решить эту систему уравнений относительно координат. Удобно, не решая системы уравнений, выразить координаты через угол j , используя рис. 6.9. Получим

$$x_A = r \cos j ; y_A = r \sin j ; x_B = r \cos j + r \sin j ;$$

Но

$$y_A = r \sin j = l \sin y ; \sin y = \frac{r}{l} \sin j$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 j} .$$

С учетом этого искомые выражения для координат принимают форму

$$x_A = r \cos j ; y_A = r \sin j ; x_B = r \cos j + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 j} .$$

Нетрудно проверить, что эти значения декартовых координат удовлетворяют системе уравнений (а) и (б).

6.6 Обобщенные силы

6.6.1 Определение обобщенных сил

Имеем сумму элементарных работ сил, действующих на точки системы, на возможном перемещении системы:

$$dA = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k . \quad (6.14)$$

Пусть голономная система имеет n степеней свободы, и, следовательно, ее положение в пространстве определяется n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n . Тогда для $d\bar{r}_k$, согласно уравнению (6.13), имеем

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} \quad (6.13a)$$

Подставляя (6.13a) в (6.14) и изменяя порядок суммирования по индексам k и i , получим

$$dA = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} \right) dq_i = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i , \quad (6.14a)$$

где скалярная величина

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i}$$

называется обобщенной силой, отнесенной к обобщенной координате q_i . Используя известное выражение для скалярного произведения двух векторов, обобщенную силу можно также представить в виде

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{dx_k}{dq_i} + F_{ky} \frac{dy_k}{dq_i} + F_{kz} \frac{dz_k}{dq_i} \right) \quad (6.15)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы на оси координат;

x_k, y_k, z_k – координаты точки приложения силы \bar{F}_k .

Размерность обобщенных сил. Размерность обобщенной силы, в соответствии с (6.14а), следующим образом зависит от размерности $d q_i$, совпадающей с размерностью q_i :

$$[Q_i] = \frac{[dA]}{[dq_i]} = \frac{[A]}{[q_i]} \quad (6.16)$$

т. е. размерность обобщенной силы равна размерности работы силы (энергии) или момента силы, деленной на размерность обобщенной координаты, к которой отнесена обобщенная сила. Если $[q_i]$ – длина, то

$$[Q_i] = \frac{\text{работа}}{\text{длина}} = \frac{\text{сила} \cdot \text{длина}}{\text{длина}} = \text{сила} ,$$

т. е. обобщенная сила имеет размерность силы. В том случае, когда $[q_i] = 1$, как это имеет место, если в качестве обобщенной координаты выбран угол, $[Q_i]$ – момент силы.

Этот случай часто встречается в приложениях.

6.6.2 Вычисление обобщенных сил

1 Обобщенную силу можно вычислить по формуле (6.15), ее определяющей, т. е.

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \frac{dx_k}{dq_i} + F_{ky} \frac{dy_k}{dq_i} + F_{kz} \frac{dz_k}{dq_i}).$$

2 Обобщенные силы можно вычислять как коэффициенты при соответствующих вариациях обобщенных координат в выражении для элементарной работы (6.14а), т. е.

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_n dq_n. \quad (6.15a)$$

3 Наиболее целесообразен способ вычисления обобщенных сил, который получается из уравнения (6.15а), если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменится только одна обобщенная координата, а другие при этом не изменяются. Так, если $dq_1 \neq 0$, а остальные $dq_2 = dq_3 = \dots = dq_n = 0$, то из уравнения (6.15а) имеем

$$Q_1 = \frac{(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k) q_1}{dq_1}.$$

Индекс q_1 указывает, что сумма элементарных работ вычисляется на возможном перемещении, при котором изменяется (варьируется) только координата q_1 . Если изменяющейся координатой является q_i , то

$$Q_1 = \frac{(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k) q_i}{dq_i}. \quad (6.17)$$

4 Для потенциальных сил по их определению имеем:

$$F_{kx} = \partial U / \partial x_k; F_{ky} = \partial U / \partial y_k; F_{kz} = \partial U / \partial z_k; \quad (6.18)$$

где U — силовая функция, зависящая от координат точек системы и, следовательно, через них — от обобщенных координат, т. е.

$$U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2 \dots q_n). \quad (6.19)$$

В случае нестационарных силовых полей, которые дальше не рассматриваются, силовая функция может еще явно зависеть от времени.

Для обобщенной силы, согласно ее определению, с учетом уравнений (6.18) и (6.19), имеем

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \frac{dx_k}{dq_i} + F_{ky} \frac{dy_k}{dq_i} + F_{kz} \frac{dz_k}{dq_i}) = \\ &= \sum_{k=1}^N (\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}) = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае существования силовой функции

$$Q_i = \partial U / \partial q_i = -\partial \Pi / \partial q_i, \quad (6.20)$$

так как потенциальная энергия системы Π связана с силовой функцией U соотношением

$$\Pi = -U + const.$$

Итак, *обобщенная сила равна частной производной от силовой функции по соответствующей обобщенной координате.*

6.7 Условия равновесия системы

Условия равновесия системы выводятся из принципа возможных перемещений. Они применимы к системам, для которых этот принцип справедлив. Согласно принципу возможных перемещений, условие

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k = 0$$

является необходимым и достаточным для равновесия системы. Но, в соответствии с уравнением (6.15а),

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_n dq_n.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием равновесия является равенство

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_n dq_n. \quad (6.21)$$

Так как обобщенные координаты независимы, то их вариации q_1, q_2, \dots, q_n являются тоже независимыми, произвольными, бесконечно малыми величинами. Можно принять $dq_1 \neq 0$, а все остальные – $dq_2 = dq_3 = \dots = dq_n = 0$. Тогда из уравнения (6.21) получим $Q_1 = 0$. Аналогично, приняв $dq_2 \neq 0$, а $dq_1 = dq_3 = \dots = dq_n = 0$, будем иметь $Q_2 = 0$ и т.д. Таким образом, из уравнения (6.21) получаем следующие условия равновесия системы:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = 0, \quad (6.22)$$

т.е. для равновесия механической системы, подчиненной голономным, стационарным, идеальным и неосвобождающим связям, в момент, когда скорости всех точек системы равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.

О голономности связей условились при введении обобщенных координат и обобщенных сил, а также при определении числа степеней свободы. Другие условия для связей входят в формулировку самого принципа возможных перемещений.

В статике для равновесия свободного твердого тела, имеющего шесть степеней свободы, было получено шесть условий равновесия для приложенных к телу сил. Эти условия можно получить также, приравняв нулю каждую из шести обобщенных сил. Для этого следует выбрать в качестве обобщенных координат декартовы координаты x , y , z какой-либо точки тела и углы поворота тела вокруг осей координат, проходящих через эту точку. Обобщенные силы, отнесенные к координатам x , y , z , превратятся, соответственно, в суммы проекций приложенных сил на эти оси, а обобщенные силы, отнесенные к углам поворота вокруг осей координат, — в суммы моментов сил относительно этих осей.

Условия равновесия (6.22) для системы, находящейся под действием потенциальных сил, вместе с уравнением (6.20) дадут следующие условия для силовой функции:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial U / \partial q_1 = 0, \\ Q_2 &= \partial U / \partial q_2 = 0, \\ Q_n &= \partial U / \partial q_n = 0, \end{aligned} \quad (6.22a)$$

т. е. все частные производные от силовой функции по обобщенным координатам равны нулю. Это является **необходимым условием существования экстремума силовой функции**. Таким образом, при равновесии механической системы, находящейся под действием потенциальных сил, силовая функция и потенциальная энергия могут достигать экстремума.

Пример. Дифференциальный планетарный механизм состоит из двух шестерен радиусами r_1 и r_2 и кривошипа OA (рис. 6.10). К криво-

шпицу приложена пара сил с моментом M , а к шестерням 1 и 2 — пары сил с моментами M_1 и M_2 . Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить моменты пар сил M и M_1 которые следует приложить к шестерне 1 и кривошипу OA для равновесия механизма. Трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Связи системы, осуществляемые твердыми телами и подвижным (точка А) и неподвижным (точка О) шарнирами без трения, являются идеальными, голономными, стационарными и неосвобождающими. Система имеет две степени свободы. Действительно, можно закрепить шестерню 2, тогда кривошип OA и шестерня 1 сохранят еще возможность вполне определенного движения. Если дополнительно закрепить еще и кривошип OA , то движение каких-либо звеньев механизма уже невозможно.

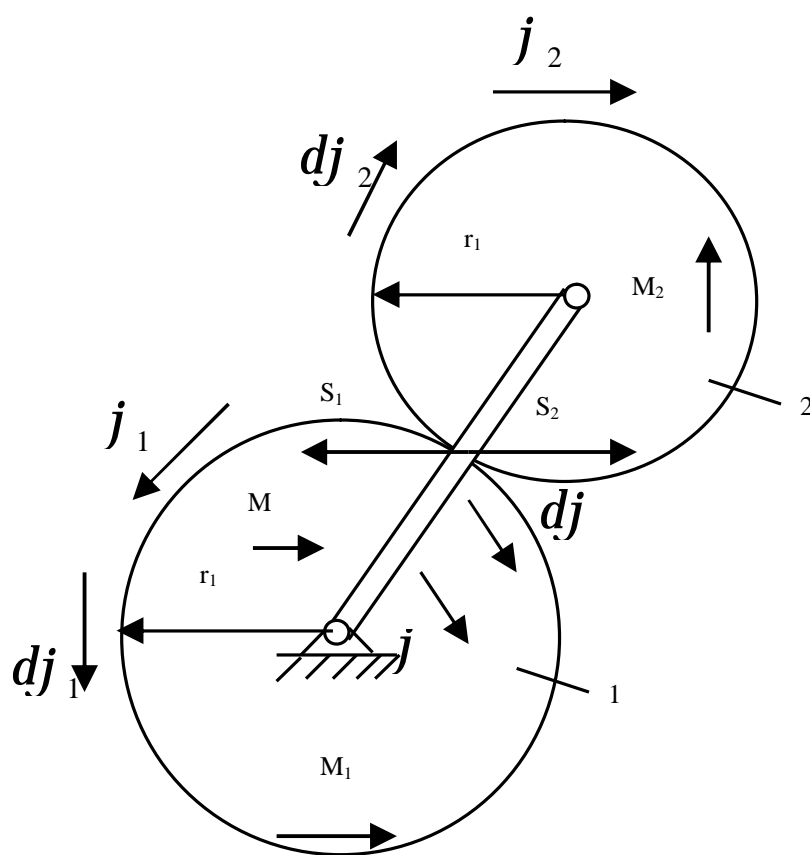


Рисунок 6.10

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота шестерни 1 и кривошипа OA , отсчитываемые от каких-либо фиксированных положений этих тел. По условиям равновесия системы, обобщенные силы, отнесенные к этим координатам, равны нулю,

т. е. $Q_{j_1} = 0; Q_j = 0$. Вычислим обобщенные силы по формулам:

$$Q_{j_1} = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{F}_k d\overline{r}_k) j_1}{dj_1}; \quad Q_j = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{F}_k d\overline{r}_k) j}{dj}. \quad (a)$$

Индексы указывают, что суммы элементарных работ должны вычисляться при изменении той обобщенной координаты, которая указана в индексе. Другая обобщенная координата при этом не должна изменяться.

К числу активных сил следует отнести пары сил с моментами M , M_1 , M_2 силы тяжести шестерен и кривошипа и внутренние силы \overline{S}_1 и \overline{S}_2 действия шестерен друг на друга в точке P . Эти силы, как силы действия и противодействия, удовлетворяют условию $\overline{S}_1 = -\overline{S}_2$.

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то элементарные работы сил тяжести его звеньев равны нулю. Возможные перемещения точек приложения этих сил располагаются в горизонтальной плоскости, перпендикулярной силам тяжести.

Дадим шестерне 1 возможное перемещение dj_1 , например, в сторону возрастания угла j_1 , приняв при этом $j_1 = const$. Имеем

$$Q_{j_1} = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{F}_k d\overline{r}_k) j_1}{dj_1} = \frac{M_1 dj_1 - M_2 dj_2}{dj_1}. \quad (б)$$

Элементарная работа пары сил с моментом M_2 отрицательна, так как M_2 и dj_2 направлены в противоположные стороны. Сумма элементарных работ \overline{S}_1 и \overline{S}_2 равна нулю, так как у них точка приложения общая и одно и то же возможное перемещение, а сами силы равны и противоположны. При $j_1 = const$ углы поворота шестерен dj_1 и dj_2 направлены в противоположные стороны. Перемещения точки соприкосновения шестерен одинаковы; следовательно,

$$r_1 dj_1 = r_2 dj_2; \quad dj_2 = \frac{r_1}{r_2} dj_1.$$

Подставляя это значение dj_2 в уравнение (б) и сокращая на dj_1 , получаем

$$Q_{j_1} = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2}. \quad (б')$$

Сообщим теперь кривошипу OA возможное перемещение dj . Например, в направлении момента пары сил M , считая угол j_1 постоянным. Тогда

$$Q_{j_1} = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{F_k} d\overline{r_k})j}{dj_1} = \frac{M_1 dj - M_2 dj_2}{dj} \quad (в)$$

В этом случае угол dj_2 и момент M_2 опять противоположны. Точка соприкосновения шестерен P является теперь мгновенным центром скоростей для шестерни 2. Элементарная работа сил $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ в этом случае равна нулю для каждой силы. Вычислим возможное перемещение точки A как точки кривошипа OA и шестерни 2, имеющей мгновенный центр скоростей в точке P . Имеем, соответственно,

$$dS_A = (r_1 + r_2)dj = r_2 dj_2.$$

Отсюда получаем

$$dj_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} dj.$$

Подставляя это значение в уравнение (в) и сокращая на dj , получаем

$$Q_j = M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}. \quad (в')$$

По условиям равновесия системы, $Q_{j_1} = 0; Q_j = 0$.

Учитывая уравнения (б') и (в'), получаем:

$$M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} = 0, \quad M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 0,$$

или

$$M_1 = M_2 \frac{r_1}{r_2}, \quad M = M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

6.8 Общее уравнение динамики

В соответствии с принципом Даламбера, для любой механической системы активные силы, силы реакций связей вместе с силами инерции удовлетворяют условию равновесия сил для каждой точки системы, т. е.

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0; k = 1, 2 \dots N, \quad (6.23)$$

где \bar{F}_k – активная сила;

\bar{R}_k – сила реакции связей;

$\bar{\Phi}_k$ – сила инерции точки.

Умножая скалярно каждое из этих соотношений на возможное перемещение точки $d\bar{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\bar{F}_k d\bar{r}_k + \bar{R}_k d\bar{r}_k + \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = 0. \quad (6.24)$$

Это и есть **общее уравнение динамики для системы с любыми связями**. Обычно его применяют для систем с идеальными связями, для которых выполняется условие

$$\bar{R}_k d\bar{r}_k = 0.$$

В этом случае уравнение (6.24) принимает одну из форм:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) d\bar{r}_k = 0; \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + m_k \bar{a}_k) d\bar{r}_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + m_k \bar{r}_k) d\bar{r}_k = 0, \quad (6.25)$$

так как сила инерции через ускорение \bar{a}_k относительно инерциальной системы отсчета выражается в форме

$$\overline{\Phi}_k = m_k \overline{a}_k = m_k \overline{\mathbf{a}}_k,$$

где \overline{r}_k – радиус-вектор точки.

Таким образом, согласно общему уравнению динамики, **в любой момент движения системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции точек системы равна нулю на любом возможном перемещении системы, допускаемом связями.** Общее уравнение динамики (6.24) часто называют объединенным принципом Даламбера - Лагранжа. Его можно назвать также общим уравнением механики. Оно, в случае равновесия системы при обращении в нуль всех сил инерции точек системы, переходит в принцип возможных перемещений статики, только пока без доказательства его достаточности для равновесия системы.

Общему уравнению динамики можно придать другие, эквивалентные формы. Раскрывая скалярное произведение векторов, его можно выразить в виде

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} + \Phi_{kx}) dx_k + (F_{ky} + \Phi_{ky}) dy_k + (F_{kz} + \Phi_{kz}) dz_k] = 0,$$

где x_k, y_k, z_k , – координаты k-й точки системы. Учитывая, что проекции сил инерции на оси координат через проекции ускорений на эти оси выражаются соотношениями

$$\Phi_{kx} = m_k a_{kx} = m_k \mathbf{a}_{kx}; \quad \Phi_{ky} = m_k a_{ky} = m_k \mathbf{a}_{ky};$$

$$\Phi_{kz} = m_k a_{kz} = m_k \mathbf{a}_{kz},$$

общему уравнению динамики можно придать форму

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} - m_k \mathbf{a}_{kx}) dx_k + (F_{ky} - m_k \mathbf{a}_{ky}) dy_k + (F_{kz} - m_k \mathbf{a}_{kz}) dz_k] = 0.$$

В этом виде его называют **общим уравнением динамики в аналитической форме.**

Общее уравнение динамики для систем, подчиненных голономным, идеальным, неосвобождающим связям, дает полную информацию о движении таких систем, т.е. из него, аналогично тому, как из принципа возможных перемещений получались условия равновесия системы, можно получить полную систему дифференциальных уравнений. Для вывода этих уравнений следует использовать понятия обобщенных координат и обобщенных сил.

Пусть имеется система, подчиненная голономным, идеальным, неосвобождающим связям. Предположим, что она имеет n степеней свободы, и, следовательно, ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n . Радиус-вектор каждой точки системы в общем случае нестационарных связей зависит от обобщенных координат и времени, т.е. $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Для возможного перемещения $d\bar{r}_k$ имеем

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dq_i}, \quad (6.26)$$

так как время при этом считается неизменным. Подставляя уравнение (6.26) в общее уравнение динамики (6.25), после перемены порядка суммирования по k и i получим

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i} \right) dq_i = 0. \quad (6.27)$$

Используя обобщенные силы активных сил Q_i и сил инерции $Q_i^{(\phi)}$, т.е.

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i}; \quad Q_i^{(\phi)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{d\bar{r}_k}{dq_i}, \quad (6.28)$$

из уравнения (6.27) получим общее уравнение динамики в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^n (Q_i + Q_i^{(\phi)}) dq_i = 0. \quad (6.29)$$

Обобщенные координаты системы независимы, вариации этих координат не только независимы, но и произвольны. Последовательно принимая только одну из вариаций обобщенных координат не равной нулю, а все остальные – равными нулю, из уравнения (6.29) получаем следующую систему условий:

$$Q_i + Q_i^{(\phi)} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.30)$$

Условия (6.30) можно назвать **принципом Даламбера для системы**, выраженным через обобщенные силы. Из уравнения (6.30) сле-

дуют условия равновесия системы $Q_i=0, i = 1, 2, \dots, n$, если силы инерции точек системы, а, следовательно, и обобщённые силы инерции равны нулю.

При использовании общего уравнения динамики необходимо уметь вычислять элементарную работу сил инерции системы на возможных перемещениях. Для этого применяются соответствующие формулы для элементарной работы, полученные для обычных сил. Рассмотрим их применение для сил инерции твёрдого тела в частных случаях его движения.

Поступательное движение. В этом случае тело имеет три степени свободы и вследствие наложенных связей может совершать только поступательное движение. Возможные перемещения точек тела, которые допускают связи, тоже являются поступательными.

Силы инерции при поступательном движении приводятся к равнодействующей $\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_c = -M\bar{a}$. Для суммы элементарных работ сил инерции на поступательном возможном перемещении получим

$$\bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = \bar{\Phi}^* d\bar{r}_c = \bar{\Phi}^* d\bar{r} = -M\bar{a}d\bar{r},$$

где $d\bar{r}_c = d\bar{r}$ – возможное перемещение центра масс и любой точки тела, так как поступательное возможное перемещение у всех точек тела одинаково; одинаковы и ускорения, т.е. $a_c = a$.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Тело в этом случае имеет одну степень свободы. Оно может вращаться вокруг неподвижной оси Oz . Возможное перемещение, которое допускается наложенными связями, является тоже поворотом на элементарный угол dj вокруг неподвижной оси.

Силы инерции, приведенные к точке O на оси вращения, сводятся к главному вектору $\bar{\Phi}$ и главному моменту $L_0^{(\phi)}$. Главный вектор сил инерции приложен к неподвижной точке, и его элементарная работа на возможном перемещении равна нулю. У главного момента сил инерции не равную нулю элементарную работу совершит только его проекция на ось вращения $L_0^{(\phi)} = -Je$. Таким образом, для суммы работ сил инерции на рассматриваемом возможном перемещении имеем

$$\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_K d\bar{r}_k = L_z^{(\phi)} dj - Jedj,$$

если угол dj сообщить в направлении дуговой стрелки углового ускорения ϵ .

Плоское движение. Связи, наложенные на твердое тело, допускают в этом случае только плоское возможное перемещение. В общем случае оно состоит из поступательного возможного перемещения вместе с полюсом, за который выберем центр масс, и поворота на элементарный угол dj вокруг оси Cz , проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, параллельно которой тело может совершать плоское движение.

Так как силы инерции при плоском движении твердого тела можно привести к главному вектору $\overline{\Phi}$ и главному моменту $L_c^{(\phi)}$ (если за центр приведения выбрать центр масс), то сумма элементарных работ сил инерции на плоском возможном перемещении сведётся к элементарной работе главного вектора сил инерции $\overline{\Phi} = -M \overline{a}_c$ на возможном перемещении центра масс и элементарной работе главного момента сил инерции на элементарном поворотном перемещении вокруг оси Cz , проходящей через центр масс. При этом не равную нулю элементарную работу может совершить только проекция главного момента сил инерции на ось Cz , т.е. $L_{cz}^{(\phi)} = -J_{cz} \epsilon dj$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\sum_{k=1}^N \overline{\Phi}_K d\overline{r}_k = \overline{\Phi} d\overline{r}_c + L_{cz}^{(\phi)} dj = -M \overline{a}_c d\overline{r}_c - J_{cz} \epsilon dj,$$

если поворот на элементарный угол dj направить по дуговой стрелке для ϵ .

