МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(конспект лекций)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Краматорск 2005

УДК-
Векторная алгебра. Аналитическая геометрия:
Методические указания для студентов-заочников всех специальностей/Н.Г. Бражник.- Краматорск: ДГМА,2005.- … с.

Составитель Бражник Н.Г., ассистент.
Рецензент Зозуля Е.С.,ст. преподаватель.

Отв. за выпуск Астатов В.Н., доц.

1 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1 ВЕКТОРЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В теоретической и практической деятельности мы имеем дело со скалярными величинами (длина, площадь, объем, работа, мощность, масса, плотность) и векторными величинами (скорость, сила, ускорение).

Изучением конкретных свойств величин занимаются соответствующие дисциплины (физика, теоретическая механика, теория упругости). Общие для всех этих величин свойства изучает математика, используя для этого математические модели величин.

Математической моделью скалярной величины является соответствующее ей множество действительных чисел - множество ее числовых значений.

Математической моделью векторной величины является соответствующее ей множество направленных отрезков (речь идет о величинах, изучаемых в обычном пространстве), так как для векторной величины приходится изучать не только ее числовые характеристики, но и направление ее действия.

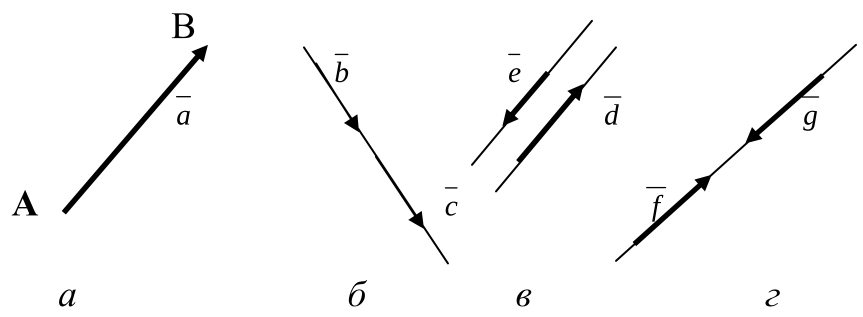


Рисунок 1.1

Направленный отрезок AB называется вектором и обозначается $\overline{AB}$ (или $\bar{a}$), где A - начало вектора, B - его конец (рис. 1.1а).

Примечание. В определении вектора ничего не сказано о точке его приложения, следовательно, она не фиксирована, и вектор можно перенести в любую точку пространства параллельно самому себе, сохраняя его направление.

Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной вектора* (модулем или абсолютной величиной) и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (см. рис.1.1 б, в, г). В противном случае векторы называются *неколлинеарными*.

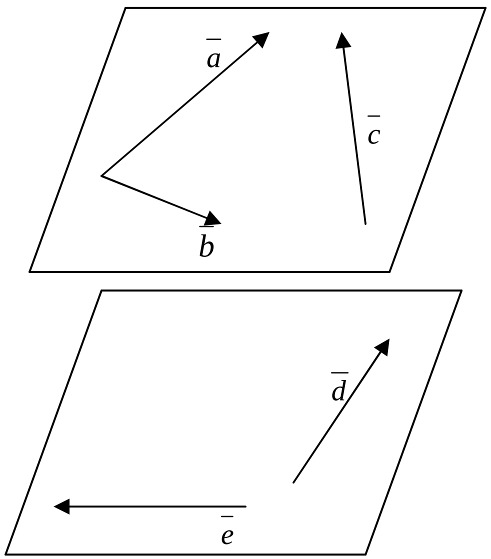


Рисунок 1.2

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, в противном случае векторы некомпланарны. На рис.1.2 показаны компланарные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}$.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и имеют равные длины.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называют нулевым вектором $\bar{0}$. Нулевому вектору можно придать любое направление. Очевидно, что $|\bar{0}|=0$.

1.1.1 Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся сложение векторов и умножение вектора на число. Вычитание векторов определяется через сложение.

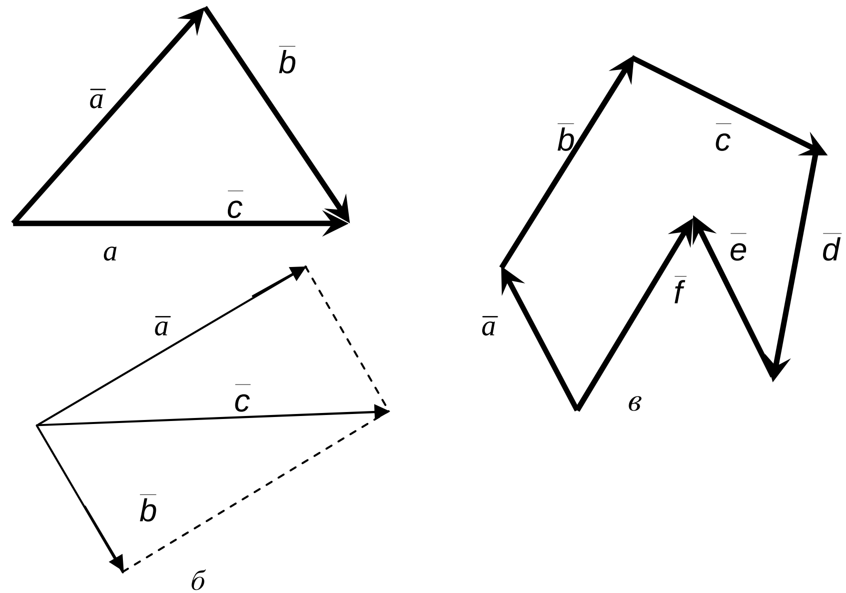


Рисунок 1.3

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, направленный из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$ (рис.1 3 а):

$$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}.$$

Примечание. Можно показать, что если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то вектор $\overline{c}$ - диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, приведенных к одному началу (рис.1.3 б).

Можно найти сумму любого конечного числа векторов, если каждый последующий слагаемый вектор будет выходить из конца предыдущего (рис.1.3в). Так, например, суммой векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$ будет вектор $\overline{f}$, направленный из начала вектора $\overline{a}$ в конец последнего вектора $\overline{e}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ *на действительное число* λ называется вектор $\lambda\,\overline{a}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно $\overline{a}$, если $\lambda<0$. (Если $\lambda=0$, то $\lambda\,\overline{a}=0$).

Перечислим основные свойства линейных операций. Их доказательство можно привести с помощью геометрических операций.

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и любых действительных чисел λ и μ справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$, где $\overline{0}$ - нулевой вектор;

4) для каждого вектора $\overline{a}$ вектор (-1) $\overline{a}=-\overline{a}$ является противоположным, т.е. $\overline{a}+(-\overline{a})=0$;

5) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

6) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

7) $(\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a})$;

8) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ - умножение вектора на единицу не меняет этого вектора.

