МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНБАСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ”

(для студентов всех технических специальностей заочной формы обучения)

Краматорск ДГМА 2005

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНБАСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ”

(для студентов всех технических специальностей заочной формы обучения)

У т в е р ж д е н о
на заседании кафедры
технической механики.
Протокол № 1
от 6 сентября 2005р

Краматорск ДГМА 2005

УДК 539 3/8

Методические указания и контрольные задания по дисциплине “Теоретическая механика ” (для студентов всех технических специальностей заочной формы обучения)/Сост.: С.В.Подлесный, А.Н.Стадник, Ю.А.Ерфорт, Д.Г.Сущенко. – Краматорск: ДГМА, 2005. – 108с.

В методических указаниях содержится рабочая программа курса, задания для выполнения контрольных работ и примеры их выполнения.

Составители: С.В.Подлесный,
А.Н.Стадник,
Ю.А.Ерфорт,
Д.Г.Сущенко.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ 4
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА 7
КИНЕМАТИКА 8
ДИНАМИКА 10
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 14
СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ 14
ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ 16
СТАТИКА 16
КИНЕМАТИКА 40
ДИНАМИКА 77
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 107

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

1. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрическим построением векторного треугольника или многоугольника и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства их произведений, а в кинематике и динамике — дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямолинейных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-ге порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2. При изучении материала курса по учебнику нужно прежде всего уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное - понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно m почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств (в механике они обычно не сложны) и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их «заучивать» не следует, никакой пользы это не принесет.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постарайтесь решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника И. В. Мещерского и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы ответить на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку).

Поскольку все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены в программе перечислены достаточно подробно, дополнительные вопросы для самопроверки здесь не приводятся. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом.

Начав изучение очередной темы программы, выписать сначала в тетради последовательно все перечисленные в программе вопросы этой темы, оставив справа широкую колонку (поле). При этом если, например, в программе сказано «Условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил», то следует записать отдельно вопросы «Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил» и «Условия равновесия плоской системы сходящихся сил» и т. п.

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой изложен соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для проверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую формулу (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли материал, предусмотренный программой, вами изучен (если изучен весь материал, то против каждого вопроса в правой колонке будет указана соответствующая страница учебника).

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Введение. Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с общественным производством и ее роль в решении народно-хозяйственных задач, поставленных партией и правительством.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные системы сил, равнодействующая, уравновешенная система сил, силы внешние и внутренние. Исходные положения (аксиомы) статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость, поверхность и опора, гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый стержень; реакции этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

Аналитические условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

Теория пар сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил. Момент пары сил как вектор. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Условия равновесия системы пар.

Приведение произвольной системы сил к данному центру. Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил

Система сил, произвольно расположенных на плоскости (плоская система сил). Алгебраическая величина момента силы. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил. Частные случаи приведения: приведение к паре сил, к равнодействующей и случай равновесия. Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Аналитические условия равновесия: а) равенство нулю сумм проекций сил на две координатные оси и суммы их моментов относительно любого центра; б) равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на одну ось; в) равенство нулю сумм моментов сил относительно трех центров. Условия равновесия плоской системы: параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

(Сосредоточенные и распределенные силы. Силы, равномерно распределенные по отрезку прямой, и их равнодействующая). Реакция жесткой заделки. Равновесие системы тел. Статически определимые и статистически неопределимые системы. Равновесие при наличии сил трения. Коэффициент трения. Предельная сила трения. Угол и конус трения. (Трение качения; коэффициент трения качения.)

Система сил, произвольно расположенных в пространстве (пространственная система сил). Момент силы относительно оси и его вычисление. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические формулы вычисления моментов силы относительно трех координатных осей. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил. (Частные случаи приведения пространственной системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей, к динамическому винту и случай равновесия.) Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Теорема Вариньона о равнодействующей относительно оси.

Центр параллельных сил и центр тяжести. Центр параллельных сил Формулы для определения координат центра параллельных сил. Центр тяжести твердого тела; формулы для определения его координат. Центры тяжести, объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел. Центры тяжести дуги окружности, треугольника и кругового сектора.

КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения.

Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от ее скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки (в прямоугольных декартовых координатах). Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки.

Кинематика твердого тела

Поступательное движение. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение). Уравнение (или закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнопеременного вращения. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого, тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении вокруг полюса. (Понятие о мгновенном центре ускорений.)

(Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.)

(Общий случай движения свободного твердого тела. Уравнения движения свободного твердого тела. Разложение этого движения на поступательное движение вместе с полюсом и движение вокруг полюса. Определение скоростей и ускорений точек свободного твердого тела.)

Сложное движение точки и твердого тела или составное движение. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения. Случай поступательного переносного движения.

(Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг вращающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.)

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы классической механики или законы Галилея — Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки

Решение первой и второй задач динамики. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника.

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Несвободное и относительное движения точки. (Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения, движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи.)

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Апериодическое движение.

Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Моменты инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей или теорема Гюйгенса. Примеры вычисления моментов инерции:

моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра. (Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и главные центральные оси инерции и их свойства.)

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. (Понятие о секторной скорости. Закон площадей.)

Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинематический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.)

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и в общем случае движения (в частности, при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной конечной формах. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера. Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы.

Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции.

(Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.)

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа). Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил;

функция Лагранжа (кинетический потенциал).

Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 4 контрольных работы.

Задание 1 (статика) — задачи С1 — С3.

Задание 2 (кинематика) — задачи К1 — К4.

Задание 3 (динамика) — задачи Д1 — Д3.

Задание 4 (динамика) — задачи Д4 — Д6.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является 1, стоящая после точки. Например, рис. С 1.4 — это рис. 4 к задаче т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней; например, шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий. Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам С1 — С3 и Д1—Д6 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам — вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 — тела 2 и т. д.

Аналогично, в кинематике и динамике V_B, a_B означают скорость и ускорение точки В; V_C, a_C — точки С; ω_1, ε_1 — угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2, ε_2 —тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. номеру вашего рисунка или условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ
СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис.С1.0—С1.9, табл. С1), закреплена в точке А шарнирно, а в В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом Р = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом М=100 кН*м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила $\overline{F_2}$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\overline{F_3}$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке Е, и т.д.).

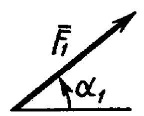
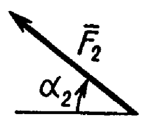
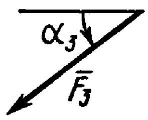
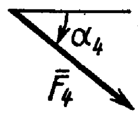
Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять а = 0,5 м.

Указания. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда

$$m_o(\bar{F}) = m_o(\bar{F}') + m_o(\bar{F}'').$$

Рекомендуется выполнить проверку, составив уравнение моментов относительно какой-либо точки и подставив в это уравнение найденные значения искомых величин.

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*H*	30	—	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—	—	*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—
4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	—
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

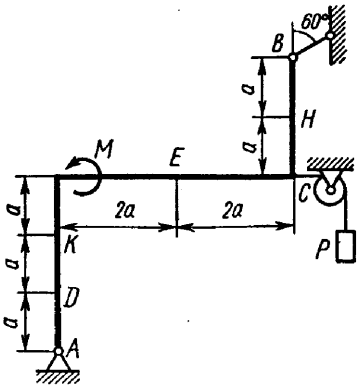


Рис. С1.0

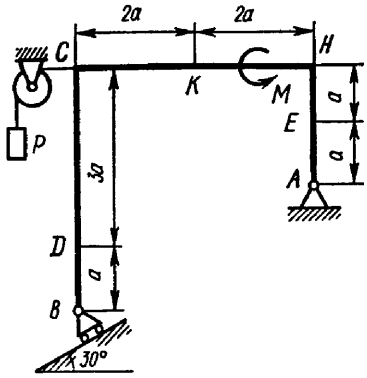


Рис. С1.1

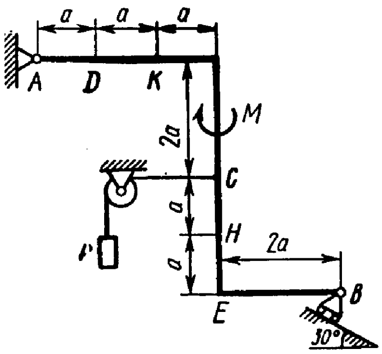


Рис. С1.2

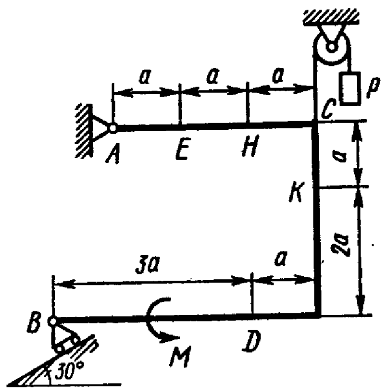


Рис. С1.3

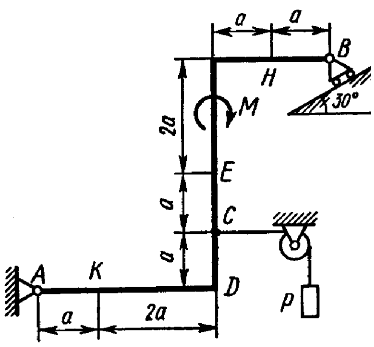


Рис. С1.4

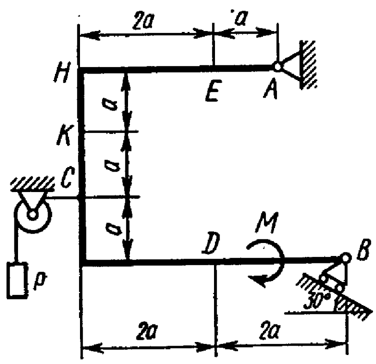


Рис. С1.5

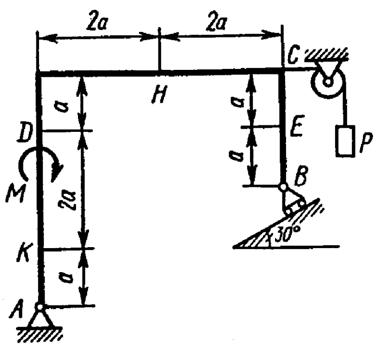


Рис. С1.6

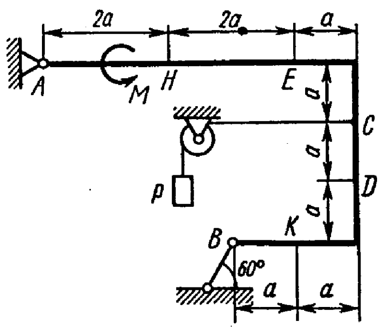


Рис. С1.7

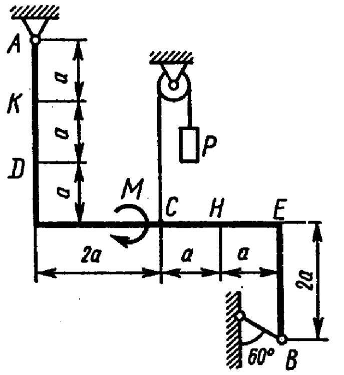


Рис. С1.8

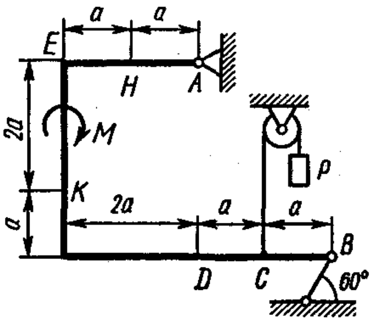


Рис. С1.9

Пример С1.1. Жесткая пластина ABCD (рис. 1) имеет в точке А неподвижную шарнирную опору, а в точке В — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F=25 кН, α=60°, P= 18 кН, γ = 75°, M=50 кН*м, β = 30°, a=0,5м. Определить: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси ху и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом М, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю Т = Р) и реакции связей $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{R_B}$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$ ($\overline{F'}$= F*cos α, $\overline{F''}$ = F*sin α) и учтем, что

$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F'}) + m_A(\overline{F''})$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,\ M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \qquad (3)$$

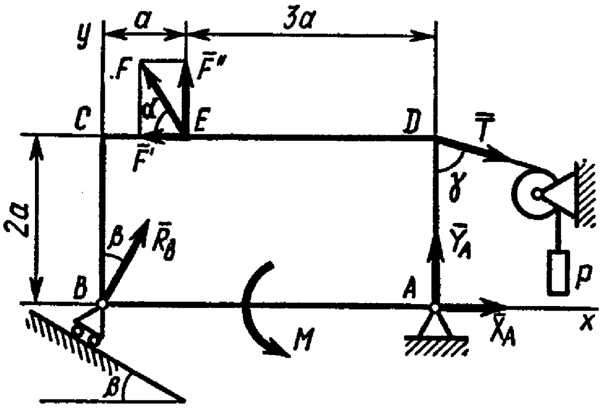


Рисунок 1

$$R_B = \left(\frac{50}{0,5} + 25\cdot cos60^o\cdot 2 - 25\cdot sin60^o\cdot 3 - 18\cdot sin75^o\cdot 2\right) / \left(4\cdot cos30^o\right) = 7,3\text{êÍ}\ ;$$

$$X_A = -7,3\cdot sin30^o + 25\cdot cos60^o - 18\cdot sin75^o = -8,5\text{êÍ}\ ;$$

$$Y_A = -7,3\cdot cos30^o - 25\cdot sin60^o + 18\cdot cos75^o = -23,3\text{êÍ}\ .$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Выполним проверку:

$$\sum m_E\left(\bar{F}_k\right) = 0,$$

$$M + X_A\cdot 2a + Y_A\cdot 3a - T\cdot cosg\cdot 3a + R_B\cdot cosb\cdot a = 0.$$

Разделим на а=0,5м, подставим численные значения величин, сложим отдельно положительные и отдельно отрицательные величины и найдем их разницу.

$$\left(\frac{50}{0,5} + 7,3\cdot sin30^o\cdot 2\right) - 8,5\cdot 2 + 23,3\cdot 3 + 18\cdot cos75^o\cdot 3 + 7,3\cdot cos30^o = 107,3 - 107,2 = 0,1 \approx 0.$$

Ответ: X_A=-8,5 кН; $У_A$ =-23,3 кН; R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X_A}$ и $\overline{Y_A}$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (рис. С2.0 — С2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С2.6—С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке А или шарнир, или жесткая заделка; в точке В или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень ВВ' (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4-9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом М =60 кН*м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q= 20кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка, например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\overline{F_2}$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\overline{F_4}$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E , и нагрузка, распределенная на участке СК).

Определить реакции связей в точках А, В, С (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять а = 0,2 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2а.

Указания. Задача С2 — на равновесие системы тел, находящихся действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

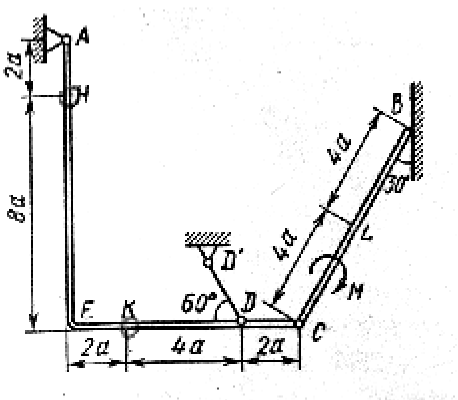


Рис. С2.0

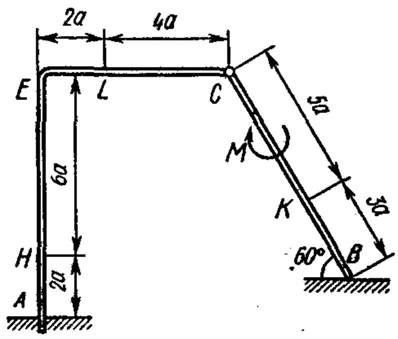


Рис. С2.1

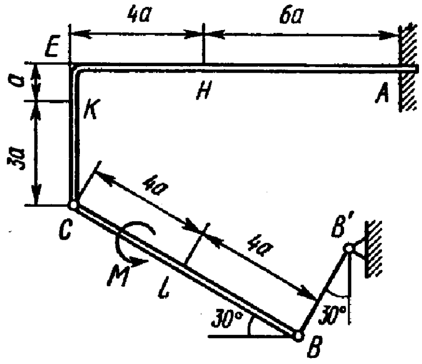


Рис. С2.2

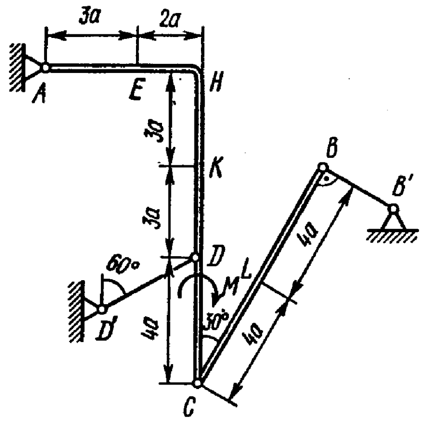


Рис. С2.3

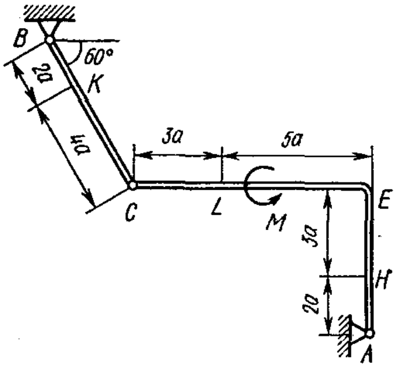


Рис. С2.4

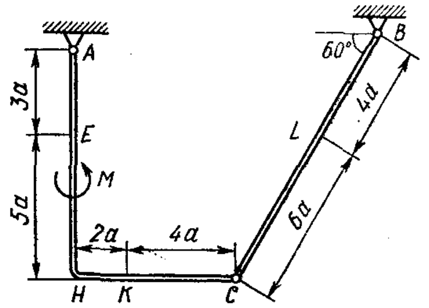


Рис. С2.5

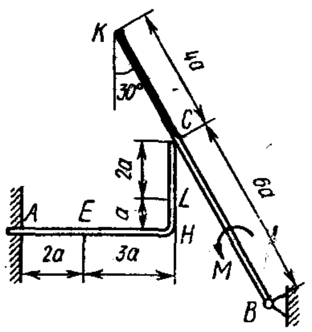


Рис. С2.6

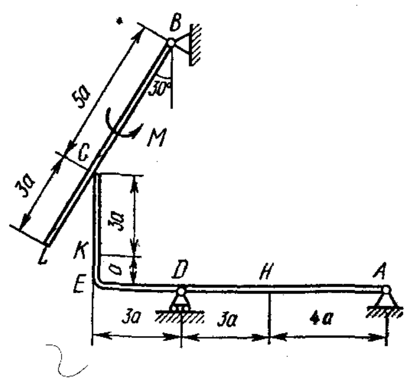


Рис. С2.7

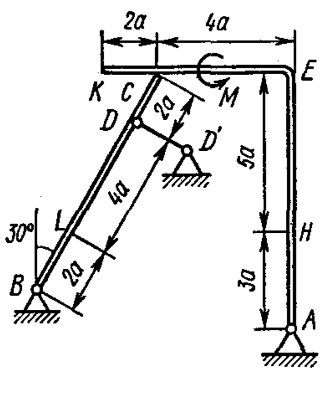


Рис. С2.8

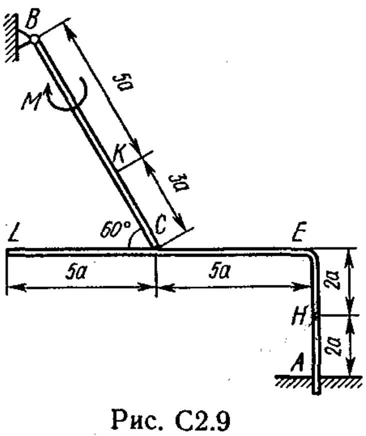


Рис. С2.9

Таблица C2

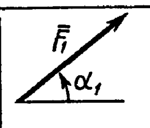
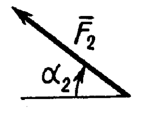
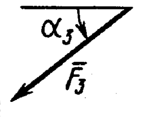
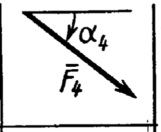
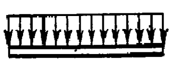
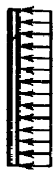
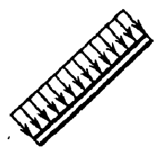
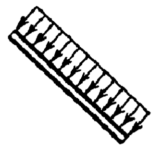
Сила									Нагруженный участок
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град	
0	*K*	60	—	—	*H*	30	—	—	*CL*
1	—	—	*L*	60	—	—	*E*	30	*CK*
2	*L*	15	—	—	*K*	60	—	—	*AE*
3	—	—	*K*	30	—	—	*H*	60	*CL*
4	*L*	30	—	—	*E*	60	—	—	*CK*
5	—	—	*L*	75	—	—	*K*	30	*AE*
6	*E*	60	—	—	*K*	75	—	—	*CL*
7	—	—	*H*	60	*L*	30	—	—	*CK*
8	—	—	*K*	30	—	—	*E*	15	*CL*
9	*H*	30	—	—	—	—	*L*	60	*CK*

Таблица C2a

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9
			

Пример С2.1. На угольник ABC (∠ABC =90°), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. 2,а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\bar{F}$, а к угольнику — равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M.

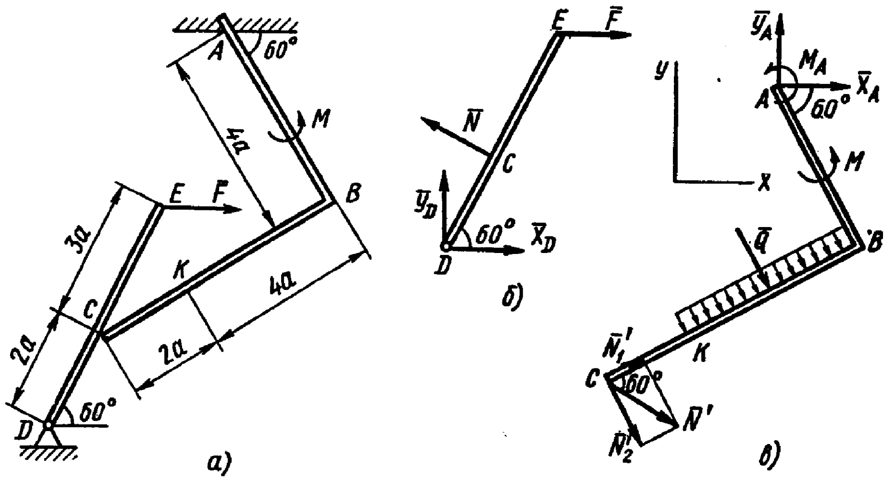


Рисунок 2

Дано: F=10 кН, M=5 кН*м, q = 20 кН/м, a =0,2 м. Определить: реакции в точках A, C, D, вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. 2,б). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_D + F - N\sin 60^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_D + N\cos 60^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma\, m_D(\bar{F}_k) = 0,\ N\cdot 2a - F\cdot 5a\sin 60^\circ = 0. \qquad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 2, в). На него действует сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно Q = q·4a =16 кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, и пары с моментом M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + Q\cos 60^\circ + N'\sin 60^\circ = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - Q\sin 60^\circ - N'\cos 60^\circ = 0; \qquad (5)$$

$$m_A(\bar{F}_k) = 0,\ M_A + M + Q\cdot 2a + N'\cos 60^\circ\cdot 4a + N'\sin 60^\circ\cdot 6a = 0. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\overline{N}'_1$ и $\overline{N}'_2$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и, решив систему уравнений (1) — (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно N' = N в силу равенства действия и противодействия.

$N = 10\cdot 5\cdot 0{,}866/2 = 21{,}7\text{êÍ}$;

$X_D = -10 + 21{,}7\cdot 0{,}866 = 8{,}8\text{êÍ}$;

$Y_D = -21{,}7\cdot 0{,}5 = 10{,}8\text{êÍ}$;

$X_A = -16\cdot 0{,}5 - 21{,}7\cdot 0{,}866 = -26{,}8\text{êÍ}$;

$Y_A = 16\cdot 0{,}866 + 21{,}7\cdot 0{,}5 = 24{,}7\text{êÍ}$;

$M_A = -5 - \left(16\cdot 2 + 21{,}7\cdot 0{,}5\cdot 4 + 21{,}7\cdot 0{,}866\cdot 6\right)\cdot 0{,}2 = -42{,}6\text{êÍ}\cdot\text{ì}$.