Пример 1. Центробежный регулятор вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью W (рис. 6.11). Силы тяжести точечных грузов M_1 и M_2 равны P , ползуна $D - Q$; длины стержней $A_1M_1 = A_2M_2 = M_1B_1 = M_2B_2 = l$, $OA_1 = OA_2 = l_1$. Поперечными размерами ползуна D , массами пружин, ползуна E и всех стержней пренебречь. Коэффициенты жесткости пружин одинаковы и равны c . Длины пружин в недеформированном состоянии l_1 .

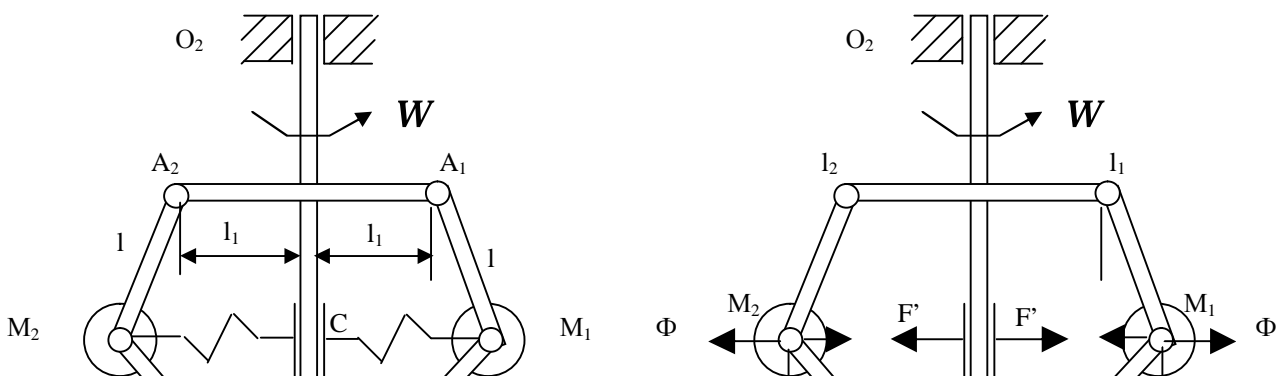


Рисунок 6.11

Рисунок 6.12

Определить зависимость между угловой скоростью вращения регулятора ω и углом \dot{j} .

Решение. Применим к регулятору общее уравнение динамики в форме:

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} + \Phi_{kx}) dx_k + (F_{kz} + \Phi_{kz}) dz_k] = 0,$$

так как проекции активных сил \overline{F}_k и сил инерции $\overline{\Phi}_k$ на ось Oy равны нулю.

Активными силами являются силы тяжести \overline{P} и \overline{Q} и силы натяжения пружин \overline{F} и \overline{F}' . Силы инерции следует учесть только центробежные для шаров M_1 и M_2 (рис. 6.12), так как касательные при вращении с постоянной угловой скоростью равны нулю.

Связи в рассматриваемой задаче идеальные, если пренебречь силами трения. Декартовы координаты точки M_1 : $x_1; z_1$, а ползуна D : $0; z_2$. Тогда применение общего уравнения динамики к регулятору дает

$$2\Phi dx_1 + 2P dz_1 - 2F dx_1 + Q dz_2 = 0 \quad (a)$$

При составлении этого уравнения отдельно вычислена элементарная работа сил на возможных перемещениях для шара M_1 . Чтобы учесть элементарную работу таких же сил для шара M_2 , результат надо удвоить. Работа сил упругости пружин F' приложенных к ползуну E , равна нулю.

Для модулей сил инерции Φ и упругости F имеем

$$\Phi = \frac{P}{g} (l_1 + l \sin j) w^2; F = cl = cl \sin j, \quad (6)$$

где l — удлинение пружины.

Для установления зависимости между вариациями координат точек получим сначала их зависимость от угла j :

$$x_1 = l_1 + l \sin j; z_1 = l \cos j; z_2 = 2l \cos j.$$

Варьируя эти зависимости, имеем:

$$dx_1 = l \cos j dj; dz_1 = -l \sin j dj; dz_2 = -2l \sin j dj. \quad (в)$$

Все вариации координат выразились через вариацию одного угла j , следовательно, система имеет одну степень свободы.

Подставляя значения величин из (б) и (в) в (а), после сокращения на $2ldj$ получим:

$$\frac{P}{g} (l_1 + l \sin j) w^2 l \cos j - P \sin j - cl \sin j \cos j - Q \sin j = 0.$$

Разделив обе части этого соотношения на $\cos j$, получаем искомую зависимость между W и j :

Пример 2. Призма A , сила тяжести которой P_1 , расположена на гладкой горизонтальной плоскости (рис.6.13). На грани призмы, наклоненной под углом α к горизонту, расположен груз B , имеющий силу тяжести P_2 . Груз B прикреплен к призме с помощью пружины, имеющей жесткость c . Определить движение призмы A и груза B по призме, если в начальный момент система находилась в покое и пружина была не деформирована. Силами трения груза B о призму A пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем величины x и s . Активными силами являются силы тяжести $\overline{P_1}, \overline{P_2}$ и силы упругости пружины P (рис. 6.14). Связи идеальные, так как поверхности тел гладкие. Общее уравнение

динамики в обобщенных координатах для случая двух степеней свободы можно выразить в форме

$$Q_1 + Q_1^{(\phi)} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{(\phi)} = 0, \quad (a)$$

где Q_1 и Q_2 – обобщенные силы, отнесенные к обобщенным координатам x и s ;

$Q_1^{(\phi)}, Q_2^{(\phi)}$ – обобщенные силы инерции, отнесенные к тем же координатам.

Обобщенные силы для координаты x вычисляем по формулам:

$$Q_1 = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{F}_k d\overline{r}_k)_x}{dx}; \quad Q_1^{(\phi)} = \frac{(\sum_{k=1}^N \overline{\Phi}_k d\overline{r}_k)_x}{dx}, \quad (б)$$

где \overline{F}_k – активная сила, приложенная к k -й точке системы;

$\overline{\Phi}_k$ – сила инерции.

Индекс x в числителе указывает, что сумму элементарных работ на возможных перемещениях точек $d\overline{r}_k$ следует вычислять при изменении только координаты x , считая координату s при этом постоянной. Давая возможное перемещение dx в направлении возрастания координаты x , имеем, по формулам (б), $Q_1 = 0$, так как силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ перпендикулярны возможному перемещению, а силы упругости (одна приложена к грузу, другая, равная первой, но ей противоположная по направлению, – к призме в точке закрепления пружины) в сумме дадут элементарную работу, равную нулю.

Для обобщенной силы инерции, соответственно, имеем

$$\begin{aligned} Q_1^{(\phi)} &= \frac{-\Phi_1 dx - \Phi_{2x} dx}{dx} = -(\Phi_1 + \Phi_{2x}) = \\ &= -\frac{(P_1 + P_2) + P_2 \cos a}{g}, \end{aligned}$$

так как проекции сил инерции призмы и груза на ось Ox :

$$\Phi_{1x} = \frac{P_1}{g} \quad \Phi_{2x} = \frac{P_2}{g} (\cos a + \dots).$$

Обобщенные силы $Q_2, Q_2^{(\phi)}$ на возможном перемещении ds , направленном в сторону возрастания координаты s , при неизменном значении координаты x вычисляем по формулам:

$$Q_2 = \frac{(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k d\bar{r}_k)_s}{ds}; \quad Q_2^{(\phi)} = \frac{(\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k)_s}{ds}. \quad (B)$$

Имеем

$$Q_2 = \frac{P_2 \sin a ds - F ds}{ds} = P_2 \sin a - F =$$

$$= P_2 \sin a - c(l_{cm} + s) = -cs,$$

так как сила упругости $F = cl = c(l_{cm} + s)$, если s отсчитывать от положения статического равновесия груза B , где l_{cm} – статистическое удлинение пружины под действием груза B в положении равновесия. В положении статического равновесия действующие на груз силы находятся в равновесии. Проецируя их на ось $O's$, получаем

$$P_2 \sin a - cl_{cm} = 0.$$

Для обобщенной силы инерции имеем

$$Q_2^{(\phi)} = \frac{-\Phi_{2s} ds}{ds} = -\frac{P_2}{g} (\dots + \dots \cos a),$$

где Φ_{2s} – проекция силы инерции груза B на ось $O's$. Подставляя полученные значения обобщенных сил в уравнение (а), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$(P_1 + P_2) \dots + P_2 \cos a \dots = 0; \quad -cs - \frac{P_2}{g} (\dots + \dots \cos a) = 0. \quad (a')$$

Исключая из второго уравнения (а') с помощью первого x , имеем следующее дифференциальное уравнение для s :

$$\ddot{s} + \frac{(P_1 + P_2)cg}{P_2[P_1 + P_2(1 - \cos^2 a)]} s = 0,$$

или

$$\ddot{s} + k^2 s = 0, \quad (\Gamma)$$

где

$$k^2 = \frac{(P_1 + P_2)cg}{P_2[P_1 + P_2(1 - \cos^2 a)]}.$$

Интегрируя уравнение (Г), получим

$$s = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (\Gamma')$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий:

$$t = 0; \quad s = -I_{cm} = -\frac{P_2 \sin a}{c}; \quad \dot{s} = 0.$$

Дифференцируя уравнение (Г'), имеем

$$\dot{s} = -C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (\Gamma'')$$

Из уравнений (Г') и (Г'') при $t = 0$ получаем:

$$-I_{cm} = C_1; \quad C_2 = 0.$$

После этого имеем

$$s = -I_{cm} \cos kt = -\frac{P_2 \sin a}{c} \cos \sqrt{\frac{(P_1 + P_2)cg}{P_2(P_1 + P_2 \sin^2 a)}} t.$$

Подставляя из (Г) значение s в первое из уравнений (а'), получаем следующее дифференциальное уравнение для x :

$$\ddot{x} = \frac{P_2 k^2 I_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \cos kt. \quad (\Delta)$$

Интегрируя его, имеем

$$\dot{x} = \frac{P_2 k l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \sin kt + C_3. \quad (д')$$

Интегрируя еще раз, получим

$$x = -\frac{P_2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \cos kt + C_3 t + C_4. \quad (д'')$$

Постоянные C_3, C_4 определяем из начальных условий: $t=0; x=0; \dot{x}=0$. Используя эти начальные условия, из (д') и (д'') имеем

$$0 = C_3; \quad 0 = -\frac{P_2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} + C_4$$

или

$$C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{P_2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2}.$$

После этого

$$x = \frac{P_2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} (1 - \cos kt).$$

6.9 Уравнение Лагранжа

Из уравнения (6.30) получим уравнения Лагранжа второго рода, или просто уравнения Лагранжа.

6.9.1 Тождества Лагранжа

Для получения уравнений Лагранжа потребуется использовать три тождества. Одно из них – хорошо известная формула дифференцирования скалярного произведения двух любых векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$, т. е.

$$\frac{d}{dt} (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \left(\frac{d\bar{b}}{dt} \right),$$

или

$$\frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} = \frac{d}{dt} (\bar{a} \cdot \bar{b}) - \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Если принять за \bar{a} вектор скорости $\bar{\mathbf{u}}_k = \dot{\bar{r}}_k$, а за \bar{b} – вектор $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$, то

в соответствии с этим тождеством получим

$$\ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right). \quad (6.31)$$

Другое тождество (тождество Лагранжа) выражается в виде

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad (6.32)$$

где точки над величинами означают их производные по времени. Величина $\dot{q}_i = dq_i / dt$ называется *обобщённой скоростью*. Тождество (6.32) утверждает, что «точки» (дифференцирование по времени) можно поставить одновременно в числителе и знаменателе или их «сократить». Справедливость уравнения (6.32) доказывается вычислением входящих в него величин и их сравнением. Действительно, в общем случае

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1(t), q_2(t), \mathbf{K}, q_n(t), t).$$

При движении системы обобщенные координаты тоже есть функции времени. Дифференцируя \bar{r}_k по времени как его сложную функцию, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_k &= \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \mathbf{K} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \\ \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Частные производные $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ и $\partial \bar{r}_k / \partial t$ не могут зависеть от обобщенных скоростей \dot{q}_i ; следовательно, дифференцирование частным образом по \dot{q}_i с фиксированным номером обеих частей уравнения (6.33) дает только коэффициент при этой переменной. Все остальные слагаемые при дифференцировании дадут нули, так как они не зависят от \dot{q}_i с этим фиксированным номером. Имеем:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Тождество (6.32) доказано.

Другое тождество Лагранжа заключается в перестановке порядка дифференцирования по времени и обобщенной координате вектора \bar{r}_k , т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \quad (6.34)$$

Для доказательства этого тождества вычислим $\partial \dot{\bar{r}}_k / \partial q_i$, используя уравнение (6.33) и учитывая, что обобщенные скорости не зависят от обобщенных координат. Получим

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \mathbf{K} + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (6.35)$$

С другой стороны, $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ есть сложная функция времени, которая зависит от него не только явно, но и через обобщенные координаты. По правилу дифференцирования сложных функций, имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \mathbf{K} + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}. \quad (6.36)$$

Порядок частного дифференцирования в смешанных производных можно изменять. С учетом этого уравнения (6.35) и (6.36) совпадают. Таким образом, второе тождество Лагранжа доказано.

6.9.2 Вывод уравнений Лагранжа

Для получения из уравнения (6.30) уравнений Лагранжа для обобщённой силы инерции необходимо доказать справедливость следующей формулы:

$$Q_i^{(\Phi)} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right], \quad (6.37)$$

где

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{u}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \mathbf{u}_k^2}{2}$$

- кинетическая энергия системы при её движении относительно инерциальной системы отсчета.

Для доказательства (6.37) вычислим $Q_i^{(\Phi)}$, используя ее определение через силу инерции $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k$. Имеем:

$$Q_i^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (6.38)$$

Преобразуем выражение

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

В соответствии с тождеством (6.31),

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right).$$

Применим тождества Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q_i}.$$

После этого:

$$A = \frac{d}{dt} \left(\bar{u}_k \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{u}_k \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q_i}.$$

Подставляя это значение А в уравнение (6.38) и внося постоянную массу под знак производных, а производные вынося за знак сумм, получим

$$Q_i^{(\Phi)} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{u}_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{u}_k^2}{2} \right] = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right].$$

Формула (6.37) доказана.

Подставляя выражение (6.36) для $Q_i^{(\Phi)}$ в уравнение (6.30), получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, n. \quad (6.39)$$

Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы.

6.9.3 Структура уравнений Лагранжа и их составление

Уравнения Лагранжа для обобщенных координат являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, как и дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах. Число уравнений Лагранжа совпадает с числом обобщенных координат. Действительно, для кинетической энергии системы, используя ее

определение и формулу (6.33) для $\dot{\bar{r}}_k = \bar{u}_k$, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C,$$

где введены обозначения

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}; B_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}; C = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Величины A_{ij} , B_i , C могут зависеть от обобщенных координат и времени, но не зависят от обобщенных скоростей. С учетом этого

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} \ddot{q}_j + \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{dB_i}{dt}.$$

••

Это выражение содержит \ddot{q}_j , т.е. производную от обобщенной координаты только второго порядка. Другие слагаемые уравнений Лагранжа содержат производные от обобщенных координат не выше первого порядка. Активные силы \bar{F}_k , если они не зависят от ускорений точек, не могут дать зависимости Q_i от обобщенных ускорений.

Интегрируя уравнения Лагранжа для случая заданных активных сил, получим все обобщенные координаты как функции времени и $2n$ постоянных интегрирования. Для определения этих постоянных следует дополнительно задать начальные условия, т.е., например, при $t = 0$ задать

$$q_i = q_i^0; \dot{q}_i = \dot{q}_i^0,$$

где q_i^0 и \dot{q}_i^0 — начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

При составлении уравнений Лагранжа можно рекомендовать следующий порядок операций:

- 1 Вычислить кинетическую энергию системы в ее движении относительно инерциальной системы отсчета.
- 2 Выбрав обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, преобразовать кинетическую энергию к обобщенным координатам.
- 3 Выполнить операции дифференцирования кинетической энергии, предусмотренные уравнениями Лагранжа.
- 4 Вычислить одним из способов, указанных в п.6.6, обобщенные силы системы.
- 5 Приравнять величины левой и правой частей, входящих в уравнения Лагранжа.

6.9.4 Уравнения Лагранжа для потенциальных сил

Если силы, действующие на точки системы, являются потенциальными, то для обобщенных сил справедлива формула $Q_i = \partial U / \partial q_i$. Силовая функция U не зависит от обобщенных скоростей, поэтому производную от нее по обобщенной скорости $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ можно прибавить к $\partial T / \partial \dot{q}_i = 0$. С учетом этого, после переноса всех слагаемых в левую часть, получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, n.$$

Если ввести функцию Лагранжа, или лагранжиан, по формуле

$$L = T + U = T - \Pi, \quad (6.40)$$

то уравнения Лагранжа для случая потенциальных сил примут форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, n. \quad (6.41)$$

Функция Лагранжа отличается от полной механической энергии системы

$$E = T + \Pi = T - U.$$

Из уравнений Лагранжа для потенциальных сил и случая стационарности связей системы можно получить ранее установленный закон сохранения полной механической энергии

$$E = T + \Pi = h,$$

где h – постоянная величина.

6.9.5 Циклические координаты и циклические интегралы

Функция Лагранжа $L = T + U$ в общем случае зависит от обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени. Если какая-либо обобщенная координата, например q_j , не входит в выражение функции Лагранжа, то для нее

$$\partial L / \partial q_j = 0. \quad (6.42)$$

Обобщенная координата, которая удовлетворяет условию (6.42), называется *циклической*. Для циклической обобщенной координаты q_j уравнение Лагранжа примет форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Из него получаем циклический интеграл уравнений Лагранжа:

$$\partial L / \partial \dot{q}_j = C_j, \quad (6.43)$$

где C_j — постоянная величина.

В циклический интеграл могут входить производные по времени от обобщенных координат, в том числе и производная по времени от цик-

лической координаты не выше первого порядка. Следовательно, уравнение (6.43), в отличие от уравнений Лагранжа, в общем случае является обыкновенным дифференциальным уравнением не выше первого порядка. Если все обобщенные координаты являются циклическими, то система уравнений Лагранжа, имеющих второй порядок, заменится циклическими интегралами, имеющими только первый порядок. Интегрировать систему уравнений первого порядка значительно проще, чем систему второго порядка. Отыскание обобщенных координат, которые являются циклическими, имеет большое значение. Используя циклические интегралы, можно так называемым методом игнорирования координат уменьшить число уравнений Лагранжа на количество циклических координат, не повышая при этом порядка получаемых дифференциальных уравнений.

Другое направление в аналитической динамике состоит в отыскании самих интегралов уравнений Лагранжа или другой системы уравнений, им эквивалентной.

Аналитическая механика после Лагранжа получила большое развитие и применение в различных областях науки и техники. Ее методы особенно широко применяются в теории колебаний систем и в квантовой механике.

Пример. Однородный диск A силой тяжести $P = 100$ Н обмотан нерастяжимой нитью, которая перекинута через блок B и прикреплена к грузу D силой тяжести $P_2 = 200$ Н (рис. 6.13). Груз D может скользить по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения скольжения между грузом и плоскостью $f = 0,3$. Блок B , имеющий силу тяжести $P_1 = 400$ Н, принять за однородный диск.

Определить ускорение груза D и оси диска A , а также натяжение нити и давление на ось блока, если нить не скользит по блоку. Трением на оси блока и массой нити пренебречь. Движение начинается из состояния покоя.

Решение. Система движущихся тел имеет две степени свободы. За обобщенные координаты системы примем перемещение s груза по наклонной плоскости и угол φ поворота диска A . Считаем угол φ положительным против часовой стрелки, а перемещение s – вниз по наклонной плоскости.

Связями системы являются нить, ось блока и негладкая наклонная плоскость. Если наклонную плоскость заменить силами реакций связей, то оставшиеся связи окажутся идеальными, но появится дополнительная степень свободы у груза D . Можно сделать связи системы идеальными, считая наклонную плоскость идеально гладкой, а шероховатость ее поверхности и поверхности груза D компенсировать силой трения. В

этом случае дополнительная степень свободы не появится. Связи системы окажутся идеальными, и для ее движения можно составить уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} - \frac{\partial T}{\partial j} = Q_j.$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

Диск А совершает плоское движение. Его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T_A = \frac{P \mathbf{u}_C^2}{g 2} + J_{C_z} \frac{j^2}{2},$$

где \mathbf{u}_C – скорость центра масс диска; $J_{C_z} = \frac{P r^2}{g 2}$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска; r – радиус диска.