Разностью двух векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется сумма вектора $\overline{a}$ *и* вектора $(-\overline{b})$, противоположного $\overline{b}$: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

Пример 1

По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить векторы $3\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{a}$.

Решение

Отнесем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к одному началу.

Далее см. рис.1. 4

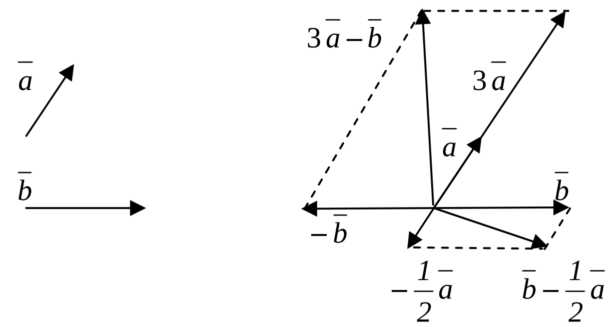


Рисунок 1.4

1.1.2 Проекция вектора на ось

Пусть даны вектор $\bar{a}=\overline{AB}$ и ось L (рис.1.5)*.Проекцией вектора на ось* L называется длина отрезка $A'B'$ между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось L: $пр_L\bar{a}=A'B'$.

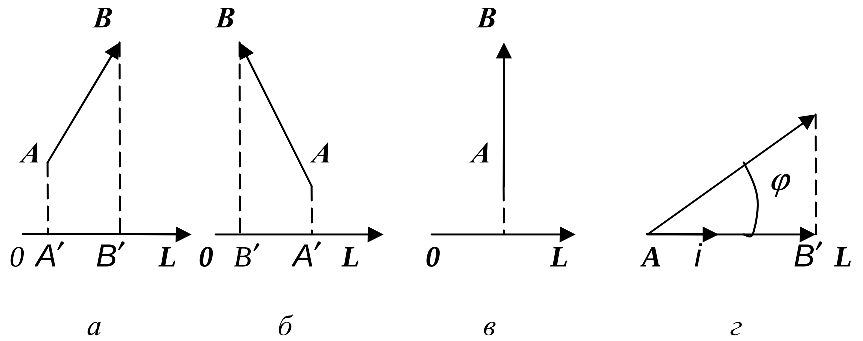


Рисунок 1.5

Проекция вектора $\overline{AB}$ есть скаляр и положительна, если направление вектора $\overline{AB}$ совпадет с направлением оси L. Проекция вектора $\overline{AB}$ отрицательна, если $\overline{AB}$ и L противоположно направлены (рис.1.5 а, б).

Перечислим свойства проекций:

1 Проекция равна нулю (т.е. A' совпадет с B') тогда и только тогда, когда вектор перпендикулярен к оси (рис.1.5 в).

2 При параллельном переносе вектора его проекция не меняется.

3 $Пр_L \overline{a} = \left|\overline{AB}\right| \cos\varphi = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi$ - проекция вектора на ось L равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью (рис.1.5 г).

4 $Пр_L (\overline{a} + \overline{b}) = пр_L \overline{a} + пр_L \overline{b}$ имеет место для любого конечного числа векторов.

5 $Пр_L (\lambda\overline{a}) = \lambda пр_L \overline{a}$, т.е. если вектор умножить на число λ, то его проекция тоже умножается на это число.

Пример 1

Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L, если $\left|\overline{AB}\right|$ =5, а угол между осью и вектором равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение

По свойству 3 $пр_L \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\varphi$.

$$Пр_L \overline{AB} = 5\cos\frac{\pi}{6} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2

Найти проекцию суммы векторов $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ на ось L, если $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = 3$ и угол φ между векторами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и осью L соответственно равен $\dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{\pi}{2}$.

Решение

По свойству 4

$$Пр_L(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = Пр_L\bar{a} + Пр_L\bar{b} + Пр_L\bar{c}.$$

Вычислим проекцию каждого из векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на ось L, получим: $Пр_L\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi_1 = 3\cos\pi/3 = 3\cdot 1/2 = 3/2$;

$$Пр_L\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi_2 = 3\cos\pi = 3\cdot(-1) = -3;$$

$$Пр_L\bar{c} = |\bar{c}|\cos\varphi_3 = 3\cos\pi/2 = 3\cdot 0 = 0.$$

Тогда искомая проекция суммы:

$$Пр_L(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = Пр_L\bar{a} + Пр_L\bar{b} + Пр_L\bar{c} = 3/2 - 3 + 0 = -3/2.$$

1.2 ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.2.1 Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Из школьного курса математики известно, что прямоугольная декартова система координат на плоскости определяется заданием двух взаимно перпендикулярных осей *Ox* и *Oy*, точка *O* пересечения которых называется началом координат. Каждую точку *M* плоскости вполне определяет упорядоченная пара чисел *x* и *y* – координаты точки *M*.

Аналогично декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется тремя взаимно перпендикулярными осями *Ox, Oy, Oz* – *координатными осями*, исходящими из общей точки *O* – *начала координат*.

Положение координатных осей можно задать с помощью единичных векторов, направленных соответственно по осям *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называются *основными* или *базисными ортами*.

Плоскости, проходящие через две координатные оси, называются *координатными плоскостями*. Это плоскости *xOy, yOz, zOx*, которые делят все пространство на восемь частей - *октантов*.

Система прямоугольных декартовых координат в пространстве задает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел *x, y, z* – *координатами точки в пространстве*.

Для каждой точки M пространства (рис.1.6) существует ее радиус- вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, начало которого - в начале координат, точке O, а конец – в точке M.

Пусть проекции вектора $\overline{OM}$ (точки M) на координатные оси соответственно обозначаются буквами x, y, z:

$x = Пр_{Ox}\overline{OM}$ – абсцисса точки M;

$y = Пр_{Oy}\overline{OM}$ – ордината точки M;

$z = Пр_{Oy}\overline{OM}$ – аппликата точки M.

Тогда $\overrightarrow{OM_1} = x\bar{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = y\bar{j}$;

$\overline{OM'} = x\bar{i} + y\bar{j}$; $\overline{M'M} = \overline{OM_3} = z\bar{k}$;

$\overline{OM} = \overline{OM'} + \overline{M'M} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{1.1}$$

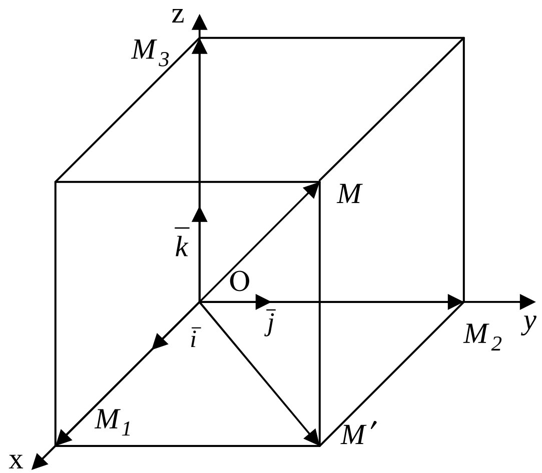


Рисунок 1.6

Векторы $x\bar{i}, y\bar{j}, z\bar{k}$ называются составляющими или компонентами вектора $\overline{OM}$.Запись вектора $\overline{OM}$ в виде выражения(1.1) называется разложением вектора $\overline{OM}$ по ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, или разложением вектора $\overline{OM}$ на составляющие.