Выполним проверку, записав уравнения моментов относительно т. С для всей системы.

$$\sum m_C\left(\overline{F}_k\right)=0,$$
$$X_D\cdot sin60^o\cdot 2a-Y_D\cdot cos60^o\cdot 2a-F\cdot sin60^o\cdot 3a-Q\cdot 4a+M+M_A-$$
$$-X_A\cdot\left(4a\cdot sin60^o+6a\cdot sin30^o\right)+Y_A\cdot\left(6a\cdot cos30^o-4a\cdot cos60^o\right)=0.$$

$$8,8\cdot 0,866\cdot 2-\left(-10,8\right)\cdot 0,866\cdot 2-10\cdot 0,866\cdot 3-16\cdot 4+\frac{5}{0,2}+\frac{-42,6}{0,2}-$$
$$-\left(-26,8\right)\cdot\left(4\cdot 0,866+6\cdot 0,5\right)+24,7\cdot\left(6\cdot 0,866-4\cdot 0,5\right)=$$
$$=15,24+18,71+25+173,24+78,94-\left(25,98+64+213\right)=311,1-302,98=8.$$

Ошибка расчетов составила

$$\frac{8\cdot 100\%}{311}=2,6\%\,.$$

Ответ: N=21,7 кН, Y_D = -10,8 кН; X_D = 8,8 кН, X_A = -26,8 кН, Y_A = 24,7 кН, M_A = -42,6 кН*м.

Знаки указывают, что силы $\overline{Y_D}$, $\overline{X_A}$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Пример С2.2. Конструкция состоит из угольника и стержня, которые в точке С соединены друг с другом шарнирно (рис.3). Внешними связями, наложенными на конструкцию, в точках А и В являются шарниры.

На конструкцию действуют: пара сил с моментом M=60 кН·м, равномерно распределенная нагрузка, интенсивностью q=20 кН/м, действующая на участке СK, сила F_2=20 кН под углом α_2=60º, приложенная в точке L и сила F_4=40 кН под углом α_4=30º, приложенная в точке E.

Определить реакции связей в точках A, B, C, вызванные данными нагрузками. При окончательных расчетах принять a=0,2 м.

Дано: F_2=20 кН, F_4=40 кН, q=20 кН/м, M=60 кН·м, a=0,2 м.

Определить: X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C.

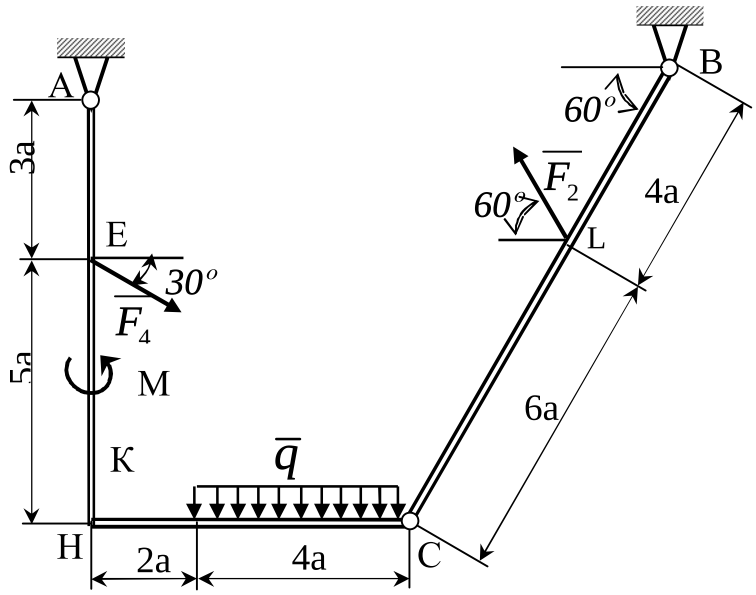


Рисунок 3

Решение:

I. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим равновесие стержня ВС, а затем равновесие угольника АНС, для этого:

1. Рассмотрим равновесие стержня ВС:

Выделим стержень ВС, определим положение и направление координатных осей Ох и Оу, проставим активную силу $\overline{F_2}$, расставим реакции в точках С (X_C и $У_C$) и В (X_B и $У_B$) (рис. 4).

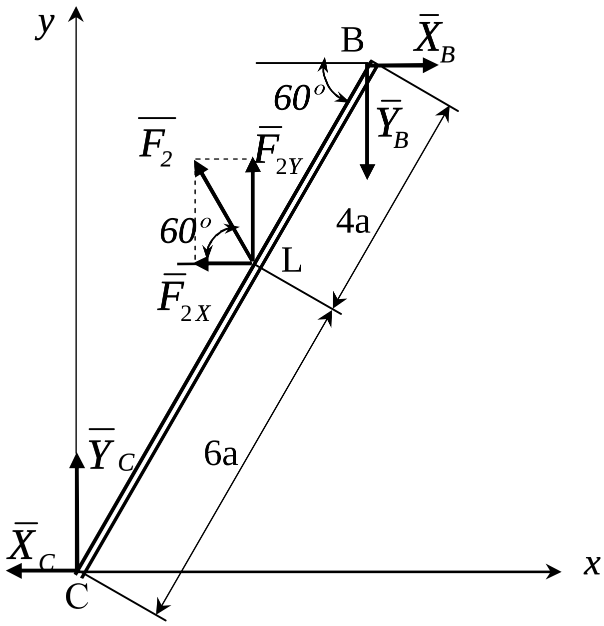


Рисунок 4

Реакция шарнирной опоры В определяется двумя составляющими силами $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, реакция шарнирной опоры С также определяется двумя составляющими силами $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия, воспользовавшись основной формой условия равновесия произвольной плоской системы сил (I).

Для данной системы сил уравнение равновесия (I) запишется в виде:

$$\sum F_{kX} = X_B - F_{2X} - X_C = 0$$
$$\sum F_{kY} = Y_C + F_{2Y} - Y_B = 0$$
$$\sum M_B(\overline{F}_k) = -F_{2Y} \cdot 4a \cdot \cos 60° - F_{2X} \cdot 4a \cdot \sin 60° - X_C \cdot 10a \cdot \sin 60° - Y_C \cdot 10a \cdot \cos 60° = 0$$

Записывая уравнения, применяем определение момента силы, учитывая, что при плече, равном нулю (линия действия силы проходит через моментную точку), момент силы относительно данной точки равен нулю, а именно:

$M_B(\overline{X}_B) = 0$ - линия действия силы $\overline{X}_B$ проходит через моментную точку В.

$M_B(\overline{Y}_B) = 0$ - по аналогичной причине.

Силы $\overline{F}_{2X}$, $\overline{F}_{2Y}$ определяем, как проекции силы $\overline{F}_2$ на оси координат:

$$F_{2X} = F_2 \cdot cos60^o;$$
$$F_{2Y} = F_2 \cdot sin60^o.$$

Учитывая это, уравнения равновесия перепишутся в виде:

$$\sum F_{kX} = X_B - F_2 \cdot cos60° - X_C = 0;$$
$$\sum F_{kY} = Y_C + F_2 \cdot sin60° - Y_B = 0;$$
$$\sum M_B(\overline{F}_k) = -2 \cdot F_2 \cdot sin60° \cdot 4a \cdot cos60° - X_C \cdot 10a \cdot sin60° - Y_C \cdot 10a \cdot cos60° = 0.$$

2. Рассмотрим равновесие угольника АНС:

Выделим угольник АНС, определим положение и направление координатных осей Ох и Оу, проставим активную силу $\overline{F_4}$, момент М, силу $\overline{Q}$, заменяющую распределенную нагрузку, равную по величине произведению интенсивности на длину участка действия распределенной нагрузки, по направлению совпадающую с направлением распределенной нагрузки, приложенную по середине участка действия распределенной нагрузки, расставим реакции в точках С (X_C’ и $У_C$’) и В (X_B и $У_B$) (рис. 5).

Ошибка!

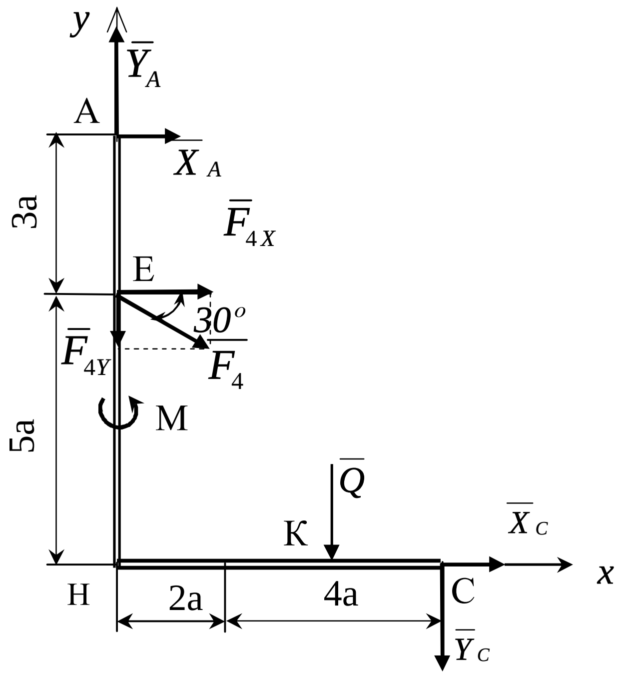


Рисунок 5

Реакция шарнирной опоры А определяется двумя составляющими силами $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, реакция шарнирной опоры С определяется двумя составляющими силами $\overline{X}'_C$ и $\overline{Y}'_C$, являющимися противодействующими силам $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия, воспользовавшись основной формой условия равновесия произвольной плоской системы сил (I).

Для данной системы сил уравнение равновесия (I) запишется в виде:

$$\sum F_{kX} = X_A + F_{4X} + X_C = 0;$$
$$\sum F_{kY} = Y_A - F_{4Y} - Q - Y_C = 0;$$
$$\sum M_A(\overline{F}_k) = F_{4X} \cdot 3a + M - Q \cdot 4a - Y_C \cdot 6a + X_C \cdot 8a = 0.$$

Записывая уравнения применяем определение момента силы, учитывая, что при плече, равном нулю (линия действия силы проходит через моментную точку), момент силы относительно данной точки равен нулю, а именно:

$M_A(\overline{X}_A) = 0$ - линия действия силы $\overline{X}_A$ проходит через моментную точку А.

$M_A(\overline{Y}_A) = 0$, $M_A(\overline{F}_{4Y}) = 0$ - по аналогичной причине.

Силы $\overline{F}_{4X}, \overline{F}_{4Y}$ определяем, как проекции силы $\overline{F}_4$ на оси координат:

$$F_{4X} = F_4 \cdot cos30^o;$$
$$F_{4Y} = F_4 \cdot sin30^o.$$

Учитывая это, уравнения равновесия перепишутся в виде:

$$\sum F_{kX} = X_A + F_4 \cdot cos30^o + X_C = 0;$$
$$\sum F_{kY} = Y_A - F_4 \cdot sin30^o - Q - Y_C = 0;$$
$$\sum M_A(\overline{F}_k) = F_4 \cdot cos30^o \cdot 3a + M - Q \cdot 4a - Y_C \cdot 6a + X_C \cdot 8a = 0.$$

Получили систему из 6-ти линейных уравнений с шестью неизвестными, что позволяет сделать вывод о статической определимости данной задачи.

$$\begin{cases} \sum F_{kX} = X_B - F_2 \cdot cos60° - X_C = 0; \\ \sum F_{kY} = Y_C + F_2 \cdot sin60° - Y_B = 0; \\ \sum M_B(\overline{F}_k) = -2 \cdot F_2 \cdot sin60° \cdot 4a \cdot cos60° - X_C \cdot 10a \cdot sin60° - Y_C \cdot 10a \cdot cos60° = 0; \\ \sum F_{kX} = X_A + F_4 \cdot cos30^o + X_C = 0; \\ \sum F_{kY} = Y_A - F_4 \cdot sin30^o - Q - Y_C = 0; \\ \sum M_A(\overline{F}_k) = F_4 \cdot cos30^o \cdot 3a + M - Q \cdot 4a - Y_C \cdot 6a + X_C \cdot 8a = 0. \end{cases}$$

3. Решим полученную систему методом определителей, для этого:

3.1. Приведем систему, подставив все известные значения.

$$\begin{cases} X_A + X_C = -34,68; \\ X_B - X_C = 10; \\ Y_A - Y_C = 36; \\ Y_C - Y_B = -17,34; \\ 1,6X_C - 1,2Y_C = -68,008; \\ -Y_C - 1,734X_C = 13,872. \end{cases}$$

3.2. Вычислим главный определитель системы.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,6 & 1,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,734 & -1 \end{vmatrix} = -3,6808$$

3.3. Вычислим определители переменных системы.

$$DX_A = \begin{vmatrix} -34{,}68 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -17{,}34 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -68{,}008 & 0 & 0 & 0 & 1{,}6 & 1{,}2 \\ 13{,}872 & 0 & 0 & 0 & -1{,}734 & -1 \end{vmatrix} = 42{,}99574$$

$$DY_A = \begin{vmatrix} 1 & -34{,}68 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -17{,}34 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -68{,}008 & 0 & 0 & 1{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 13{,}872 & 0 & 0 & -1{,}734 & -1 \end{vmatrix} = -228{,}239$$

$$DX_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -34{,}68 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 36 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -17{,}34 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -68{,}008 & 0 & 1{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 13{,}872 & 0 & -1{,}734 & -1 \end{vmatrix} = 47{,}8464$$

$$DY_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -34{,}68 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 36 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17{,}34 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -68{,}008 & 1{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 13{,}872 & -1{,}734 & -1 \end{vmatrix} = -159{,}556$$

$$DX_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -34{,}68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 36 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -17{,}34 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -68{,}008 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13{,}872 & -1 \end{vmatrix} = 84{,}6544$$

$$DY_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34{,}68 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -17{,}34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}6 & -68{,}008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}734 & 13{,}872 \end{vmatrix} = -95{,}7307$$

3.4. Вычислим неизвестные по формуле: $X_n = \dfrac{\Delta X_n}{\Delta}$

$$X_A = \frac{DX_A}{D} = \frac{42,99574}{-3,6808} = -11,6811 \text{ (кН)}; \quad Y_A = \frac{DY_A}{D} = \frac{-228,239}{-3,6808} = 62,00812 \text{ (кН)};$$

$$X_B = \frac{DX_B}{D} = \frac{47,8464}{-3,6808} = -12,9989 \text{ (кН)}; \quad Y_B = \frac{DY_B}{D} = \frac{-159,556}{-3,6808} = 43,34812 \text{ (кН)};$$

$$X_C = \frac{DX_C}{D} = \frac{84,6544}{-3,6808} = -22,9989 \text{ (кН)}; \quad Y_C = \frac{DY_C}{D} = \frac{-95,7307}{-3,6808} = 26,00812 \text{ (кН)}.$$

4. Проверим полученные результаты, рассмотрев равновесие всей системы и составив уравнение суммы моментов сил относительно точки К (рис. 6).

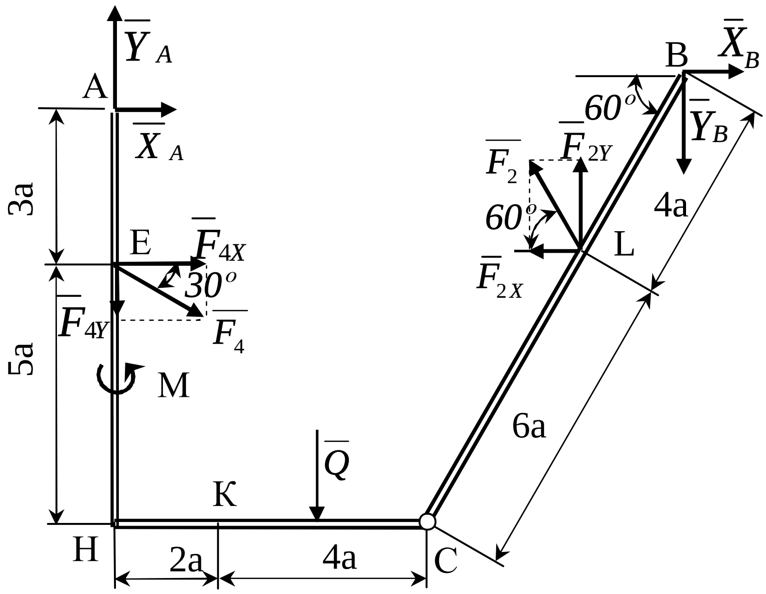


Рисунок 6

Сумма моментов всех сил, относительно точки К:

$$\sum M_K(\overline{F}_k) = -Y_A \cdot 2a - X_A \cdot 8a - F_{4X} \cdot 2a + M - Q \cdot 2a + F_{2X} \cdot 6a \cdot sin60^o +$$
$$+F_{2Y} \cdot (4a + 6a \cdot cos60^o) - Y_B \cdot (4a + 10a \cdot cos60^o) - X_B \cdot 10a \cdot sin60^o = 0$$

Проверим истинность полученного выражения:

$$\sum M_K(\overline{F}_k) = -62,00812 \cdot 2 \cdot 0,2 - (-11,6811) \cdot 8 \cdot 0,2 - 34,680 \cdot 2 \cdot 0,2 + 60 - 16 \cdot 2 \cdot 0,2 +$$
$$+10 \cdot 6 \cdot 0,2 \cdot 0,866 + 17,34 \cdot (4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,2 \cdot 0,5) - 43,34812 \cdot (4 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 \cdot 0,5) -$$
$$-(-12,9989) \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,866 = -0,0000055154.$$

Учитывая погрешности вычислений и округлений, можно сказать, что $\sum M_K(\overline{F}_k) = -0,0000055154 \approx 0$, следовательно, задача решена правильно.

Ответ: $X_A = -11,6811$ (кН); $Y_A = 62,00812$ (кН); $X_B = -12,9989$ (кН);

$Y_B = 43,34812$ (кН); $X_C = -22,9989$ (кН); $Y_C = 26,00812$ (кН).

Знак «минус» перед значениями X_A, X_B, X_C указывают на то, что реально силы $\overline{X}_A, \overline{X}_B, \overline{X}_C$ направлены в сторону, обратную указанной на рисунках (рис. 4, 5, 6).

Задача С3

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. С3.0 — С3.7) или же двумя подшипниками в точках А и В и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис.С3.8, С3.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1= 5 кН, меньшей плиты P_2 = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость ху — горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом М=4 кН*м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С3; при этом силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_4}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости ху, сила $\overline{F_2}$ — в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F_3}$ — в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, Е, Н, К) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять а = 0,6 м.

Указания. Задача С3 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}') + m_x(\overline{F}'')$ и т. д.

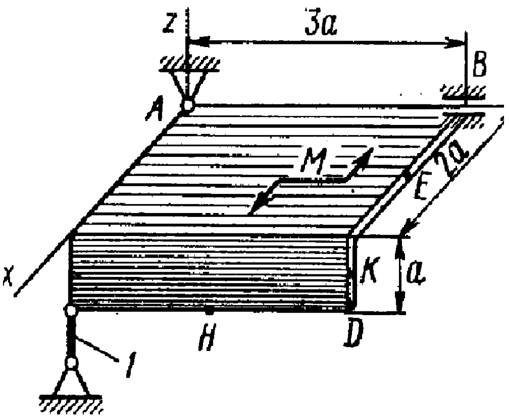


Рис С 3.0

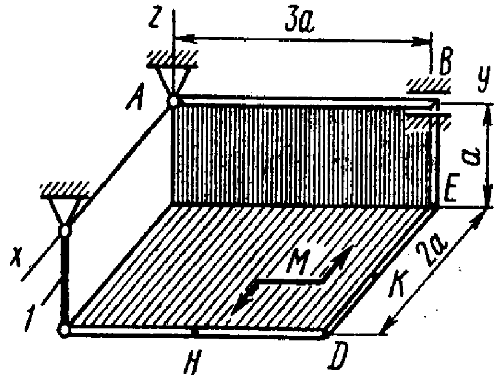


Рис С 3.1

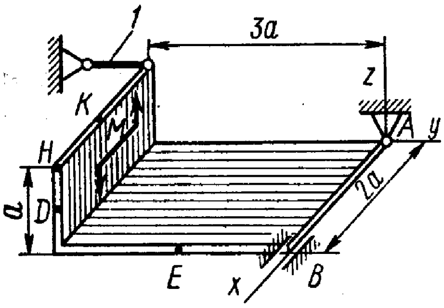


Рис С 3.2

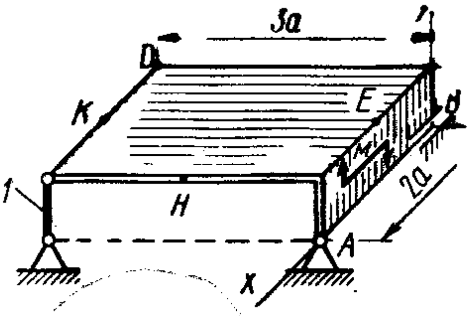


Рис С 3.3

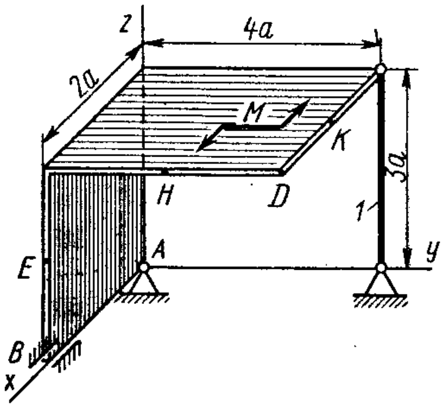


Рис С 3.4

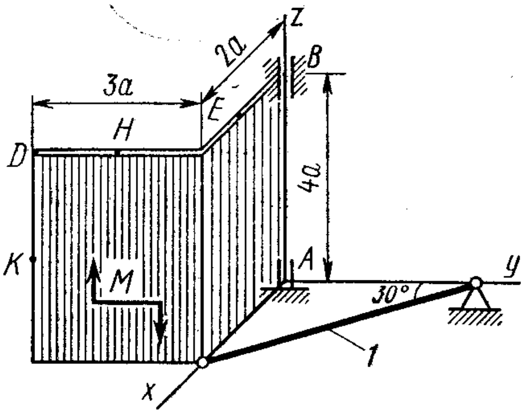


Рис С 3.5

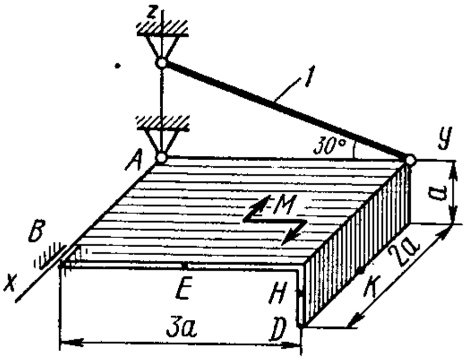


Рис С 3.6

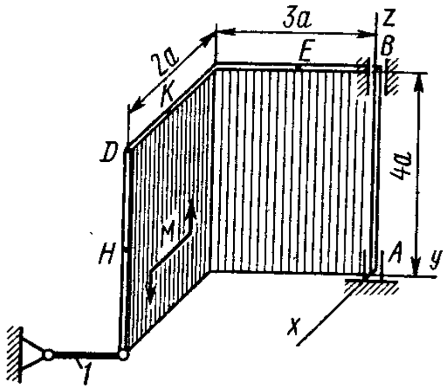


Рис С 3.7

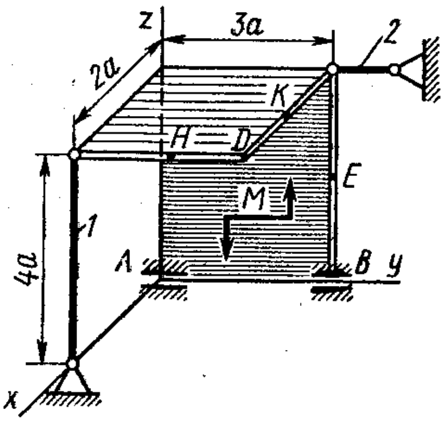


Рис С 3.8

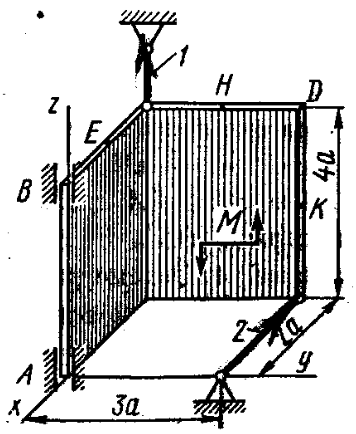
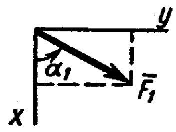
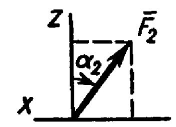
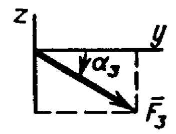
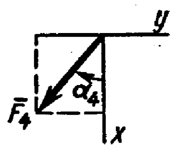


Рис С 3.9

Таблица С3

Силы								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	**Точка приложения**	α_1, **град**	**Точка приложения**	α_2, **град**	**Точка приложения**	α_3, **град**	**Точка приложения**	α_4, **град**
0	*E*	60	*H*	30	—	—	—	—
1	—	—	*D*	60	*E*	30	—	—
2	—	—	—	—	*K*	60	*E*	30
3	*K*	30	—	—	*D*	0	—	—
4	—	—	*E*	30	—	—	*D*	60
5	*H*	0	*K*	60	—	—	—	—
6	—	—	*H*	90	*D*	30	—	—
7	—	—	—	—	*H*	60	*K*	90
8	*D*	30	—		*K*	0	—	—
9	—	—	*D*	90	—	—	*H*	30

Пример С3.1. Горизонтальная прямоугольная плита весом Р (рис. 7) закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим (подшипником) в точке В и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\overline{F}$, а в плоскости, параллельной yz - пара сил с моментом М.