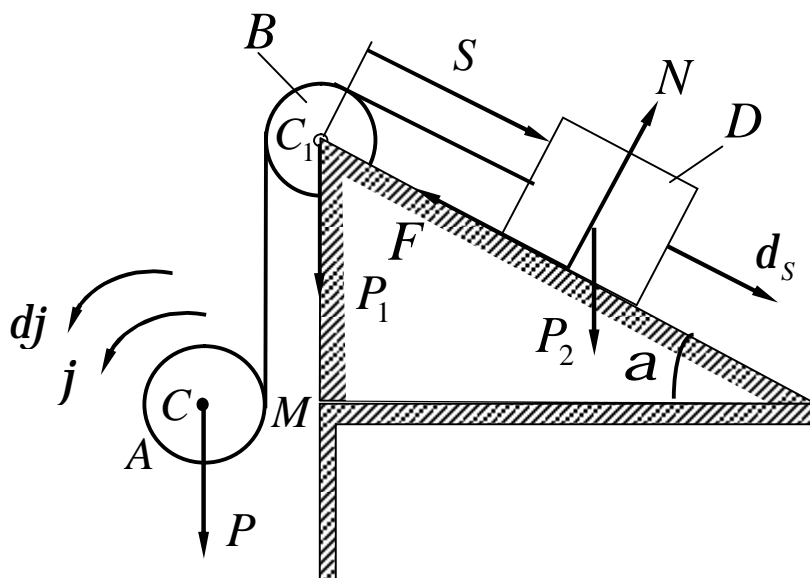


Рисунок 6.13

Блок B вращается вокруг неподвижной оси. Его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T_B = J_{C_z} \frac{\dot{j}_1^2}{2},$$

где \dot{j}_1 – угловая скорость блока; $J_{C_{1z}} = \frac{P_1}{g} \frac{r_1^2}{2}$ – момент инерции относительно оси вращения; r_1 – радиус блока.

Груз D движется поступательно, и его кинетическая энергия

$$T_D = \frac{P_2}{g} \frac{s^2}{2}.$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по блоку, то угловая скорость блока связана со скоростью груза соотношением $s = -r_1 \dot{j}_1$. Скорость груза предполагаем направленной вниз по наклонной плоскости, а, следовательно, в начале движения из состояния покоя вниз направлено и ускорение груза. Все точки нити имеют одинаковое числовое значение скорости $|s|$. Следовательно, такую же скорость имеет и точка M диска. Приняв ее за полюс, определяем скорость точки C по формуле, связывающей скорости двух точек тела при плоском движении:

$$\overline{u_C} = \overline{u_M} + \overline{u_{CM}},$$

где $u_{CM} = MC |\dot{j}|$.

При вращении диска против часовой стрелки скорость $\overline{u_{CM}}$ направлена вертикально вниз, а $\overline{u_M}$ – вертикально вверх при движении груза D вниз по наклонной плоскости. Следовательно, $u_C = \dot{s} - r \dot{j}$, где направление вверх считается положительным для точки C .

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости и координаты. Имеем

$$\begin{aligned}
T = T_A + T_B + T_D &= \frac{P \left(\dot{s} - r \dot{j} \right)^2}{g} + \frac{\text{Pr}^2 \dot{j}^2}{2} + \frac{P_1 \dot{s}^2}{2g} + \frac{P_2 \dot{s}^2}{g} = \\
&= \frac{\dot{s}^2}{2g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) + \frac{3\text{Pr}^2}{4g} \dot{j}^2 - \frac{\text{Pr}}{g} \dot{s} \dot{j}.
\end{aligned}$$

Вычисляем производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial j} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{\dot{s}}{g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) - \frac{\text{Pr}}{g} \dot{j};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{\ddot{s}}{g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) - \frac{\text{Pr}}{g} \ddot{j};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = \frac{3\text{Pr}^2}{2g} \dot{j} - \frac{\text{Pr}}{g} \dot{s};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = \frac{3\text{Pr}^2}{2g} \ddot{j} - \frac{\text{Pr}}{g} \ddot{s}.$$

При вычислении обобщенных сил следует учитывать силы тяжести \overline{P} , \overline{P}_1 , \overline{P}_2 и силу трения \overline{F} наклонной плоскости. Реакции идеальных связей (нить, ось блока, гладкая наклонная плоскость) учитывать не нужно. Важно выбрать правильное направление для силы трения

\overline{F} , которая всегда направлена против скорости движения S груза D . Но направление движения груза заранее не известно. Предположим, что движение груза направлено вниз по наклонной плоскости; тогда сила трения будет иметь противоположное направление. Решаем задачу

при этом предположении. Если получим S (в данном случае и \dot{S} , так как движение начинается из состояния покоя) со знаком плюс, то принятое предположение правильно. Если же ускорение S (а, следовательно, и скорость S) получится отрицательным, то следует изменить

направление силы трения на обратное и снова решить задачу, так как предполагаемое направление силы трения оказалось направленным по

••

движению груза, т.е. неправильно. При $s = 0$ движение груза из состояния покоя начаться не может.

Установив предполагаемое направление силы трения против движения груза вверх по наклонной плоскости, вычисляем обобщенную силу Q_s . При этом сообщаем системе такое возможное перемещение, допускаемое связями, при котором угол φ не изменяется, а изменяется только обобщенная координата s на положительную величину δs , т. е. сообщаем возможное перемещение грузу в сторону возрастающих значений s вниз по наклонной плоскости. По формуле для обобщенной силы имеем

$$Q_s = \frac{(\sum dA_k)_s}{ds} = \frac{(P_2 \sin a - fN)ds - Pds}{ds} = P_2 \sin a - fN - P,$$

так как при $\varphi = \text{const}$ перемещение точки C диска такое же, как и у точки M , а $F = F_{\max} = fN$. Сила \overline{P}_1 приложена в неподвижной точке, и ее элементарная работа на возможном перемещении равна нулю, так как возможное перемещение неподвижной точки равно нулю.

Нормальную реакцию наклонной плоскости определяем из условия равновесия сил для груза D в направлении нормали к наклонной плоскости. Имеем

$$N - P_2 \cos a = 0; \quad N = P_2 \cos a.$$

С учетом этого

$$Q_s = P_2 (\sin a - f \cos a) - P.$$

При вычислении обобщенной силы Q_j сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменяется только обобщенная координата φ на положительную величину $\delta\varphi$, а обобщенная координата s не изменяется. Получаем

$$Q_j = \frac{(\sum dA_k)_j}{dj} = \frac{P ds_c}{dj}.$$

В этом случае точка M диска является его мгновенным центром скоростей, поэтому $ds_c = r dj$ и при положительном $\delta\varphi$ направлено вниз по силе \bar{P} . Элементарная работа других сил на этом возможном перемещении равна нулю, так как точки их приложения остаются неподвижными при этом перемещении. Таким образом,

$$Q_j = \frac{P ds_c}{dj} = Pr.$$

Подставляя вычисленные значения в уравнения Лагранжа, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{s}}{g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) - \frac{\ddot{j}}{g} Pr &= P_2 (\sin a - f \cos a) - P; \\ \frac{\ddot{s}}{g} Pr - \frac{\ddot{j}}{g} \frac{3}{2} Pr^2 &= -Pr. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения выражаем \ddot{j} через \ddot{s} . Имеем:
 $r \ddot{j} = \frac{2}{3} \left(g + \ddot{s} \right)$ Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$\frac{\ddot{s}}{g} \left(\frac{P}{3} + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) = P_2 (\sin a - f \cos a) - \frac{P}{3},$$

или

$$\frac{\ddot{s}}{g} 1300 = 600 \cdot 0.24 - 100; \quad \ddot{s} = 0,034g \approx 0,33 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс у \ddot{s} (в данном случае и у \ddot{s}) указывает, что движение груза D действительно направлено вниз по наклонной плоскости, как и предполагалось.

Ускорение точки C можно получить дифференцированием по времени выражения для ее скорости $\mathbf{u}_C = \dot{s} - r\dot{j}$, справедливого для любого момента времени. Имеем

$$\frac{d\mathbf{u}_C}{dt} = \ddot{s} - r\ddot{j}.$$

Таким образом,

$$a_C = a_C^t = \ddot{s} - r\ddot{j} = \ddot{s} - \frac{2}{3}\left(g + \ddot{s}\right) = \frac{\ddot{s}}{3} - \frac{2}{3}g = -0,656g = -6,43 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус у a_C указывает, что ускорение $\overline{a_C}$ направлено вниз, так как за положительное направление было принято направление вверх.

Для определения сил натяжения нитей применим к грузу и диску принцип Даламбера. Для груза D (рис. 6.14), проецируя силы на ось Ox , получаем

$$S_2 + \Phi_2 - P_2 \sin a + fN = 0.$$

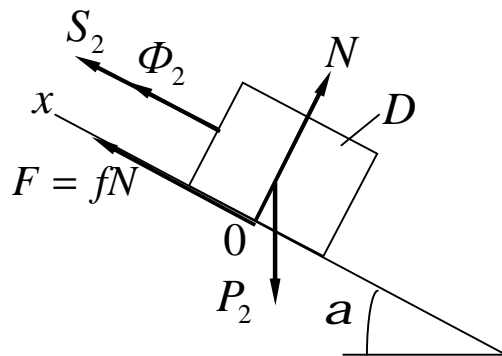


Рисунок 6.14

Но

$$\Phi_2 = \frac{P_2}{n} \ddot{s}; \quad N = P_2 \cos a.$$

Следовательно,

$$S_2 = P_2 \left(\sin a - f \cos a - \frac{\ddot{s}}{g} \right) = 41,2 \text{ Н.}$$

Для диска А (рис. 6.15), проецируя силы на ось Cy , имеем

$$S_1 + \Phi - P = 0,$$

но $\Phi = \frac{P}{g} a_c.$

Поэтому

$$S_1 = P \left(1 - \frac{a_c}{g} \right) = 100(1 - 0,656) \approx 34,4 \text{ Н.}$$

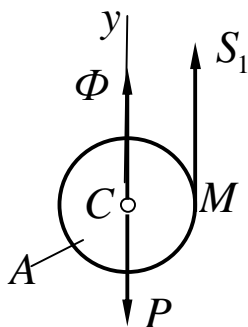


Рисунок 6.15

Так как центр масс блока неподвижен, то по теореме о движении центра масс (рис. 6.16) следует равновесие сил

$$0 = X_1 + S_2 \cos a; \quad 0 = Y_1 - S_1 - P_2 - S_2 \sin a.$$

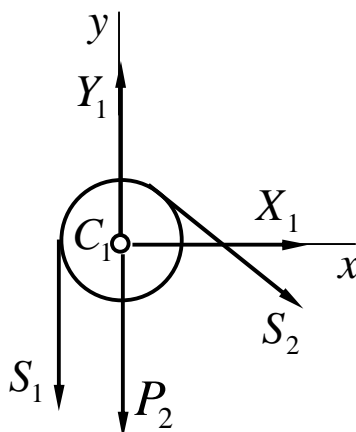


Рисунок 6.16

Из этих уравнений определяем проекции реакции оси блока X_1 и Y_1 :

$$X_1 = -S_2 \cos a = -35,4 \text{ H}; \quad Y_1 = P_2 + S_1 + S_2 \sin a = 455,1 \text{ H}.$$

Числовая величина реакции оси блока, а, следовательно, и давления блока на ось

$$N_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \approx 456,4 \text{ H}.$$

7 ТЕОРИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Теория колебаний, начав свое развитие с исследования движения математического маятника, превратилась в один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики с весьма сложным математическим аппаратом. Она имеет большое прикладное значение.

Рассмотрим *малые колебания* механических систем с одной и двумя степенями свободы на основе применения уравнений Лагранжа. Механическая система может совершать малые колебания вблизи *устойчивого положения равновесия*. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимают равными нулю. Тогда *колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т.е. принимают нулевые значения, по крайней мере, несколько раз.

7.1 Понятие об устойчивости равновесия механической системы

Состояние покоя механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Равновесие называется *устойчивым*, если система, выведенная из положения покоя, совершает колебания около этого положения (для наглядности на рисунке 7.1 приведены примеры).



Рисунок 7.1

Условие: обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n отсчитывать от положения равновесия системы, т.е. принимать их равными нулю в положении равновесия. Начальное возмущение системы состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ и начальных обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \dots, \dot{q}_n^0$.

По Ляпунову, равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать два других таких малых числа $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$, что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств $|q_i^0| < \eta_1$, $|\dot{q}_i^0| < \eta_2$ в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям $|q_i(t)| < \varepsilon$.

Т.о., положение равновесия считается устойчивым, если можно задать достаточно малую область изменения начальных значений обобщенных координат в окрестности положения равновесия и область начальных обобщенных скоростей, для которых величины обобщенных координат при последующем движении ограничены окрестностью, заданной ε . Числа η_1 и η_2 зависят от самого числа ε .

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_i равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию вычисляются по формулам:

$$Q_i = -\frac{d\Pi}{dq_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

следовательно, в положении любого равновесия:

$$\frac{d\Pi}{dq_i} = 0$$

7.2 Теорема Лагранжа-Дирихле

Для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и не освобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.

7.3 Общие сведения о малых колебаниях системы

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы. В общем случае движение системы описывается n уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_j} \right) - \frac{dT}{dq_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

причем каждую из обобщенных сил в общем случае считать состоящей из трех составляющих:

$$Q_j = Q_j^n + Q_j^\Phi + Q_j^e,$$

где Q_j^Π - обобщенные потенциальные силы:

$$Q_j^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат точек системы (q_j) и не зависит от обобщенных скоростей (\dot{q}_j). Для нестационарного силового поля, а также нестационарных связей потенциальная энергия может зависеть явно еще и от времени.

Q_j^Φ - обобщенные силы, связанные с действием сил сопротивления, зависящих как от числовых значений, так и от направлений скоростей точек системы. Мы рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления пропорциональны скоростям точек и направлены в стороны, противоположные скоростям.

Силы Q_j^B - это т.н. *вынуждающие*, или *возмущающие*, силы, зависящие прежде всего от времени.

Мы ограничимся случаем гармонической возмущающей силы, когда Q_j^B изменяется с течением времени по синусоидальному закону.

Итак, в общем случае уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^B, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

В силу сложности колебаний системы в общем случае рассмотрим только малые колебания системы с одной степенью свободы.

7.4 Собственные линейные колебания системы

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы ($n=1$) под действием одних потенциальных сил, т.е. когда

$Q = Q_j^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$. Считаем, что сил сопротивления и возмущающих сил нет ($Q^{\Phi} = 0$ и $Q^B = 0$). Такие колебания называются *собственными* или *свободными*.

Пусть система, на которую наложены голономные, идеальные, не освобождающие и стационарные связи, состоит из N точек и движется вблизи положения равновесия. Ее кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{u}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k^2.$$

Радиус-вектор каждой точки системы $d \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} dq$, следова-

тельно, $\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q}$.

Тогда

$$T = \frac{1}{2} A \dot{q}^2, \quad \text{где} \quad A = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d \bar{r}_k}{dq} \right)^2.$$

Величина A зависит только от q и не зависит от \dot{q} .

Разлагая $A(q)$ в окрестности $q=0$ в степенной ряд, имеем:

$$A(q) = A_0 + \left(\frac{dA}{dq} \right)_0 q + \left(\frac{d^2 A}{dq^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

Здесь и дальше индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при $q=0$.

Выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[A_0 + \left(\frac{dA}{dq} \right)_0 q + \dots \right] \dot{q}^2.$$

Для того чтобы сохранить члены не выше второго порядка малости, отбросим все слагаемые в квадратной скобке, начиная со второго, и введем обозначение $a=A_0$:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (7.1)$$

Потенциальная постоянная a называется **коэффициентом инерции**. Обычно по размерности коэффициент инерции является массой или моментом инерции.

Потенциальная энергия Π для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только q . Разлагая ее в степенной ряд в окрестности $q=0$, получаем:

$$\Pi(q) = \Pi_0 + \left(\frac{d\Pi}{dq} \right)_0 q + \left(\frac{d^2 \Pi}{dq^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

В положении равновесия при $q=0$ $\Pi_0=0$.

Величина $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 = Q$. В положении равновесия $Q=0$.

Обозначим $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0$ **коэффициент жесткости системы**, или

просто **жесткость**.

Тогда

$$П(q) = \frac{1}{2} c q^2. \quad (7.2)$$

Системы, для которых T и $П$ определяются по формулам (7.1) и (7.2), называются *линейными*. Для них вся математическая теория является такой же, как и для систем, совершающих малые колебания, хотя колебания для линейных систем могут быть любыми, не обязательно малыми. В дальнейшем рассматриваются линейные колебания, в число которых входят и малые колебания.

На основании уравнений (7.1) и (7.2) получаем:

$$\frac{dT}{dq} = 0; \quad \frac{dT}{d\varphi} = a\varphi; \quad \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\varphi} = a\ddot{\varphi}; \quad \frac{dП}{dq} = cq.$$

Подставляя эти значения в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{\varphi} + cq = 0. \quad (7.3)$$

Обозначим $c/a = k^2$, тогда

$$\ddot{\varphi} + k^2 q = 0, \quad (7.4)$$

где $k = \sqrt{c/a}$ называется *круговой (циклической) частотой колебаний*.

Круговая частота выражается в тех же единицах, что и угловая скорость, т.е. в секундах в минус первой степени (c^{-1}).

Дифференциальное уравнение (7.3) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде $q = e^{lt}$. Его характеристическое уравнение

$$l^2 + k^2 = 0.$$

Его решение:

$$l_{1,2} = \pm ki .$$

На основании теории дифференциальных уравнений решение уравнения (6.3) можно представить в виде:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt ,$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt .$$

Из начальных условий $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ получаем: $C_1 = q_0$;
 $C_2 = \dot{q}_0 / k$.

Имеем:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt .$$

Решение уравнения (7.4) может быть также представлено в другой, т.н. **амплитудной форме**:

$$q = A \sin(kt + a) = A \sin a \cos kt + A \cos a \sin kt ,$$

$$C_1 = A \sin a ; C_2 = A \cos a .$$

Отсюда:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} ; \sin a = \frac{C_1}{A} ; \cos a = \frac{C_2}{A} ; \operatorname{tga} = \frac{C_1}{C_2} ,$$

или

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2} ; \sin a = \frac{q_0}{A} ; \cos a = \frac{\dot{q}_0}{Ak} ; \operatorname{tga} = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0} .$$

Здесь A - амплитуда колебаний. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равнове-

сия, соответствующего значения $q=0$. Координата q изменяется в пределах от $+A$ до $-A$;

α - начальная фаза колебаний (при $t=0$);

$(kt + \alpha)$ - фаза колебаний.

Система совершает *гармонические колебания*. *Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Изменением фазы на $\pi/2$ можно перейти от синуса к косинусу.*

Период колебания $T = \frac{2\pi}{k}$.

Частота колебаний $n = \frac{1}{T}$.

Круговая частота $k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$; k - это число колебаний за время, равное 2π с.

На рисунке 7.2 представлен график собственных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы - это синусоида.



Рисунок 7.2

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой, периодом и начальной фазой.

Основные свойства собственных линейных колебаний:

- 1 Они являются гармоническими.
- 2 Амплитуда - величина постоянная, определяемая начальными условиями.
- 3 Период - величина постоянная, не зависящая от амплитуды и начальных условий.

Величина периода определяется только свойствами колеблющейся системы, т.е. коэффициентом инерции a и коэффициентом жесткости c . Независимость периода колебаний от амплитуды называется *изохорностью* колебаний. Собственные линейные колебания, если нет возмущающих сил, могут возникать только при начальных условиях, равных нулю, т.е. когда в начальный момент система имеет не равную нулю начальную обобщенную координату q_0 или начальную обобщенную скорость \dot{q}_0 .

Пример 1. Груз весом \bar{P} подвешен на пружине (рис.7.3). Статическое удлинение пружины под действием силы тяжести $l_{ст}$, начальное удлинение пружины Δl , начальная скорость груза J_0 . Определить движение груза.

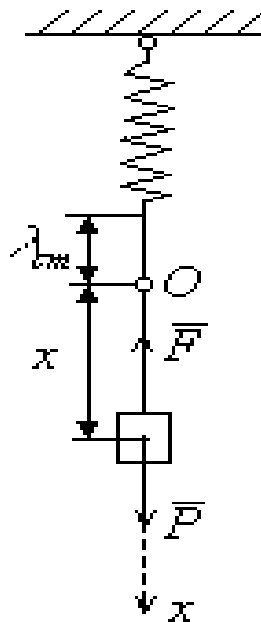


Рисунок 7.3

Решение. Груз будет двигаться прямолинейно. Направим ось O_x вертикально вниз по траектории движения груза. За начало отсчета расстояния x выберем положение стационарного равновесия груза, при котором сила тяжести \bar{P} уравновешивается силой упругости пружины \bar{F} .

Силу упругости пружины считаем пропорциональной ее удлинению из недеформированного состояния.

Пусть груз в момент t находится на расстоянии x от начала отсчета. На него действуют две силы: сила тяжести \bar{P} и сила упругости \bar{F} , причем

$$F = c(l_{cm} + x),$$

где $(l_{cm} + x)$ - удлинение пружины;
 c - коэффициент жесткости.

В положении статического равновесия $x=0$ и $F = cl_{cm} = P$. Следовательно, $c = \frac{P}{l_{cm}}$.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза имеет вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^N F_{kx}.$$

Но

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = P - F = P - c(l_{cm} + x) = (P - cl_{cm}) - cx = -cx,$$

следовательно,

$$m\ddot{x} = -cx; \quad \ddot{x} + k^2 x = 0; \quad k = \sqrt{c/m}.$$

Решение дифференциального уравнения:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$J = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

При $t=0$ $x_0 = \Delta l - l_{cm}$; $\dot{x}_0 = J_0$.