Числа *x*, *y*, *z* называются координатами вектора $\overline{OM}$ (точки *M*) и обозначаются: $\overline{OM} = (x;\ y;\ z)$.

1.2.2 Формула для вычисления координат вектора

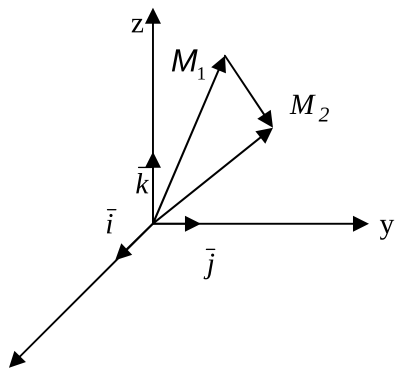


Рисунок 1.7

Пусть даны координаты точек $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_1;\ y_1;\ z_1)$ в пространстве.Т.к. $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$ (рис.1.7), а координаты радиус-векторов $\overline{OM_1} и \overline{OM_2}$ равны соответственно $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k} - (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (1.2)$$

Таким образом, чтобы найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, нужно из координат его конца M_2 вычесть координаты его начала M_1.

Пример 1

Даны точки M_1 (1;2;3) и M_2 (0;-3; 7). Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.

Решение

По формулам (1.2) координаты вектора $\overline{M_1M_2}$=(*0-1;-3-2; 7-3*) или $\overline{M_1M_2}$= (*-1; -5; 4*), или $\overline{M_1M_2} = -\bar{i} - 5\bar{j} + 4\bar{k}$.

1.2.3 Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Сумма (разность) векторов

Пусть даны векторы $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Найти $\bar{a} \pm \bar{b}$:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \pm (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) =$$
$$(x_1 \pm x_2)\bar{i} + (y_1 \pm y_2)\bar{j} + (z_1 \pm z_2)\bar{k}.$$

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \qquad (1.3)$$

При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их соответствующие координаты.

1.2.4 Умножение вектора на число

Пусть дан вектор $\bar{a}$ =($x; y; z$), λ-любое действительное число. Найдем $\lambda\,\bar{a}$:

$$\lambda\,\bar{a} = \lambda\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = (\lambda x)\,\bar{i} + (\lambda y)\,\bar{j} + (\lambda z)\,\bar{k}.$$

$$\lambda\,\bar{a} = (\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z) \qquad (1.4)$$

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пример 2

Даны векторы $\bar{a}$ =(2;-3;5) и $\bar{b}$ =(1;6;-2).

Записать векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ в координатной форме.

Решение

По формуле (1.3) $\bar{a}+\bar{b}$ =(2+1;-3+6;5-2)=(3; 3; 3),

$\bar{a}-\bar{b}$ = (2-1;-3-6;5-(-2)) = (1; -9; 7).

Пример 3

На материальную точку действуют две силы

$\overline{f_1} = 2\overline{a}, \overline{f_2} = -3\overline{b}$, где $\overline{a} = 7\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

Найти равнодействующую силу $\overline{f}$.

Решение

Равнодействующая сила $\overline{f}$ вычисляется по формуле (1.3):

$\overline{f} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2 = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.

Тогда по формуле (1.4)

$2\overline{a} = 14\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}$,

$-3\overline{b} = -9\overline{i} + 6\overline{j} + 9\overline{k}$.

Отсюда искомая равнодействующая

$2\overline{a} - 3\overline{b} = (14 - 9)\overline{i} + (4 + 6)\overline{j} + (6 + 9)\overline{k} =$

$5\overline{i} + 10\overline{j} + 15\overline{k} =$ (5; 10; 15).

1.3 ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть в некоторой декартовой системе координат заданы три точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M(x;y;z)$, причем точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, т.е.

$$\frac{|\overline{M_1M}|}{|\overline{MM_2}|} = \lambda, \text{ или } \overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}.$$

С учетом координат векторов

$\overline{M_1M} = (x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$, $\overline{MM_2} = (x_2-x;\ y_2-y;\ z_2-z)$.

Из последнего векторного равенства получим:

$x - x_1 = \lambda (x_2-x)$,

$y - y_1 = \lambda (y_2-y)$,

$z - z_1 = \lambda (z_2-z)$.

Отсюда найдем x, y, z.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \quad - \qquad 1.5)$$

координаты точки M – деления отрезка в данном отношении λ.

Если точка M - середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и координаты точки M равны:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{1.6}$$

Пример1

Даны точки $M_1(1;3;-12)$ и $M_2(6;0;3)$. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 3:2. Найти координаты $M\ (x;\ y;\ z)$.

Решение

По условию $\lambda = 1,5$. Из формулы (1.5) следует:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{1 + 1,5 \cdot 6}{1 + 1,5} = 4,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3 + 1,5 \cdot 0}{1 + 1,5} = 1,2,$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-12 + 1,5 \cdot 3}{1 + 1,5} = -3.$$

Следовательно, $M(4;1,2;-3)$.

1.4 ДЛИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Пусть дан вектор $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Длина вектора находится по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.7}$$

Ортом вектора $\bar{a}$ называется единичный вектор $\bar{a}^0$ того же направления, что и $\bar{a}$.

Вектор $\bar{a}^0$ находим по формуле

$$\overline{a}^0=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overline{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overline{j}+$$
$$+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overline{k}. \qquad (1.8)$$

Пусть вектор $\overline{OM}$ образует с осями координат углы α, β, γ. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\overline{OM}$. Так как $\left|\overline{a}^0\right|=1$,то направляющие косинусы являются его координатами:

$$\overline{a^0}=\cos\alpha\overline{i}+\cos\beta\overline{j}+\cos\gamma\overline{k}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)\,. \qquad (1.9)$$

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\,.$$

Сравнивая выражения (1.8) и (1.9), получим формулы для вычисления направляющих косинусов вектора $\overline{a}$ по его координатам

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,. \qquad (1.10)$$

Пример 1

Найти орт вектора $\overline{a}=12\,\overline{i}\,-4\,\overline{j}+3\,\overline{k}$ и его направляющие косинусы.