Дано: Р=3 кН, F=8 кН, М=4 кН·м, α=60°, АС=0,8 м, АВ= 1,2 м, ВЕ= 0,4 м, ЕН = 0,4 м. Определить: реакции опор А, В и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}$, $\overline{F}$ и пара с моментом М, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{Z_A}$, цилиндрического (подшипника) - на две составляющие $\overline{X_B}$, $\overline{Z_B}$

(в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + X_B + F\cos 60^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky}' = 0,\ Y_A - N\cos 30^\circ = 0; \qquad (2)$$

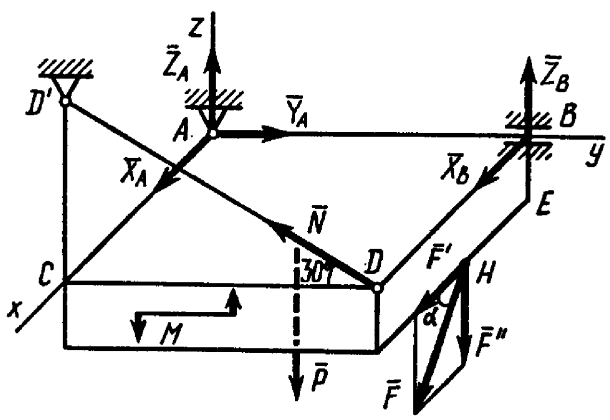


Рисунок 7

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P + N\sin 30^\circ - F\sin 60^\circ = 0; \qquad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ M - P\cdot AB/2 + Z_B\cdot AB - F\sin 60^\circ\cdot AB + N\sin 30^\circ\cdot AB = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\cdot AC/2 - N\sin 30^\circ\cdot AC + F\sin 60^\circ\cdot AC/2 - F\cos 60^\circ\cdot BE = 0; \qquad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ -F\cos 60^\circ\cdot AB - N\cos 30^\circ\cdot AC - X_B\cdot AB = 0. \qquad (6)$$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F}$ ' и $\overline{F}$ '', параллельные осям x и z (F' = Fcos a, F'' = F * sin a), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и, решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: X_A = 3,4 кН; $У_A$ = 5,1 кН; Z_A = 4,8 кН; X_B = -7,4 кН; Z_B = 2,1 кН; N = 5,9 кН. Знак минус указывает, что реакция $\overline{X_B}$ направлена противоположно показанной на рис. 7.

Пример С3.2. Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем LL'. Стержень прикреплен к плите и неподвижной опоре шарнирами.

Вес большей плиты P_1=5 кН, вес меньшей плиты P_1=3 кН. Большая плита расположена параллельно горизонтальной плоскости xy, меньшая плита - параллельно профильной плоскости yz.

На плиты действует пара сил с моментом M=4 кН·м, лежащая в плоскости большей плиты, сила $\overline{F}_2 = 8$ кН под углом α_2=60° к прямой, параллельной оси z, приложенная в точке D и лежащая в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F}_3 = 10$ кН под углом α_3=30° к прямой, параллельной оси y, приложенная в точке E и лежащая в плоскости, параллельной yz.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня LL'. при окончательных расчетах принять a=0,6 м.

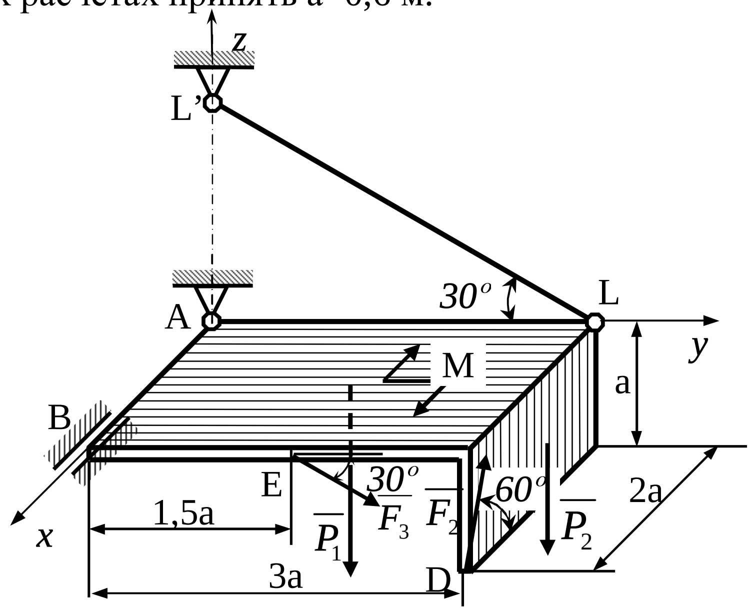


Рисунок 8

Дано: P_1=5 кН, P_2=3 кН, F_2=8 кН, F_3=10 кН, M=4 кН·м, a=0,6 м.

Определить: X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, N.

Решение:

1. Рассмотрим равновесие системы (рис. 9).

Ошибка!

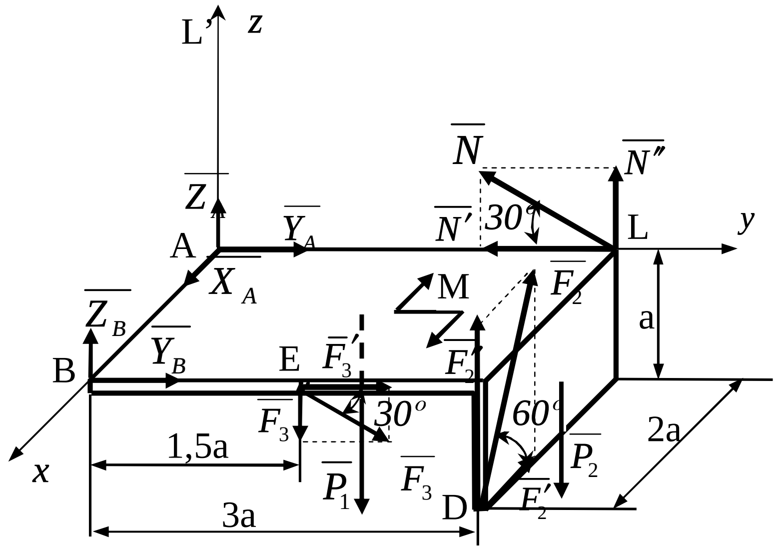


Рисунок 9

Реакция цилиндрической шарнирной опоры B определяется двумя силами $\overline{Z}_B$ и $\overline{Y}_B$, реакция сферической шарнирной опоры A определяется тремя силами $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{Z}_A$, реакция невесомого стержня LL' – силой $\overline{N}$.

Для полученной пространственной системы сил составим шесть уравнений равновесия, воспользовавшись условием равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_X\left(\overline{F}_k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kY} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_Y\left(\overline{F}_k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kZ} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Разложим активную силу $\overline{F}_2$ на две составляющие $\overline{F}_2{}'$, параллельную оси x, и $\overline{F}_2{}''$, параллельную оси z, активную силу $\overline{F}_3$ на две составляющие $\overline{F}_3{}'$, параллельную оси y, и $\overline{F}_3{}''$, параллельную оси z, реакцию стержня $\overline{N}$ на две составляющие $\overline{N}'$, параллельную оси y, и $\overline{N}''$, параллельную оси z.

Для данной системы сил уравнение равновесия запишется в виде:

$$\sum F_{kX} = X_A - F_2' = 0;$$
$$\sum F_{kY} = Y_A + Y_B + F_3' - N' = 0;$$
$$\sum F_{kZ} = Z_A + Z_B - F_3'' + F_2'' + N'' - P_1 - P_2 = 0;$$
$$\sum M_X(\overline{F}_k) = -P_1 \cdot \frac{3}{2}a - F_3'' \cdot \frac{3}{2}a + F_2'' \cdot 3a - P_2 \cdot 3a + N'' \cdot 3a = 0;$$
$$\sum M_Y(\overline{F}_k) = -Z_B \cdot 2a + F_3'' \cdot 2a + P_1 \cdot a - F_2'' \cdot 2a + F_2' \cdot a + P_2 \cdot a = 0;$$
$$\sum M_Z(\overline{F}_k) = Y_B \cdot 2a + F_3' \cdot 2a - M + F_2' \cdot 3a = 0.$$

Учитывая, что $F_2' = F_2 \cdot \cos 60°$, $F_2'' = F_2 \cdot \sin 60°$, $F_3' = F_3 \cdot \cos 30°$, $F_3'' = F_3 \cdot \sin 30°$, $N' = N \cdot \cos 30°$, $N'' = N \cdot \sin 30°$, перепишем уравнение в виде:

$$\sum F_{kX} = X_A - F_2 \cdot cos60^o = 0;$$
$$\sum F_{kY} = Y_A + Y_B + F_3 \cdot cos30^o - N \cdot cos30^o = 0;$$
$$\sum F_{kZ} = Z_A + Z_B - F_3 \cdot sin30^o + F_2 \cdot sin60^o + N \cdot sin30^o - P_1 - P_2 = 0;$$
$$\sum M_X\left(\overline{F}_k\right) = -P_1 \cdot \frac{3}{2}a - F_3 \cdot sin30^o \cdot \frac{3}{2}a + F_2 \cdot sin60^o \cdot 3a - P_2 \cdot 3a + N \cdot sin30^o \cdot 3a = 0;$$
$$\sum M_Y\left(\overline{F}_k\right) = -Z_B \cdot 2a + F_3 \cdot sin30^o \cdot 2a + P_1 \cdot a - F_2 \cdot sin60^o \cdot 2a + F_2 \cdot cos60^o \cdot a + P_2 \cdot a = 0;$$
$$\sum M_Z\left(\overline{F}_k\right) = Y_B \cdot 2a + F_3 \cdot cos30^o \cdot 2a - M + F_2 \cdot cos60^o \cdot 3a = 0.$$

Подставив в полученные уравнения известные величины, определим неизвестные:

$$X_A - F_2 \cdot cos60^o = 0 \Rightarrow X_A = F_2 \cdot cos60^o = 8 \cdot 0{,}5 = 4 \text{ (кН).}$$

$$-P_1 \cdot \frac{3}{2}a - F_3 \cdot sin30^o \cdot \frac{3}{2}a + F_2 \cdot sin60^o \cdot 3a - P_2 \cdot 3a + N \cdot sin30^o \cdot 3a = 0,$$

откуда:

$$N = \frac{P_1 \cdot \frac{3}{2}a + F_3 \cdot sin30^o \cdot \frac{3}{2}a - F_2 \cdot sin60^o \cdot 3a + P_2 \cdot 3a}{sin30^o \cdot 3a} = \frac{3a\left(0{,}5P_1 + 0{,}5F_3 \cdot sin30^o - F_2 \cdot sin60^o + P_2\right)}{sin30^o \cdot 3a} =$$
$$= \frac{0{,}5P_1 + 0{,}5F_3 \cdot sin30^o - F_2 \cdot sin60^o + P_2}{sin30^o};$$

в числовом выражении:

$$N = \frac{0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}866 + 3}{0{,}5} = \frac{2{,}5 + 2{,}5 - 6{,}9282 + 3}{0{,}5} = 2{,}1436 \text{ (кН).}$$

$$-Z_B \cdot 2a + F_3 \cdot sin30^o \cdot 2a + P_1 \cdot a - F_2 \cdot sin60^o \cdot 2a + F_2 \cdot cos60^o \cdot a + P_2 \cdot a = 0;$$

откуда:

$$Z_B = \frac{F_3 \cdot sin30^o \cdot 2a + P_1 \cdot a - F_2 \cdot sin60^o \cdot 2a + F_2 \cdot cos60^o \cdot a + P_2 \cdot a}{2a} =$$

$$= \frac{2a\left(F_3 \cdot sin30^o + 0,5P_1 - F_2 \cdot sin60^o + 0,5F_2 \cdot cos60^o + 0,5P_2\right)}{2a} =$$

$$= F_3 \cdot sin30^o + 0,5P_1 - F_2 \cdot sin60^o + 0,5F_2 \cdot cos60^o + 0,5P_2;$$

в числовом выражении:

$$Z_B = 10 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 5 - 8 \cdot 0,866 + 0,5 \cdot 8 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 3 = 5 + 2,5 - 6,928 + 2 + 1,5 = 4,072 \text{ (кН)}$$

$$Y_B \cdot 2a + F_3 \cdot cos30^o \cdot 2a - M + F_2 \cdot cos60^o \cdot 3a = 0,$$

откуда: $$Y_B = \frac{-F_3 \cdot cos30^o \cdot 2a + M - F_2 \cdot cos60^o \cdot 3a}{2a};$$

в числовом выражении:

$$Y_B = \frac{-10 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,6 + 4 - 8 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,6}{2 \cdot 0,6} = \frac{-6 + 4 - 7,2}{1,2} = -7,6667 \text{ (кН)}.$$

$$Y_A + Y_B + F_3 \cdot cos30^o - N \cdot cos30^o = 0;$$

откуда: $Y_A = -Y_B - F_3 \cdot cos30^o + N \cdot cos30^o$;

в числовом выражении:

$$Y_A = -\left(-7,6667\right) - 10 \cdot 0,866 + 2,1436 \cdot 0,866 = 0,8571 \text{ (кН)}.$$

$$Z_A + Z_B - F_3 \cdot sin30^o + F_2 \cdot sin60^o + N \cdot sin30^o - P_1 - P_2 = 0;$$

откуда: $Z_A = -Z_B + F_3 \cdot sin30^o - F_2 \cdot sin60^o - N \cdot sin30^o + P_1 + P_2$;

в числовом выражении:

$$Z_A = -4,072 + 10 \cdot 0,5 - 8 \cdot 0,866 - 2,1436 \cdot 0,5 + 5 + 3 = 0,9282 \text{ (кН)}.$$

Ответ: X_A = 4 (кН); Y_A = 0,8571 (кН); Z_A = 0,9282 (кН); Y_B = -7,6667 (кН); Z_B = 4,072 (кН); N = 2,1436 (кН). Знак «минус» перед значением Y_B указывает на то, что реально сила $\overline{Y}_B$ направлена в сторону, противоположную указанной на рисунке 9.

КИНЕМАТИКА

Задача К-1

Под номером К1 помещены две задачи К1а и К1б, которые надо решить.

Задача К1а. Точка В движется в плоскости ху (рис. К1.0— К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где х и у выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с, определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0-2 в столбце 2, для рис.3-6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах Cl-C4, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 — по последней.

Задача К1б. Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону s = f (t), заданному в табл. К1 в столбце 5 (s — в метрах, t – в секундах), где s = AM — расстояние точки от некоторого начала А, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\bar{u}$ и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении М, а положительное направление отсчета s — от А к М.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

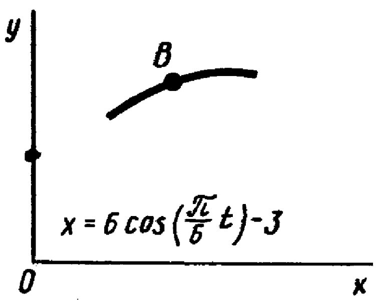


Рис. К1.0

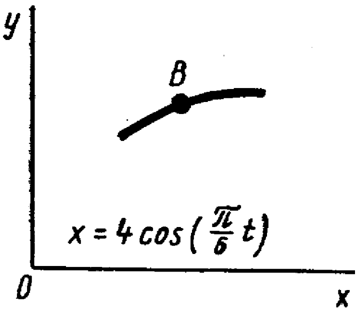


Рис. К1.1

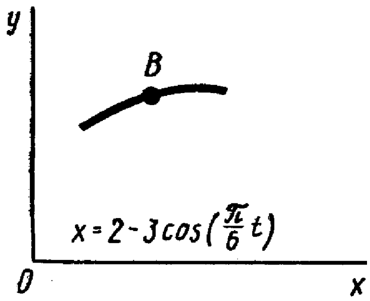


Рис. К1.2

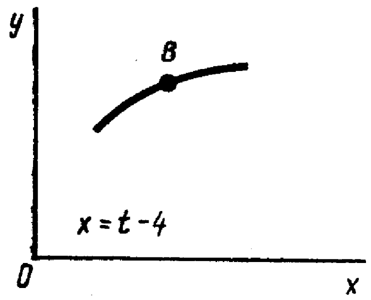


Рис. К1.3

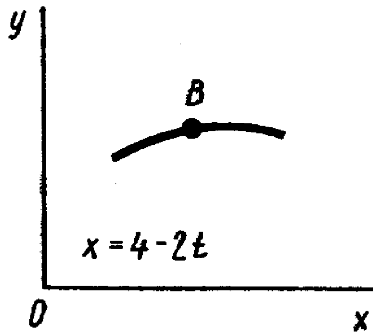


Рис. К1.4

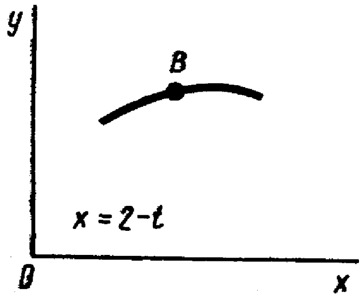


Рис. К1.5

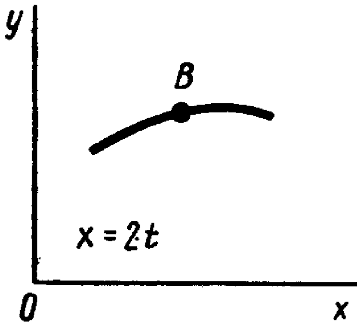


Рис. К1.6

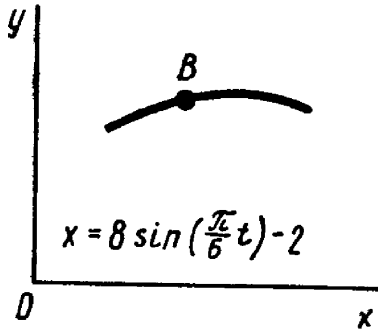


Рис. К1.7

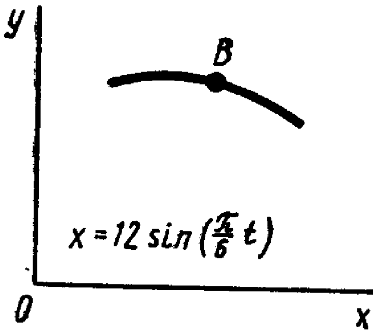


Рис. К1.8

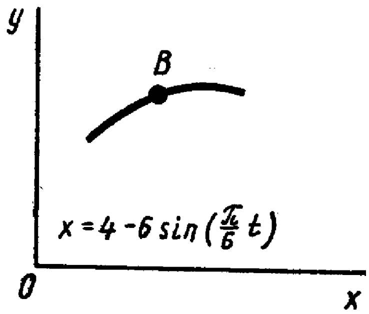


Рис. К1.9

Пример К1.1. Даны уравнения движения точки в плоскости ху:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(х,у - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1c найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. 10):

$$x = (y+1)^2 + 1. \qquad (2)$$

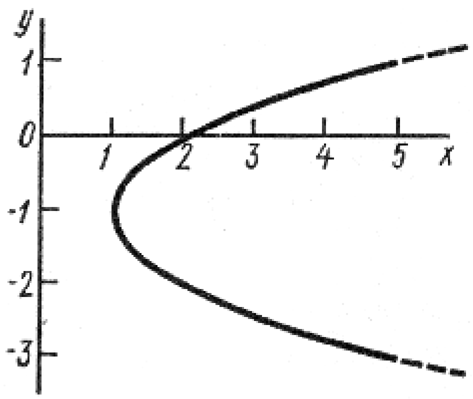


Рисунок 10

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с}, \quad v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с},$$

$$v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \qquad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2, \quad a_{1y} = -0{,}12 \text{ см/с}^2, \quad a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \qquad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $u^2 = u_X^2 + u_Y^2$. Получим

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Пример К1.2. Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s = 2sin\left(\frac{p}{4}t\right)$ (s — в метрах, t - в секундах), где s = AM(дуга) (рис. 11). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1$ с получим $u_1 = p\sqrt{2}/4 = 1{,}11$м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

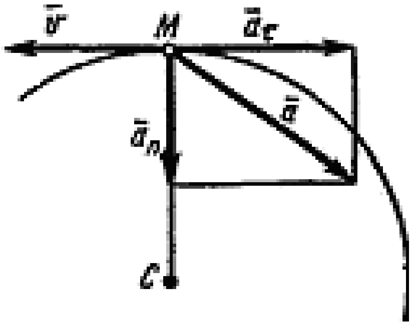


Рисунок 11

При $t_1 = 1$ с получим, учтя, что R = 2 м,

$$a_{1t} = -p^2\sqrt{2}/16 = 0.87 м/с^2, a_{1n} = u_1^2/2 = p^2/16 = 0.62 м/с^2.$$

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1$ с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1{,}07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. 11 векторы $\overline{u_1}$ и $\overline{a_1}$, учитывая знаки υ_1 и $a_{1\tau}$ и считая положительным направление от А к М.

Пример К1.3. Точка В движется в плоскости xy (рис. 12); (траектория на рисунке показана условно). Закон движения задан уравнениями: $x = 2t;\quad y = 8\sin\left(\frac{p}{4}t\right)$, где x и y выражены в сантиметрах, а t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с определить скорость и ускорение точки, ее касательное и нормальное ускорение, радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

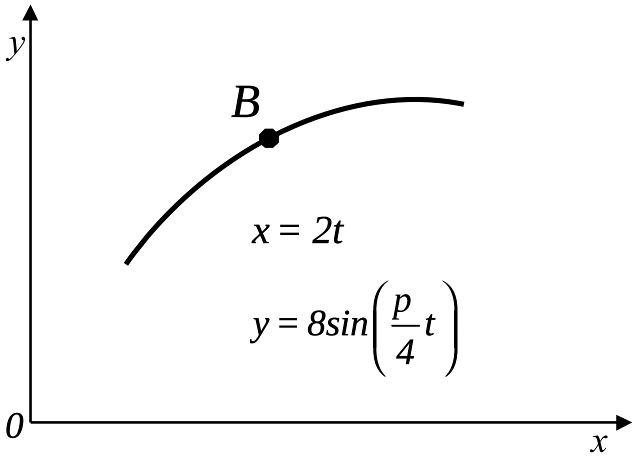


Рисунок 12

Дано: $x = 2t$; $y = 8\sin\left(\frac{p}{4}t\right)$.

Определить: f(x,y) при t_1=1с, $\bar{v}$, $\bar{a}_t$, $\bar{a}_n$, $\bar{a}$, r .