Тогда:

$$C_1 = x_0 ; \quad C_2 = J_0 / k ,$$

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{Pg}{I_{cm}P}} = \sqrt{\frac{g}{I_{cm}}} ; \quad C_2 = J_0 \sqrt{\frac{I_{cm}}{g}} .$$

Уравнение движения груза имеет вид:

$$x = (\Delta l - I_{cm}) \cos \sqrt{\frac{g}{I_{cm}}} t + J_0 \sqrt{\frac{I_{cm}}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{I_{cm}}} t .$$

Для того чтобы привести его к амплитудной форме, нужно определить:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} ;$$

$$\sin a = \frac{C_1}{A} ;$$

$$\cos a = \frac{C_2}{A} .$$

Пример 2. При равновесном спуске груза (рис.7.4) массы $m=2000$ кг со скоростью $J_0 = 5$ м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $c = 4 \cdot 10^6$ Н/м .

$$\begin{aligned}
 m &= 2000 \text{ кг} ; \\
 J_0 &= 5 \text{ м}^2/\text{с} ; \\
 c &= 4 \cdot 10^6 \text{ Н/м} ;
 \end{aligned}$$

$F - ?$

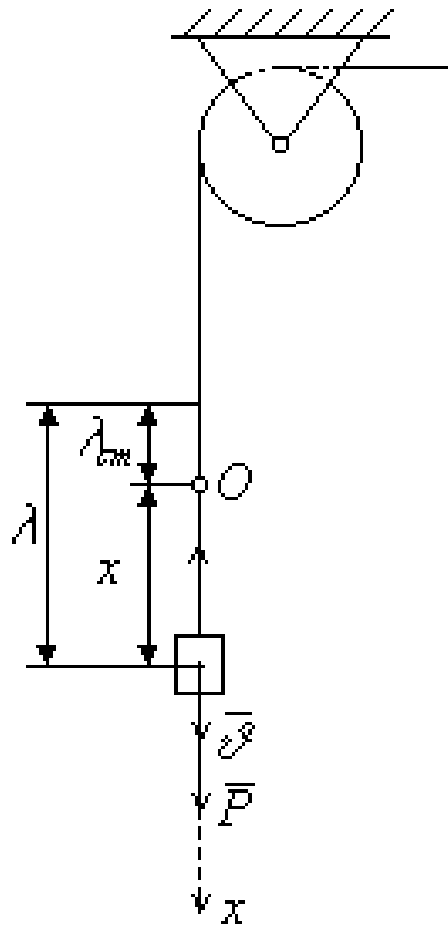


Рисунок 7.4

Решение.

Число степеней свободы $n=1$;

Обобщенная координата $q=x$;

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} ; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{m2\dot{x}}{2} = m\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} ; \Pi = \frac{c(x+l_{cm})^2}{2} - Px ;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = c(x+l_{cm}) - P ;$$

$$c l_{cm} = P ; \frac{\partial \Pi}{\partial x} = cx + c l_{cm} - c l_{cm} = cx ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Rightarrow m \ddot{x} = -cx$$

$$m \ddot{x} + cx = 0; \quad \ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ где } k = \sqrt{c/m},$$

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k} \right)^2} = \sqrt{\frac{J^2 m}{c}} = J \sqrt{\frac{m}{c}},$$

$$F_{\max} = cA = cJ \sqrt{\frac{m}{c}} = J \sqrt{mc} = \\ = 5 \sqrt{20000 \cdot 2 \cdot 10^6} = 10^6 \text{ Н} = 1000 \text{ кН} = 100 \text{ т.с.} \dots$$

7.5 Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы

7.5.1 Линейное сопротивление и диссипативная функция

Если на точки системы с одной степенью свободы кроме потенциальных сил действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа выразится в форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^n + Q^\phi, \quad (7.5)$$

где $Q^n = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$ - обобщенная сила потенциальных сил;

Q^ϕ - обобщенная сила сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления \bar{R}_k точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т.е.

$$\bar{R}_k = -m_k \dot{J}_k = -m_k \dot{x}_k,$$

где m_k - постоянный коэффициент сопротивления.

Обобщенная сила:

$$Q^\phi = \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}, \quad (7.6)$$

Используя тождество Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \Phi},$$

получим:

$$Q^\phi = - \sum_{k=1}^N m_k \left(\bar{r}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \Phi} \right) = - \frac{\partial}{\partial \Phi} \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{r}_k^2}{2}. \quad (7.6a)$$

Введем обозначение:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{r}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{J}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k J_k^2}{2}. \quad (7.7)$$

Функция Φ называется *диссипативной функцией*, или функцией Рэля. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Из уравнения (7.6a) для обобщенной силы сопротивления имеем

$$Q^\phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi}.$$

Выразим функцию Φ через q и Φ . Учитывая, что

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q); \quad \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \Phi,$$

имеем:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{r}_k^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B \Phi^2, \quad (7.7a)$$

где

$$B = B(q) = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2.$$

Функция B зависит только от q и не зависит от \dot{q} , т.к. от \dot{q} не зависит величина $\partial \bar{r}_k / \partial q$.

Для выяснения физического смысла диссипативной функции получим энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого умножим на \dot{q} уравнение Лагранжа (7.5):

$$\dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \dot{q} \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \dot{q}. \quad (7.8)$$

Учитывая, что

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2,$$

имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A(q) \dot{q}, \quad \dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A(q) \dot{q}^2 = 2T. \quad (7.9)$$

Аналогично,

$$\Phi = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2;$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = B(q) \dot{q}, \quad \dot{q} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = B(q) \dot{q}^2 = 2\Phi. \quad (7.10)$$

Потенциальная энергия для случая стационарного потенциального поля зависит от времени только через координату q .

Следовательно,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{d\Pi}{dt} . \quad (7.11)$$

Преобразуем первое слагаемое в уравнении (7.8), учитывая уравнение (7.9).

Имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (2T) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} . \quad (7.12)$$

Подставляя уравнения (7.9) – (7.11) в уравнение (7.8), получим:

$$\frac{d}{dt} (2T) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi . \quad (7.12a)$$

Учитывая, что T – функция только q и \dot{q} , зависящих от t , имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{dT}{dt} .$$

После переноса $-\frac{d\Pi}{dt}$ в левую часть уравнения (7.12a) и объединения слагаемых получаем:

$$\frac{d}{dt} (2T - T + \Pi) = -2\Phi ,$$

или

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = -2\Phi .$$

Если ввести полную механическую энергию $E = T + \Pi$, то окончательно имеем энергетическое соотношение:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi. \quad (7.13)$$

Т.е., *диссипативная функция Φ характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления*. На убывание E указывает знак минус в уравнении (7.13). Функция Φ , согласно уравнению (7.7), является величиной положительной.

Разложим Φ в ряд в окрестности положения равновесия системы. Для этого в соответствии с уравнением (7.7а) следует разложить в ряд по степеням q функцию $B(q)$ в окрестности $q=0$. Имеем:

$$B(q) = B(0) + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

Подставляем это разложение в (7.7а) и оставляя в нем только $B(0)$, получаем:

$$\Phi = \frac{1}{2} B(0) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad (7.14)$$

где введено обозначение $m = B(0)$. Положительная постоянная величина m называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

7.5.2 Дифференциальное уравнение собственных движений при действии линейного сопротивления

Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии и диссипативной функции:

$$T = \frac{a \dot{q}^2}{2}; \quad \Pi = \frac{c q^2}{2}; \quad \Phi = \frac{m \dot{q}^2}{2}.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа, получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi},$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \ddot{q}; \quad Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq,$$

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q} = -m\dot{q},$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$a \ddot{q} = -cq - m\dot{q}.$$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все слагаемые второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на a и ввести обозначение $k^2 = \frac{c}{a}$, $2n = \frac{m}{a}$, то получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (7.15)$$

Постоянная $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина $n = \frac{m}{2a}$ называется **коэффициентом затухания** $[n] = [k] = c^{-1}$. Вместо n иногда употребляют величину $t_0 = \frac{1}{n}$, которая называется **постоянной времени затухания** и имеет размерность времени.

7.5.3 Интегрирование дифференциального уравнения движения

Дифференциальное уравнение (7.15) – однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение

следует искать в форме $q = e^{lt}$, где постоянная l определяется из характеристического уравнения $l^2 + 2nl + k^2 = 0$. Корни его:

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (7.16)$$

Могут представиться *три случая*: 1) $n < k$ – случай малого сопротивления; 2) $n > k$ – случай большого сопротивления; 3) $n = k$ – случай критического сопротивления.

1 Затухающие колебания ($n < k$).

Обозначим $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$, тогда:

$$l_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Решение уравнения (7.15) запишется в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (7.17)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Решение (7.16) можно представить в другой, амплитудной, форме:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + a), \quad (7.18)$$

где A и a – тоже постоянные интегрирования.

Рассматривая синус суммы, имеем:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + a) = e^{-nt} (A \sin a \cdot \cos k_1 t + A \cos a \cdot \sin k_1 t),$$

т.е.

$$C_1 = A \sin a; \quad C_2 = A \cos a,$$

или

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \sin a = \frac{C_1}{A}; \quad \cos a = \frac{C_2}{A}; \quad \operatorname{tga} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (7.19)$$

Постоянные C_1 , C_2 и, соответственно, A и a определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\phi=\phi_0$.

Дифференцируя уравнение (7.17) по времени, имеем:

$$\dot{\phi} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t). \quad (7.20)$$

Используя выражение (7.17) для q , а выражение (7.20) – для $\dot{\phi}$ при $t=0$ получаем уравнения для определения C_1 и C_2 :

$$q_0 = c; \quad \dot{\phi}_0 = -nC_1 + kC_2.$$

Из них

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\phi}_0 + nq_0}{k_1} = \frac{\dot{\phi}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Соответственно, A и a через начальные условия выразятся в следующей форме:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{\phi}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}},$$

$$\sin a = \frac{q_0}{A}; \quad \cos a = \frac{\dot{\phi}_0 + nq_0}{A\sqrt{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg} a = \frac{q_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{\phi}_0 + nq_0}. \quad (7.21)$$

Величина A положительна. Она является амплитудой, $0 \leq a \leq 2\pi$.

График функции (7.18) рассмотрим между кривыми $q_1 = Ae^{-nt}$ и $q_2 = Ae^{-nt}$ (см. рис. 7.5).

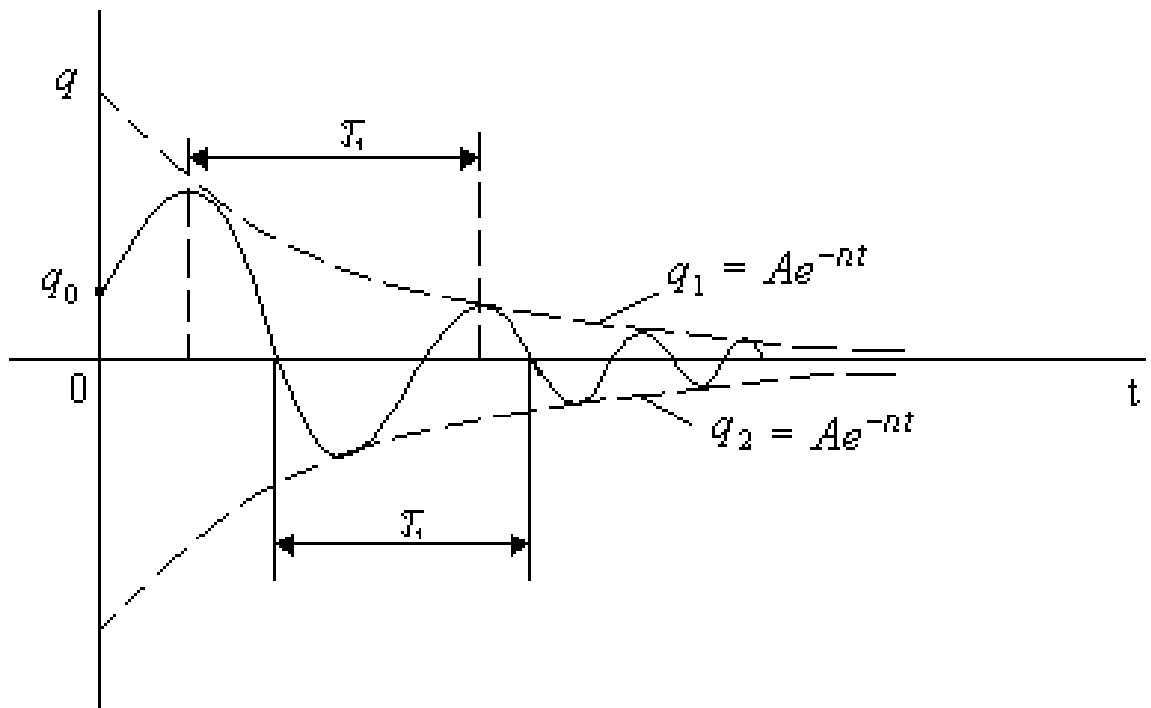


Рисунок 7.5

Условным периодом затухающих колебаний называют величину

$$t_1 = \frac{2p}{k_1} = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (7.22)$$

где t_1 - постоянная, не зависящая от начальных условий.

Разлагая t_1 в ряд по степеням $\frac{n}{k}$ с использованием бинома Ньютона, имеем:

$$t_1 = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2p}{k} \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = t \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{k^2} + \dots\right). \quad (7.22a)$$

Для очень малых $\frac{n}{k}$ можно считать $t_1 \approx t$.

В действительности функция $q(t)$ не является периодической, т.к. не существует величины t_1 , удовлетворяющей условию периодичности $q(t + t_1) = q(t)$ для любого момента времени.

Определим моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимальных и минимальных значений. В эти моменты времени $\dot{q}(t) = 0$.

Дифференцируя выражение $q(t)$ из уравнения (7.18) и приравнявая нулю производную, получим следующее уравнение:

$$\dot{q} = Ae^{-nt} [-n \sin(k_1 t + a) + k_1 \cos(k_1 t + a)] = 0.$$

Т.к. e^{-nt} равно нулю только при $t = \infty$, то соответствующие моменты времени определяются из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках:

$$-n \sin(k_1 t + a) + k_1 \cos(k_1 t + a) = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}(k_1 t + a) = \frac{k_1}{n}.$$

Если t_1 – одно из искоемых значений t , удовлетворяющих этому тригонометрическому уравнению, то, учитывая, что период тангенса равен P , все остальные искоемые значения времени будут удовлетворять соотношению

$$k_1 t + a = (k_1 t_1 + a) + mP,$$

или

$$t = t_1 + m \frac{P}{k_1},$$

где m – любое натуральное число.

Т.о., моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимумов и минимумов, образует бесконечную последовательность значений:

$$t_1 t_2 = t_1 + \frac{p}{k_1}, \quad t_3 = t_1 + 2 \frac{p}{k_1}.$$

Переменную величину $Ae^{-n \cdot t}$ называют *условной амплитудой затухающих колебаний*.

Установим закон изменения условной амплитуды $Ae^{-n \cdot t}$ при изменении времени на период t_1 . Если в момент времени t_1 условной амплитуде $A_1 = Ae^{-n \cdot t_1}$, то через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний t_1 , момент $t_2 = t_1 + t_1$

$$A_2 = Ae^{-n(t_1+t_1)} = Ae^{-n \cdot t_1} e^{-n \cdot t_1} = A_1 e^{-n \cdot t_1}.$$

При $t_m = t_1 + m t_1$

$$A_m = Ae^{-n \cdot t_1} e^{-m \cdot n \cdot t_1} = A_1 e^{-m \cdot n \cdot t_1},$$

или

$$A_{m+1} = Ae^{-n \cdot t_1} e^{-(m+1) \cdot n \cdot t_1} = A_m e^{-n \cdot t_1}.$$

По такому же закону геометрической прогрессии изменяются любые последовательные значения функции

$$q = Ae^{-n \cdot t} \sin(k_1 t + a)$$

для моментов времени, отличающихся друг от друга на условный период:

$$q_1 = Ae^{-n \cdot t_1} \sin(k_1 t_1 + a);$$

$$q_2 = A e^{-n t_1} e^{-n t_1} \sin[k_1(t_1 + t_1) + a] = q_1 e^{n t_1};$$

$$q_{m+1} = q_m e^{-n t_1}.$$

$D = e^{n t_1}$ – декремент колебания.

Логарифмический декремент колебания

$$h = \ln D = n t_1 \quad (7.23)$$

Добротность системы

$$Q = \frac{k}{2n}, \quad (7.24)$$

где k - частота собственных колебаний без учета сопротивления;
 n - коэффициент затухания,

$$h = p \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}. \quad (7.25)$$

2 *Затухающие движения* ($n > k$) (случай большого сопротивления).

В этом случае

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

где $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Оба корня действительны и отрицательны, т.к. $k_2 > n$.

Следовательно, общее решение уравнения (7.15) имеет вид:

$$q = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t} = e^{-n t} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}), \quad (7.26)$$

где постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий $t=0$, $q=q_0$,
 $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Для $q_0 > 0$ в зависимости от знака и значения \dot{q}_0 возможны три случая, представленные на рисунке 7.6: 1) $\dot{q}_0 > 0$; 2) $\dot{q}_0 < 0$, но не очень большое; 3) $\dot{q}_0 < 0$ и достаточно большое.

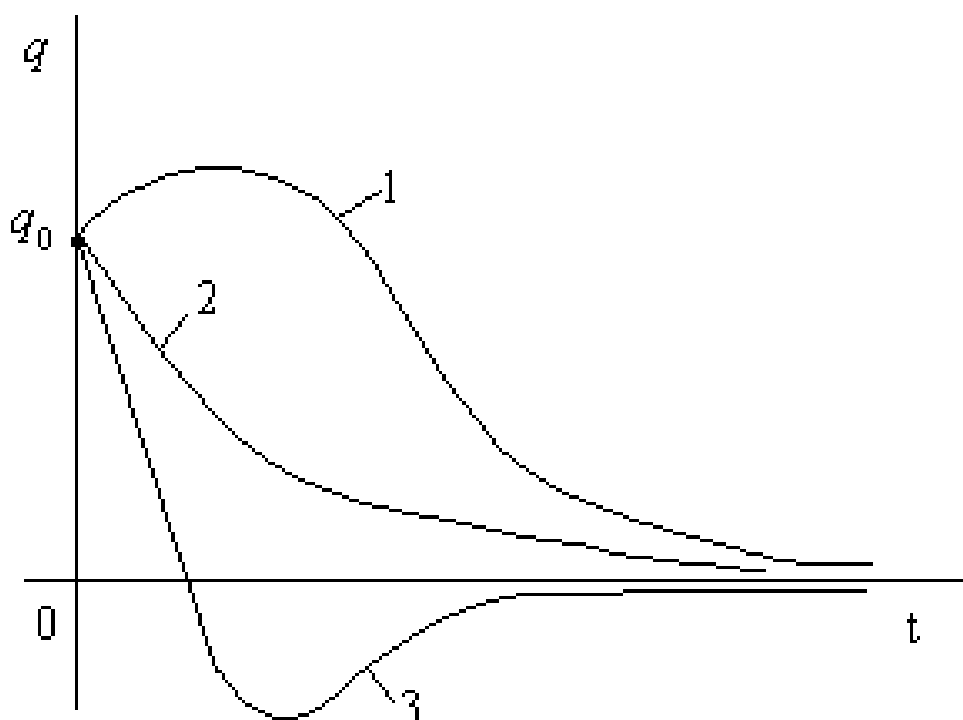


Рисунок 7.6

Такое движение иногда называется *апериодическим*.

3 Случай критического сопротивления ($n = k$).

$$I_1 = I_2 = -n, \quad q = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (7.27)$$

Этот случай также дает затухающее движение.

Итак, при $n \geq k$ движение не является колебательным, и с некоторого момента времени начинается т.н. *имитационное движение*, при котором система асимптотически стремится вернуться в положение равновесия.

Пример. Чувствительный элемент прибора регистрации вертикальных колебаний фундаментов состоит из ломаного рычага с грузом E и оси вращения O . Рычаги удерживаются в равновесном положении, при котором плечо EO горизонтально, вертикально расположенной пружины жесткости C_2 . При этом две одинаковые, горизонтально расположенные пружины жесткости C_1 находятся в недеформированном состоянии. Момент инерции рычага вместе с грузом относительно оси вращения O равен J .

Составить уравнение малых колебаний системы; геометрические размеры указаны на рисунке 7.7.

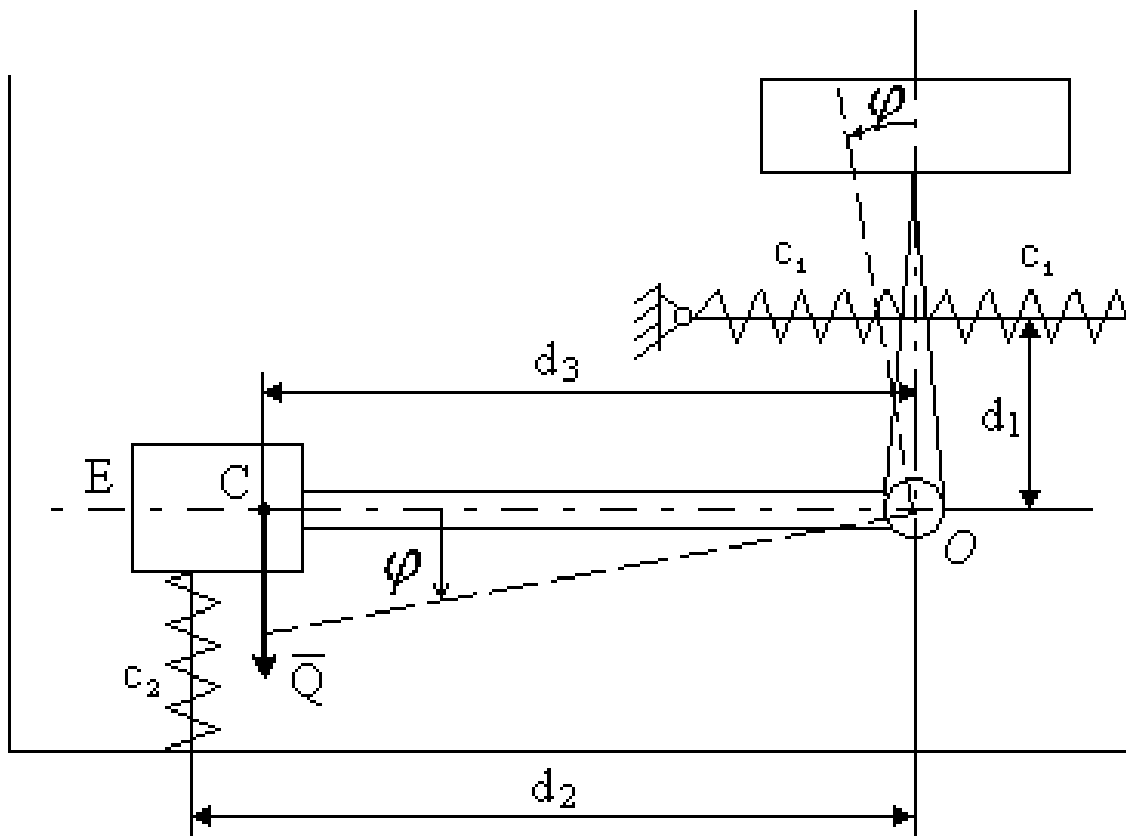


Рисунок 7.7

За обобщенную координату примем угол поворота рычага j . Кинетическая энергия определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} J \dot{j}^2 . \quad (7.28)$$

Пусть масса рычага вместе с грузом равна m , а центр тяжести находится в точке C . Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии Π_1 , силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 трех пружин.