Решение1 Найдем длину вектора $\overline{a}$:

$$|\overline{a}|=\sqrt{12^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{144+16+9}=\sqrt{169}=13\,.$$

2 Найдем орт вектора $\overline{a}$:

$$\overline{a^0}=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{12}{13}\overline{i}-\frac{4}{13}\overline{j}+\frac{3}{13}\overline{k}.$$

3.Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ - координаты единичного вектора $\overline{a}^0$:

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}; \cos\beta = -\frac{4}{13}; \cos\gamma = \frac{3}{13}.$$

1.5 ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.5.1 Связь декартовых координат с полярными

Говорят, что на плоскости определена *полярная система координат*, если задана точка *O*, которая называется *полюсом*, и исходящий из нее луч *OP*, который называется *полярной осью*.

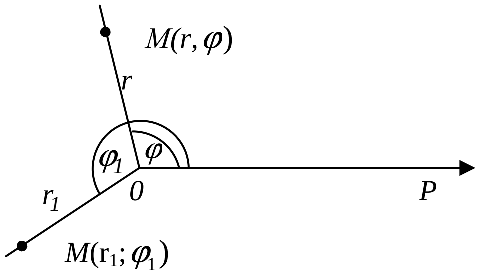


Рисунок 1.8

Положение точки *M* в этой системе координат задается двумя числами: так называемым полярным радиусом $r = \left|\overline{OM}\right|$ и полярным углом φ между полярной осью и вектором $\overline{OM}$, измеряемым в радианах, считываемым от полярной оси против часовой стрелки $M(r, \varphi)$. В полюсе $r=0$, а угол φ неопределенный. Для остальных точек плоскости $r>0$, а изменение φ примем: $0 \le \varphi < 2\pi$.

В полярной системе координат также существует взаимно однозначное соответствие между парами чисел (r, φ) и точками плоскости.

Совместим декартову систему координат на плоскости с полярной системой координат так, чтобы ось *Ox* совпала с полярной осью *OP* и начало координат – с полюсом (рис.1.9).

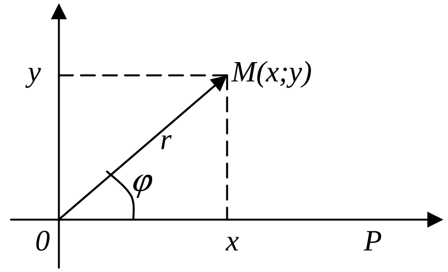


Рисунок1.9

Пусть координаты точки *M* в декартовой системе- *(x;y)*, в полярной - (r; φ). Тогда

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \tag{1.11}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}, \tag{1.12}$$

причем для однозначного определения угла φ по его тангенсу надо учитывать знаки *x*,*y*.

Из формул (1.11) и (1.12) следует, что:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{1.13}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Пример 1

В полярной системе координат построить точки *A* (2; $\pi/4$) и *B*(3; $\frac{5}{3}\pi$).

Решение

Проведем луч, образующий угол $\pi/4$ с полярной осью и от полюса отложим отрезок, длина которого равна 2. Конец отрезка – искомая точка *A*. Аналогично строим *B*.

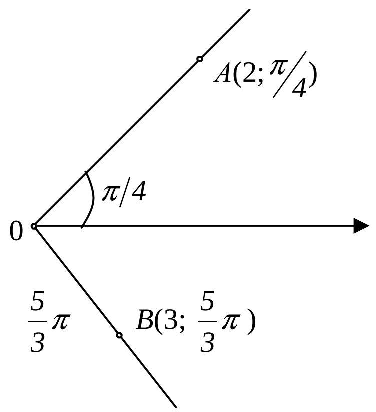


Рисунок 1.10

Пример 2

В декартовой системе координат дана точка $M(-1;1)$. Найти координаты точки M в полярной системе координат.

Решение.

Воспользуемся формулами (1.12):

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.Из этого следует, что $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Точка M в полярной системе-

$M(\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi)$.

1.6 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Определителем второго порядка называется число, записанное в виде квадратное таблицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

где a_{ij} – элемент *i-й* строки и *j-го* столбца $(i,\ j = 1,2)$.

Определителем третьего порядка называется число, записанное в виде квадратной таблицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \qquad (1.14)$$

т.е. определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести слагаемых, три из которых берутся со знаком „+”, а три- со знаком „-”.

Введем понятия:

M_{ij} – минор элемента a_{ij} – определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца (i , $j = 1, 2, 3$) ;

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Можно показать, что каждый определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \text{ где } i = 1, 2, 3;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \text{ где } j = 1, 2, 3.$$

Правая часть называется разложением определителя по элементам ряда (строки или столбца).

В частности,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

есть разложение по элементам первой строки.

Пример 1

Вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 1 \cdot (-4) = 21 + 4 = 25\,.$$

Пример 2

Вычислить определитель третьего порядка разложением по элементам первой строки и второго ряда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(5(-2) - 1 \cdot 0) + 3((-4)(-2) - 3 \cdot 0) + 1(-4 \cdot 1 - 3 \cdot 5) =$$

$$= 2(-10) + 3(8) + 1(-19) = -20 + 24 - 19 = -15\,.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 3(8) + 5(-4-3) - 1(0+4) = 24 - 35 - 4 = -15\,.$$

1.7 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1.7.1 Угол между векторами

Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в пространстве есть угол между векторами, равными данным и имеющим общее начало. Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают $(\overline{a},^\wedge \overline{b})$, причем $0 \le \varphi \le \pi$ и $\varphi = (\overline{a},^\wedge \overline{b}) = (\overline{b},^\wedge \overline{a})$.

1.7 .2 Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\,, \tag{1.15}$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Так как $|\overline{b}|\cos\varphi = np_{\overline{a}}\overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}$ или $|\overline{a}|\cos\varphi = np_{\overline{b}}\overline{a}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{b}|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$, т. е. скалярное произведение векторов равно длине первого вектора, умноженной на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым вектором.

1.7.3 Свойства скалярного произведения

1 $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$.
2 $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b}) = (\lambda\overline{a}\cdot\overline{b})$, где λ – действительное число.
3 $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}$.

4 $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$. Скалярное произведение равно 0 тогда и только тогда, когда его сомножители ортогональны.

Таким образом, условие ортогональности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет вид

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0. \qquad (1.16)$$

5 $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины, отсюда

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}. \qquad (1.17)$$

1.7.4 Таблица скалярного умножения ортов $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$

Используя определение скалярного произведения векторов, получим:

1 $\bar{i}\cdot\bar{i}=\left|\bar{i}\right|\left|\bar{i}\right|\cos 0=1\cdot 1\cdot 1=1$.

Значит, $\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$.