Решение:

1. Для определения уравнения траектории точки в виде зависимости f(x,y), выразим параметр t через x:

$$x = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{2} \qquad (1)$$

Подставив выражение (1) во второе уравнение движения, получим окончательное уравнение траектории точки (2):

$$y = 8\sin\left(\frac{p}{4}t\right) = 8\sin\left(\frac{p}{4}\cdot\frac{x}{2}\right) = 8\sin\left(\frac{p}{8}x\right) \qquad (2)$$

Траектория движения точки есть синусоида (рис. 2)

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_x = \dot{x} = (2t)' = 2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_y = \dot{y} = \left(8\sin\left(\frac{p}{4}t\right)\right)' = 2p\cos\left(\frac{p}{4}t\right)$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Скорость движения точки в момент времени $t = 1c$ будет равна:

$$v_x(1) = 2\ (см/с); \quad v_y(1) = 2p\cos\left(\frac{p}{4}\right) = 2\frac{p\sqrt{2}}{2} = p\sqrt{2} = 4{,}4429\ (см/с)$$
$$v(1) = \sqrt{(v_x(1))^2 + (v_y(1))^2} = \sqrt{2^2 + (4{,}4429)^2} = \sqrt{4 + 19{,}7392} = \sqrt{23{,}7392} = 4{,}8723\ (см/с) \qquad (3)$$

3. Ускорение точки также найдем по его проекциям на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_x = \dot{v}_x = (2)' = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_y = \dot{v}_y = \left(2p\cos\left(\frac{p}{4}t\right)\right)' = -\frac{1}{2}p^2\sin\left(\frac{p}{4}t\right)$$

$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$, поскольку $a_x = 0$, то $a = \sqrt{{a_y}^2}$

Ускорение движения точки в момент времени $t = 1c$ будет равно:

$$a_y(1) = -\frac{1}{2}p^2\sin\left(\frac{p}{4}\right) = -\frac{1}{2}p^2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{p^2}{2\sqrt{2}} = -3{,}4894\ (см/с^2)$$
$$a(1) = \sqrt{a_y(1)^2} = \sqrt{(-3{,}4894)^2} = 3{,}4894\ (см/с^2) \qquad (4)$$

Знак «минус» перед значением a_y указывает на то, что вектор $\overline{a_y}$ направлен противоположно вектору скорости $\overline{v_y}$.

4. Дифференцируя по времени равенство $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$, получим выражение:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} \qquad (5)$$

В выражении (5), $\frac{dv}{dt} = a_t$, $\frac{dv_x}{dt} = a_x$, $\frac{dv_y}{dt} = a_y$, поэтому:

$$2va_t = 2v_xa_x + 2v_ya_y, \text{ откуда } a_t = \frac{v_xa_x + v_ya_y}{v} \qquad (6)$$

Подставив в (6) известные величины из (4) и (3), определим a_τ в момент времени $t = 1c$:

$$a_t(1) = \frac{v_x(1)a_x(1) + v_y(1)a_y(1)}{v(1)};\; a_t(1) = \frac{2 \cdot 0 + 4{,}4429 \cdot (-3{,}4894)}{4{,}8723} = -3{,}1819 \;\left(\text{ñì} / \text{ñ}^2\right) \quad (7)$$

Знак «минус» перед значением a_τ указывает на то, что вектор $\overline{a_t}$ направлен противоположно вектору скорости $\bar{v}$.

5. Нормальное ускорение a_n определим по формуле: $a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$, откуда:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^{\,2}};\; a_n(1) = \sqrt{a(1)^2 - a_t(1)^2} = \sqrt{3{,}4894^2 - (-3{,}1819)^2} = \sqrt{2{,}9295} = 1{,}7116 \;\left(\text{ñì} / \text{ñ}^2\right)$$

(8)

6. Радиус кривизны траектории определяем по формуле: $r = \dfrac{v^2}{a_n}$

в момент времени $t = 1c$ $\; r(1) = \dfrac{v(1)^2}{a_n(1)};\; r(1) = \dfrac{4{,}8723^2}{1{,}7116} = \dfrac{23{,}7393}{1{,}7116} = 13{,}87 \;(\text{cì})$.

Ответ: v(1)=4,8723 см/с; a(1)=3,4894 см/с^2; a_τ(1)=1,7116 см/с^2; a_n(1)=3,1819 см/с^2; ρ=13,87 см.

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К.2.0 — К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1– r_1=2 см, R_1 = 4 см, у колеса 2–r_2=6 см, R_1 = 8 см, у колеса 3–r_3=12 см, R_3 = 16 см. На ободьях расположены точки A, B и C.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ — закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ - закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ — закон изменения угловой скорости колеса 2, $\upsilon_5(t)$ — закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, s — в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5, υ_4, υ_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (υ - линейные, ω - угловые) и ускорения (a - линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел (υ_5 – скорость груза 5 и т. д.).

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\dot\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

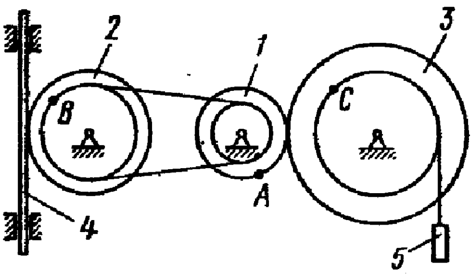


Рис. К2.0

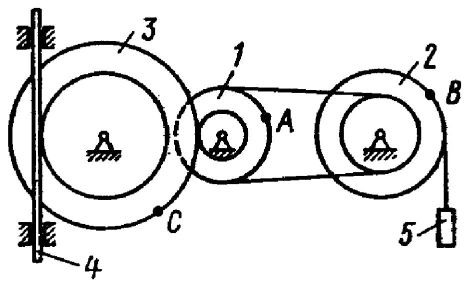


Рис. К2.1

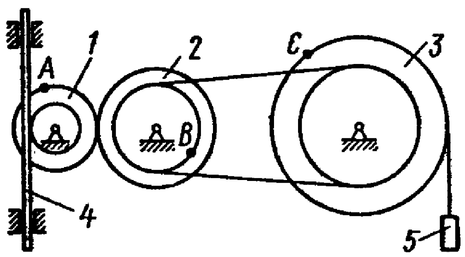


Рис. К2.2

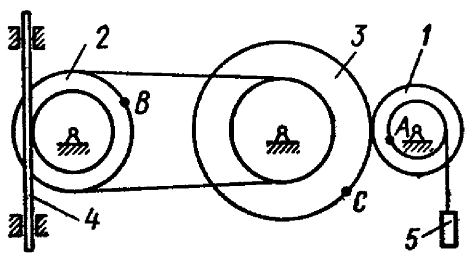


Рис. К2.3

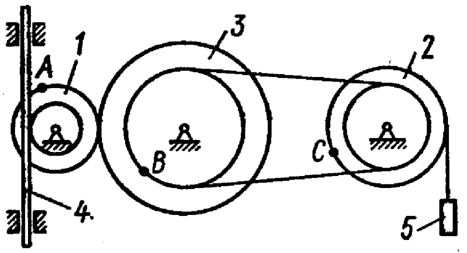


Рис. К2.4

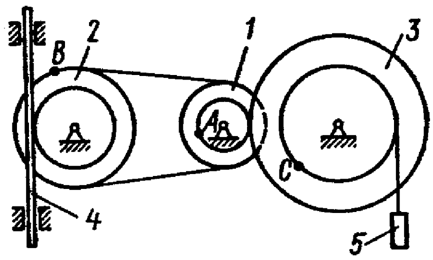


Рис. К2.5

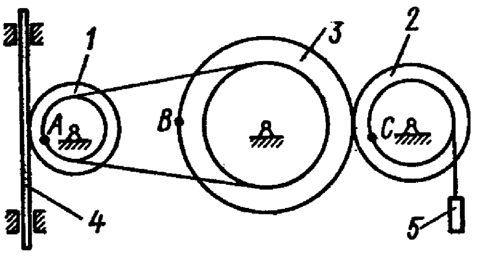


Рис. К2.6

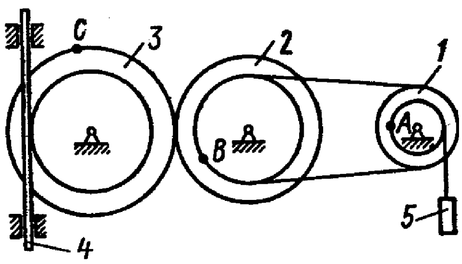


Рис. К2.7

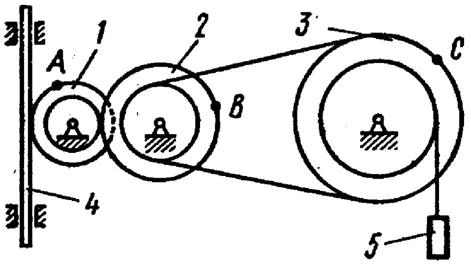


Рис. К2.8

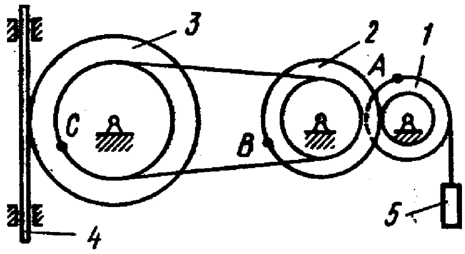


Рис. К2.9

Указания. Задача К2 — на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример К2.1. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 13). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s - в сантиметрах, t — в секундах), A — точка обода колеса 3. $t_1 = 3$c. Определить: ω_3, υ_4, ε_3, a_A, в момент времени $t = t_1$.

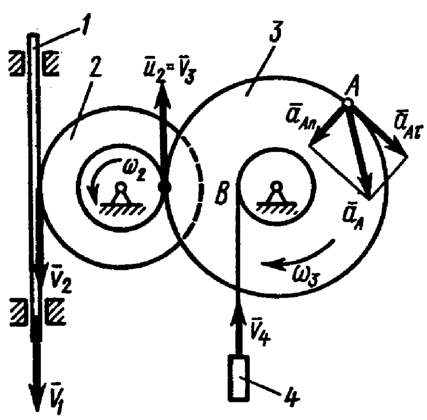


Рисунок 13

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), — через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \qquad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $\upsilon_2=\upsilon_1$ или $\omega_2 R_2=\upsilon_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \upsilon_3$ или $\omega_2\ r_2 = \ \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \ \ \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \qquad (2)$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 с получим ω_3 = 6,75 с$^{-1}$.

2. Определяем υ_4. Так как $\upsilon_4=\upsilon_B= \omega_3\ r_3$, то при t_1 = 3 с υ_4 =20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{w}_3$ = 1,5 t. Тогда при t_1 = 3 с ε_3 = 4,5 с $^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки A $\overline{a_A} = \overline{a_{At}} + \overline{a_{An}}$, где численно $a_{A\tau}=R_3\varepsilon_3$, $a_{An}=R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем

$$a_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2,\ a_{An} = 364{,}5 \text{ см/с}^2;$$
$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

Ответ: ω_3 = 6,75 с$^{-1}$; υ_4 = 20,25 см/с; ε_3 = 4,5 с$^{-2}$; a_A = 366,3 см/с^2.

Пример К2.2.

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на колесо 3 (рис. 14). Радиусы ступеней колес соответственно равны: R_1=4 см; r_1=2 см; R_2=8 см; r_2=6 см; R_3=16 см; r_3=12 см. На ободьях колес расположены точки A, B и C.

Закон изменения скорости груза $v_5=2(t^2-3)$. В задаче φ выражается в радианах, S – в сантиметрах, t – в секундах. Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для S_4, S_5, v_4, v_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1=2с v_A, v_C, ε_3, a_B, a_4.

Ошибка!

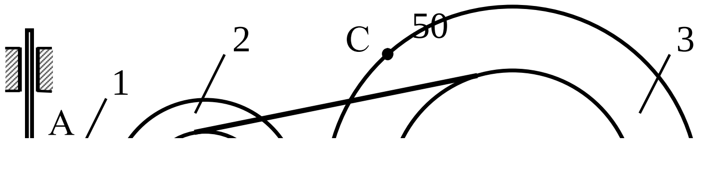


Рисунок 14

Дано: $v_5=2(t^2-3)$; $R_1=4$ см; $r_1=2$ см; $R_2=8$ см; $r_2=6$ см; $R_3=16$ см; $r_3=12$ см

Определить: при $t_1=2$с $\bar{v}_A$, $\bar{v}_C$, $\bar{a}_B$, $\overline{a_4}$, e_3.

Решение:

1. Определение скоростей.

Находим скорость груза v_5 в момент времени $t_1=2$с: $v_5(2)=2(2^2-3)=2$ см/с.

Груз связан с колесом 3 в точке D , следовательно $\overline{v_5}=\overline{v_D}$. В момент времени $t_1=2$с, $v_D(2)=2$ см/с, направлена в ту же сторону, что и $\overline{v_5}$.

Ошибка!

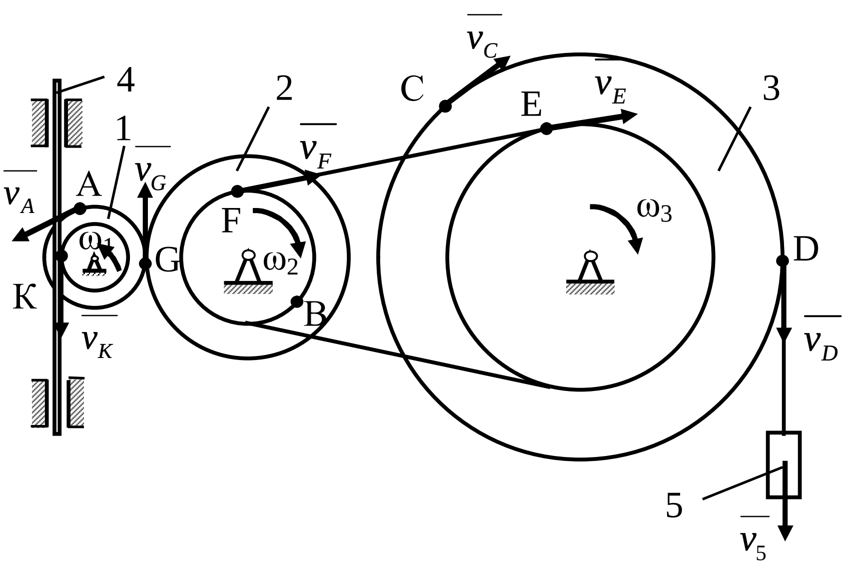


Рисунок 15

При вращательном движении угловая скорость связана с линейной выражением: $v=w\cdot R$

Выразив v_D через угловую скорость ω_3, определим ω_3:

$v_D = w_3 \cdot R_3$, откуда $w_3 = \dfrac{v_D}{R_3} = \dfrac{2(t^2-3)}{16} = \dfrac{1}{8}(t^2-3)$. Вращение колеса 3 происходит по ходу часовой стрелки.

Скорость точки С в момент времени t_1=2с численно равна $v_C = v_D(2)$=2 см/с, направлена по касательной, проведенной через эту точку, в сторону угловой скорости ω_3.

Скорость точки Е определим по формуле: $v_E = w_3 \cdot r_3$,

$$v_Å = \frac{1}{8}(t^2-3) \cdot 12 = \frac{3}{2}(t^2-3)$$

Колесо 2 связано с колесом 3 ременной передачей, следовательно $\overline{v_F} = \overline{v_E}$. $\overline{v_F}$ направлена в ту же сторону, что и $\overline{v_E}$.

Для колеса 2 уравнение перепишется в виде:

$$v_F = w_2 \cdot r_2, \text{ откуда } w_2 = \frac{v_F}{r_2} = \frac{\frac{3}{2}(t^2-3)}{6} = \frac{1}{4}(t^2-3).$$

Вращение колеса 2 происходит по ходу часовой стрелки.

Скорость точки G определим по формуле: $v_G = w_2 \cdot R_2$,

$$v_G = \frac{1}{4}(t^2-3) \cdot 8 = 2(t^2-3).$$

Точка G является точкой касания колес 2 и 1, поэтому угловую скорость ω_1 можно выразить следующим образом: $v_G = w_1 \cdot R_1$, откуда:

$$w_1 = \frac{v_G}{R_1} = \frac{2(t^2-3)}{4} = \frac{1}{2}(t^2-3).$$

Вращение колеса 1 происходит против хода часовой стрелки.

Скорость точки А в момент времени t_1=2с численно равна $v_A = v_G(2) = 2(2^2-3)$=2 см/с, направлена по касательной, проведенной через эту точку, в сторону угловой скорости ω_1.

Скорость точки К определим по формуле: $v_K = w_1 \cdot r_1$, $v_R = \frac{1}{2}(t^2-3) \cdot 2 = t^2 - 3$.

В контактной точке для колеса 1 и рейки 4 имеем скорость $v_R = t^2 - 3$, направленную по касательной, проведенной к точке К , в сторону угловой скорости колеса 1, т.е. вниз.

Векторы скоростей всех точек проставлены на рисунке (рис. 15).

2. Определение ускорений.

Угловое ускорение есть производная от угловой скорости: $e = \dot{w}$

Для углового ускорения колеса 3 уравнение запишется в виде:

$e_3 = \dot{w}_3$, откуда $e_3 = \left(\frac{1}{8}(t^2 - 3)\right)' = \frac{2}{8}t = \frac{1}{4}t$

В момент времени t_1=2c, $e_3(2) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ $\left(\text{ðàä}/\text{ñ}^2\right)$.

Ускорение при вращательном движении имеет две составляющие $\bar{a}_t$ и $\bar{a}_n$.

Касательное ускорение $\bar{a}_t$ численно равно $a_t = e \cdot R$, направленно по касательной, нормальное ускорение $\bar{a}_n$ численно равно $a_n = R \cdot w^2$ и направлено по нормали в сторону оси вращения. Таким образом, полное ускорение равно:

$$a = \sqrt{a_t{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{(e \cdot R)^2 + (w^2 \cdot R)^2} = R\sqrt{e^2 + w^4}$$

Для точки В определим касательное и нормальное ускорения.

$a_{Bt} = e_2 \cdot r_2$ и $a_{Bn} = r_2 \cdot w_2{}^2$

Угловое ускорение колеса 2 определим, воспользовавшись выражением : $e_2 = \dot{w}_2$, откуда $e_2 = \left(\frac{1}{4}(t^2 - 3)\right)' = \frac{2}{4}t = \frac{1}{2}t$.

Касательное ускорение точки В: $a_{Bt} = \frac{1}{2}t \cdot 6 = 3t$.

Нормальное ускорение точки В: $a_{Bn} = \left(\frac{1}{4}(t^2 - 3)\right)^2 \cdot 6 = \frac{6}{16}(t^2 - 3)^2 = \frac{3}{8}(t^2 - 3)^2$.

Полное ускорение точки В: $a_B = \sqrt{a_{Bt}{}^2 + a_{Bn}{}^2}$.

В момент времени t_1=2c, ускорения точки А будут равны:

$a_{Bt}(2) = 3 \cdot 2 = 6$ $\left(\text{cì}/\text{ñ}^2\right)$; $a_{Bn}(2) = \frac{3}{8}(2^2 - 3)^2 = \frac{3}{8} \cdot 1^2 = \frac{3}{8} = 0{,}375$ $\left(\text{ñì}/\text{ñ}^2\right)$

$a_B(2) = \sqrt{6^2 + (0{,}375)^2} = \sqrt{36 + 0{,}14063} = \sqrt{36{,}14063} = 6{,}0117$ $\left(\text{cì}/\text{ñ}^2\right)$

Касательное ускорение точки В направлено в сторону угловой скорости.

Ускорение рейки 4 одновременно является касательным ускорением точки К колеса 1 , следовательно необходимо определить $\bar{a}_t$ точки К $a_{Rt} = e_1 \cdot r_1$.

Угловое ускорение колеса 1 определим, воспользовавшись выражением : $e_1 = \dot{w}_1$, откуда $e_1 = \left(\frac{1}{2}(t^2 - 3)\right)' = \frac{2}{2}t = t$

Касательное ускорение точки К равно: $a_{Rt} = 2t$

В момент времени t_1=2с, касательное ускорение точки К будет равно:

$a_{Kt}(2) = 2 \cdot 2 = 4 \ \left(cì/\tilde{n}^2\right)$

Ускорение рейки 4 численно равно $a_4 = a_{Kt} = 4 \ \left(\tilde{n}ì/\tilde{n}^2\right)$. Вектор $\overline{a}_4$ направлен по касательной к точке К в сторону угловой скорости, т.е вниз.

Векторы найденных ускорений изображены на рисунке (рис. 16)

Ошибка!

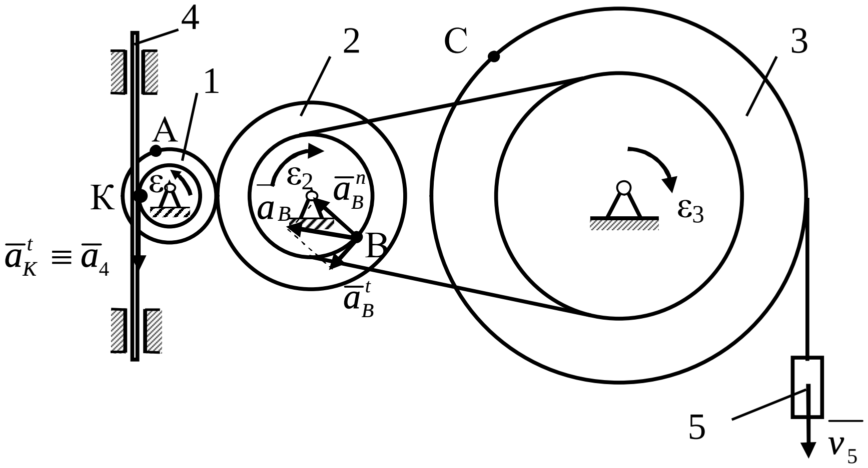


Рисунок 16

Ответ: При t_1=2с: v_A=2 см/с; v_C=2 см/с; $a_B = 6{,}0117 \left(см/с^2\right)$; $a_4 = 4 \left(см/с^2\right)$; $e_3 = \frac{1}{2}\left(рад/с^2\right)$. Направление векторов скоростей и ускорений показаны на рисунках (рис. 16-17)

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней /, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (рис. К3.0 — К3.7) или из стержней 1,2,3 и ползунов В и Е (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0-4) или в табл. К3б (для рис. 5-9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_4 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. 17б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{u_B}$ и ускорение a_B - от точки B к b (на рис. 5-9).