За нулевое положение системы примем ее равновесное положение. Тогда потенциальная энергия Π_1 будет равна работе силы тяжести $Q = mg$ при переходе системы из данного положения в равновесное:

$$\Pi_1 = -Qd_3 \sin j ,$$

где $d_3 = OC$.

Для малых углов

$$\Pi_1 = -Qd_3j \quad (7.29)$$

Обозначим чрез f_{CT} статическую деформацию вертикальной пружины, ее полная деформация при малом угле j будет $f_{CT} + d_2j$. Деформации горизонтальных пружин равны d_1j и $-d_1j$. Теперь найдем

$$\Pi_2 = \frac{C_1(d_1j)^2}{2} + \frac{C_1(-d_1j)^2}{2} + \frac{C_2(f_{CT} + d_2j)^2}{2} - \frac{C_2f_{CT}^2}{2}$$

или

$$\Pi_2 = C_1d_1^2j^2 + \frac{C_2(f_{CT} + d_2j)^2}{2} - \frac{C_2f_{CT}^2}{2} \quad (7.30)$$

Потенциальная энергия системы Π равна:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 &= -Qd_3j + C_1d_1^2j^2 + \frac{C_2f_{CT}^2}{2} + C_1f_{CT}d_2j + \frac{C_2d_2^2j^2}{2} - \frac{C_2f_{CT}^2}{2} = \\ &= (Qd_3 + C_1f_{CT}d_2)j + \frac{1}{2}(2C_1d_1^2 + C_2d_2^2)j^2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

В положении равновесия должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial j} \right)_0 = 0.$$

Для данного примера

$$\left(\frac{d\Pi}{dj} \right)_0 = [(-Qd_3 + C_1f_{CT}d_2) + (2C_1d_1^2 + C_2d_2^2)j]_{j=0} = -Qd_3 + C_1f_{CT}d_2 = 0. \quad (7.32)$$

С учетом уравнения (7.32) выражение (7.31) примет вид:

$$n = \frac{1}{2} (2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) \dot{j}^2, \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial j} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\dot{j}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\ddot{j}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial j} = (2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j. \quad (7.34)$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} - \frac{\partial T}{\partial j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial j}. \quad (7.35)$$

Подставляя уравнение (7.34) в уравнение (7.35), получим:

$$J\ddot{j} = - (2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j, \quad \text{или} \quad J\ddot{j} + \frac{2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2}{J} j = 0. \quad (7.36)$$

Круговая частота k и период колебаний T определяются равенствами:

$$k = \sqrt{\frac{2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2}{J}}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2}}. \quad (7.37)$$

Рассмотрим ту же схему вибрографа (рис. 7.8), но присоединим к нему демпфер D , создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости поршня (рис 7.9). Тогда при малых колебаниях скорость поршня будет равна $b \cdot \dot{j}$, сила сопротивления $-mb\dot{j}$ (m – постоянный коэффициент сопротивления), соответствующая обобщенная сила –

$$Q^\Phi = -mb^2 \dot{j}. \quad (7.38)$$

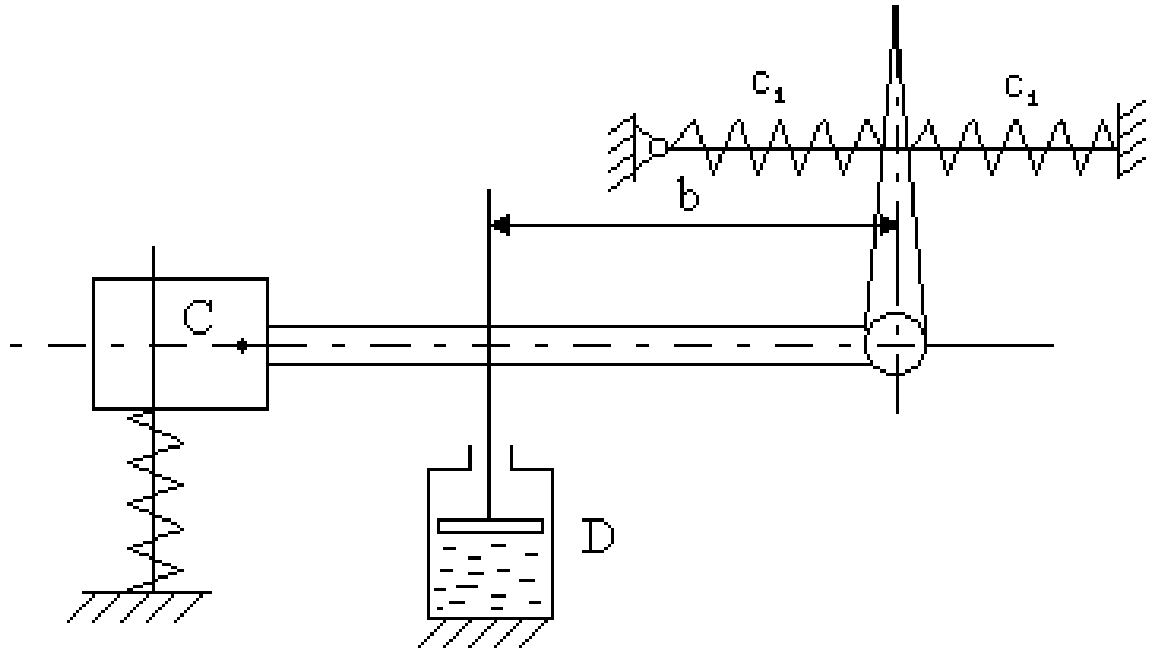


Рисунок 7.8

Полная обобщенная сила: $Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial j} + Q^\phi = -\frac{\partial \Pi}{\partial j} - mb^2 \ddot{j}$.

После подстановки соответствующих величин в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение малых колебаний:

$$J \ddot{j} = -(2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j - mb^2 \ddot{j}, \quad \text{или} \quad \ddot{j} + 2n \dot{j} + k^2 j = 0, \quad (7.39)$$

где k имеет прежнее значение, а $n = \frac{mb^2}{2J}$. Обычно $n < k$, поэтому

общее решение будет $j = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + a)$, $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, что определяет затухающие колебания.

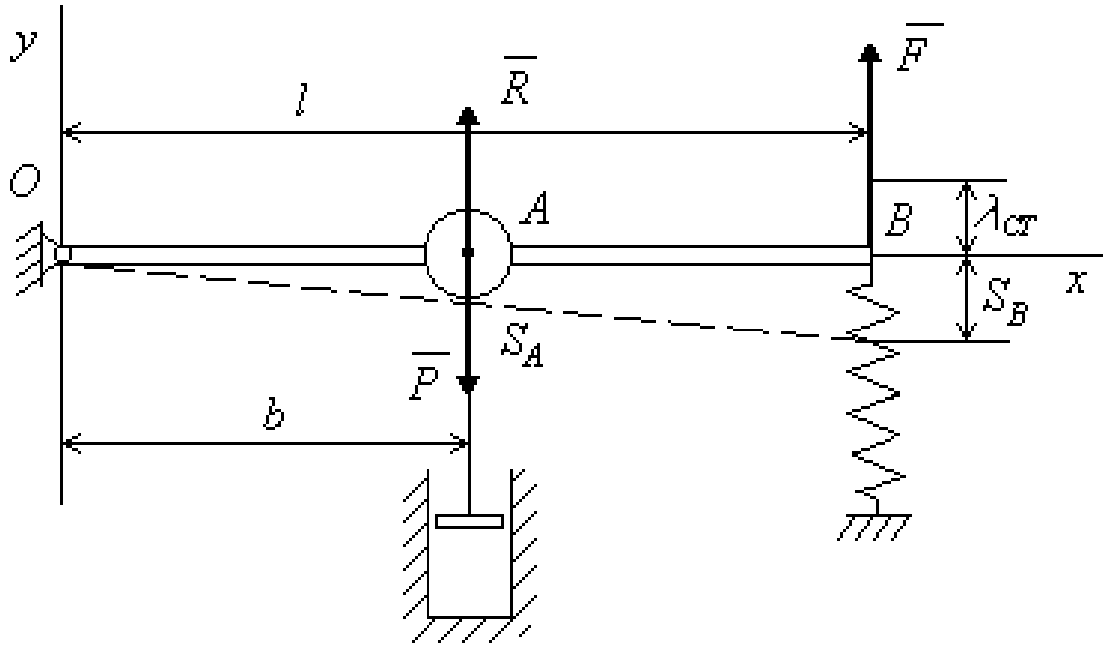


Рисунок 7.9

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} \right) - \frac{\partial T}{\partial j} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}; \quad T = \frac{m_A J_A^2}{2} = \frac{P}{2g} \cdot b^2 \dot{j}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial j} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} \right) = \frac{Pb^2}{g} \ddot{j};$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2; \quad \Pi_1 = -PS_A = -Pbj;$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{-}{2} (I^2 - I_0^2) = \frac{-}{2} [(I_{CT} + S_B)^2 - I_{CT}^2] = \frac{c}{2} [I_{CT}^2 + 2I_{CT}S_B + S_B^2 - I_{CT}^2] = \\ &= cI_{CT}S_B + \frac{cS_B^2}{2}; \end{aligned}$$

$$S_B = l \cdot j \quad n_2 = cI_{CT}lj + \frac{cl^2}{2} j^2;$$

$$\Pi = (cI_{CT}l - Pb)j + \frac{cl^2}{2}j^2;$$

$$\frac{d\Pi}{dj} = (-I_{CT}l - Pb) + cl^2j.$$

При $j = 0$ $\frac{\partial \Pi}{\partial j} = 0$; $(cI_{CT}l - Pb) = 0$;

$$Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial j} = -cl^2j;$$

$$\bar{R} = -aJ_A; \left(\Phi = \frac{m\dot{j}}{2}; \right) \Phi = \frac{aJ_A}{2} = \frac{ab^2j\dot{j}}{2};$$

$$Q^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial j\dot{j}} = -ab^2j\dot{j};$$

$$\frac{Pb^2}{g}j\ddot{j} = -cl^2j - ab^2j\dot{j};$$

$$j\ddot{j} + \frac{ab^2g}{Pb^2}j\dot{j} + \frac{cl^2g}{Pb^2}j = 0; j\ddot{j} + 2nj\dot{j} + k^2j = 0;$$

$$n = \frac{ag}{2P}; k^2 = \frac{cl^2g}{Pb^2}; k = \frac{l}{b} \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Если $n < k$, колебания затухающие.

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2} - \frac{a^2g^2}{4P^2}}.$$

Движение будет аperiodическим, если

$$n \geq k \quad \frac{ag}{2P} \geq \frac{l}{b} \sqrt{\frac{cg}{P}} \quad a \geq \frac{2P}{g} \frac{l}{b} \sqrt{\frac{cg}{P}} = \frac{2l}{b} \sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

Эту задачу можно решить и другим способом.

$$J_Z \ddot{\alpha} = \sum M_Z(\bar{F}_k^e),$$

$$J_Z = mb^2 = \frac{P}{g} b^2; \quad \sum M_Z(F_k^e) = P \cdot b - R \cdot b - F \cdot l;$$

$$\sum M_Z(\bar{F}_k^e) = Pb - a \cdot b^2 \cdot \ddot{\alpha} - c(l_{CT} + l \cdot j) \cdot l.$$

В положении статического равновесия $\sum M_Z(\bar{F}_k^e) = 0$.

$$(j = 0; \ddot{\alpha} = 0) \quad Pb - cl_{CT}l = 0;$$

тогда $\sum M_Z(\bar{F}_k^e) = -ab^2 \ddot{\alpha} - cl^2 j$;

$$\frac{Pb^2}{g} \ddot{\alpha} = -ab^2 \ddot{\alpha} - cl^2 j;$$

$$\ddot{\alpha} + 2n\ddot{\alpha} + k^2 j = 0.$$

7.6 Вынужденные колебания системы без учёта сопротивления

Рассмотрим случай, когда помимо потенциальных сил на материальную систему действует возмущающая сила, зависящая от времени. Соответствующую обобщенную силу обозначим Q^B . Тогда получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t), \quad (7.40)$$

где $F(t) = \frac{Q^B(t)}{a}$ (a - коэффициент инерции).

Предполагаем, что возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, тогда

$$m\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + d), \quad (7.41)$$

где h, p и d - постоянные величины.

Общее решение полученного уравнения:

$$q = q_1 + q_2. \quad (7.42)$$

Решение q_1 называют *собственным колебанием системы*:

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A_1 \sin(kt + a). \quad (7.43)$$

Частное решение q_2 уравнения (7.41) называют *вынужденным колебанием системы*.

Возможны два случая:

1 *Случай отсутствия резонанса* ($p \neq k$).

Решение q_2 следует искать в виде:

$$q_2 = B \sin(pt + d). \quad (7.44)$$

Найдём

$$\dot{q}_2 = Bp \cos(pt + d), \quad \ddot{q}_2 = -Bp^2 \sin(pt + d). \quad (7.45)$$

Подставляя уравнения (7.44) и (7.45) в уравнение (7.41), получаем:

$$B(k^2 - p^2) \sin(pt + d) = h \sin(pt + d),$$

откуда

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} \text{ и } q_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + d), \quad (7.46)$$

таким образом,

$$q = q_1 + q_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + d), \quad (7.47)$$

или в амплитудной форме

$$q = A_1 \sin(kt + a_1) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + d). \quad (7.48)$$

Производные от уравнений (7.47) и (7.48):

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + d) \quad (7.49)$$

или

$$\dot{q} = A_1 k \cos(kt + a_1) + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + d).$$

Постоянные C_1 и C_2 или A_1 и a_1 определяются из начальных условий $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ подстановкой их в уравнения (7.47) – (7.49).

$$q_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin d; \quad \dot{q}_0 = C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos d.$$

Отсюда

$$C_1 = q_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin d; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \cos d.$$

Амплитуда собственных колебаний A_1 и начальная фаза a_1 через C_1 и C_2 выражаются формулами:

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} a = \frac{C_1}{C_2}.$$

Следовательно, A_1 и a_1 зависят не только от начальных условий, но и от параметров возмущающей силы, т.е. собственные колебания могут

возникать при нулевых начальных условиях благодаря действию возмущающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A_2 = \frac{h}{|k^2 - p^2|}.$$

При $p < k$ $q_2 = A_2 \sin(pt + d)$; при $p > k$ $q_2 = -A_2 \sin(pt + d) = A_2 \sin(pt + d - p)$, т.е. при $p > k$ сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы равен $\varepsilon = \pi$.

Вынужденные колебания без сопротивления при $p \neq k$, возбуждаемые гармонической возмущающей силой, являются гармоническими колебаниями с постоянной амплитудой. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Они не зависят от начальных условий.

2 *Случай резонанса ($p = k$).*

Решение ищем в форме:

$$q_2 = Bt \cos(pt + d); \quad (7.50)$$

$$\ddot{q}_2 = B \cos(pt + d) - Bpt \sin(pt + d);$$

$$\ddot{q}_2 = -Bp \sin(pt + d) - Bp \sin(pt + d) - Bp^2 t \cos(pt + d);$$

$$-2Bp \sin(pt + d) - Bp^2 t \cos(pt + d) + k^2 Bt \cos(pt + d) = h \sin(pt + d);$$

$$B = -\frac{h}{2p};$$

$$q_2 = -\frac{ht}{2p} \cos(pt + d) = \frac{ht}{2p} \sin\left(pt + d - \frac{p}{2}\right). \quad (7.51)$$

Видно, что амплитуда $A_2 = \frac{ht}{2p}$ увеличивается пропорционально времени (рис. 7.10), а сдвиг фаз равен $\frac{p}{2}$.

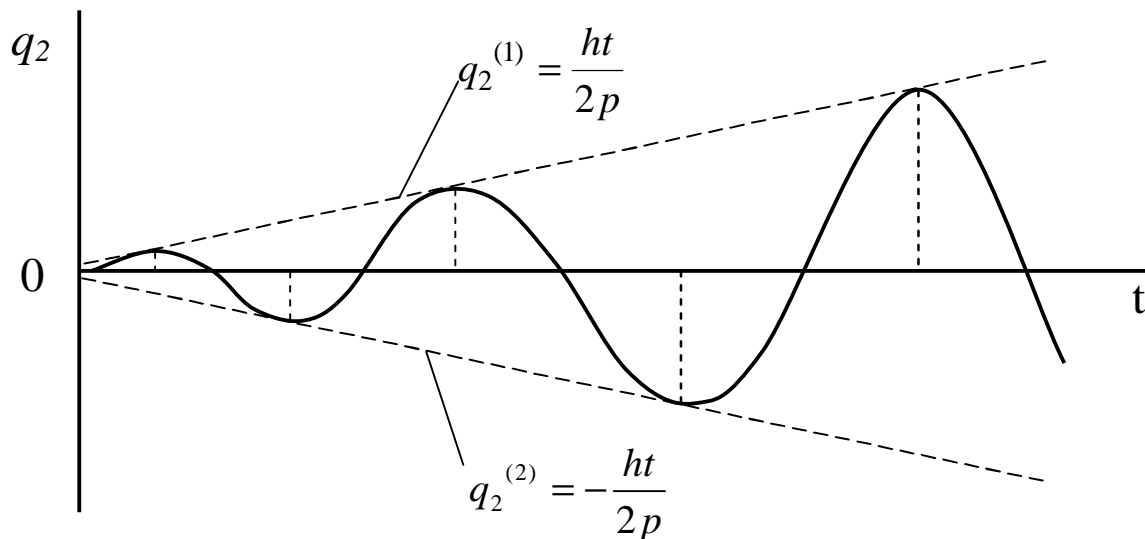


Рисунок 7.10 – График вынужденных колебаний

Построим для вынужденных колебаний графики (рис. 7.11) амплитуды и сдвига фаз в зависимости от круговой частоты возмущающей силы. Имеем:

$$A_2 = \frac{h}{|k^2 - p^2|}, \quad \text{или } p^1 k,$$

или

$$\frac{A_2}{A_{20}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|},$$

где введено обозначение $A_{20} = \frac{h}{k^2}$.

$$m = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|} - \text{коэффициент динамичности.}$$

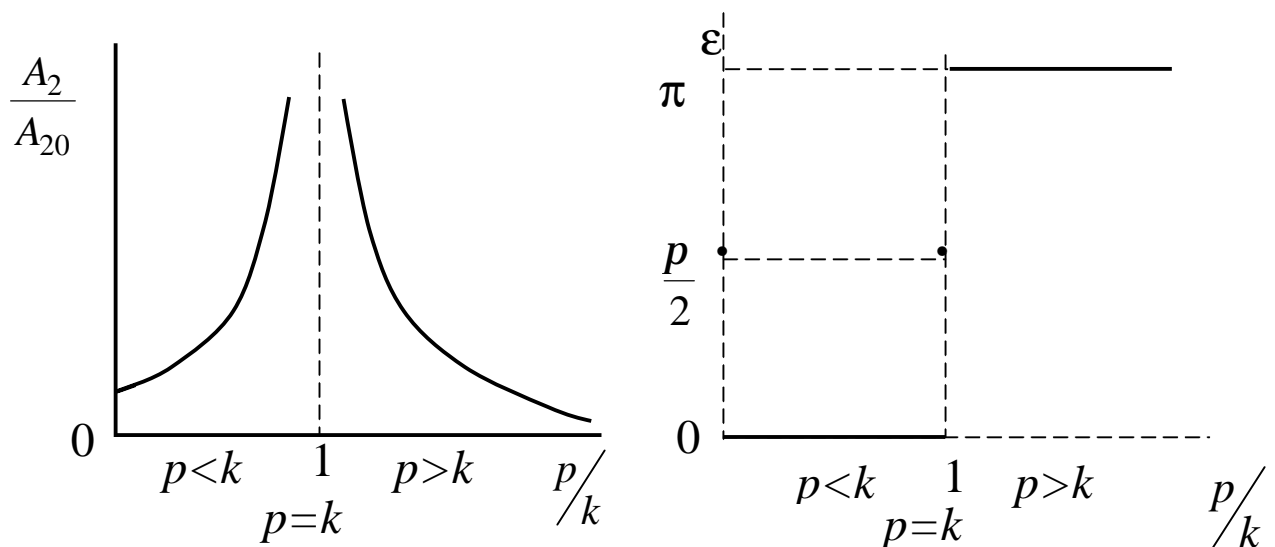


Рисунок 7.11

Пример

Кулиса Вульфа (рис. 7.12). Кривошип CD равномерно вращается вокруг оси C и сообщает кулисе AB поступательное движение согласно уравнению $x_1 = r \sin \omega t$, где $r = CD = 10$ см; $\omega = 5$ с⁻¹. К кулисе прикреплена пружина, поддерживающая груз M весом $G = 4$ Н. Коэффициент жесткости пружины $c = 0,2$ Н/см. Определить вынужденные колебания груза.