2 $\bar{i}\cdot\bar{j}=\left|\bar{i}\right|\cdot\left|\bar{j}\right|\cos 90^\circ=1\cdot 1\cdot 0=0$.

Значит, $\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$.

1.7.5 Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Пусть даны векторы $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$. Перемножим их скалярно, используя свойства скалярного произведения 2 и 3:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right)=x_1x_2\bar{i}\cdot\bar{i}+x_1y_2\bar{i}\cdot\bar{j}+$$
$$+x_1z_2\bar{i}\cdot\bar{k}+y_1x_2\bar{j}\cdot\bar{i}+y_1y_2\bar{j}\cdot\bar{j}+y_1z_2\bar{j}\cdot\bar{k}+z_1x_2\bar{k}\cdot\bar{i}+$$
$$+z_1y_2\bar{k}\cdot\bar{j}+z_1z_2\bar{k}\cdot\bar{k}.$$

Так как 1) $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$; 2) $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (1.18)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат.

1.7.6 Модуль вектора

Для вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ его модуль вычисляется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \qquad (1.19)$$

1.7.7 Угол между двумя векторами

Из определения скалярного произведения $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$ можно найти угол между двумя векторами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$:

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} . \qquad (1.20)$$

1.7.8 Условие ортогональности двух векторов

Согласно свойству *4* скалярного произведения условием ортогональности двух векторов $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ является равенство:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 . \qquad (1.21)$$

1.7.9 Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ можно найти как длину вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$:

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \qquad 1.22)$$

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}=(4;\frac{1}{3};-1)$ и $\overline{b}=(1;-3;3)$.

Решение

$\overline{a}\cdot\overline{b}=4\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot(-3)+(-1)\cdot 3=4-1-3=0$.

Значит, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны.

Пример 2

Найти угол между векторами

$$\overline{a}=2i-j+2k \quad \text{и} \quad \overline{b}=-2i-4j+2k.$$

Решение

По формуле (1.20)

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}}=\frac{8}{3\cdot 6}=\frac{4}{9},$$

$\varphi=\arccos\frac{4}{9}\approx 63^0 36'$.

Пример 3

Вычислить проекцию вектора $\overline{a}=(3;-4;12)$ на ось, имеющую направление вектора $\overline{b}=(4;4;-2)$.

Решение

1 $Пр_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}$.

2 $\overline{a}\cdot\overline{b}=3\cdot 4+(-4)\cdot 4+12\cdot(-2)=-28.$

3 $|\overline{b}|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6.$

4 Тогда $пр_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}=\frac{-28}{6}=-\frac{14}{3}.$

Здесь отрицательный знак показывает, что угол между вектором и осью проекции тупой.

1.7.10 Механический смысл скалярного произведения. Работа под действием сил

Пусть материальная точка перемещается из точки B в точку M под действием силы $\overline{F}$ (рис.1.11), тогда *работа A, которую совершает сила $\overline{F}$ при этом движении, будет равна скалярному произведению силы $\overline{F}$ на вектор перемещения $\overline{BM}$, т.е.*

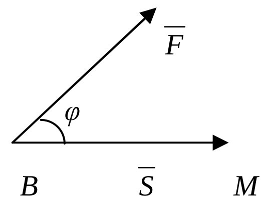


Рисунок 1.11

$$A = |\overline{F}| \cdot |\overline{BM}| \cos\varphi = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cos\varphi = \overline{F} \cdot \overline{S},$$

где φ – угол между векторами $\overline{F}$ и $\overline{BM}$, а $\overline{S} = \overline{BM}$.

Пример 4

На материальную точку действуют силы

$\overline{F_1} = i + j - 2k$ и $\overline{F_2} = 2i - 3j + 4k$.

Найти работу равнодействующей этих сил $\overline{R}$ при перемещении из точки $B(0;1;-2)$ в положение $M(3;2;1)$.

Решение

1 Равнодействующая сил

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = (1+2)i + (1-3)j + (-2+4)k =$$
$$= 3i - 2j + 2k = (3;-2;2).$$

2 Вектор перемещения

$$\overline{S} = \overline{BM} = (3-0)i + (2-1)j + (1-(-2))k =$$
$$= 3i + j + 3k = (3;1;3).$$

3 Искомая работа силы $\overline{R}$ при перемещении вдоль вектора $\overline{BM}$

$$A = \overline{R} \cdot \overline{S} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9 - 2 + 6 = 13.$$

1.8 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть заданы три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Будем смотреть из конца вектора $\bar{c}$ на $\bar{a}$ и $\bar{b}$: если кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ будет совершаться против часовой стрелки, то такая тройка векторов называется *правой;е*сли кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ совершается по часовой стрелке, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется *левой*.

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$ $(\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b})$, длина и направление которого определяются условиями:

1 $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2 Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3 Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов, т. е. из конца вектора $\bar{c}$ виден кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$.

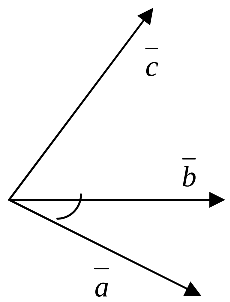


Рисунок1.12

Примечание 1 Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то модуль вектора $\bar{c}$, т. е. $|\bar{c}|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi. \qquad (1.23)$$

Примечание 2 Из определения векторного произведения следует, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.

1.8.1 Свойства векторного произведения.

1 $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}.$

2 $\lambda(\overline{a}\times\overline{b})=\lambda\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\lambda\overline{b}.$

3 $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}.$

1.8.2 Таблица векторного умножения ортов $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$

Пусть векторы $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ образуют правую тройку векторов, т. е. система координат является правой.

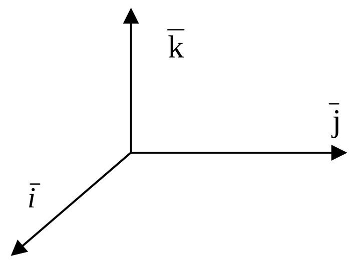


Рисунок 1.13

Тогда

$$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0;$$

$$\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k};\qquad \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i};\qquad \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}.$$

$$\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k};\qquad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i};\qquad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}.$$

Левую тройку векторов мы не рассматриваем.

1.8.3 Выражение векторного произведения через координаты векторов.