Указания. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Таблица К3а (к рис. К3.0 — К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	—	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	—	4	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	—	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	—	5	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	—	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	—	6	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	—	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	—	2	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	—	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	—	8	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица К3б (к рис. К3.5 — К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	v_B, м/с	a_B, м/с^2	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	—	—	4	6	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	0	150	30	0	60	—	—	6	8	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
5	90	120	90	90	60	—	—	8	10	*D, E*	*DE*	*A*	*AB*
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	30	120	30	0	60	—	—	2	5	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	*D, E*	*AB*	*A*	*AB*

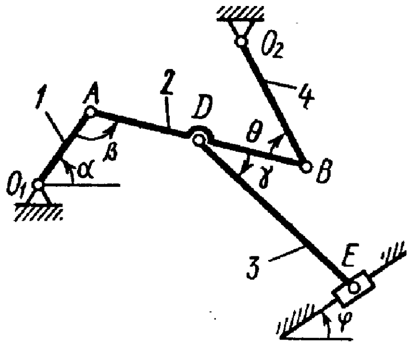


Рис. К3.0

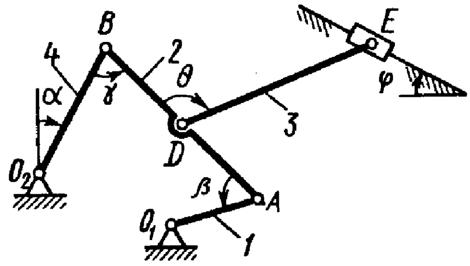


Рис. К3.1

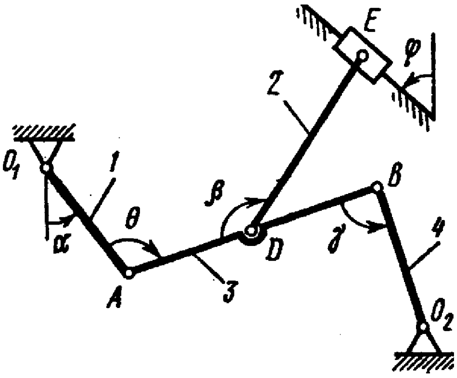


Рис. К3.2

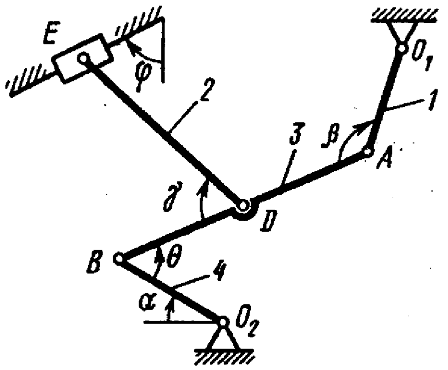


Рис. К3.3

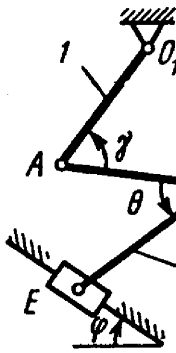


Рис. К3.4

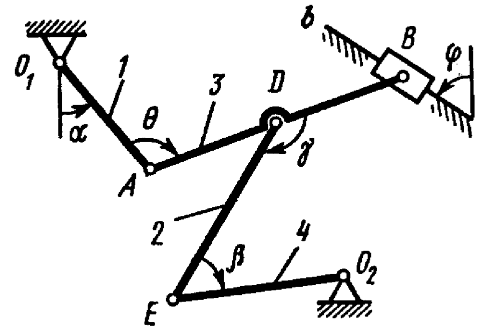


Рис. К3.5

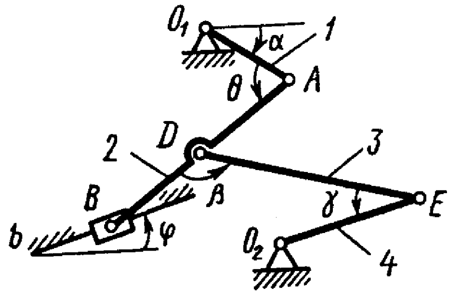


Рис. К3.6

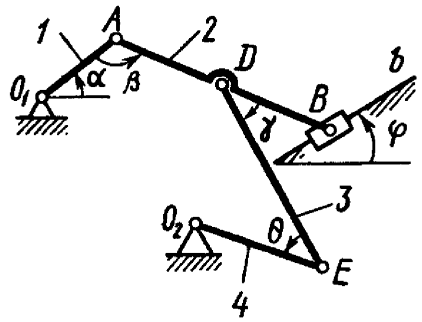


Рис. К3.7

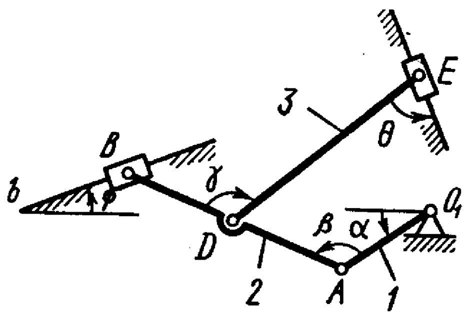


Рис. К3.8

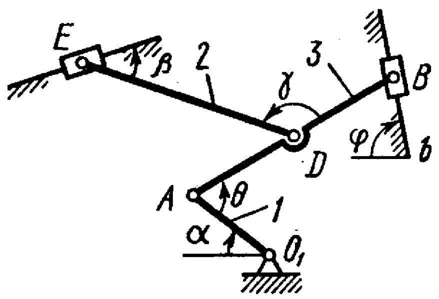


Рис. К3.9

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^t_{BA} + \bar{a}^n_{BA}$, где А — точка, ускорение $\overline{a_A}$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}^t_A + \bar{a}^n_A$); В — точка, ускорение $\overline{a_B}$ которой нужно определить (о случае, когда точка В движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера КЗ).

Пример КЗ.1. Механизм (рис. 18а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, AD = DB, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 - против хода часовой стрелки). Определить: υ_B, υ_E, ω_2, a_B, ε_3.

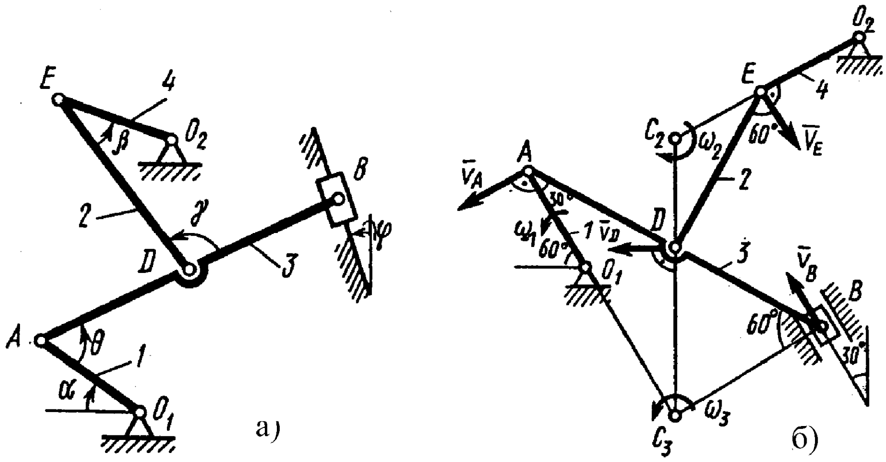


Рисунок 17

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 17б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем υ_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\overline{u_B}$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\overline{u_A}$, численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \; \bar{v}_A \perp O_1A . \qquad (1)$$

Направление $\overline{u_B}$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\overline{u_A}$ и направление $\overline{u_B}$, воспользуемся теоремой о проекциях остей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{u_B}$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \text{ и } v_B = 0{,}46 \text{ м/с} . \qquad (2)$$

3. Определяем $\overline{u_E}$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{u_E}$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\overline{u_A}$ и $\overline{u_B}$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{u_A}$ и $\overline{u_B}$, восставленных из точек A и B (к $\overline{u_A}$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\overline{u_A}$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{u_D}$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему

точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину υ_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \ \bar{v}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{u_E} \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\overline{u_E}$ и $\overline{u_D}$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{u_D}$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\overline{u_E}$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \ v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ c}^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\overline{a_B}$ (рис. 17в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\overline{a_B}$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\overline{a_A} = \overline{a^t{}_A} + \overline{a^n{}_A}$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$
$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{a_A^n}$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a_A^t}$ - перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 17в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a_B}$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a_B}$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{u_B}$.

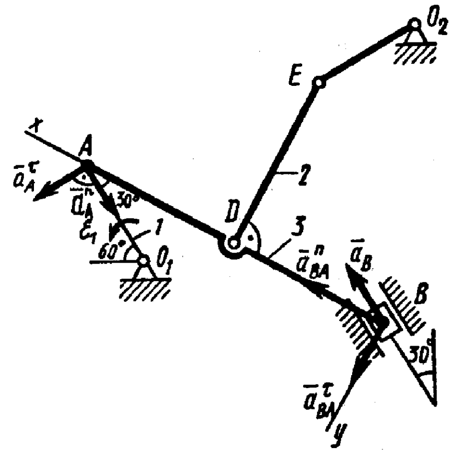


Рисунок 17в

Для определения $\overline{a_B}$ воспользуемся равенством

$$\bar a_B = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n + \bar a_{BA}^\tau + \bar a_{BA}^n \, . \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a_{BA}^n}$ (вдоль ВА от В к А) и $\overline{a_{BA}^t}$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a^n_{BA} = \omega^2_3 l_3$. Найдя ω_3 помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66 \ \text{с}^{-1} \ \text{и} \ a_{BA}^n = 0{,}61 \ \text{м/с}^2 \, . \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a^τ_{BA}, их можно найти, спроектировав части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление ВА (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a_{BA}^t}$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n \, . \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \ \text{м/с}^2 \, . \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\overline{a_B}$ направлен как показано на рис. 17в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a^τ_{BA}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \, . \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что a^{τ}_{BA} = -3,58 м/с^2. Знак указывает, что направление $\overline{a^t_{BA}}$ противоположно показанному на рис. 17в.

Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a^{\tau}_{BA}|}{l_3} = 2{,}56\ \text{с}^{-2}.$$

Ответ: υ_B =0,46 м/с; υ_E = 0,46 м/с; ω_2 = 0,67 с$^{-1}$; a_B =0,72 м/с^2; ε_3 = 2,56 с$^{-2}$.

Примечание. Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0 - К3.4, где В движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\overline{a_B}$ заранее неизвестно.

В этом случае $\overline{a_B}$ также следует представить двумя составляющими $(\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^n_B)$ и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^n{}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^n_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^n_{BA}. \qquad (13)$$

При этом вектор $\overline{a^n_B}$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\overline{a^t_B}$ — перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a^{τ}_A, a^n_A, a^n_{BA} определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a^{\tau}_A = 0$ или $a^n_A = 0$, если точка А движется прямолинейно).

Значение a^n_B также вычисляется по формуле $a^n_B = \upsilon^2_B/\rho = \upsilon^2_B/l$, где l - радиус окружности O_2B, а υ_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a^{τ}_B и a^{τ}_{BA} и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a^{τ}_B, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a^t_B)^2 + (a^n_B)^2}$. Величина a^{τ}_{BA} служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Пример К3.2 Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна Е (рис. 18), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно l_1=0,4 м; l_2=1,2 м; l_3=1,4 м; l_4=0,6 м. Положение механизма определяется углами α=90º, β=120º, γ=150º, φ=0º, θ=30º. Угловые скорости звеньев 1 и 4 направлены против хода часовой стрелки и равны соответственно ω_1=1 с$^{-1}$; ω_4=1 с$^{-1}$.

Определить скорости точек A и E $\bar{v}_A, \bar{v}_E$, угловую скорость звена AB ω_{AB}, ускорение точки A a_A, угловое ускорение звена AB ε_{AB}.

Дано: l_1=0,4 м; l_2=1,2 м; l_3=1,4 м; l_4=0,6 м. α=90º, β=120º,γ=150º,φ=0º, θ=30º, ω_1=1 с$^{-1}$; ω_4=1 с$^{-1}$

Определить: $\bar{v}_A$, $\bar{v}_E$, ω_{AB}; a_A; ε_{AB}.

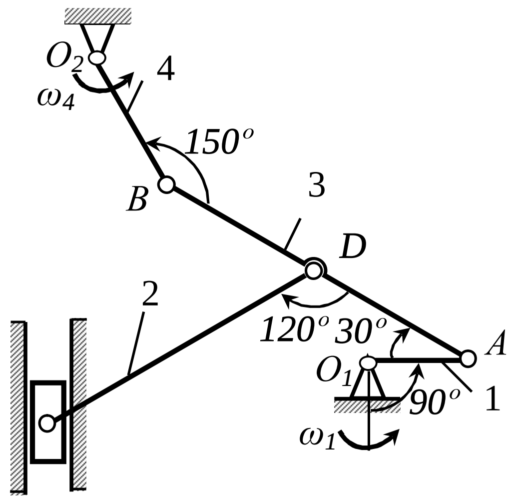


Рисунок 18

Решение: 1. Определение скоростей.

1.1. Рассмотрим кривошип O_1A, совершающий вращательное движение.

При известной длине $O_1A=l_1$ и ω_1, можем определить скорость точки A:

$v_A = w_1 \cdot l_1;\quad v_A = 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4\,(м/с)$ Вектор скорости $\bar{v}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу в сторону угловой скорости ω_1 (рис. 18).

1.2. Рассмотрим кривошип O_2B, совершающий вращательное движение.

При известной длине $O_2B=l_4$ и ω_4, можем определить скорость точки B:

$v_B = w_4 \cdot l_4;\quad v_B = 1\cdot 0{,}6 = 0{,}6\,(м/с)$ Вектор скорости $\bar{v}_B$ направлен перпендикулярно кривошипу в сторону угловой скорости ω_4 (рис. 18).

1.3. Рассмотрим звено AB, совершающее плоскопараллельное движение.

Определим мгновенный центр скоростей звена AB – точку K_1, лежащую на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$ (рис. 18).

Сравнивая скорости $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$, убеждаемся, что $\bar{v}_B > \bar{v}_A$, и приходим к заключению, что стержень AB вращается с угловой скоростью $\omega_{AB} = \omega_3$ вокруг мгновенного центра скоростей K_1 по направлению вектора $\bar{v}_B$.

Определим скорость точки D - $\bar{v}_D$, лежащую на перпендикуляре к прямой, проведенной через МЦС и точку D, и направленную в сторону поворота звена AB. Учитывая, что ω_{AB} одинакова для всего звена, численно v_D можно определить из соотношения:

$$\frac{v_D}{DK_1} = \frac{v_B}{BK_1}$$

DK_1 и BK_1 определим из треугольника BDK_1, который является прямоугольным, следовательно:

$$BK_1 = \frac{AB}{2 \cdot \cos 30°}; \; DK_1 = BK_1 \cdot \sin 30° = \frac{AB}{2} \times tg 30°.$$

Выразив v_D и подставив его в уравнение, получим:

$$v_D = \frac{v_B \times DK_1}{BK_1} = \frac{v_B \times AB \times tg 30° \times 2 \times \cos 30°}{2 \times AB} = v_B \times \sin 30°$$

Подставив известные величины , определим численно v_D: $v_D = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3\,(м/с)$. Угловую скорость звена AB - ω_{AB} определим по формуле:

$$w_3 = \frac{v_B}{BK_1}; \quad w_3 = \frac{0{,}6 \times 2 \times 0{,}866}{1{,}4} = 0{,}7423\,(c^{-1}).$$

1.4. Рассмотрим звено DE, совершающее плоскопараллельное движение.

Определим мгновенный центр скоростей звена DE – точку K_2, лежащую на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_D$ и $\bar{v}_E$ (рис. 18). Линия, вдоль которой действует вектор скорости $\bar{v}_E$ параллельна направляющим ползуна E, а для определения направления этого вектора, необходимо найти направление вращения данного звена вокруг мгновенного центра скоростей.

Как видно из рисунка, звено DE вращается вокруг МЦС по ходу часовой стрелки, следовательно вектор скорости $\bar{v}_E$ направлен вверх.

Численное значение $\bar{v}_E$ определим из соотношения:

$$\frac{v_D}{DK_2} = \frac{v_E}{EK_2},$$

Рассматривая треугольник DEK_2, приходим к выводу:

$DK_2=EK_2$ ($<DEK_2 = <EDK_2=30°$), следовательно $v_E = v_D = 0{,}3\left(м/с\right)$.

2. Определение ускорений.

2.1. Точка А принадлежит кривошипу O_1A, следовательно ее ускорение можно определить:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A{}^t + \bar{a}_A{}^n,$$

где численно: $a_A{}^n = w_1{}^2 \times O_1A$; $a_A{}^t = e_1 \times O_1A$. По условию ω_1=const, значит ε_1=0, следовательно $a_A{}^t = o$, а $a_A = a_A{}^n = 1^2 \times 0{,}4 = 0{,}4\left(м/с^2\right)$

Вектор $\bar{a}_A$, также, как и вектор $\bar{a}_A{}^n$, направлен вдоль кривошипа O_1A в сторону центра вращения (рис. 19).

2.2. Для определения ε_3 необходимо определить касательное ускорение звена АВ - $\bar{a}_{AB}{}^t$, т.к $a_{AB}{}^t = e_3 \cdot AB$. Рассмотрим движение точки А, принадлежащей звену АВ. Ее ускорение в этом случае определится по формуле:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{AB}{}^t + \bar{a}_{AB}{}^n$$

Вектор $\bar{a}_{AB}{}^n$ направлен вдоль звена АВ от А к В, а вектор $\bar{a}_B{}^t$ - перпендикулярно АВ. Допустим, что $\bar{a}_B{}^t$ направлен как показано на рисунке (рис. 19); численно: $a_{AB}{}^n = w_3{}^2 \times AB$; $a_{AB}{}^n = 0{,}7423^2 \times 1{,}4 = 0{,}7714\left(м/с^2\right)$

В уравнении ускорений неизвестно только ускорение точки В. Для его определения рассмотрим движение точки В, принадлежащей кривошипу O_2B и придем к выводу, что ускорение точки В - $\bar{a}_B = \bar{a}_B{}^t + \bar{a}_B{}^n = \bar{a}_B{}^n$ (т.к. $a_B{}^t = e_4 \times O_2B$, а по условию ω_4=const, значит ε_4=0, следовательно $a_B{}^t = o$).

Численно: $a_B = a_B{}^n = 1^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}6\ \left(ì/ñ^2\right)$

Из уравнения определим $\bar{a}_{AB}{}^t$, для этого спроецируем все составляющие этого уравнение на ось x (рис. 18) и получим:

$-a_A \cdot \cos 60° = a_B \cdot \cos 60° + a_{AB}{}^t$, откуда $a_{AB}{}^t = -a_B \cdot \cos 60° - a_A \cdot \cos 60°$

$a_{AB}{}^t = -0{,}6 \cdot \cos 60° - 0{,}4 \cdot \cos 60° = -0{,}5\left(м/с^2\right)$

Знак «минус» перед значением $a_{AB}{}^t$ указывает на то, что реально вектор $\bar{a}_{AB}{}^t$ направлен в сторону, противоположную указанной на рисунке.

Определим ε_3 из выражения $a_{AB}{}^t = e_3 \cdot AB$.

$e_3 = \dfrac{\left|a_{AB}{}^t\right|}{AB}$; $e_3 = \dfrac{\left|-0{,}5\right|}{1{,}4} = 0{,}3571\ \left(c^{-2}\right)$.

На рисунке изображены векторы всех найденных скоростей и ускорений (рис.19).

Ошибка!

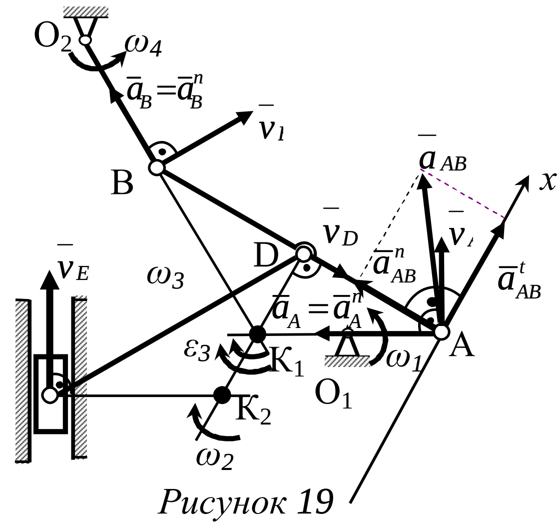


Рисунок 19

Ответ: $v_A = 0{,}4\,(м/с)$; $v_E = 0{,}3\,(м/с)$; $w_{AB} = 0{,}7423\,(c^{-1})$; $a_A = 0{,}4\,(м/с^2)$; $e_{AB} = 0{,}3571\,(c^{-2})$

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0 — К4.4) или круглая пластина радиуса R = 60 см (рис. К4.5 — К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве),

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0-4) или по окружности радиуса R (рис. 5—9) движется точка М; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t-в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0-4 и для рис. 5—9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка М показана в положении, при котором s = AM >0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка М на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5-9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки М в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами СМ и СА в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

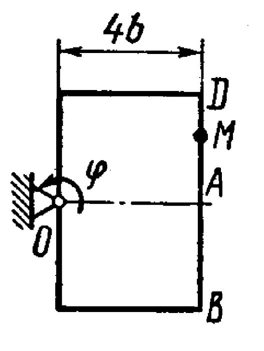


Рис. К4.0

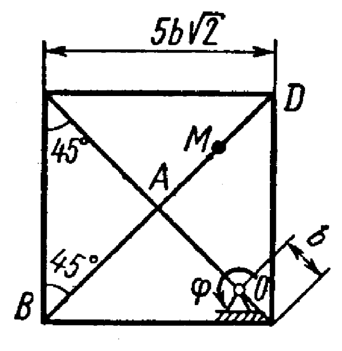


Рис. К4.1

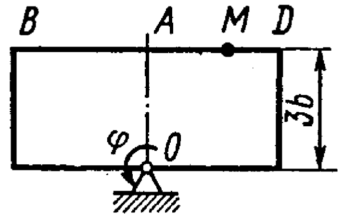


Рис. К4.2

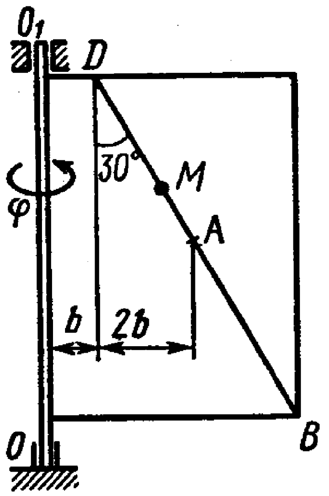


Рис. К4.3

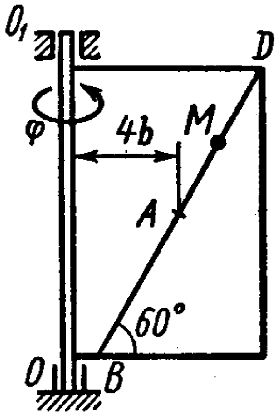


Рис. К4.4

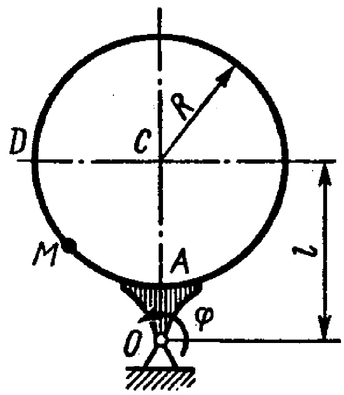


Рис. К4.5

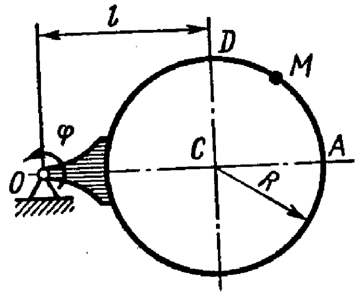


Рис. К4.6

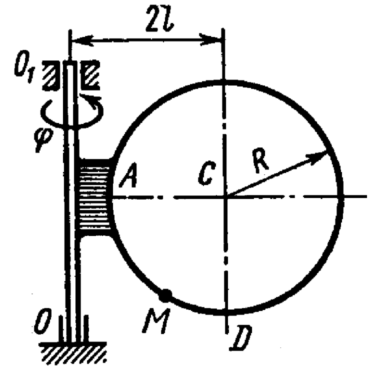


Рис. К4.7

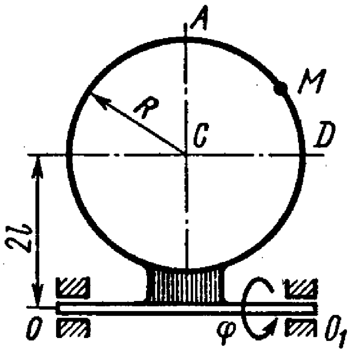


Рис. К4.8

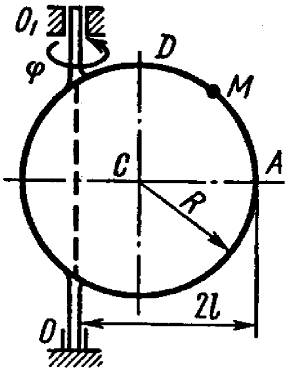


Рис. К4.9

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

Пример К4.1. Пластина $OEAB_1D$ (OE = OD, рис. 20) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$, (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону s = AB(дуга) = $f_2(t)$, (положительное направление отсчета s - от A к B).

Дано: R=0,5 м, $\varphi = t^2-0{,}5t^3$, $s = \pi R\cos(\pi t/3)$ (φ - в радианах, s - в метрах, (t - в секундах). Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени t_1 = 2 с.

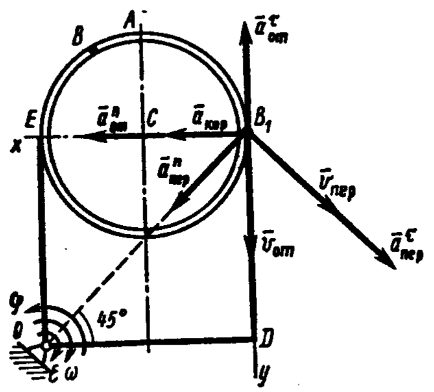


Рисунок 20

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{u}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер},$$
$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \breve{AB} = \pi R\cos(\pi t/3). \qquad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) t_1 = 2 с, получим

$$s_1 = \pi R\cos(\pi 2/3) = -0{,}5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0{,}5\pi\,.$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка В в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки А. Изображаем ее на рис. 21 в этом положении (точка B_1).