Решение

При колебаниях кулисы AB груз M также совершает колебательное движение по вертикали. При этом абсолютное движение груза состоит из его переносного движения вместе с кулисой и относительного движения по отношению к кулисе.

Начало координат O находится в положение покоя груза, соответствующее статическому удалению f_{cm} пружины, при условии, что кулиса занимает среднее положение A_0B_0 . В произвольный момент времени удлинение пружины равно $f_{cm} + (x - x_1)$. Сила упругости пружины:

$$F_x = -c(f_{cm} + x - x_1).$$

В положении статического равновесия $cf_{cm} = G$.

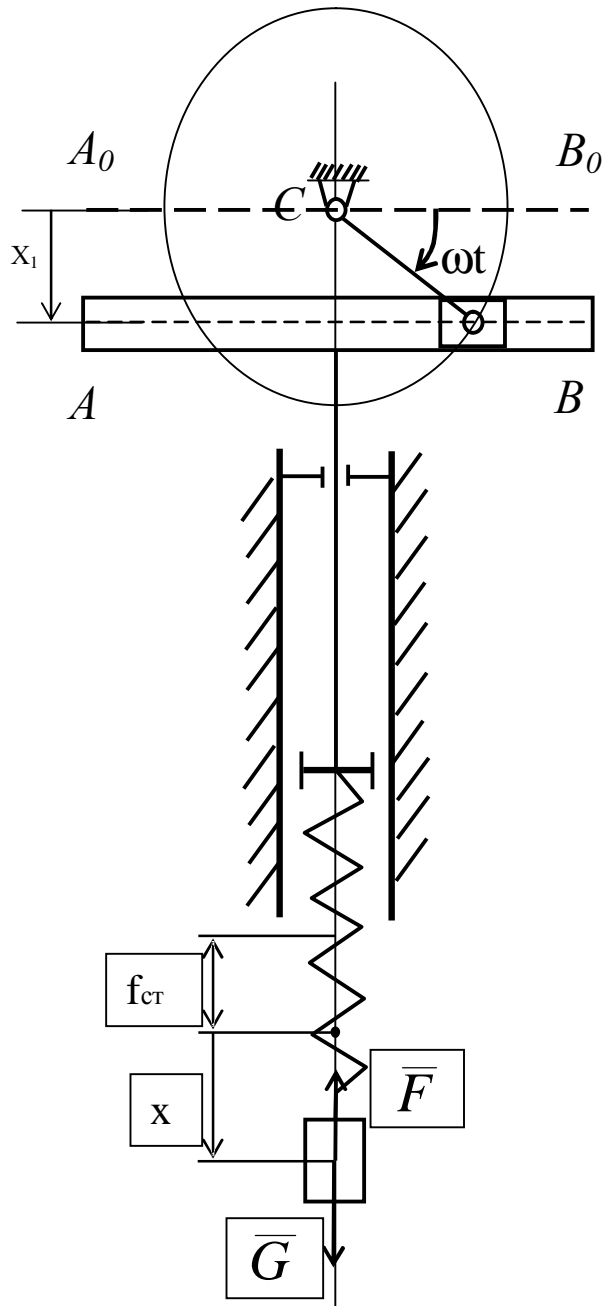


Рисунок 7.12

Дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -c(f_{cm} + x - x_1),$$

ИЛИ

$$m\ddot{x} = -cx + cr \sin \omega t; \quad \ddot{x} + k^2 x = h \sin \omega t,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 7 \text{ с}^{-1}$; $h = \frac{cr}{m} = 490 \text{ см/с}^{-2}$.

Уравнение вынужденных колебаний

$$x_2 = B \sin(pt + d);$$

$$B = \frac{k}{k^2 - p^2} = \frac{490}{49 - 25} = 20,4 \text{ см};$$

$$p = w = 5 \text{ с}^{-1}; d = 0,$$

тогда $x_2 = 20,4 \sin 5t$ (см).

Период и частота колебаний груза равны периоду и частоте колебаний кулисы. Амплитуда колебаний груза больше амплитуды колебаний кулисы (зависит от p и k).

Примеры вынужденных колебаний без учета сил сопротивления

Индикатор давления ($p \ll k$) (рис.7.13). Вынужденные колебания при частоте возмущающей силы, значительно ниже резонансной, характеризуются тем, что амплитуда таких колебаний почти не отличается от статического перемещения, создаваемого максимальной возмущающей

силой. Отношение $\frac{p}{k}$ будет мало, и $\mu \approx 1$. Тогда ординаты записи на барабан можно считать пропорциональными давлению. Общие требования к индикатору: легкость поршня и жесткая пружина, что дает высокую частоту.

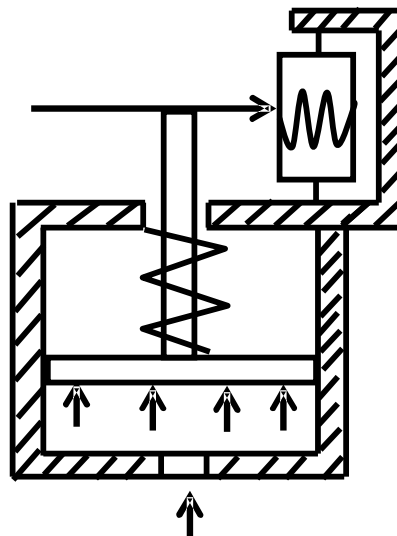


Рисунок 7.13

Виброграф ($p \gg k$) (рис.7.14). Частота вынужденных колебаний значительно выше резонансной, отношение $\frac{p}{k}$ велико. Амплитуды таких колебаний небольшие. Между возмущающей силой и вынужденными колебаниями сдвиг фаз равен p . В приборе на мягких пружинах подвешен тяжелый груз. Рамка прикреплена к колеблющемуся вертикально телу. Собственная частота прибора очень низка по сравнению с возмущающей частотой. Груз G будет практически находиться в пространстве на одном месте. Тогда измерительный прибор покажет достаточно точно абсолютное значение вертикального перемещения рамки. **Поместить рис.7.14.**

Подвешивание на рессорах ($p \gg k$) (рис.7.15). Возмущающая сила высокой частоты практически не создает колебаний системы с низкой частотой ($\frac{p}{k}$ велико, амплитуда вынужденных колебаний будет мала).

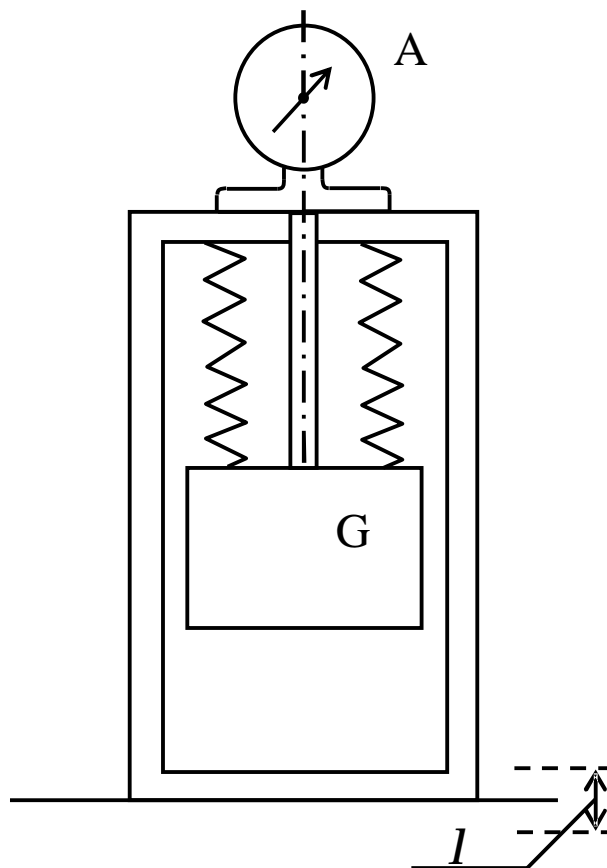


Рисунок 7.14 - Виброграф

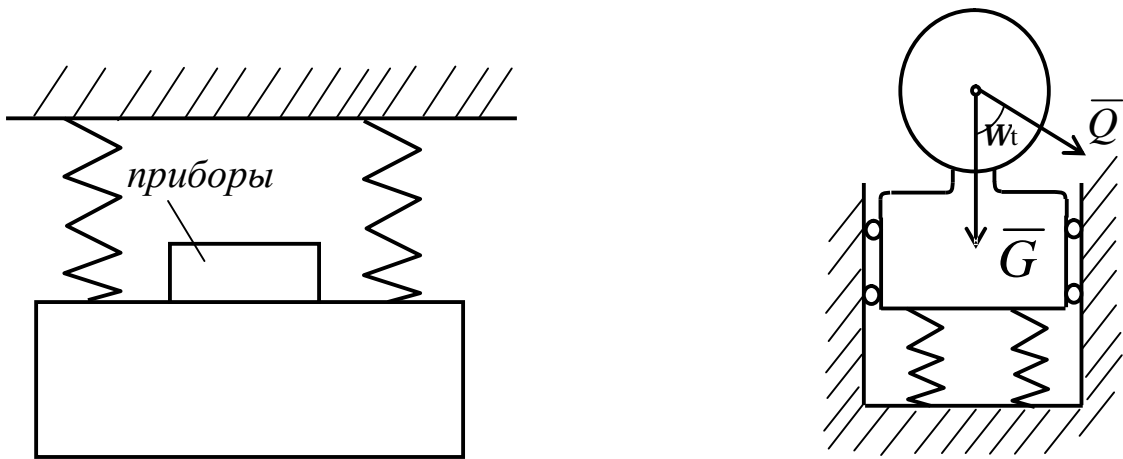


Рисунок 7.15 – Подвешивание на рессорах

Тахометр Фрама (резонанс ($p=k$)) (рис.7.16). Груз, собственная частота которого близка к частоте колеблющегося тела, будет колебаться с большей амплитудой, чем другие грузы.

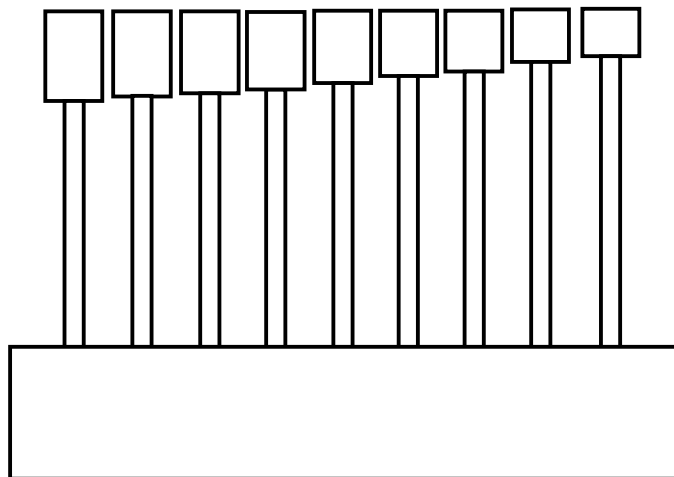


Рисунок 7.16 – Тахометр Фрама

Вибратор (рис.7.17). Применяется при определении собственной частоты колебания мостов, зданий и др. больших строений.

Можно использовать для испытания больших конструкций. Небольшим вибратором можно разрушить большую конструкцию.

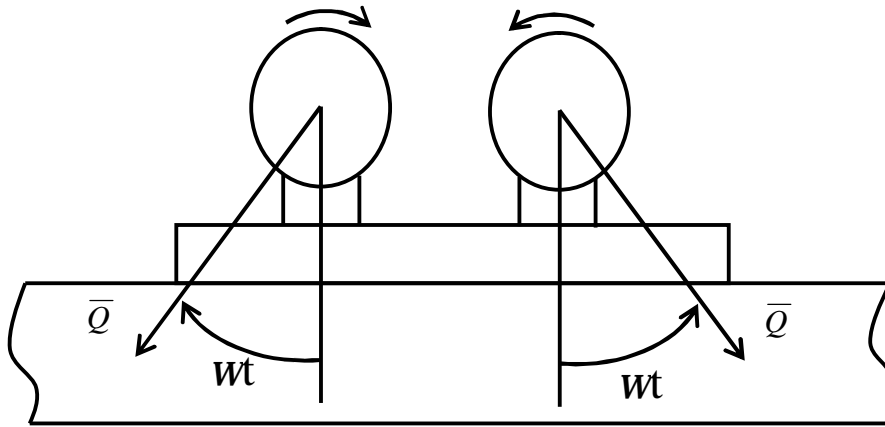


Рисунок 7.17 - Вибратор

Виброграф Гейгера (рис.7.18). В равновесном состоянии маятник занимает горизонтальное положение; $OC=a$; $OB=b$. Вес груза равен P .

В равновесном положении

$$P_a - F_0 b = 0. \quad (7.52)$$

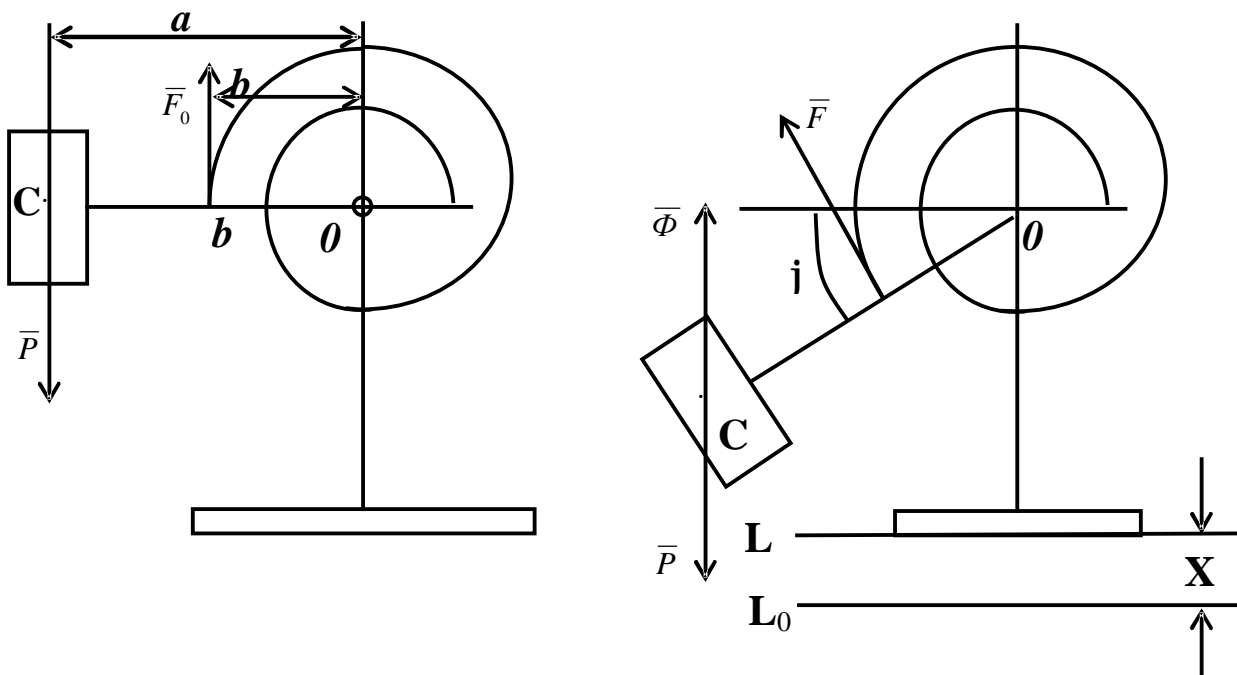


Рисунок 7.18 – Виброграф Гейгера

Прибор помещен на горизонтальной плоскости L , совершающей вертикальные колебания около некоторого среднего положения L_0 .

Можно ли считать колебания маятника достаточно точной регистрацией колебаний самой плоскости L ?

Решение

Абсолютное движение маятника складывается из переносного движения вместе со штативом и относительного движения по отношению к штативу. Интересующее нас вращательное движение маятника и является этим относительным движением.

К относительному движению можно применить все законы динамики, имеющие место в абсолютном движении, при условии присоединения к действующим силам соответствующих сил инерции. Переносное движение – поступательное. Сила инерции $\bar{\Phi} = -m\bar{a}_e$; $\Phi = m\ddot{x}$

Дифференциальное уравнение движения маятника:

$$J\ddot{\alpha} = \sum M_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum M_0(\bar{\Phi}_k);$$

$$J\ddot{\alpha} = P \cdot a \cos j - F \cdot b - \Phi \cdot a \cos j .$$

Для малых углов $\sin j = j$, $\cos j = 1$, тогда

$$J\ddot{\alpha} = Pa - Fb - Fa . \tag{7.53}$$

Сила упругости пружины определяется по формуле

$$F = F_0 + cj . \tag{7.54}$$

Следовательно,

$$J\ddot{\alpha} = Pa - F_0b - cbj - Fa ,$$

или, с учетом уравнения (7.52),

$$J\ddot{\alpha} + cbj = -Fa . \tag{7.55}$$

Предположим, $x = D \sin(pt + d)$, (7.56)

$$\ddot{x} = Dp \cos(pt + d); \dot{x} = -Dp^2 \sin(pt + d);$$

$$\Phi = mDp^2 \sin(pt + d). \tag{7.57}$$

Подставляя уравнение (7.57) в уравнение (7.55) и деля на J , получим:

$$J\ddot{\phi} + \frac{cb}{J}\dot{\phi} = -\frac{mDp^2 a}{J}\sin(pt + d),$$

или

$$\ddot{\phi} + k^2\dot{\phi} = h\sin(pt + d).$$

Собственная круговая частота $k = \sqrt{\frac{cb}{J}}$; $h = -\frac{mDp^2 a}{J}$.

Пренебрегая собственными колебаниями маятника, затухающими вследствие имеющихся в приборе трений, получим уравнение вынужденных колебаний:

$$\dot{\phi} = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{mDa}{J(1 - \frac{k^2}{p^2})}. \quad (7.58)$$

Принимая $J = ma^2$ и учитывая, что $p \gg k$, получим:

$$A_2 = \dot{\phi}_{\max} \approx \frac{mDa}{ma^2} = \frac{D}{a},$$

что соответствует амплитуде колебаний плоскости L .

7.7 Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания

7.7.1 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его интегрирование

Рассмотрим случай, когда обобщенная сила Q состоит из трех сил: потенциальной силы $Q^n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq$; линейного сопротивления

$Q^\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}} = -m\dot{\phi}$ и гармонической возмущающей силы

$Q^B = H \sin(pt + d)$. Подставляя это значение обобщенной силы

$Q = Q^n + Q^\phi + Q^B$ в уравнение Лагранжа, получаем:

$$a\ddot{q} + m\dot{q} + cq = H \sin(pt + d),$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin(pt + d), \quad (7.59)$$

где $k^2 = \frac{c}{a}$ - круговая частота собственных колебаний;

$n = \frac{m}{2a}$ - коэффициент затухания;

$h = \frac{H}{a}$ - относительная амплитуда возмущающей силы.

Решение уравнения $q = q_1 + q_2$.

Здесь q_1 - общее решение однородного уравнения, его называют **собственным движением**;

q_2 - частное решение неоднородного уравнения, называемое **вынужденным колебанием**.

Величину q называют **общим вынужденным движением (или вынужденным колебанием)**.

При $n < k$: $q_1 = A_1 e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + a_1);$

$n = k$: $q_1 = e^{-nt} (C_1 t + C_2);$

$n > k$: $q_1 = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}).$

Решение q_2 ищем в форме $q_2 = A \sin(pt + d - e)$.

$$\ddot{q}_2 = A p^2 \cos(pt + d - e); \quad \dot{q}_2 = -A p^2 \sin(pt + d - e).$$

Подставим производные в уравнение (7.59):

$$\begin{aligned} -A p^2 \sin(pt + d - e) + 2A n p \cos(pt + d - e) + A k^2 \sin(pt + d - e) = \\ = h \sin(pt + d). \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\begin{aligned} h \sin(pt + d) &= h \sin[(pt + d - e) + e] = \\ &= h \sin e \cos(pt + d - e) + h \cos e \sin(pt + d - e). \end{aligned}$$

После подстановки получим:

$$\begin{aligned} &[A(k^2 - p^2) - h \cos e] \sin(pt + d - e) + \\ &+ [2Anp - h \sin e] \cos(pt + d - e) = 0. \end{aligned}$$

Т.к. синус и косинус переменного аргумента не равны нулю одновременно, то тождество может выполняться только тогда, когда каждая из постоянных в квадратных скобках равна нулю, т.е.

$$A(k^2 - p^2) = h \cos e; \quad 2Anp = h \sin e.$$

Откуда

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}};$$

$$\sin e = \frac{2Anp}{h};$$

$$\cos e = \frac{A(k^2 - p^2)}{h};$$

$$\operatorname{tge} = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Из формулы для $\sin e$ следует, что $\sin e > 0$, следовательно, $0 \leq e \leq \pi$, поэтому для определения e достаточно только tge .

Итак,
$$q_2 = A \sin(pt + d - e), \quad (7.60)$$

$$\text{где } A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}}; \quad \operatorname{tge} = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad 0 \leq e \leq p. \quad (7.61)$$

7.7.2 Основные свойства вынужденных колебаний

Вынужденные колебания не затухают. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Вынужденные колебания и при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий.

Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частот собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания. Чем больше коэффициент затухания, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний.

Достаточно сколь угодно малого сопротивления, чтобы амплитуда вынужденных колебаний при резонансе была постоянной.

7.7.3 Исследование вынужденных колебаний

Постоянную величину $q_2 = \frac{h}{k^2}$ называют **статическим смещением** (которое соответствует отклонению от положения равновесия под действием постоянной силы H). $A_0 = \frac{h}{k^2}$ можно считать “амплитудой” вынужденных колебаний под действием постоянной возмущающей силы.

Величину $\frac{A}{A_0}$ называют **коэффициентом динамичности**:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \cdot \frac{1}{h/k^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4b^2 z^2}}, \quad (7.62)$$

где $z = \frac{p}{k}$ - **коэффициент расстройки**, или относительная частота возмущающей силы;

$b = \frac{n}{k}$ - **относительный коэффициент затухания**.

Из уравнения (7.47) следует, что при любом b , когда $z = \frac{p}{k} \rightarrow \infty$, $\frac{A}{A_0} \rightarrow 0$ или $A \rightarrow 0$. В этом случае действие возмущений с большой час-

тотой не воспринимается колеблющейся системой и не нарушает режима собственных колебаний (пример - виброизоляция).

Введем функцию $f(z) = (1 - z^2)^2 + 4b^2 z^2$.

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}. \quad (7.62a)$$

Очевидно, что когда $f(z)$ достигает максимума, то $\frac{A}{A_0}$ имеет минимум, и наоборот.

Для определения экстремальных значений вычислим производные по z :

$$f'(z) = -4z(1 - z^2) + 8b^2 z = -4z(1 - 2b^2 - z^2);$$

$$f''(z) = -4z(1 - z^2) + 8z^2 + 8b^2 = 8z^2 - 4(1 - 2b^2 - z^2).$$

Из условия экстремума $f'(z) = 0$, получаем:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2b^2}.$$

Т.к. относительная частота может быть только положительной и равна нулю для постоянной возмущающей силы, то $1 - 2b^2 > 0$; следовательно, $b < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$. Для таких b $f''(z) < 0$ при $z = z_1$; а поэтому функция $f(z)$ достигает максимума, а коэффициент динамичности – минимума. Для $z = z_2 = \sqrt{1 - 2b^2}$, наоборот, $f''(z) > 0$, и, следовательно, $f(z)$ имеет минимум, а коэффициент динамичности – максимум.

Для значений b , при которых $1 - 2b^2 = 0$ ($b = \frac{\sqrt{2}}{2}$), имеем $z_1 = z_2 = 0$ и $f''(z) = 0$. Дополнительные исследования третьей и четвертой производных показывают, что в этом случае $f(z)$ при $z = 0$ достигает \min , а коэффициент динамичности имеет \max . Других экстремальных значений $f(z)$ не имеет.

Если $1 - b^2 < 0$, то z_2 становится чисто мнимым. Это можно интерпретировать как отсутствие других значений z_1 , кроме $z = 0$, при которых $f(z)$ достигает экстремума. При $z = 0$ $f(z) = \min$,

$a \quad \frac{A}{A_0} = \max.$ С увеличением z коэффициент динамичности при $1 - 2b^2 \leq 0$ монотонно убывает от своего максимума при $z=0$ до нуля при $z \rightarrow \infty$.

Результаты исследования коэффициента динамичности изображены графически в виде т.н. резонансных кривых, или *амплитудно-частотной характеристики системы* (рис. 7.19).

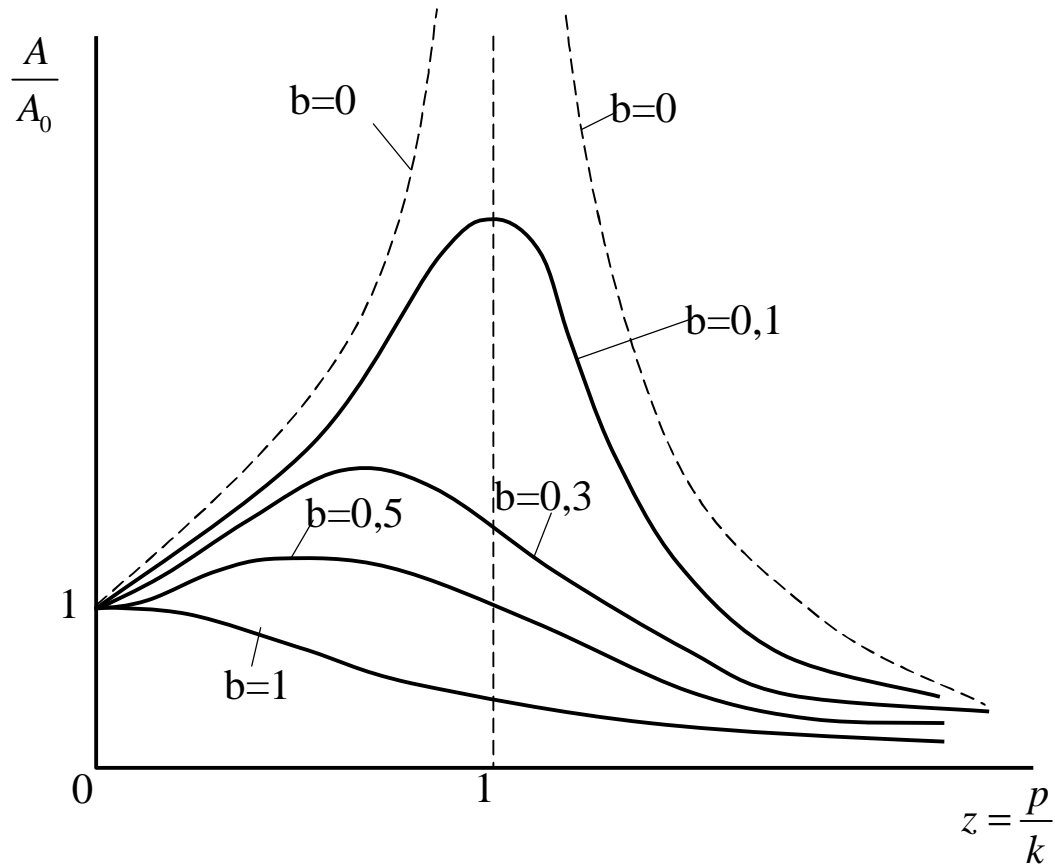


Рисунок 7.19

A_{max} находим, подставляя $z_2 = \sqrt{1 - 2b^2}$ в уравнение (7.62), что соответствует критическому значению круговой частоты возмущающей силы.

$$P_{кр} = k \sqrt{1 - 2 \frac{n^2}{k^2}} = \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

Поэтому

$$A_{max} = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - z_2^2)^2 + 4b^2 z_2^2}} = \frac{h}{2n \sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{A_0}{2b \sqrt{1 - b^2}}.$$

Для малых b по сравнению с единицей приближенно

$$A_{\max} \approx \frac{A_0}{2b}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$ получается из уравнения (7.47) при $z = 1$:

$$A_{рез} = \frac{h}{2nk} = \frac{A_0}{2b} < A_{\max},$$

т.е. амплитуда вынужденных колебаний при резонансе меньше максимальной амплитуды, которая достигается при $P_{кр} = \sqrt{k^2 - 2n^2}$.

Исследуем *влияние линейного сопротивления на сдвиг фаз*. В соответствии с уравнением (7.61),

$$tge = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2bz}{1 - z^2}, \quad 0 \leq e \leq p. \quad (7.61a)$$

Тангенс сдвига фаз e выражается простой зависимостью от z . Учтем, что:

- при $z < 1$ $e = 0$;
- при $z = 1$ $e = \pi/2$;
- при $z > 1$ $e = \pi$.

Из уравнения (7.61a) следует, что при $z = 0$ $tge = 0$ и $e = 0$.

График изменения сдвига фаз (фазо-частотная характеристика системы) в зависимости от относительной частоты z возмущающей силы для фиксированных значений относительного коэффициента затухания b представлен на рисунке 7.20.

Сдвиг фаз при резонансе не зависит от линейного сопротивления. Он равен $\frac{p}{2}$.

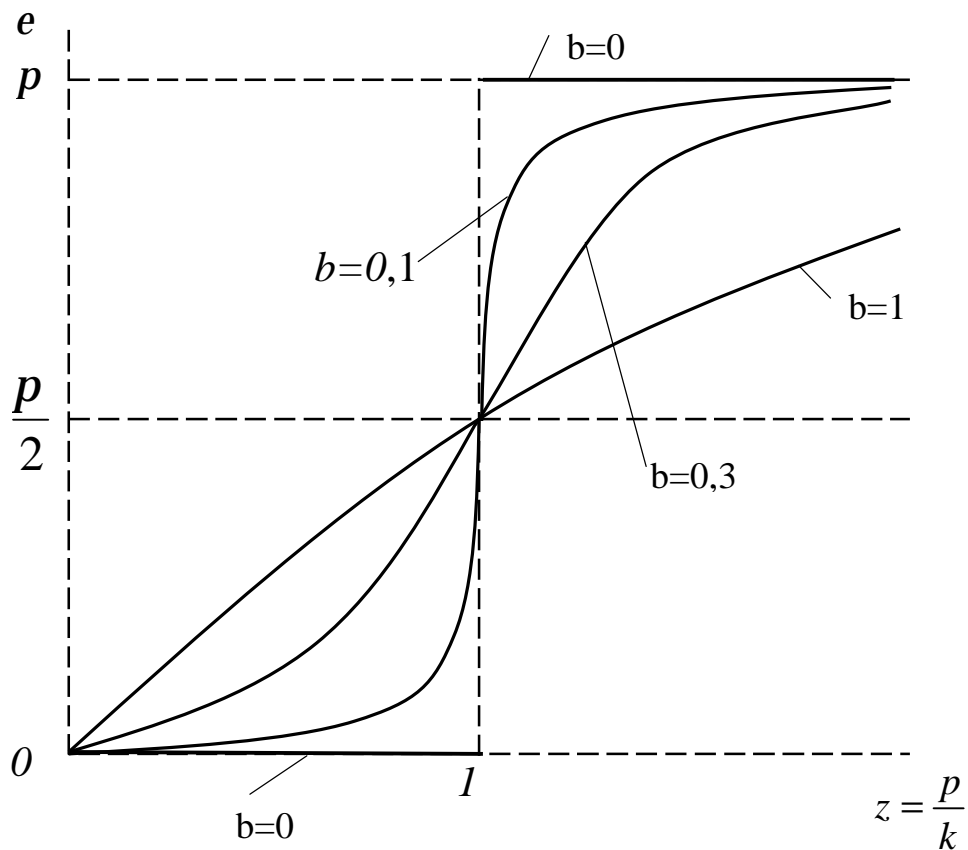


Рисунок 7.20

7.7.4 Общие свойства вынужденных колебаний

1 Вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими, т.е. амплитуда их постоянна, как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

2 Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

3 Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий, так же, как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

4 Амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю быстрее при линейном сопротивлении с увеличением относительной частоты возмущающей силы, чем при отсутствии сопротивления.

7.7.5 Основы виброзащиты

Защищать фундаменты и крепления колеблющихся систем следует прежде всего от вынужденных колебаний, т.к. собственные колебания при наличии сопротивления быстро затухают.

Силы от колеблющихся систем с одной степенью свободы, пропорциональные ускорениям, пропорциональны амплитудам колебаний.

Существуют два основных способа уменьшения амплитуды вынужденных колебаний. Первый состоит в значительном разnose частот вынужденных и собственных колебаний системы, что имеет место при

больших значениях $z = \frac{P}{k}$. Второй способ состоит в увеличении коэффициента сопротивления с помощью **демпферов**. Процесс уменьшения амплитуды колебаний за счет увеличения амплитуды колебаний за счет увеличения коэффициента сопротивления называется **демпфированием колебаний**.

Задача. Система состоит из стержня OB с насаженным на него шаром B ; стержень закреплен шарнирно в точке O (рис. 7.21). Момент инерции колеблющейся системы относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к рисунку, равен J . К стержню прикреплена в точке A пружина, коэффициент жесткости которой равен c . Вторым концом пружины D совершаются заданные вертикальные колебания согласно уравнению $y = H \cos pt$. К точке B приложена сила вязкого сопротивления, пропорциональная скорости. Коэффициент пропорциональности β .

Определить уравнение вынуждающих колебаний шара B , максимальное растяжение пружины и колеблющую силу, приложенную в точке D , если $OA=a$; $OB=l$.

Решение

Угол φ – обобщенная координата. Угол φ будем отсчитывать от положения статического равновесия, x – перемещение точки A : $x=aj$.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{c(x - y)^2}{2} = \frac{c(aj - H \cos pt)^2}{2}. \quad (7.63)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (7.64)$$

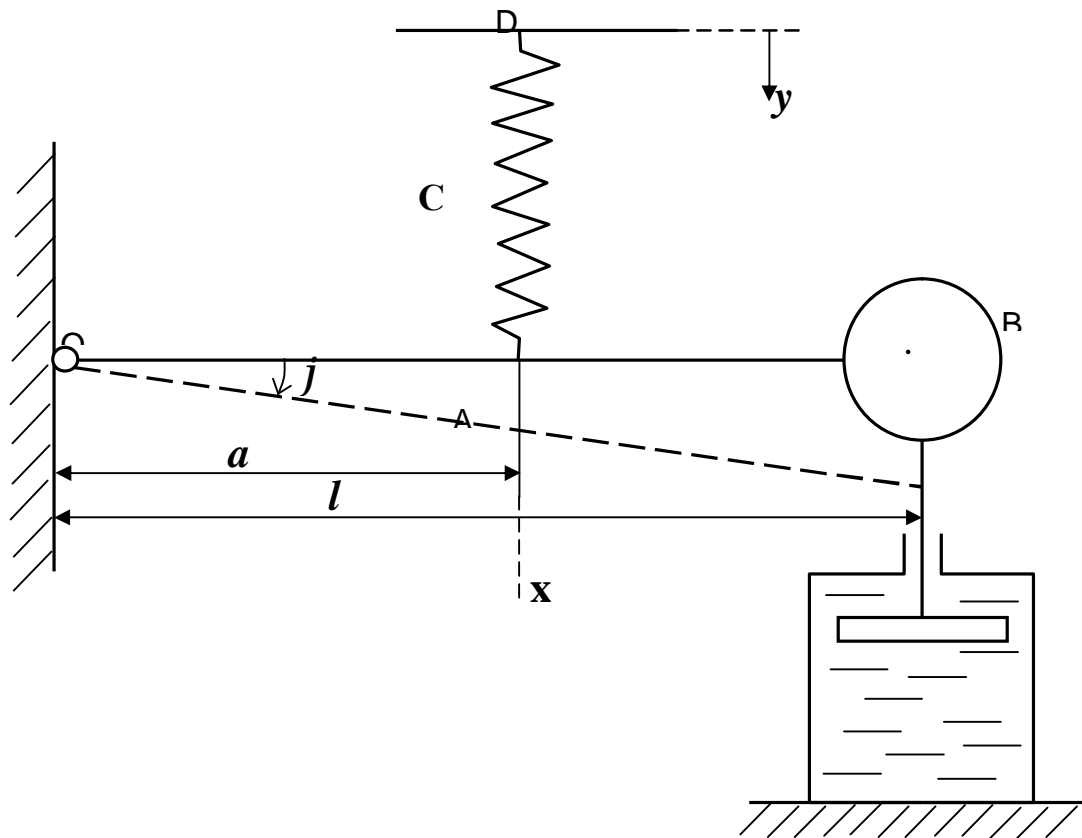


Рисунок 7.21

Диссипативная функция Рэля имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} b(a + b)^2 \dot{j}^2.$$

Сила сопротивления:

$$R_x = -bl\dot{j}. \quad (7.65)$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} - \frac{\partial T}{\partial j} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi} + Q^B. \quad (7.66)$$

Последовательно находим

$$\frac{\partial T}{\partial j} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\dot{j}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\ddot{j},$$

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial j} = -C(aj - H \cos pt)a;$$

$$Q^{\Phi} = \frac{R_x l \cdot dj}{dj} = -bl^2 \cdot j; \quad (\text{или } Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial j})$$

$$Q^B = 0.$$

Внося эти значения в уравнение (7.66), получим:

$$J\ddot{j} + bl^2 \dot{j} + ca^2 j = cHa \cos pt,$$

или

$$\ddot{j} + 2nj\dot{j} + k^2 j = h \cos pt, \quad (7.67)$$

где

$$n = \frac{bl^2}{2J}; \quad k^2 = \frac{ca^2}{J}; \quad h = \frac{cHa}{J}. \quad (7.68)$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$j_{\max} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (7.69)$$

Сдвиг фаз

$$\operatorname{tge} = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (7.70)$$

Уравнение вынужденных колебаний центра шара В:

$$x_B = j_{\max} l \cos(pt - e). \quad (7.71)$$

Уравнение вынужденных колебаний точки А:

$$x = x_A = j_{\max} \cdot a \cdot \cos(pt - e) = A \cos(pt - e), \quad \text{где } A = a j_{\max}. \quad (7.72)$$

Деформация пружины $l = x - y = A \cos(pt - e) - H \cos pt$.

8 ТЕОРИЯ УДАРА

8.1 Основные положения и понятия теории удара

Ударом называют явление, при котором за малый промежуток времени, т. е. почти мгновенно, скорости части или всех точек системы изменяются на конечные величины по сравнению с их значениями непосредственно перед ударом или после него. Длительность удара составляет обычно десятые и меньшие части долей секунды.

Встречаются различные по характеру случаи ударных явлений. В простейших случаях удар проявляется как почти мгновенное наложение или снятие связей. Примером удара, связанного с мгновенным наложением связей, может служить столкновение поступательно движущегося тела с другим, например неподвижным, телом. Удар, обусловленный мгновенным снятием связей или их разрушением, можно представить как отрыв части тела при его быстром вращении вокруг оси и т.п. Могут быть ударные явления более сложного характера, связанные, например, с периодическим наложением и снятием связей (ковка, штамповка и др.).

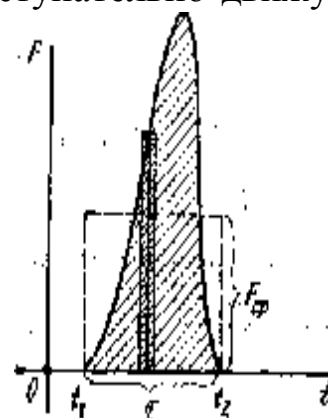


Рисунок 8.1

Изменение скоростей точек при ударе на конечные величины связано с большими ударными ускорениями этих точек, возникновение которых требует больших ударных сил. Если F – ударная сила и t – длительность, или время, удара, то характерный график изменения ударной силы за время удара, от момента t_1 до момента t_2 , имеет вид, показанный на рис.8.1. Ударная сила быстро возрастает, от нуля в момент начала удара до максимального значения, затем так же быстро уменьшается, обычно по другому закону, до нуля в конце удара. Во многих случаях не требуется детального знания закона изменения ударной силы. Достаточно знать только суммарный импульс этой быстро меняющейся силы за время удара или ударный импульс. **Ударным импульсом** называют векторную величину:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt . \quad (8.1)$$

Ударный импульс графически изображается на рисунке заштрихованной площадью, ограниченной кривой линией изменения ударной силы и осью абсцисс, по которой откладывается время.

Иногда рассматривают *среднюю ударную силу* – постоянную в течение удара силу, которая за время удара дает такой же ударный импульс, как и переменная ударная сила. Средняя ударная сила определяется из соотношения

$$\overline{F}_{cp} t = \overline{S}. \quad (8.2)$$

Большие ударные силы дают конечные ударные импульсы за малое время удара. Средняя ударная сила, согласно ее определению, – величину порядка $1/t$, т.е. при малом t является величиной большой.

Импульс неударной силы, например силы тяжести тела, за время удара имеет порядок величины t , т.е. является величиной малой по сравнению с ударными импульсами. Поэтому импульсами неударных сил можно пренебрегать по сравнению с ударными.

При ударе двух тел в месте их соприкосновения возникают деформации и, следовательно, перемещения точек тел, обусловленные деформациями. Вследствие малости деформаций по сравнению с перемещениями точек тел, за конечный промежуток времени перемещения точек тел за время удара являются величинами малыми. В общем случае, если V_{cp} – средняя скорость за время удара какой-либо точки системы, испытывающей удар, то перемещение этой точки имеет порядок величины t , так как средняя скорость есть величина конечная. Поэтому *перемещениями точек за время удара можно пренебрегать*. Считают, что за время удара точки системы не успевают изменить свое положение, а, следовательно, не изменяются радиус-векторы точек и их координаты. Если, например, тело падает на спиральную пружину за время удара, величина перемещения тела равна сжатию пружины за это время. Этим перемещением можно пренебречь по сравнению, например, с перемещением тела от начала удара тела до момента наибольшей деформации пружины. При ударе пружину можно считать твердым телом в приближенных расчетах при рассмотрении перемещения тела за время удара.

Явление удара широко используется в технике при ковке, штамповке, забивке свай и т. д. Это же явление часто является нежелательным, особенно при ударе деталей в машинах друг о друга вследствие люфтов, при ударе колес транспорта о неровности дороги, стыки рельсов и т. п.

Многие величины, характеризующие удар, с достаточной точностью могут быть получены из общих теорем динамики. Рассмотрим особенности применения этих теорем к явлению удара.