Пусть даны векторы $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$. Перемножим их векторно, используя свойства векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})\times(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=$$

$$=x_1x_2\bar{i}\times\bar{i}+x_1y_2\bar{i}\times\bar{j}+x_1z_2\bar{i}\times\bar{k}+y_1x_2\bar{j}\times\bar{i}+y_1y_2\bar{j}\times\bar{j}+$$

$$+y_1z_2\bar{j}\times\bar{k}+z_1x_2\bar{k}\times\bar{i}+z_1y_2\bar{k}\times\bar{j}+z_1z_2\bar{k}\times\bar{k}=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\bar{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\bar{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\bar{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.24)$$

18.4 Условие коллинеарности векторов

Условием коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство $\bar{a}\times\bar{b}=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0.$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Тогда условие коллинеарности записывается в виде:

$$y_1z_2-z_1y_2=0; \qquad x_1z_2-z_1x_2=0;$$

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0$$

или
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{1.25}$$

1.8.5 Площадь треугольника

Пусть треугольник построен на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда его площадь находят по формуле
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|. \tag{1.26}$$

1.8.6 Механический смысл векторного произведения. Вращающий момент силы.

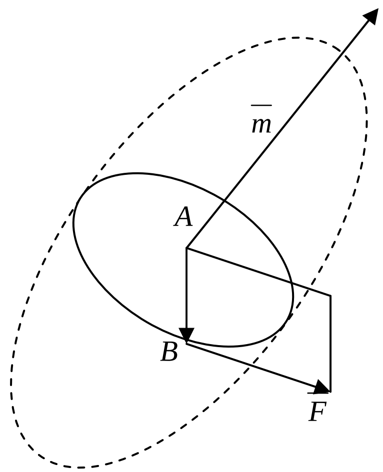


Рисунок1.14

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* $\bar{m}$ *(рис.1.14) силы* $\bar{F}$*, приложенной в точке B тела, закрепленного в точке A:*
$$m_A(\bar{F}) = \overline{AB}\times\bar{F}\ . \tag{1.27}$$

Пример 1

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Найти модуль вектора $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$.

Решение

По формуле (1.23)

$$|\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \times |\overline{b}| \sin\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Пример 2

Найти векторное произведение векторов $\overline{a} = (2;-3;1)$ и $\overline{b} = (-3;1;2)$.

Решение

По формуле (1.24)

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \overline{k} =$$

$$= (-6-1)\overline{i} - (4+3)\overline{j} + (2-9)\overline{k} = 7\overline{i} - 7\overline{j} - 7\overline{k}.$$

Пример 3

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2i + j - k$ и $\overline{b} = i - j + k$.

Решение

1 Искомая площадь S равна модулю векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е.

$$S = |\overline{a} \times \overline{b}|.$$

2 Вычислим $\overline{a} \times \overline{b}$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1)\overline{i} - (2+1)\overline{j} + (-2-1)\overline{k} =$$

$$= 0\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}.$$

3 Тогда

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,(кв.ед.).$$

Пример 4

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;2;0)$; $B(3;0;-3)$; $C(5;2;6)$.

Решение

1 Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ как на сторонах, т. е.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

2 Составим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2;-2;-3), \qquad \overline{AC} = (4;0;6).$$

3 Вычислим $\overline{AB} \times \overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\overline{i} - (12+12)\overline{j} +$$

$$+ (0+8)\overline{k} = -12\overline{i} - 24\overline{j} + 8\overline{k}.$$

4 Тогда

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} =$$

$$= 4\sqrt{9+36+4} = 28.$$

5 Окончательно $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14(кв.ед.)$.

Пример 5

Сила $\overline{F} = i - 2j + 4k$ приложена к точке $B(1;2;3)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

Решение

1. Момент $m_A(\overline{F})$ силы $\overline{F}$, приложенной к точке B относительно точки A, вычисляется по формуле

$$m_A(\overline{F}) = \overline{AB} \times \overline{F}.$$

2 Найдем $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=(-2;0;4).$$

3 Вычислим векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{F}$:

$$\overline{AB}\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=(0+8)\overline{i}-(-8-4)\overline{j}+(4-0)\overline{k}=$$

$$=8\overline{i}+12\overline{j}+4\overline{k}.$$

4 Тогда $m_A(\overline{F})=(8;12;4)$.

1.9 СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$, т. е. $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$.

Смешанное произведение обозначают так: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, тогда

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}.$$

1.9.1 Геометрический смысл смешанного произведения

Пусть даны три некомпланарных вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Приведем их к общему началу. Обозначим через V объем параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 1.15).

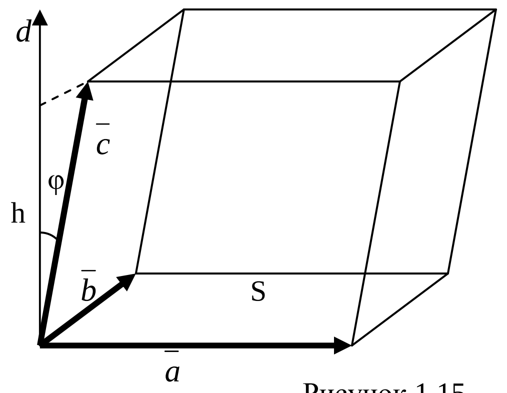


Рисунок 1.15

Тогда $V = Sh$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$; h – высота параллелепипеда, $h = |\overline{c}|\cos\varphi$.

Пусть $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$, тогда по определению векторного произведения $|\overline{d}| = S$. Вектор $\overline{d}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{d}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{d} \cdot \overline{c} = |\overline{d}| \cdot |\overline{c}| \cos\varphi = Sh.$$

Но $\overline{d} \cdot \overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$. Следовательно, $V = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Смешанное произведение может получиться со знаком "+", если угол между векторами $\overline{d}$ и $\overline{c}$ меньше $\frac{\pi}{2}$ (векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку векторов), и со знаком "-" ,если этот угол больше $\frac{\pi}{2}$ (векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют левую тройку векторов). Таким образом, для любой тройки векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

$$V = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}| \quad . \tag{1.28}$$

1.9.2 Свойства смешанного произведения

1 $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$.

2 При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}.$$

3 Смешанное произведение равно 0 тогда и только тогда, когда сомножители компланарны (т. е. лежат в одной плоскости).

1.9.3 Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть даны три вектора: $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\overline{c} = (x_3; y_3; z_3)$.

Найдем $\overline{abc}$:

$$1\ \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

2 Умножим скалярно $\bar{a}\times\bar{b}$ на $\bar{c}$:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3=\overline{abc},$$

т. е.
$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}, \qquad (1.29)$$

т. к. правая часть предыдущего равенства является разложением этого определителя по элементам третьей строки.

1.9.4 Условие компланарности трех векторов

Условием компланарности трех векторов является равенство

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0\ , \qquad (1.30)$$

где строки определителя – координаты векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

1.9.5 Объем пирамиды

Так как объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ равен $|\overline{abc}|$, то объем пирамиды

$$V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{abc}|. \qquad 1.31)$$

Пример 1

Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}=(3;5;0)$, $\bar{b}=(1;-1;2)$, $\bar{c}=(5;3;4)$.