Теперь находим числовые значения $\upsilon_{отн}$, $a^{\tau}_{отн}$, $a^{n}_{отн}$:

$$v_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(\pi t/3)\,,$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{v}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(\pi t/3)\,,\ a^{n}_{отн} = \frac{v^2_{отн}}{\rho_{отн}} = \frac{v^2_{отн}}{R}\,,$$

где $\rho_{отн}$ — радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента t_1 =. 2 с, учитывая, что R = 0,5 м, получим

$$v_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -1{,}42\ \text{м/с}\,,$$

$$_{тн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86\ \text{м/с}^2\,,\ a^{n}_{отн} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06\ \text{м/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{t}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{u}_{отн}$ — в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{отн}$ направлен к центру С окружности. Изображаем все эти векторы на рис. 20.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при $t_1 = 2$ с

$$\omega = -2\ \text{с}^{-1},\ \varepsilon = -4\ \text{с}^{-2}\,. \tag{4}$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. 21.

Для определения $\bar{u}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения О. Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1{,}41$м. Тогда в момент времени $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$v_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2{,}82 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5{,}64 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = 5{,}64 \text{ м/с}^2. \qquad (5)$$

Изображаем на рис. 21 векторы $\bar{u}_{пер}$ и $\bar{a}^{t}_{пер}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{кор} = 2 \cdot |\upsilon_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$, где α - угол между вектором $\bar{u}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{w}$). В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{u}_{отн}$. Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|\upsilon_{отн}| = 1{,}42$ м/с и $|\omega| = 2$ с$^{-1}$, получим

$$a_{кор} = 5{,}68 \text{ м/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор $\bar{u}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\bar{a}_{кор}$ на рис. 21. [Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{w} \times \bar{u}_{отн})$].

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. Определение $\upsilon_{абс}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. 20) и спроектируем почленно обе части равенства $\bar{u}_{абс} = \bar{u}_{отн} + \bar{u}_{пер}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$v_{абс\,x} = v_{отн\,x} + v_{пер\,x} = 0 - |v_{пер}|\cos 45° = -1{,}99 \text{ м/с};$$
$$v_{абс\,y} = v_{отн\,y} + v_{пер\,y} = |v_{отн}| + |v_{пер}|\cos 45° = 3{,}41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$v_{абс} = \sqrt{v^2_{абс\,x} + v^2_{абс\,y}} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{u}_{отн}$ и $\bar{u}_{пер}$ равен 45°, значение $\upsilon_{абс}$ можно еще определить по формуле

$$v_{абс} = \sqrt{v^2_{отн} + v^2_{пер} + 2|v_{отн}| \cdot |v_{пер}| \cdot \cos 45°} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{от} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим

$$a_{абсx} = a^n_{отн} + a_{кор} + a^n_{пер}\cos 45° - |a^\tau_{пер}|\cos 45°,$$
$$a_{абсy} = a^n_{пер}\cos 45° + |a^\tau_{пер}|\cos 45° - |a^\tau_{отн}|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени t_1 = 2 с, найдем, что в этот момент

$$a_{абсx} = 9{,}74 \text{ м/с}^2;\ a_{абсy} = 7{,}15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy}} = 12{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс}$ = 3,95 м/с, $a_{абс}$ = 12,08 м/с^2.

Пример К4б. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 21 дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону s = AB = $f_2(t)$; положительное направление отсчета s — от A к D.

Дано: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$, $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$; (φ - в радианах, s - в сантиметрах, t - в секундах). Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени t_1 = 2 с.

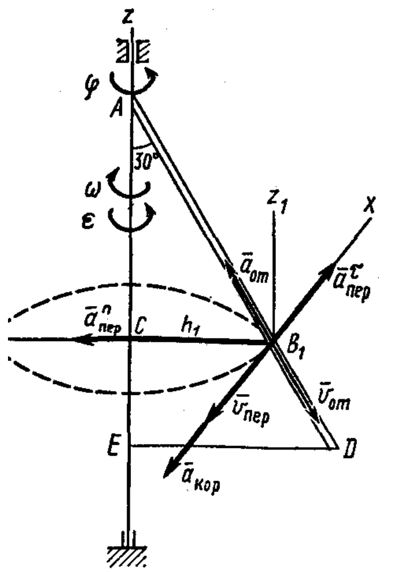


Рисунок 21

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по прямой AD относительным, а вращение пластины — переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{u}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}, \ \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \qquad (2)$$

Поэтому

$$v_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \ a_{отн} = \dot{v}_{отн} = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \ v_{отн} = 3 \text{ см/с}, \ a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{u}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{a}_{отн}$ — в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 21.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3$-2,2t.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \varphi' = 0{,}3t^2$—2,2; $\varepsilon = \omega = 0{,}6t$ и при $t_1 = 2$ с,

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \ \varepsilon = 1{,}2 \text{ с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. 21 соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1очки B_1 от оси вращения z: $h_1 = AB_1 \sin 30° = 10$ см. Тогда в момент $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$v_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \ a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2. \qquad (5)$$

Изобразим на рис. 22 векторы $\bar{u}_{пер}$ и $\bar{a}^{t}_{пер}$ (с учетом знаков ε и ω) и $\bar{a}^{n}_{пер}$; направлены векторы $\bar{u}_{пер}$ и $\bar{a}^{t}_{пер}$ перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ — по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{u}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{w}$) равен 30°, то численно в момент времени t_1=2 с

$$a_{кор} = 2 \cdot |v_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30° = 3 \text{ см/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор $\bar{u}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $a^n_{пер}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\bar{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{u}_{пер}$ (см. рис. 21).

4. Определение $\upsilon_{абс}$. Так как $\bar{u}_{абс} = \bar{u}_{отн} + \bar{u}_{пер}$, а векторы $\bar{u}_{отн}$ и $\bar{u}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то $u_{абс} = \sqrt{u^2_{отн} + u^2_{пер}}$, в момент времени t_1=2 с $u_{абс}$ = 10,44 см/с.

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\bar{a}_{абс}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}^{t}_{пер}$ и $\bar{a}_{кор}$ лежат на оси x, а векторы $\bar{a}^{n}_{пер}$ и $\bar{a}_{отн}$ расположены в плоскости B_1yz_1, т. е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 учтя одновременно равенства (3),(5),(6) получим для момента времени t_1=2с:

$$a_{абсx} = |a^{\tau}_{пер}| - a_{кор} = 9 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{абсy} = a^{n}_{пер} + |a_{отн}| \sin 30° = 13 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{абсz_1} = |a_{отн}| \cos 30° = 5{,}20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy} + a^2_{абсz_1}} = 16{,}64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс}$ = 10,44 см/с, $a_{абс}$ = 16,64 см/с^2.

Пример К4.в. Прямоугольная пластина вращается вокруг неподвижной оси по закону $j = 3t^2 - 8t$. Положительное направление отсчета показано на рисунке стрелкой (рис. 22). $b = 16$ см.

По пластине вдоль прямой BD движется точка М по закону $S = AM = 40(3t^2 - t^4) - 32$ (S выражено в сантиметрах, t – в секундах). На рисунках точка М показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при S<0, точка М находится по другую сторону от точки А).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени t_1=1с.

Дано: $j = 3t^2 - 8t$, $S = AM = 40(3t^2 - t^4) - 32$, $b = 16$ см.

Определить: v, a при t_1=1с.

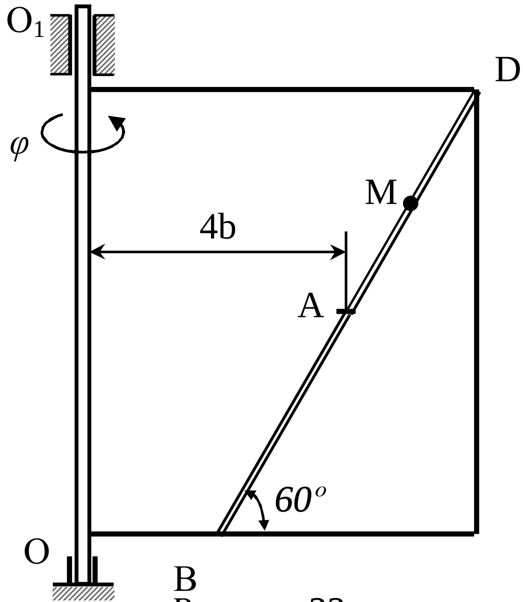


Рисунок 22

Решение. Движение точки М будем рассматривать как сложное. Ее движение по прямой BD считаем относительным (AD – относительная траектория точки), а вращение пластины – переносное движение. В этом случае абсолютная скорость $\bar{v}$ и абсолютное ускорение можно определить по формулам:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \tag{1}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k \tag{2}$$

В свою очередь, поскольку переносное движение является вращением, $\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\,t} + \bar{a}_e^{\,n}$, окончательно получим выражение для абсолютного ускорения:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^{\,t} + \bar{a}_e^{\,n} + \bar{a}_k\,. \tag{2a}$$

Определяем все характеристики относительного и переносного движения.

1. Относительное движение.

Определяем положение точки по условию при t_1=1c:

$$S(1) = AM = 40(3\cdot 1^2 - 1^4) - 32 = 80 - 32 = 48\ \ (\text{ñì})$$

Значение S получили с положительным знаком, следовательно точка М находится на прямой BD со стороны, показанной на рисунке (рис.22)

Изобразим точку М на прямой BD с учетом полученных результатов (рис.23).

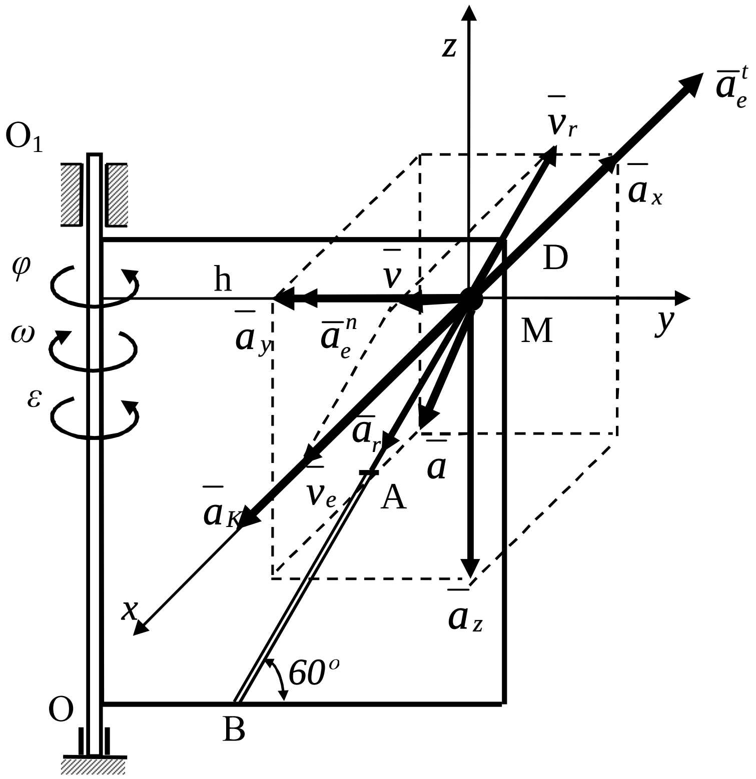


Рисунок 23

Относительная скорость точки М равна производной от пути:

$$v_r = \dot{s} = \left(40(3t^2 - t^4)\right)' = 40(6t - 4t^3).$$

Относительное ускорение точки М равно второй производной от пути или производной от скорости:

$$a_r = \ddot{s} = \dot{v}_r = \left(40(3t^2 - t^4)\right)'' = \left(40(6t - 4t^3)\right)' = 40(6 - 12t^2)$$

В момент времени t_1=1с: $v_r(1) = 40(6\cdot 1 - 4\cdot 1^3) = 80\ (см/с)$

$$a_r(1) = 40(6 - 12\cdot 1^2) = -240\ \left(см/с^2\right)$$

Знак «минус» показывает, что вектор ускорения направлен в сторону отрицательного отсчета, т.е. от точки М к точке В (рис. 23).

2. Переносное движение.

Угловая скорость определяется как производная от угла поворота:

$$\omega = \dot{\varphi} = \left(3t^2 - 8t\right)' = 6t - 8$$

Угловое ускорение определяется как вторая производная от угла поворота или производная от угловой скорости:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \left(3t^2 - 8t\right)'' = (6t - 8)' = 6\ \left(c^{-2}\right)$$

В момент времени t_1=1с: $\omega(1) = 6\cdot 1 - 8 = -2\ \left(c^{-1}\right)$

Знак «минус» перед значением угловой скорости указывает на то, что в момент времени t_1=1с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно.

Скорость переносного движения определим по формуле: $v_e = w \cdot h,$

где $h = 4b + S(1) \cdot \cos 60°$;

$h = 4 \cdot 16 + 48 \cdot 0{,}5 = 64 + 24 = 88\,(см)$ $\qquad v_e = 2 \cdot 88 = 176\,(см/с)$.

Ускорение переносного движения $\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\,t} + \bar{a}_e^{\,n}$, где $\bar{a}_e^{\,t}$ направлен перпендикулярно h в сторону ε, а $\bar{a}_e^{\,n}$ - вдоль h в сторону оси вращения (рис. 23).

Численно $a_e^{\,t} = e \cdot h; \quad a_e^{\,n} = w^2 \cdot h$.

В момент времени t_1=1с:

$a_e^{\,t}(1) = 6 \cdot 88 = 528\,(см/с^2); \quad a_e^{\,n}(1) = 2^2 \cdot 88 = 352\,(см/с^2)$.

3. Кориолисово ускорение.

Ускорение Кориолиса определим по формуле: $\bar{a}_K = 2 \cdot \bar{w} \times \bar{v}_r$.

В момент времени t_1=1с: $a_K = 2 \cdot w \cdot v_r \cdot \sin 150°$; $a_K = 2 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 0{,}5 = 160\,(см/с^2)$

Направление вектора $\bar{a}_K$ определим, спроецировав вектор $\bar{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения и повернув эту проекцию на 90º в сторону ω. (рис. 23)

4. Абсолютная скорость.

Из (1) следует, что численное значение абсолютной скорости будет равно: $v = \sqrt{v_r^{\,2} + v_e^{\,2} + 2 \cdot v_r \cdot v_e \cdot \cos(v_e v_r)}$. В момент времени t_1=1с угол между векторами $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$ равен 90º, следовательно: $v = \sqrt{v_r^{\,2} + v_e^{\,2}}; \quad v = \sqrt{80^2 + 176^2} = 193{,}33\,(см/с)$.

Направление вектора $\bar{v}$ определяем исходя из (1) (рис.23).

5. Абсолютное ускорение.

Для определения величины абсолютного ускорения спроецируем (2а) на оси координат и найдем значения этих проекций при t_1=1с:

$$a_x = -a_e^{\,t} + a_K; \quad a_x = -528 + 160 = -368\,(см/с^2)$$

$$a_y = -a_r \cdot \cos 60° - a_e^{\,n}; \quad a_y = -240 - 352 \cdot 0{,}5 = -416\,(см/с^2)$$

$$a_z = -a_r \cdot \cos 30°; \quad a_z = -352 \cdot 0{,}866 = -304{,}84\,(см/с^2)$$

Знаки «минус» перед полученными значениями указывают на то, что направления проекций абсолютного ускорения совпадают с отрицательным направлением отсчета координатных осей.

Абсолютное ускорение по величине:

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}; \quad a=\sqrt{368^2+416^2+304{,}84^2}=\sqrt{401407{,}4256}=633{,}57\ (\text{см}/c^2)$$

Векторы всех найденных скоростей и ускорений изображены на рисунке (рис. 23)

Ответ: Абсолютная скорость $v=193{,}33\,(см/с)$, абсолютное ускорение а= $633{,}57\ (\text{см}/c^2)$.

ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз D массой т, получив в точке А начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0—Д1.9, табл. Д1). На участке АВ на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{u}$ груза (направлена против движения), трением груза о трубу на участке АВ пренебречь. В точке В груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок ВС, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f = 0,2) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_X на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние АВ = l или время t_1 движения груза от точки А до точки В, найти закон движения груза на участке ВС, т. е. x = f(t), где x = BD.

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке АВ, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке АВ или длину этого участка, определить скорость груза в точке В. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке ВС. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке

ВС тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке В, и полагая в этот момент t = 0. При интегрировании уравнения движения на участке АВ в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что $\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$.

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4v$	—	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8v^2$	1,5	—	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5v$	—	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6v^2$	5	—	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4v$	—	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5v^2$	4	—	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3v$	—	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8v^2$	2,5	—	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5v$	—	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2v^2$	4	—	$-6\sin(4t)$

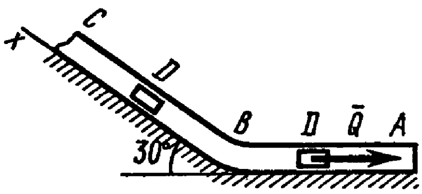


Рис. Д1.0

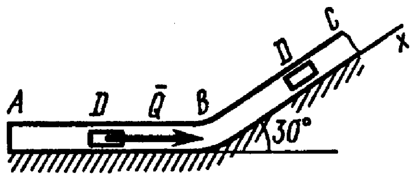


Рис. Д1.1

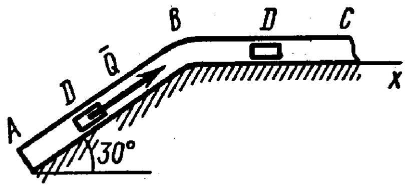


Рис. Д1.2

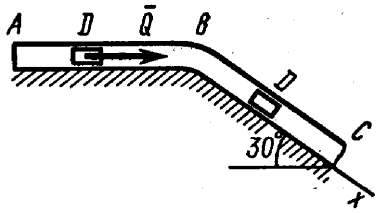


Рис. Д1.3

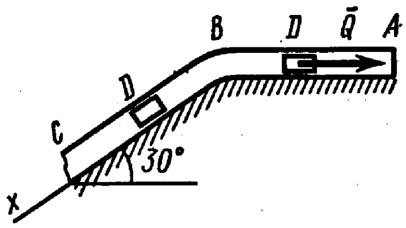


Рис. Д1.4

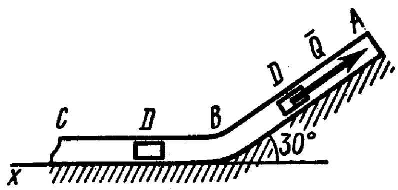


Рис. Д1.5

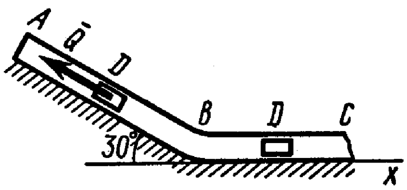


Рис. Д1.6

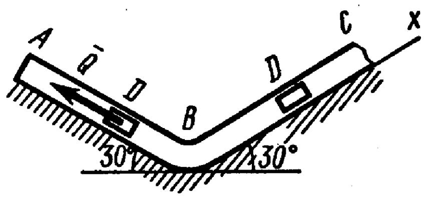


Рис. Д1.7

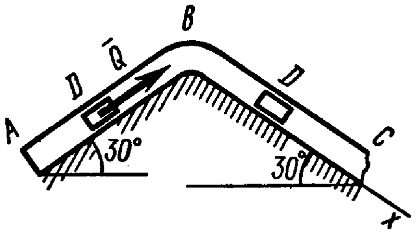


Рис. Д1.8

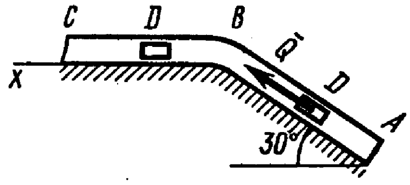


Рис. Д1.9

Пример Д1.1. На вертикальном участке АВ трубы (рис. 24) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R; расстояние от точки А, где $\upsilon = \upsilon_0$, до точки В равно l. На наклонном участке ВС на груз действуют сила тяжести и переменная сила F = F(t), заданная в ньютонах.

Дано: т = 2 кг, $R = \mu\upsilon^2$, μ = 0,4 кг/м, υ_0 = 5 м/с, l = 2,5 м, $F_X = 16\sin(4t)$. Определить: x = f(t) — закон движения груза на участке ВС.

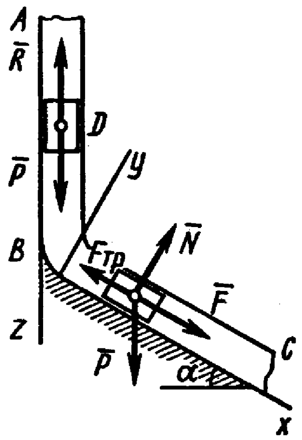


Рисунок 24

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке АВ, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$ и $\bar{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } mv_z\frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\upsilon_Z = \upsilon$, получим

$$mv\frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v\frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - v^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1}, \; n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v \cdot \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \qquad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем, беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \qquad (5)$$

По начальным условиям при z = 0 $\upsilon = \upsilon_0$, что дает $C_1 = \ln(\upsilon_0^2 — п)$ и из равенства (5) находим $\ln(\upsilon^2 — п) = -2kz + \ln(\upsilon_0^2 — п)$ или $\ln(\upsilon^2 — п) -$
$- \ln(\upsilon_0^2 — п) = —2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) z = l = 2,5 м и заменяя k и п их значения (3), определим скорость груза υ_B в точке B (υ_0 = 5 м/с, число e = 2,7):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \text{ и } v_B = 6{,}4 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0 = \upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ и $\bar{F}$ Проведем из точки B оси Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции ось Bx:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x, \qquad (8)$$

где $F_{ТР}$ = fN. Для определения N составим уравнение в проекции на By. Так как $a_y = 0$, получим 0 = N—mgcosa, откуда N = mgcosa. Следовательно, $F_{ТР}$ =

fmgcosa; кроме того, $F_X = 16\sin(4t)$ и уравнение примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на т, вычислим g(sinα—fcosα) = g(sin 30°—0,2 cos 30°) = 3,2; 16/m = 8 и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент t = 0. Тогда при t = 0 $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при t = 0 x = 0, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t), \qquad (14)$$

где x — в метрах, t— в секундах.

Задача Д2

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и 2R, где R = 1,2 м) массой m_1 = 24 кг вращается с угловой скоростью ω_0 = 10 c^{-1} вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии OC =b (рис. Д2.0 — Д2.9, табл. Д2); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д2.0а (вид сверху).

В момент времени t_0 = 0 по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой m_2 = 8 кг по закону s == AD = F(t), где s выражено в метрах, t — в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом М (задан в ньютонометрах; при М<0 его направление противоположно показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость ω = f(t), т. е. угловую скорость платформы, как функцию времени.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором s>0 (когда s<0, груз находится по другую сторону от точки А). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии ОС = b от центра С.

Указания. Задача Д2 — на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_Z системы относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\bar{u}_{отн}$ и переносной $\bar{u}_{пер}$ скоростей, т.е. $\bar{u} = \bar{u}_{отн} + \bar{u}_{пер}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\bar{u} = m\bar{u}_{отн} + m\bar{u}_{пер}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой $m_Z(m\bar{u}) = m_Z(m\bar{u}_{отн}) + m_Z(m\bar{u}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примере Д2.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси z), как это сделано на рис. 2.0, а — Д2.9, а.