8.2 Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс для удара. Теорема Кельвина

Пусть до удара точка М массой m двигалась по участку траектории АМ, имея непосредственно перед ударом скорость v (рис.8.2). Под действием ударной силы F и неударной F^* точка изменила скорость, которая сразу после удара стала u . После удара точка продолжает двигаться по участку траектории МВ. Удар точки М характеризуется почти мгновенным изменением ее скорости от v до u по модулю и направлению и, следовательно, в общем случае резким изломом ее траектории в момент удара.

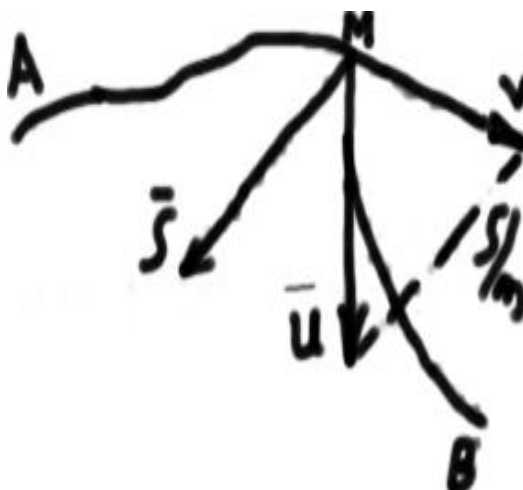


Рисунок 8.2

По теореме об изменении количества движения для точки в интегральной форме имеем

$$m \bar{u} - m \bar{v} = \int_0^t \bar{F} dt + \int_0^t \bar{F}^* dt ,$$

где t - время удара. Обозначая импульс ударной силы \bar{S} и пренебрегая импульсом неударной силы за время удара по сравнению с ударным импульсом, получаем следующую **теорему об изменении количества движения точки при ударе:**

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}, \quad (8.3)$$

т.е. *изменение количества, движения точки за время удара равно ударному импульсу приложенному к точке.*

В проекциях на оси координат имеем:

$$m u_x - m v_x = S_x; \quad m u_y - m v_y = S_y; \quad m u_z - m v_z = S_z. \quad (8.3a)$$

Изменение скорости точки при ударе $u - v = S/m$, т.е. оно параллельно ударному импульсу S .

Для любой механической системы, состоящей из N точек, разделим ударные силы на внешние и внутренние. Применяя теорему об изменении количества движения для удара к каждой точке системы, получаем

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(j)}, \quad i=1,2,\dots,N,$$

где $S_k^{(e)}$ и $S_k^{(i)}$ – ударные импульсы внешних и внутренних сил.

Импульсами неударных сил за время удара пренебрегаем. Суммируя по точкам системы, имеем

$$\sum_k m_k \bar{u}_k - \sum_k m_k \bar{v}_k = \sum_k \bar{S}_k^{(e)} + \sum_k \bar{S}_k^{(i)}.$$

Обозначая количества движения системы после и до удара, соответственно,

$$\bar{Q} = \sum_k m_k \bar{u}_k; \quad \bar{Q}_0 = \sum_k m_k \bar{v}_k,$$

и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных,

$$\sum_k \bar{S}_k^{(i)} = 0, \quad \text{имеем}$$

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) выражает **теорему об изменении количества движения системы при ударе: изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.**

В проекциях на координатные оси получаем:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_k S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_k S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_k S_{kz}^{(e)}. \quad (8.4a)$$

Применяя формулу для вычисления количества движения системы через массу системы и скорость центра масс, имеем

$$\bar{Q} = M\bar{u}_c; \quad \bar{Q}_0 = M\bar{v}_c,$$

где M – масса системы;

\bar{u}_c и \bar{v}_c – скорости центра масс до и после удара.

С учетом этого из уравнения (8.4) получаем следующую **теорему о движении центра масс системы:**

$$M(u_{cx} - v_{cx}) = \sum_k S_{kx}^{(e)}. \quad (8.5)$$

В проекциях на координатные оси она примет форму

$$\left. \begin{aligned} M(u_{cx} - v_{cx}) &= \sum_k S_{kx}^{(e)} \\ M(u_{cy} - v_{cy}) &= \sum_k S_{ky}^{(e)} \\ M(u_{cz} - v_{cz}) &= \sum_k S_{kz}^{(e)} \end{aligned} \right\}. \quad (8.5a)$$

Частные случаи:

1 Если $\sum_k \bar{S}_k^{(e)} = 0$, то из уравнений (8.4) и (8.5) следует:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0; \quad \bar{u}_c = \bar{v}_c, \quad (8.6)$$

т.е. *количество движения системы и скорость центра масс не изменяются, если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю. Это – законы сохранения количества движения и движения центра масс системы при ударе.*

2 Если имеется координатная ось, например Ox , для которой $\sum_k S_{kx}^{(e)} = 0$, то из уравнений (8.4a) и (8.5a) получаем следующие **законы сохранения проекции количества движения и движения центра масс:**

$$Q_x = Q_{0x}; \quad u_{cx} = v_{cx}. \quad (8.6a)$$

Из уравнения (8.3) можно получить теорему Кельвина для работы ударной силы за время удара. Непосредственно вычислить работу ударной силы за время удара трудно, так как ударные силы очень большие, а перемещения точек системы за время удара малы, и ими пренебрегают. Теорема Кельвина позволяет выразить работу силы через импульс силы и среднее значение скоростей точки, т.е. величины конечные при ударе. Умножив уравнение (8.3) последовательно на \bar{u} и \bar{v} скалярно, получим

$$m\bar{u}^2 - m\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{S} \cdot \bar{u}; \quad m\bar{u} \cdot \bar{v} - m\bar{v}^2 = \bar{S} \cdot \bar{v}.$$

После сложения этих равенств и деления на 2 имеем.

$$\frac{m\bar{u}^2}{2} - \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{v} + \bar{u}).$$

По теореме об изменении кинетической энергии для точки левая часть этого равенства равна работе A , приложенной к точке силы \bar{F} . Поэтому

$$A = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{u} + \bar{v}). \quad (8.7)$$

Это и есть **теорема Кельвина**: *работа силы, приложенной к точке, за какой-либо промежуток времени равна скалярному произведению импульса силы за тот же промежуток времени на полусумму начальной и конечной скоростей точки.*

Теорема Кельвина применима ко всем случаям движения точки, в том числе и к явлению удара.

Для механической системы теорема Кельвина получается из уравнения (8.7) путем суммирования по всем точкам системы, т.е.

$$\sum_k A_k = \frac{1}{2} \sum_k \bar{S}_k \cdot (\bar{u}_k + \bar{v}_k), \quad (8.8)$$

где $\bar{S}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)}$ — импульс внешней и внутренней сил, действующих на k -ю точку.

8.3. Теорема об изменении кинетического момента

при ударе

Пусть материальная точка под действием ударного импульса испытывает удар. По теореме об изменении количества движения для точки, имеем:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S},$$

где \bar{v} и \bar{u} – скорости точки до и после удара. Умножим это векторное равенство слева векторно на радиус-вектор точки \bar{r} , который один и тот же непосредственно перед ударом и после него. Получаем

$$\bar{r} \times m\bar{u} - \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \bar{S}. \quad (8.9)$$

Это соотношение выражает **теорему об изменении кинетического момента для точки при ударе**. Применяя ее для каждой из N точек системы, имеем

$$\bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{r}_{kj} \times \bar{S}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{S}_k^{(i)}; \quad k=1,2,\dots,N, \quad (8.9a)$$

где $\bar{S}_k^{(e)}$ и $\bar{S}_k^{(i)}$ – внешний и внутренний ударные импульсы, действующие на k-ю точку системы.

Суммируя уравнение (8.9a) по всем точкам системы и вводя обозначения кинетических моментов системы до и после удара и векторной суммы моментов внешних ударных импульсов относительно точки O, получим следующую **теорему об изменении кинетического момента системы при ударе**:

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \sum_k \bar{M}_0 (\bar{S}_k^{(e)}). \quad (8.10)$$

$$K_x - K_x^{(0)} = \sum_k M_x (\bar{S}_k^{(e)});$$

$$K_y - K_y^{(0)} = \sum_k M_y (\bar{S}_k^{(e)}); \quad (8.10a)$$

$$K_z - K_z^{(0)} = \sum_k M_z (\bar{S}_k^{(e)}).$$

Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси O_z , и ω_0 и ω – угловые скорости до и после удара, то, учитывая, что

$$K_z = J_z \omega; \quad K_z^{(0)} = J_z \omega_0,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, из уравнения (8.10а) получаем следующее изменение угловой скорости тела:

$$J_z (\omega - \omega_0) = \sum_k M_z (\bar{S}_k^{(e)});$$

или

$$\frac{(\omega - \omega_0)}{J_z} = \frac{\sum_k M_z (\bar{S}_k^{(e)})}{J_z}. \quad (8.11)$$

В уравнение (8.11) не входят моменты ударных импульсов реакций закрепленных точек оси вращения, так как они пересекают ось вращения, если не возникают ударные импульсы сил трения в местах закрепления оси.

Частные случаи:

1 Если $\sum_k \bar{M}_0 (\bar{S}_k^{(e)}) = 0$, то из уравнения (8.10) следует закон сохранения кинетического момента системы относительно точки при ударе:

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \text{const}. \quad (8.12)$$

2 Если имеется ось, например Ox , относительно которой $\sum_k M_x (\bar{S}_k^{(i)}) = 0$, то из уравнения (8.10а) получаем закон сохранения кинетического момента системы относительно оси при ударе:

$$K_x - K_x^{(0)} = \text{const}. \quad (8.12a)$$

8.4. Удар точки о неподвижную поверхность

8.4.1 Прямой удар

Удар называют прямым, если скорость точки и перед ударом направлена по нормали к поверхности в точке удара M (рис. 8.3) После удара материальная точка отделится от поверхности, имея в общем случае скорость \bar{u} , направленную тоже по нормали к поверхности.

Для оценки ударных свойств поверхности и тела, принимаемого за материальную точку, введем коэффициент восстановления k . Коэффициентом восстановления называют отношение числового значения скорости точки после удара к числовому значению её до удара, т. е.

$$k = |\bar{u}| / |\bar{v}| = u / v. \quad (8.13)$$

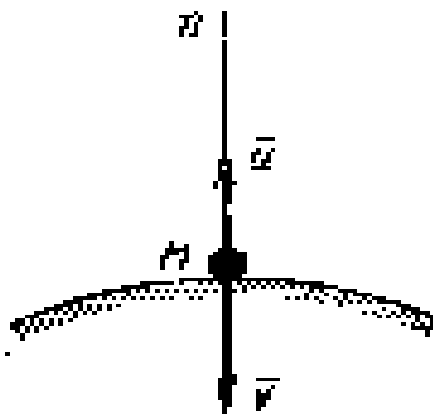


Рисунок 8.3

Если $k = 1$, то удар называется абсолютно упругим. В этом случае $u = v$, и при ударе точки изменяется только направление скорости на противоположное. При $k = 0$ удар считается абсолютно неупругим. Скорость точки при таком ударе о неподвижную поверхность после удара $u = 0$. В более общем случае абсолютно неупругого удара точки по движущейся поверхности точка после удара движется вместе с соответствующей точкой поверхности. В случаях, при которых $0 < k < 1$, удар называют просто упругим (или частично упругим).

Процесс удара точки о неподвижную поверхность можно разделить на **фазу деформации и фазу восстановления**. Фаза деформации продолжительностью τ_1 отсчитывается от момента начала удара до момента наибольшей деформации тела, которое принимается за материальную точку. В конце этой фазы скорость точки при ударе о неподвижную поверхность равна нулю. В течение фазы восстановления τ_2 материальная точка от момента наибольшей деформации до ее отделения от поверхности частично восстанавливает свою первоначальную форму при упругом ударе. При абсолютно упругом ударе форма тела восстанавливается полностью. В случае абсолютно неупругого удара форма тела совсем не восстанавливается, так как удар имеет только одну фазу деформации. Общее время удара $\tau = \tau_1 + \tau_2$. При абсолютно неупругом ударе $\tau_2 = 0$ и $\tau = \tau_1$

На точку при ее прямом ударе о неподвижную поверхность со стороны поверхности действует ударная сила реакции поверхности N .

Она изменяется по величине в течение удара, но все время направлена по нормали к поверхности.

Применим к первой и второй фазам удара точки теорему об изменении количества движения в проекции на направление внешней нормали к поверхности, за которое принимаем направление, противоположное скорости точки до удара. Для первой фазы имеем

$$0 - (-mv) = S_1,$$

где $S_1 = \int_0^{t_1} N dt$ – ударный импульс силы реакции поверхности за первую фазу удара.

Для второй фазы, соответственно,

$$0 - (-mv) = S_2,$$

где $S_2 = \int_0^{t_2} N dt$ – ударный импульс силы реакции поверхности за вторую фазу удара.

Действием импульсов неударных сил за время удара, например силы тяжести, пренебрегаем.

Итак, имеем

$$mv = S_1; \quad mu = S_2.$$

Отсюда

$$k = u/v = S_2/S_1. \quad (8.14)$$

Формула (8.14) дает выражение коэффициента восстановления через ударные импульсы: коэффициент восстановления при прямом ударе точки о неподвижную поверхность равен отношению числовых значений ударных импульсов за вторую и первую фазы удара. Выражение коэффициента восстановления через ударные импульсы, полученное при ударе точки о неподвижную поверхность, считают справедливым и в случае прямого удара точки по движущейся поверхности.

Полный ударный импульс S складывается из импульсов S_1 и S_2 , т. е.

$$S = S_1 + S_2 = mv \left(1 + \frac{u}{v} \right) = mv (1 + k).$$

При $k=1$ $S = 2mv$; при $k = 0$, $S = mv$. Ударный импульс при абсолютно неупругом ударе в два раза меньше ударного импульса при абсолютно упругом ударе.

8.4.2 Косой удар

Удар называется непрямым, или косым, если скорость точки перед ударом направлена под углом α к нормали поверхности. При $\alpha = 0$ имеем прямой удар. Угол α (рис.8.4) называют *углом падения*. В общем случае скорость точки \bar{u} после удара составит с нормалью к поверхности угол β , который называют углом отражения.

Разложим скорости до и после удара на нормальные и касательные составляющие:

$$\bar{v} = \bar{v}_n + \bar{v}_t; \quad \bar{u} = \bar{u}_n + \bar{u}_t$$

Коэффициентом восстановления при косом ударе называют величину $k = |\bar{u}_n| / |\bar{v}_n| = u_n / v_n$. Применение теоремы об изменении количества движения в проекции на нормаль к поверхности приводит к выражению коэффициента восстановления через ударные импульсы:

$$k = u_n / v_n = S_{2n} / S_{1n},$$

где S_{2n} и S_{1n} – проекции ударных импульсов на нормаль к поверхности за вторую и первую фазы удара.

В случае не идеально гладкой поверхности $u_t < v_t$. В дальнейшем принимаем, что поверхность не обладает ударным трением, и поэтому $u_t = v_t$. В этом случае

$$\operatorname{tg} b = u_t / u_n = v_t / v_n; \quad \operatorname{tg} a = v_t / v_n; \quad \operatorname{tg} b = \frac{1}{k} \operatorname{tg} a.$$

Эта формула выражает зависимость между углом падения и углом отражения при различных коэффициентах восстановления и отсутствии ударного трения.

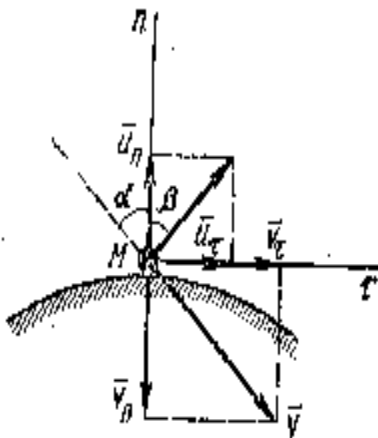


Рисунок 8.4

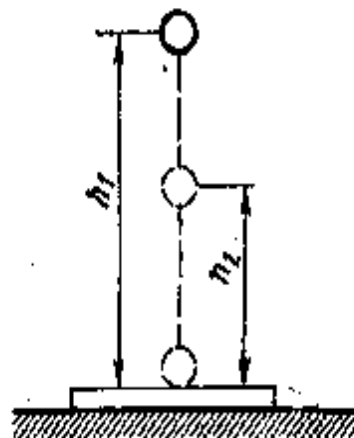


Рисунок 8.5

Экспериментальное определение коэффициента восстановления.

Коэффициент восстановления можно определить экспериментально, измеряя высоту, на которую поднимется тело, обычно в форме небольшого шара, после прямого удара о поверхность (рис.8.5) при падении с заданной высоты. Если шарик падает на неподвижную поверхность с высоты h_1 , то его скорость непосредственно перед ударом $v = \sqrt{2gh_1}$. Сразу после удара - скорость u шарика через высоту подъема его над поверхностью выражается зависимостью $u = \sqrt{2gh_2}$. Для коэффициента восстановления имеем

$$k = u / v = \sqrt{h_2 / h_1}.$$

Измеряя h_2 при заданном h_1 , получают значения коэффициентов восстановления для различных материалов шарика и поверхности.

Многочисленные опыты показали, что коэффициент восстановления зависит не только от материала соударяющихся тел, но и от их масс, формы тел, скоростей соударения и других факторов. Использование коэффициента восстановления в расчетах (в предположении, что он зависит только от материала соударяющихся тел) допустимо лишь в очень грубом приближении к действительности. В более точных расчетах следует учитывать не только деформации, возникающие при ударе, но в некоторых случаях и процесс их возникновения и восстановления. Учет деформаций при ударе производится в задачах теории упругости. Методы теории упругости позволяют более глубоко проникать в явления удара. В теоретической механике обычно рассматриваются предельные случаи абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

8.5 Теорема Карно

При абсолютно упругом ударе точки о неподвижную поверхность в отсутствие ударного трения скорость точки может изменяться только по направлению. Числовая величина ее остается неизменной. Кинетическая энергия точки и системы точек, находящихся в таких условиях, не изменяется за время удара. При упругом и абсолютно неупругом ударах кинетическая энергия изменяется.

Установим изменение кинетической энергии в случае абсолютно неупругого удара при мгновенном наложении связей для точки и системы

в отсутствие ударного трения. По теореме об изменении количества движения для точки (рис. 8.6), имеем

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}, \quad (8.15)$$

где m — масса точки; \bar{v} и \bar{u} — ее скорости непосредственно до и после удара; \bar{S} — ударный импульс от действия поверхности.

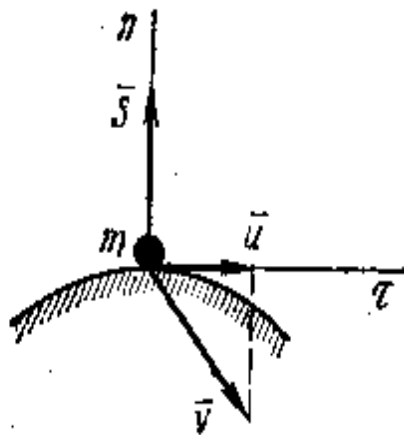


Рисунок 8.6

При отсутствии ударного трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Скорость точки после такого удара направлена по касательной к поверхности, т.е. ее проекция на нормаль $u_n = 0$. В рассматриваемом случае ударный импульс S и скорость точки после удара u взаимно перпендикулярны и поэтому удовлетворяют условию

$$\bar{S} \cdot \bar{u} = 0.$$

Учитывая это, умножим обе части уравнения (8.15) скалярно на \bar{u} . Получим вспомогательное соотношение

$$-m\bar{v} \cdot \bar{u} + m\bar{u}^2 = 0. \quad (8.16)$$

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия точки уменьшится на $m\bar{v}^2 / 2 - m\bar{u}^2 / 2$. Добавляя в это выражение величину, равную нулю, в форме уравнения (8.16), получим

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} &= \frac{m\bar{v}^2}{2} - \frac{m\bar{v}^2}{2} + (-m\bar{v} \cdot \bar{u} + m\bar{u}^2) = \\ &= \frac{m\bar{v}^2}{2} + \frac{m\bar{u}^2}{2} - m\bar{v} \cdot \bar{u} = \frac{m}{2}(\bar{v} - \bar{u})^2. \end{aligned}$$

Полученная **теорема Карно** для точки о потере кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} - \frac{m\bar{u}^2}{2} = \frac{m}{2}(\bar{v} - \bar{u})^2.$$

Список рекомендуемой литературы

- 1 Добронравов В.В. Курс теоретической механики/ Добронравов В.В., Никитин Н.Н.— М.: Высш. школа, 1983.— 575с.
- 2 Яблонский А.А. Курс теоретической механики/ Яблонский А.А., Никифорова В.М.— М.: Высш.школа, 1977.— Т.1.— 368с.; Т.2.— 410с.
- 3 Бутенин Н.В. Курс теоретической механики/ Бутенин Н.В., Лунц Л.Л., Меркин Д.Р.: В 2т.— М.: Наука, 1979. — Т.1. .— 272с.; Т.2 — 544с.
- 4 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.— М.: Наука, 1986.— 415с.
- 5 Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики/ Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.: В 2т.—М.: Наука, 1982.—Т. 1.—352с.; Т.2.—640с.
- 6 Гернет М.М. Курс теоретической механики.— М.: Высш. школа, 1973.— 342с.
- 7 Кошляков В.Н. Краткий курс теоретической механики. — К.: Выща школа, 1993.—311с.
- 8 Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: В2т./ Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. — М.:Наука, 1972.— Т.1.— 512с.; Т.2.— 640с.

Конспект лекций
по теоретической механике
. Часть II. Динамика
(для студентов заочной формы обучения)

Составители: Подлесный Сергей Владимирович
Ерфорт Юрий Александрович

Редактор Дудченко Елена Александровна

31/2003 Подп. в печать

Формат 60×84/16

Ризограф печать. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.

Тираж 100 экз.

ДГМА. 84313, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72