Решение

По формуле (1.30) проверим условие компланарности $\overline{abc}=0$:

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}3 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=3(-4-6)-5(4-10)=3(-10)-5(-6)=-30+30=0.$$

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны.

Пример 2

Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$, $D(3;2;4)$.

Решение

1 По формуле (1.31)

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|.$$

2 Найдем векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$:

$$\overline{AB}=(-2;5;-4),$$

$$\overline{AC}=(-4;1;-2),$$

$$\overline{AD}=(1;5;-1).$$

3 Вычислим $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=-2(-1+10)-5(4+2)-$$

$$-4(-20-1)=-2\cdot 9-5\cdot 6-4(-21)=-18-30+84=36.$$

4. Тогда $V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 36=6(\textit{куб.ед.})$.

2 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1 ЛИНИИ, ПОВЕРХНОСТИ, ИХ УРАВНЕНИЯ

2.1.1 Геометрический смысл уравнений. Две основные задачи аналитической геометрии

Задача 1 Дана линия как геометрическое место точек (г.м.т.) плоскости (поверхности), обладающих некоторыми свойствами. Составить уравнение *F(x,y)=0* (*F(x,y,z)=0*), которому удовлетворяют координаты всех точек этой линии (поверхности) и только таких точек. Это уравнение называют уравнением данной линии (поверхности).

Задача 2 Дано уравнение *F(x,y)=0 (F(x,y,z)=0)*. Найти г.м.т. плоскости (поверхности), координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Все такие точки образуют линию (поверхность), соответствующую этому уравнению.

Пример 1 Окружность радиуса *R* есть г.м.т. плоскости, удаленных на расстояние *R* от некоторой точки *C(a,b)* – центра окружности. Составить уравнение окружности данного радиуса с центром в точке *C* (рис.2.1а).

Решение *1* Пусть *M(x,y)* – текущая (произвольная) точка окружности. Соединим её с центром *C*. По определению окружности $\left|\overline{OM}\right| = R$, т.е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2.1)$$

есть уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке *C(a,b)*.

Уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат (рис. 2.2а) имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2.2)$$

2 Пусть теперь дано уравнение окружности. Если координаты точки *M(x,y)* удовлетворяют уравнению (2.2), то, очевидно, $\left|\overline{OM}\right| = R$, значит, эта точка принадлежит окружности.

Таким образом, уравнение (2.2) есть уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

Примечание Аналогично можно показать, что уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{2.3}$$

есть уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(a,b,c)$, а уравнение

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{2.4}$$

есть уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O(0,0,0)$ (рис.2.2,б).

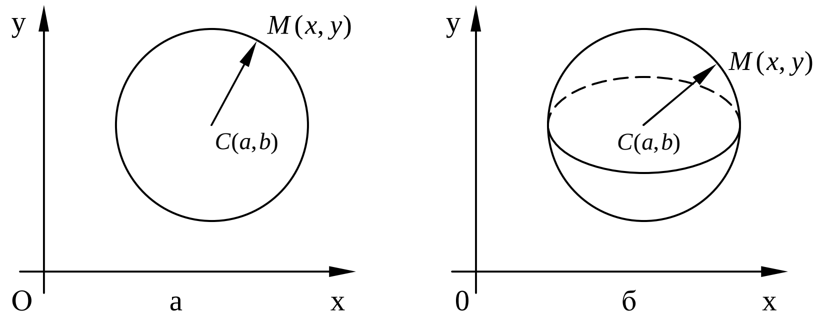


Рисунок 2.1

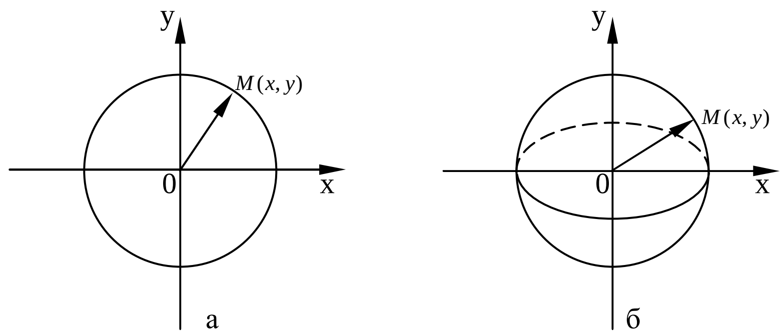


Рисунок 2.2

Линия в пространстве определяется как г.м.т. пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Самая простая линия – прямая, самая простая поверхность – плоскость.

2.2 ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.2.1 Уравнение прямой с заданным нормальным вектором, проходящей через заданную точку

Положение прямой на плоскости вполне определено нормальным вектором прямой $\overline{n}=(A,B)$ и точкой $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащей прямой (рис 2.3).

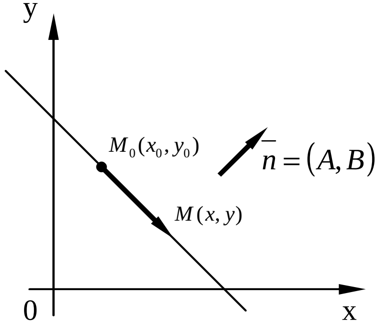


Рисунок 2.3

Пусть $M(x,y)$ – текущая точка прямой. Вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$ перпендикулярен вектору $\overline{n}=(A,B)$. В силу перпендикулярности этих векторов получаем: $\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0$ или

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2.5)$$

Это условие выполняется в том и только в том случае, если точка M лежит на прямой. Уравнение (2.5) выполняется для всех точек прямой и не выполняется для точек, не лежащих на этой прямой. Значит, это и есть уравнение данной прямой.

2.2.2 Общее уравнение прямой.

Пусть дано уравнение прямой (2.5). Раскроем скобки и преобразуем его

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0.$$

Обозначим $-Ax_0-By_0=C$, тогда последнее уравнение примет вид

$$Ax+By+C=0. \qquad (2.6)$$

Здесь A и B одновременно не равны 0. Таким образом, уравнение прямой может быть записано в форме (2.6).

Можно показать и обратное, т.е., что уравнение (2.6) всегда задает прямую. В самом деле, всегда можно подобрать два числа x_0, y_0, удовлетворяющие условию

$Ax_0 + By_0 = 0$.

Это уравнение вычитаем соответственно из уравнения (2.6). Получим

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, а это уравнение (2.5). Из доказанного можно заключить, что уравнение (2.6) является *общим уравнением прямой*.

2.2.3 Исследование общего уравнения прямой

Пусть дано уравнение (2.6):

$$Ax + By + C = 0 .$$

а) Если $A = 0$, то уравнение примет вид

$$By + C = 0 ,$$

прямая параллельна оси OX (рис 2.4), нормальный вектор $\overline{n} = (0, B)$ перпендикулярен оси OX (его проекция на эту ось равна 0), $y = -\dfrac{C}{B}$.