Момент инерции пластины с массой m относительно оси C_Z, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс С, равен:

для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2

$$I_{Cz} = m(a_1^2 + a_2^2)/12\ ;$$

для круглой пластины радиуса R

$$I_{Cz} = mR^2/2\ .$$

Таблица Д2

Номер условия	b	$s = F(t)$	M
0	R	$-0,4t^2$	6
1	$R/2$	$0,6t^2$	$4t$
2	R	$-0,8t^2$	-6
3	$R/2$	$10t$	$-8t$
4	R	$0,4t^3$	10
5	$R/2$	$-0,5t$	$-9t^2$
6	R	$-0,6t$	8
7	$R/2$	$0,8t$	$6t^2$
8	R	$0,4t^3$	$-10t$
9	$R/2$	$0,5t^2$	$12t^2$

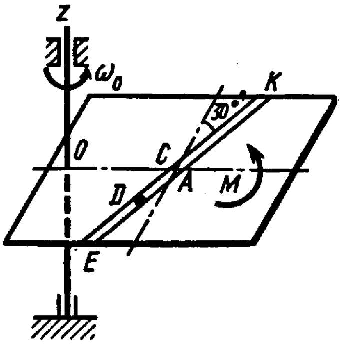


Рис. Д2.0

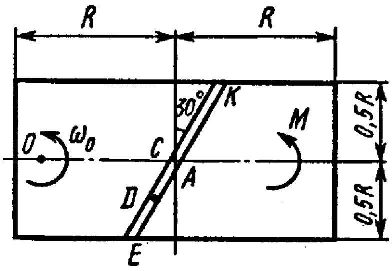


Рис. Д2.0а

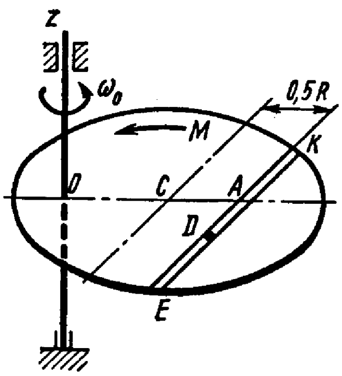


Рис. Д2.1

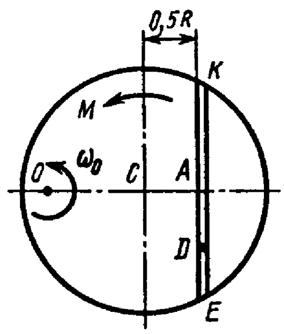


Рис. Д2.1а

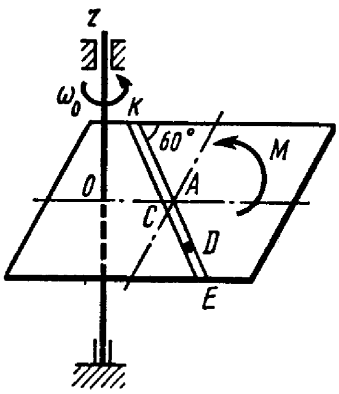


Рис. Д2.2

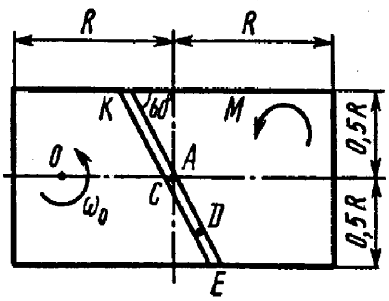


Рис. Д2.2а

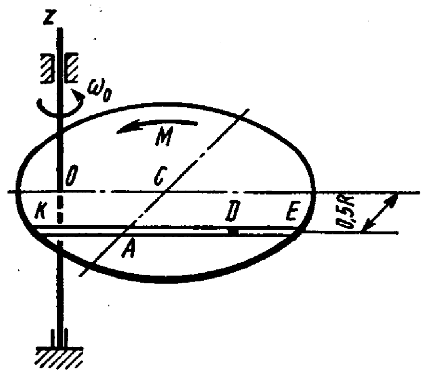


Рис. Д2.3

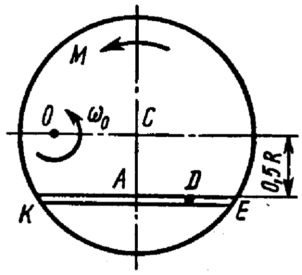


Рис. Д2.3а

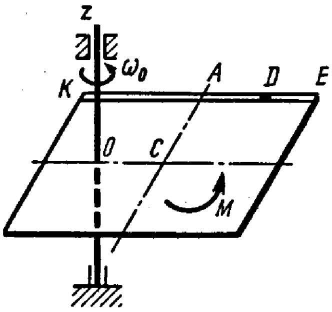


Рис. Д2.4

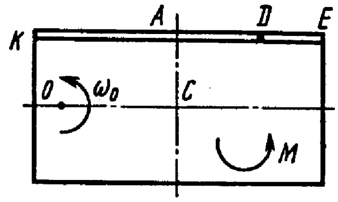


Рис. Д2.4а

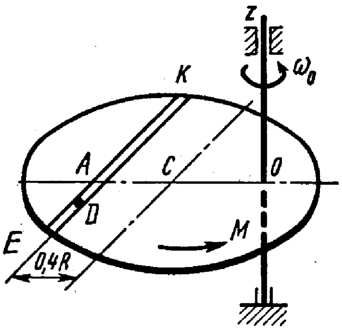


Рис. Д2.5

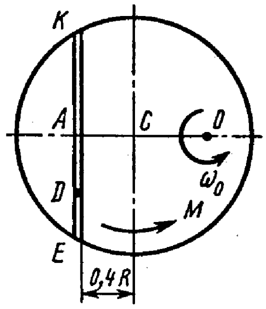


Рис. Д2.5а

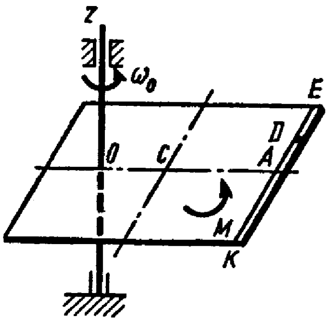


Рис. Д2.6

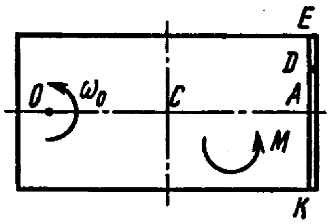


Рис. Д2.6а

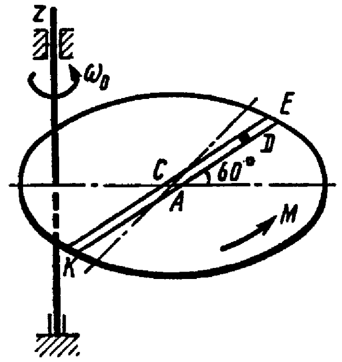


Рис. Д2.7

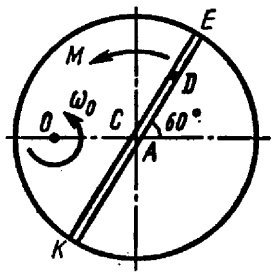


Рис. Д2.7а

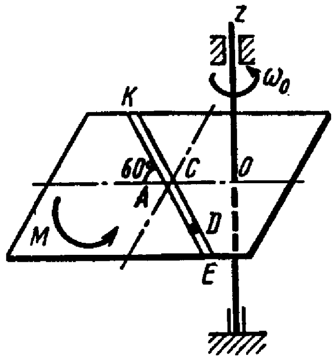


Рис. Д2.8

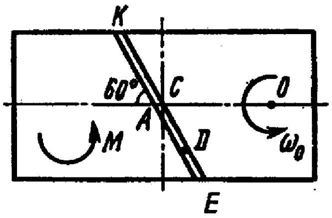


Рис. Д2.8а

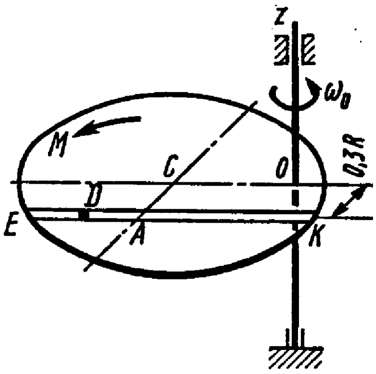


Рис. Д2.9

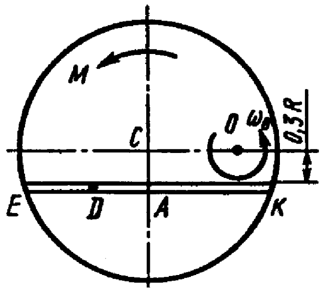


Рис. Д2.9а

Пример Д2.1. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами 2l и l), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. 25,а). В момент времени t_0 = 0 на вал начинает действовать вращающий момент М, направленный противоположно ω_0; одновременно груз D массой $т_2$, находящийся в желобе АВ в точке С, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону s = CD = F(t).

Дано: m_1 = 16 кг, m_2 = 10 кг, l = 0,5 м, ω_0 = 2 $с^{-1}$, s == $0,4t^2$ (s – в метрах, t—в секундах), М = kt, где k = 6 Н*м/с. Определить: ω = f{t) —

закон изменения угловой скорости платформы.

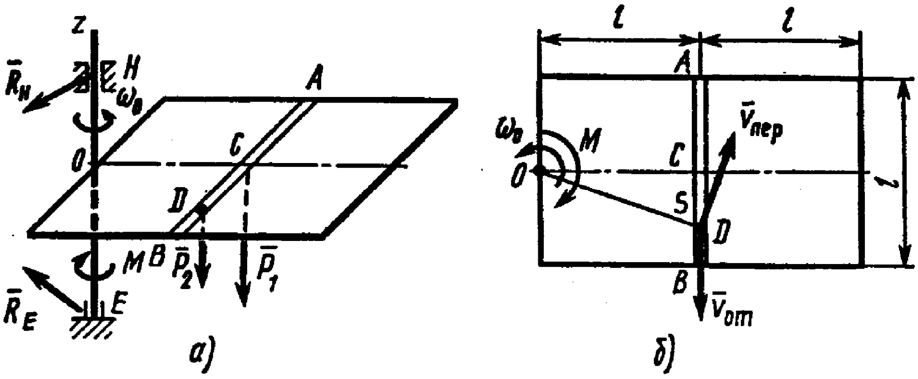


Рисунок 25

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \Sigma\, m_z(\bar{F}_k^e)\,. \qquad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ реакции $\bar{R}_E, \bar{R}_H$ и вращающий момент M. Так как силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\bar{R}_E, \bar{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т. е. против хода часовой стрелки), получим $\sum m_z(\bar{F}_k^e) = -M = -kt$ и уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt\,. \qquad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C_1\,. \qquad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^D, \qquad (4)$$

где $K^{пл}_z$ и K^D_z — кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси z, то $K^{пл}_z = I_z\omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1(OC)^2 = I_{Cz'} + m_1 l^2$ ($I_{Cz'}$— момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр C платформы).

Но, как известно,

$$I_{Cz'} = m_1[(2l)^2 + l^2]/12 = 5m_1 l^2/12\,.$$

Тогда

$$I_z = 5m_1l^2/12 + m_1l^2 = 17m_1l^2/12\,.$$

Следовательно,

$$K_z^{пл} = (17m_1l^2/12)\omega\,. \qquad (5)$$

Для определения K^D_z обратимся к рис. Д5,б и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{u} = \bar{u}_{отн} + \bar{u}_{пер}$. Так как груз D движется по закону s = CD = 0,4t^2, то $\upsilon_{отн} = \dot{s} = 0{,}8t$; изображаем вектор $\bar{u}_{отн}$ на рис. 25,б с учетом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s}<0$ направление $\bar{u}_{отн}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор $\bar{u}_{пер}(\bar{u}_{пер} \perp OD)$; численно $\upsilon_{пер}$ = ω • OD. Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = m_z(m_2\bar{v}) = m_z(m_2\bar{v}_{отн}) + m_z(m_2\bar{v}_{пер}) = -m_2v_{отн}\cdot OC + m_2v_{пер}\cdot OD =$$
$$= -m_2\cdot 0{,}8tl + m_2\omega(OD)^2\,. \qquad (6)$$

Но на рис. Д5,б видно, что OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16t^4. Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения K^D_z и $K^{пл}_z$ из (6) и (5) равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12}m_1l^2\omega + m_2\omega(l^2 + 0{,}16t^4) - m_2(0{,}8t)l =$$
$$= (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t\,. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (3), где k = 6, примет вид

$$(8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C_1\,. \qquad (8)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при t = 0, ω = ω_0. Получим C_1 = 8,17 ω_0 = 16,34. При этом значении C_1 уравнения (8) находим искомую зависимость ω от t.

Ответ: ω = (16,34 + 4t – 3t^2)/(8,17+ 1,6t^4), где t - в секундах, ω - в c^{-1} .

Задача Д3

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 = 0,2 м, блока 4 радиуса R_4 = 0,2 м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. Д3.0 – Д3.9, табл. Д3); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы F = f(s), зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент М сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: υ_1, υ_2, υ_{C5} —скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 — угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. 2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если m_2 = 0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача Д3 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия Т системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить.

Таблица Д3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F=f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	v_{C5}

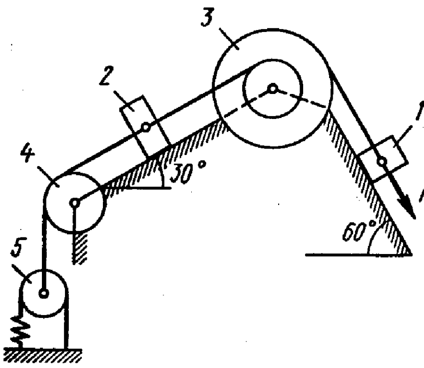


Рис. Д3.0

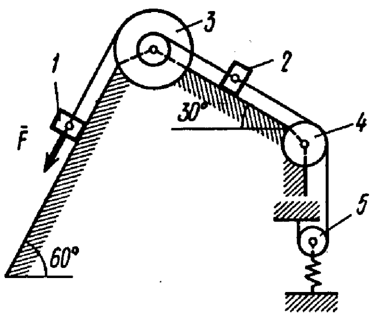


Рис. Д3.1

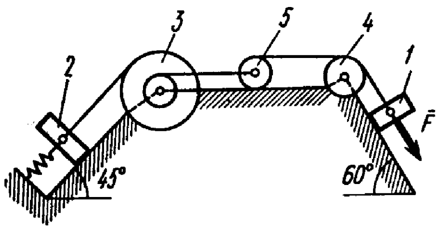


Рис. Д3.2

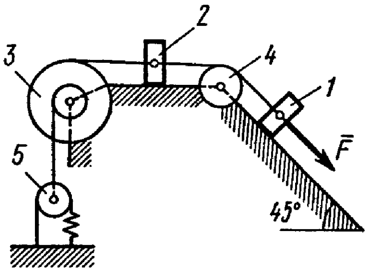


Рис. Д3.3

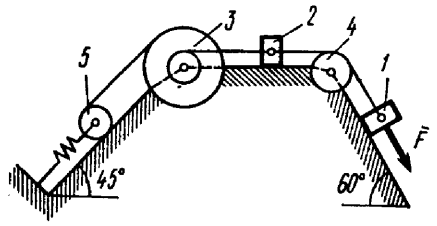


Рис. Д3.4

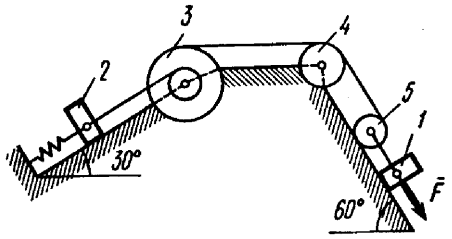


Рис. Д3.5

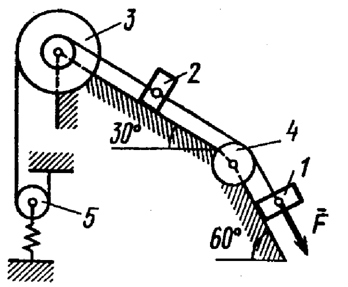


Рис. Д3.6

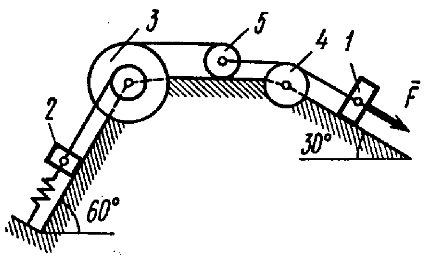


Рис. Д3.7

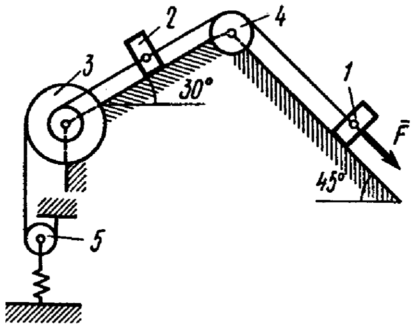


Рис. Д3.8

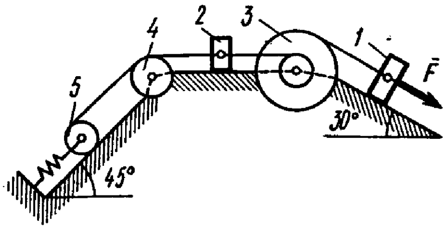


Рис. Д3.9

При вычислении Т для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример Д3.1. Механическая система (рис. 26,а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f=0,1). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина коэффициентом жесткости с; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы F = f(s), зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: m_1 = 8 кг, m_2 = 0, m_3 = 4 кг, m_4 = 0, m_5 = 10 кг, R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, c = 240 Н/м, M = 0,6 Нм, F = 20(3 + 2s) Н, s_1 = 0,2 м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда s = s_1.

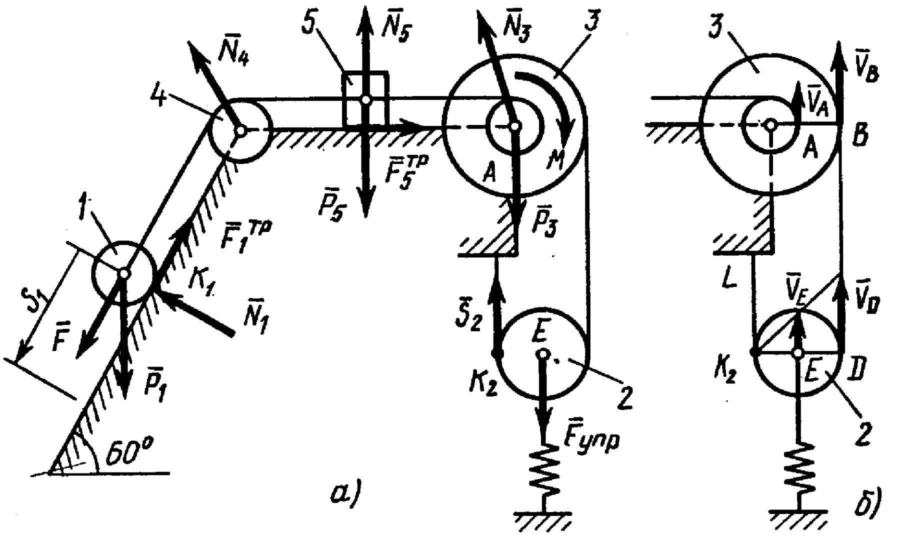


Рисунок 26

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы:

активные $\overline{F}, \overline{F}_{упр}, \overline{P}_1, \overline{P}_3, \overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1, \overline{N}_3, \overline{N}_4, \overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S_2}$, силы трения $\overline{F}_1^{mp}, \overline{F}_5^{mp}$ и момент М.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \quad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел темы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \quad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 - поступательно, а тело 3 - вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2; \; T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2. \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \upsilon_A$, где A — любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 — мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3; \; \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \quad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \; I_3 = m_3 \rho_3^2. \quad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 — перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 - угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 —начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60°;$$

$$A(\bar{F}_5^{тр}) = -F_5^{тр} s_5 = -fP_5 s_1;$$

$$A(M) = -M\varphi_3;$$

$$A(\bar{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N_1}, \overline{F_1}^{тр}$ и $\overline{S_2}$ — мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P_3}, \overline{N_3}, \overline{P_4}$ — неподвижны; а реакция $\overline{N_5}$, перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E — перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = \upsilon_A/r_3 = \upsilon_{C1}/r_3$ (равенство $\upsilon_A = \upsilon_{C1}$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1/r_3$.

Далее, из рис. 26,б видно, что $\upsilon_D = \upsilon_B, = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $\upsilon_E = 0{,}5\upsilon_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 R_3/r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0=0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° -$$

$$- fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \quad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

Ответ: $\omega_3 = 8{,}1$ c^{-1}.

Задача Д4

Вертикальный вал АК (рис. Д4.0—Д4.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ c^{-1}, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д4 столбце 2 (AB = BD = DE = EK = a). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой т = 10 кг, состоящий частей 1 и 2 (размеры частей стержня показаны на рисунках, где b = 0,1 м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной l = 4b с точечной массой m_3 = 3 кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в столбцах 5 — 8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять a = 0,6 м.

Указания. Задача Д4 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\overline{R^{И}}$, то численно $R^{И} = ma_C$, где a_C — ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\overline{R^{И}}$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д4).

Таблица Д4

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке: ломаного стержня	Крепление в точке: невесомого стержня	α, град	β, град (рис. 0—4)	γ, град (рис. 5—9)	φ, град
1	2	3	4	5	6	7	8
0	*B*	*D*	*K*	45	135	225	60
1	*K*	*B*	*D*	60	240	150	45
2	*K*	*E*	*B*	30	210	120	60
3	*D*	*K*	*B*	60	150	240	30
4	*K*	*D*	*E*	30	120	210	60
5	*E*	*B*	*K*	45	225	135	60
6	*E*	*D*	*K*	60	60	150	30
7	*K*	*B*	*E*	30	30	120	60
8	*D*	*E*	*K*	60	150	60	30
9	*E*	*K*	*D*	30	120	210	60

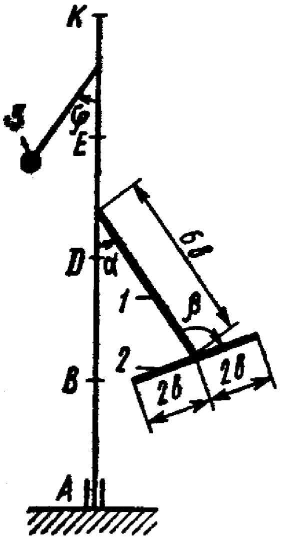


Рис. Д4.0

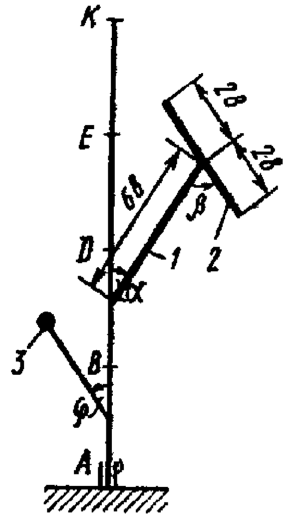


Рис. Д4.1

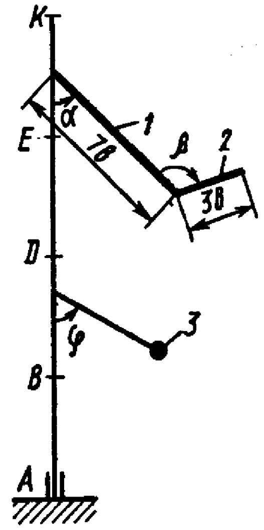


Рис. Д4.2

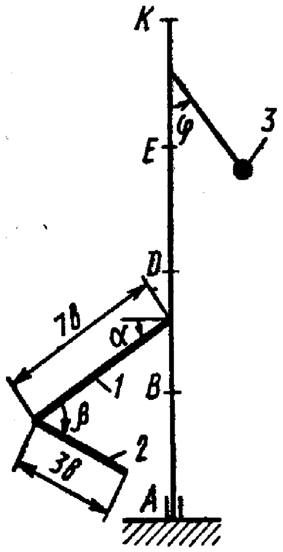


Рис. Д4.3

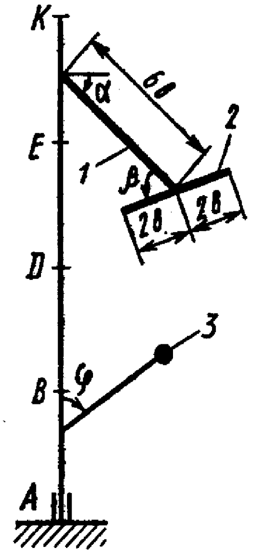


Рис. Д4.4

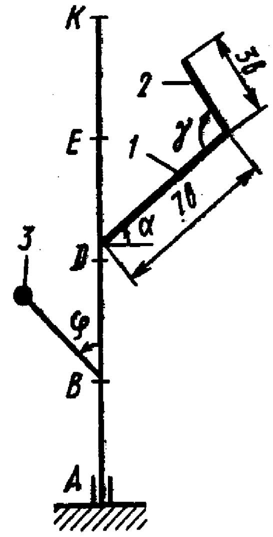


Рис. Д4.5

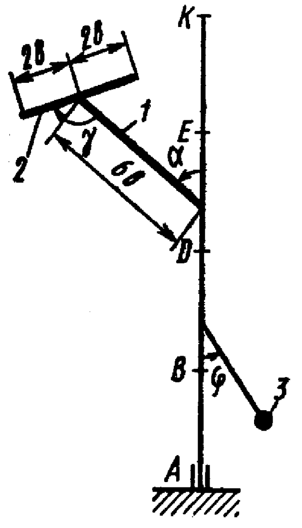


Рис. Д4.6

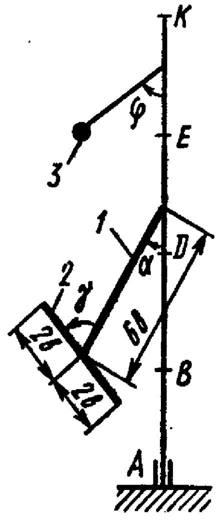


Рис. Д4.7

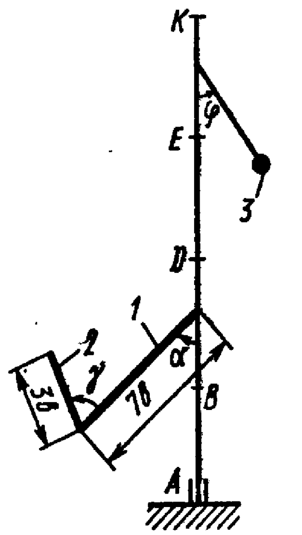


Рис. Д4.8

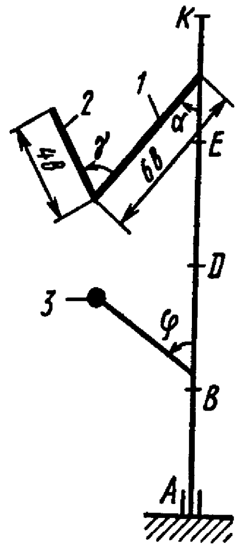


Рис. Д4.9

Пример Д4. Вертикальный вал длиной 3a(AB = BD = DE = a), закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. 27,а), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой т и длиной 10b, состоящий из двух частей 1 и 2, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной l = 5b с точечной массой т_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: ω = 8 $с^{-1}$, т = т_1 + т_2 =10 кг, т_3 = 2 кг, α = 30°, β =150°, φ=60°, a = 0,3 м, b = 0,1 м. Определить: реакции подпятника A и подшипника D, пренебрегая весом вала.

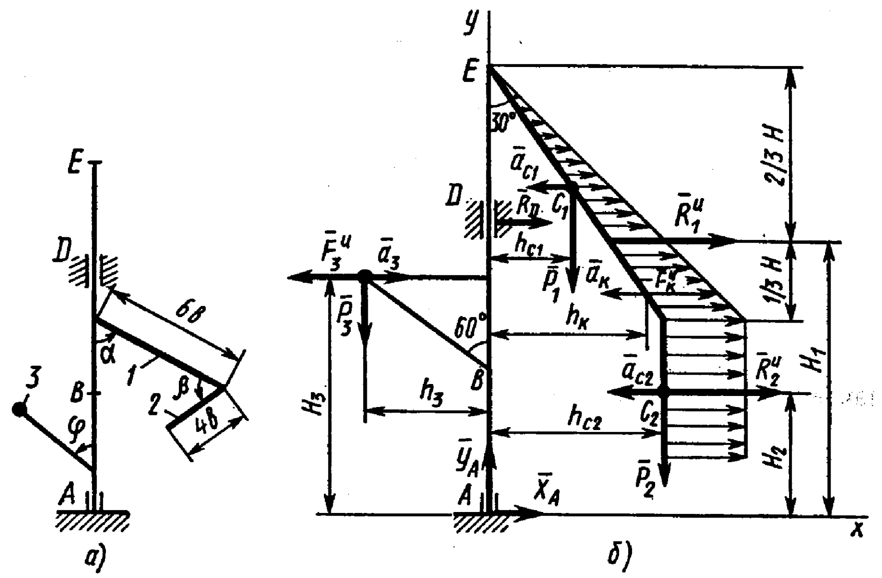


Рисунок 27

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. 27,б). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны т$_1$ = 0,6 т; т$_2$ = 0,4т;

$$P_1 = 0{,}6mg\,;\; P_2 = 0{,}4mg\,;\; P_3 = m_3 g\,. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Аху так, чтобы стержни лежали в плоскости ху, и изобразим действующие на систему силы: активные силы — силы тяжести $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$ и реакции связей — составляющие реакции подпятника $\overline{X_A}, \overline{Y_A}$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{R_D}$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\overline{F_k^И}$ будут направлены от оси вращения, а численно $F^И_k = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k — масса элемента. Так как все $F^И_k$ пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 — прямоугольник (рис. 27,б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^И = ma_C$, где т — масса тела, a_C — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^и = m_1 a_{C1},\; R_2^и = m_2 a_{C2}\,. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^и = m_3 a_3\,. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}\,,\; a_{C2} = \omega^2 h_{C2}\,,\; a_3 = \omega^2 h_3\,, \qquad (4)$$

где h_{C1}, h_{C2} - расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 — соответствующее расстояние груза:

$$h_{C1} = 3b\sin 30° = 0{,}15 \text{ м},$$
$$h_{C2} = 6b\sin 30° = 0{,}3 \text{ м}, \qquad (5)$$
$$h_3 = l\sin 60° = 5b\sin 60° = 0{,}43 \text{ м}.$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения $R^И_1$, $R^И_2$ и $F^И_3$:

$$R_1^и = 0{,}6m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6 \text{ Н},$$
$$R_2^и = 0{,}4m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8 \text{ Н}, \qquad (6)$$
$$F_3^и = m_3\omega^2 h_3 = 55{,}0 \text{ Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих $\overline{R_1^И}$ и $\overline{R_2^И}$ пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\overline{R_1^И}$ проходит на расстоянии 2/3Н от вершины треугольника Е, где Н = 6b cos 30°.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\Sigma F_{kx} = 0;\ X_A + R_D + R_1^и + R_2^и - F_3^и = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} = 0;\ Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \qquad (7)$$
$$\Sigma m_A(\bar F_k) = 0;\ -R_D\cdot 2a - P_1 h_{C1} - P_2 h_{C2} + P_3 h_3 -$$
$$- R_1^и H_1 - R_2^и H_2 + F_3^и H_3 = 0,$$

где H_1, H_2, H_3 — плечи сил $\overline{R_1^И}$, $\overline{R_2^И}$, $\overline{R_3^И}$ относительно точки А, равные (при подсчетах учтено, что Н = 6bcos30° = 0,52 м)

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \text{ м},\quad H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18 \text{ м},$$
$$H_3 = a + l\cos 60° = 0{,}55 \text{ м}. \qquad (8)$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: X_A = -33,7 Н; $У_A$ = 117,7 Н; R_D = -45,7 Н.

Задача Д5

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. Д5.0 — Д5.9, табл. Д5а и Д5б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,6 м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка Е находится в середине соответствующего стержня.

На ползун B механизма действует сила упругости пружины $\overline{F}$; численно $F = c\lambda$, где c — коэффициент жесткости пружины, λ — ее деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун D действует сила $\overline{Q}$, а на кривошип O_1A — пара сил с моментом M; на рис. 2—9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. Д5а для рис. 0 - 4 и в табл. Д5б для 5 - 9, где Q выражено в ньютонах, а M, M_1 и M_2 —в ньютонометрах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д5 (см. рис. 28, а также рис. Д5.10,б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну B стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д5.10,а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д5.10, б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Указания. Задача Д5 — на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т. е. одно независимое возможное перемещение.

Таблица Д5а (к рис. Д5.0-Д5.4)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	Для рис. 0—1		Для рис. 2—4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица Д5б (к рис. Д5.5-Д5.9)

Номер условия	Углы, град α	β	γ	φ	θ	c, Н/см	M_1	M_2
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

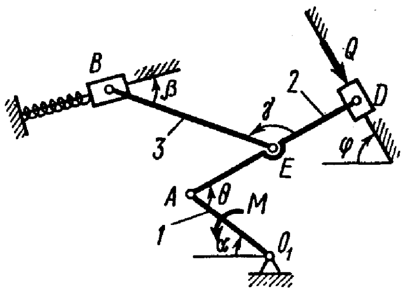


Рис. Д5.0

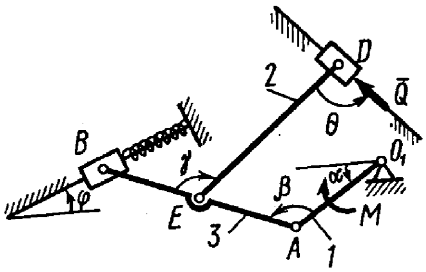


Рис. Д5.1

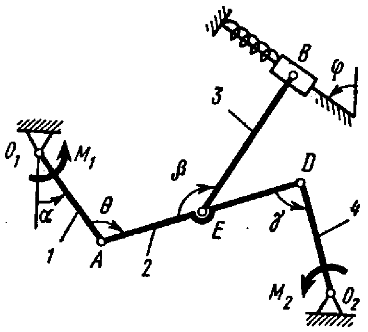


Рис. Д5.2

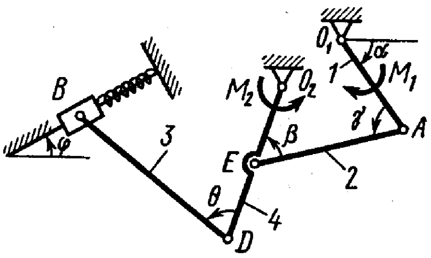


Рис. Д5.3

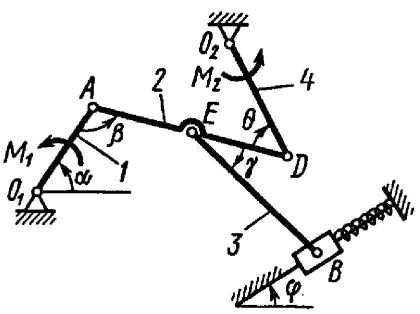


Рис. Д5.4

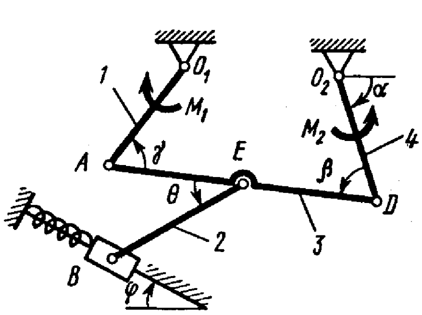


Рис. Д5.5

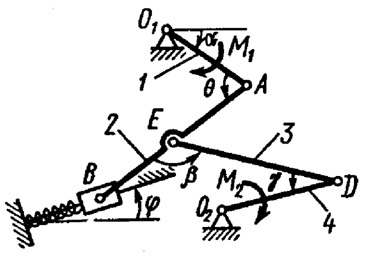


Рис. Д5.6

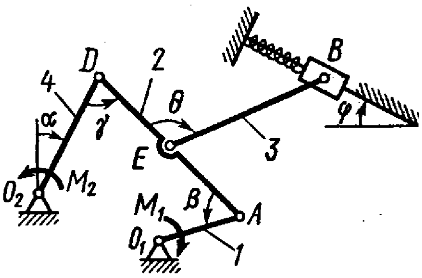


Рис. Д5.7

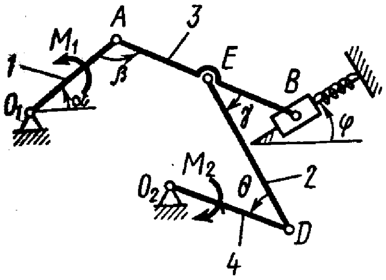


Рис. Д5.8

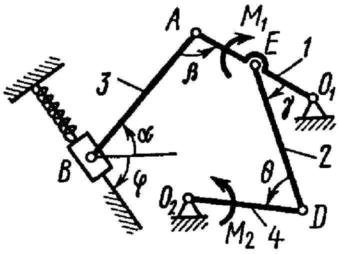


Рис. Д5.9

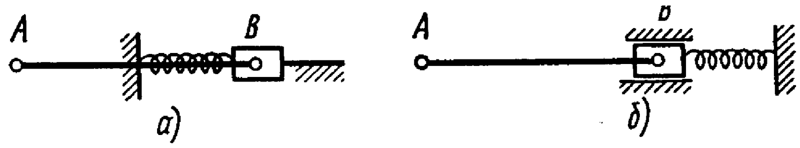


Рис. Д5.10

Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно. Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости F. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т. е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

Пример Д5. Механизм (рис. 28,а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов B, D, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой O шарнирами. К ползуну B прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, к ползуну D приложена сила $\overline{Q}$, а к стержню 1 (кривошипу) — пара сил с моментом M.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, $l = 0{,}4$ м, AE = ED, $c = 125$ Н/см, $M = 150$ Нм, $Q = 350$ Н.

Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

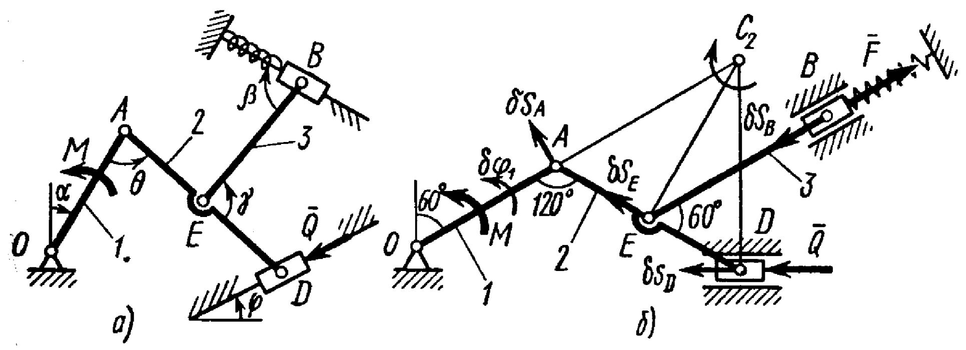


Рисунок 28

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 28,б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д5 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180°$).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

где δA_k —элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\overline{Q}$, силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом М.

Неизвестную силу F найдем с помощью уравнения (1), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ — поворот стержня вокруг оси О, δs_D и δs_B — перемещения ползунов (точек) D и B.

Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D и δs_B независимое от других — одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут δs_D и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления, δs_D и δs_B, так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными кинематики соотношениями.

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = l_1\delta\varphi_1\ ;\ \delta s_A \perp OA\ . \qquad (2)$$

Теперь определим и изобразим δs_D, учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую AD должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30° = \delta s_A \cos 30° \text{ и } \delta s_D = \delta s_A = l_1\delta\varphi_1\ . \qquad (3)$$

Чтобы определить δs_B, найдем сначала δs_E. Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня 2 (на пересечении перпендикуляров к δs_D и δs_A, восставленных из точек A и D) и покажем направление поворота стержня 2 вокруг C_2, учтя направление δs_A или δs_D. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60°$, то ΔAC_2AD — равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку AE = ED. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой EA (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2). Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30° = l_1\delta\varphi_1 \cos 30°\ . \qquad (4)$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую BE находим и изображаем δs_B. Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60° = l_1\delta\varphi_1 \cos 30° \cdot \cos 60° = 0{,}43 l_1\delta\varphi_1\ . \qquad (5)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M\delta\varphi_1 + Q\delta s_D - F\delta s_B = 0\ , \qquad (6)$$

или, заменяя здесь δs_D и δs_B их значениями (3) и (5) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F)\delta\varphi_1 = 0\ . \qquad (7)$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F = 0\ . \qquad (8)$$

Из уравнения (8) находим значение F и определяем λ = F/c.

Ответ: λ = 13,5 см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

Задача Д6

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3—6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д6.0—Д6.9, табл. Д6). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, а шкива 2 — $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0{,}1$ м и $\rho_2 = 0{,}2$ м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса P_1, ..., P_6 шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Указания. Задача Д6 — на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера — Лагранжа) и уравнения Лагранжа 2-го рода.. Ход решения задачи такой же, как в задаче Д5, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^И = I_z\varepsilon$, где I_z — момент инерции тела относительно оси вращения, ε — угловое ускорение тела; направление $M^И$ противоположно направлению ε.

Таблица Д6

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н·м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

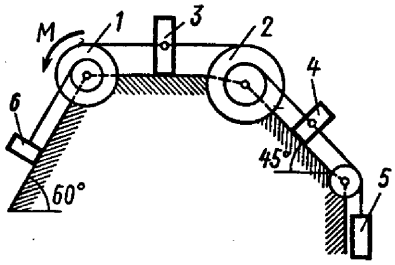


Рис. Д6.0

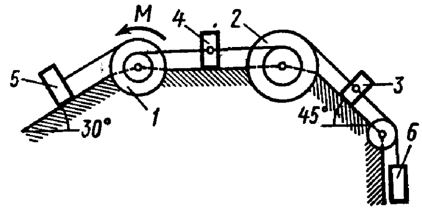


Рис. Д6.1

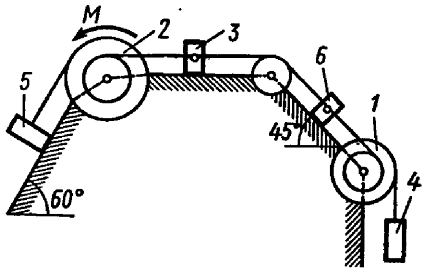


Рис. Д6.2

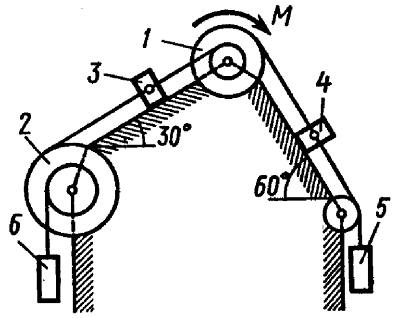


Рис. Д6.3

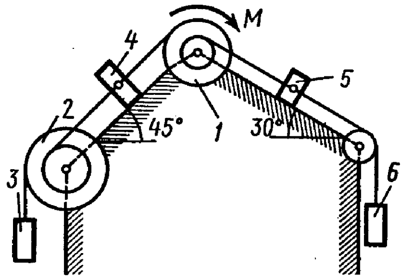


Рис. Д6.4

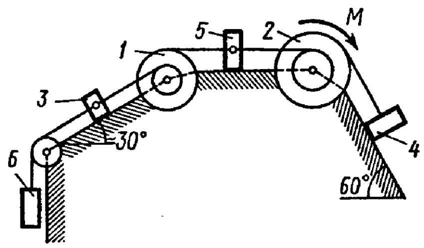


Рис. Д6.5

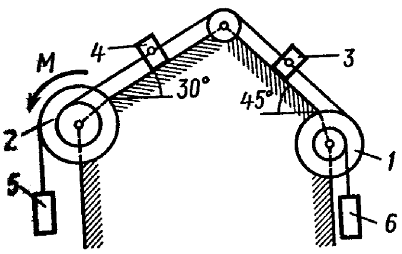


Рис. Д6.6

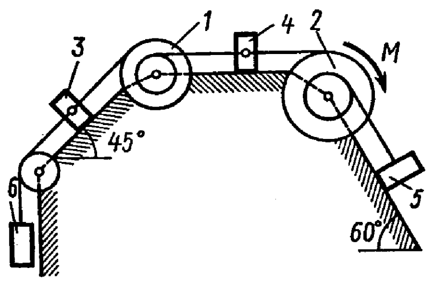


Рис. Д6.7

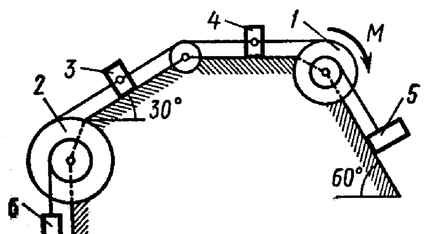


Рис. Д6.8

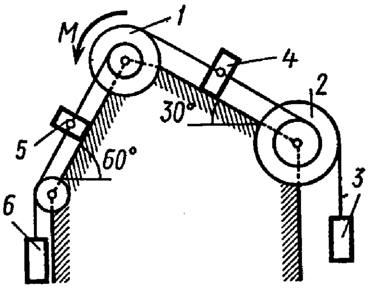


Рис. Д6.9

Пример Д6. Механическая система (рис. 29) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и

r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом М, приложенной к блоку 1.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Нм, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2=0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, — идеальные.

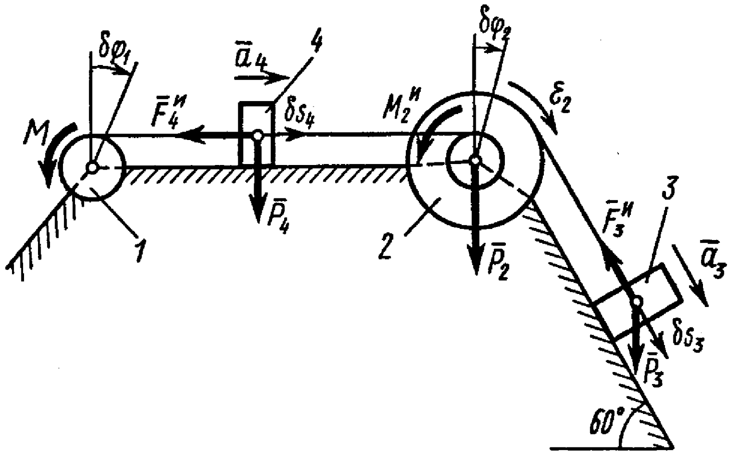


Рисунок 29

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0, \qquad (1)$$

где $\sum dA_k^a$ — сумма элементарных работ активных сил; $\sum dA_k^И$ — сумма гитарных работ сил инерции.

1. Изображаем на чертеже активные силы $\overline{P_2}, \overline{P_3}, \overline{P_4}$ и пару сил с моментом М. Задавшись направлением ускорения изображаем на чертеже силы инерции $\overline{F}_3^И, \overline{F}_4^И$ и пару сил инерции с моментом $M^И_2$, величины которых равны:

$$F_3^и = \frac{P_3}{g}a_3; \; F_4^и = \frac{P_4}{g}a_4;$$

$$M_2^и = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2. \qquad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60° - F_3^и)\delta s_3 - M_2^и \delta\varphi_2 - F_4^и \delta s_4 - M \delta\varphi_1 = 0\,. \qquad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2\,;\; \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2\,;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2\,. \qquad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60° - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0\,. \quad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}\,;\; a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3\,.$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60° - M(r_2/R_1)}{P_3 R_2 + P_2 \rho_2^2/R_2 + P_4(r_2^2/R_2)}g\,.$$

Вычисления дают следующий ответ: a_3 = —0,9 м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. 29.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркш Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 1, 2. М., 1985 и предыдущие издания.

2. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М., 1983.

3. Старжинский В. М. Теоретическая механика. М., 1980.

4. Таре С. М. Краткий курс теоретической механики. М., 1986 и предыдущие издания.

5. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. 1. М., 1984 и предыдущие издания.

6. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М., 1984 и предыдущие издания.

7. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1986 и предыдущие издания.

8. Сборник задач по теоретической механике/Под ред. К. С. Колесникова. М., 1983.

9. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. М., 1984 и предыдущие издания.

10. Сборник задач по теоретической механике/ Бражниченко Н.А. ,Кан В. Л., Минцберг Б. Л. и др. М., 1987.

11. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. М., 1986,

12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /Под ред. А. А. Яблонского. М., 1985 и предыдущие издания (содержит примеры решения задач).

Учебное издание

Сергей Владимирович Подлесный
Александр Николаевич Стадник
Юрий Александрович Ерфорт
Дмитрий Георгиевич Сущенко

Методические указания
и контрольные задания по дисциплине
“Теоретическая механика ”
(для студентов всех технических специальностей заочной формі обучения)

Подп. в печать Формат 60x84/16.
Ризограф. печать. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Заказ №

ДГМА. 84313. г.Краматорск, ул..Шкадинова, 72