Пусть $-\dfrac{C}{B} = b$, тогда $y = b$, т.е. все ординаты прямой, параллельной оси абсцисс, равны между собой. Если $b = 0$, то $y = 0$ – уравнение оси абсцисс.

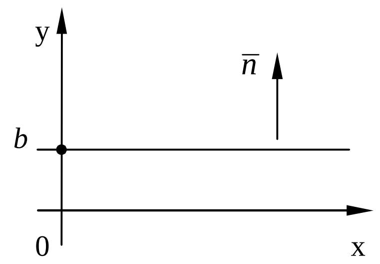


Рисунок 2.4

б) Если $B=0$, то уравнение (2.6) примет вид

$$Ax + C = 0\,,$$

прямая параллельна оси *Oy*, нормальный вектор прямой $\bar{n} = (A, 0)$ перпендикулярен оси *Oy* (его проекция на эту ось равна нулю),

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Пусть $-\dfrac{C}{A} = a$, тогда $x = a$, т.е. все абсциссы прямой параллельной оси ординат, равны между собой (рис.2.5). Если $a = 0$, то $x = 0$ – уравнение оси *Oy*.

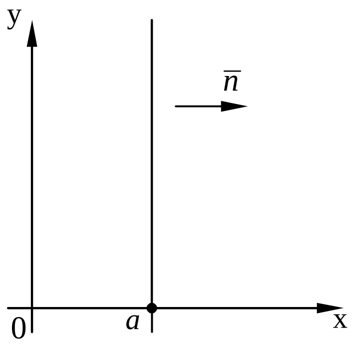


Рисунок 2.5

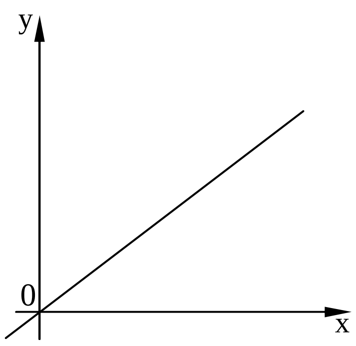


Рисунок 2.6

в) Если $C = 0$, то уравнение (2.6) примет вид $Ax + By = 0$ - это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис 2.6.)

2.2.4 Пересечение прямых

Пересечение непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *есть точка M(x,y)*, которая является общей точкой этих прямых. Координаты точки *M(x,y)* удовлетворяют каждому из уравнений этих прямых, т.е. системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

и обратно.

2.2.5 Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\overline{q} = (m, n)$, а данная прямая проходит через точку M_0 параллельно данному вектору (рис.2.7). Вектор $\overline{q}$ называется *направляющим вектором прямой.*

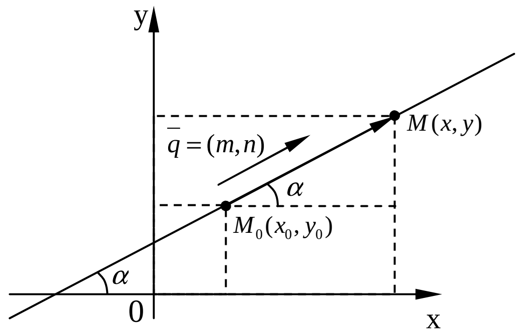


Рисунок 2.7

Возьмем на прямой текущую точку $M(x, y)$. Вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарен вектору $\overline{q} = (m, n)$. Поэтому координаты векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{q}$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{2.8}$$

Координаты m, n вектора $\overline{q}$ называются *направляющими коэффициентами прямой*.

2.2.6 Прямая, проходящая через две точки на плоскости.

Пусть прямая l задана двумя ее точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Эту прямую можно рассматривать как прямую, проходящую через точку $M_1(x_1,y_1)$ с направляющим вектором $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 2.8). Тогда уравнение прямой l будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.9}$$

Примечание. Уравнение (2.9) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

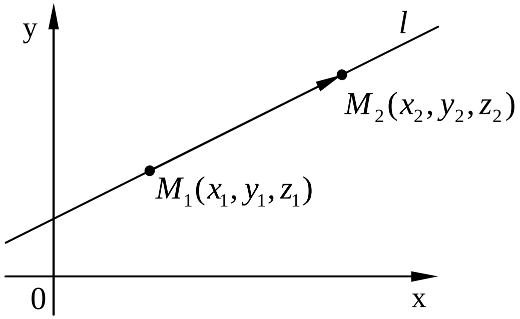


Рисунок 2.8

2.2.7 Параметрические уравнения прямой на плоскости

При выводе формулы (2.8) было отмечено, что векторы $\overline{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)$ и $\overline{q} = (m, n)$ коллинеарны, т.е. $\overline{M_0M} = t\overline{q}$, где t – любое число. Запишем последнее равенство в координатной форме:

$$x - x_0 = tm ,$$

$$y - y_0 = tn .$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tm, \\ y &= y_0 + tn \end{aligned} \quad - \qquad (2.10)$$

параметрические уравнения прямой на плоскости.

Здесь t называется переменным параметром. При изменении параметра t точка движется по прямой.

2.2.8 Угол наклона прямой и угловой коэффициент прямой на плоскости

1 *Углом наклона* прямой к оси *Ox* называется угол, который образует прямая с положительным направлением оси *Ox*. Угол наклона может быть как острым, так и тупым.

2 *Угловым коэффициентом прямой k* называется тангенс угла α наклона прямой к оси *Ox:*

$$k = tg\alpha\,, \tag{2.11}$$

а) Если прямая параллельна оси *Ox*, то $\alpha=0$, $k = tg\alpha = tg0 = 0$.

б) Если прямая перпендикулярна к оси *Ox*, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $k = tg\alpha = tg\dfrac{\pi}{2} = \infty$.

2.2.9 Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом. Уравнение пучка прямых

Уравнение (2.8) можно представить в виде

$$y - y_0 = \frac{n}{m}\left(x - x_0\right),$$

где $\dfrac{n}{m} = tg\alpha$, т.е. $\dfrac{n}{m}$ - угловой коэффициент прямой. Тогда уравнение (2.8) можно представить так:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{2.12}$$

При произвольном k уравнение (2.12) есть любая прямая, проходящая через точку $M_0\,(x_0,y_0)$ (здесь выпадает прямая $x=x_0$, т.к. эта прямая параллельна оси *Oy*), поэтому (2.12) называется уравнением пучка прямых с центром в точке $M_0\,(x_0,y_0)$.

2.2.10 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$ разрешим относительно *y*:

$$By = -Ax - C.$$

Если $B \neq 0$, то $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Обозначим : $-\dfrac{C}{B} = b$, $-\dfrac{A}{B} = k$.

Тогда получим:

$$y = kx + b \qquad (2.13)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом (рис 2.9.).

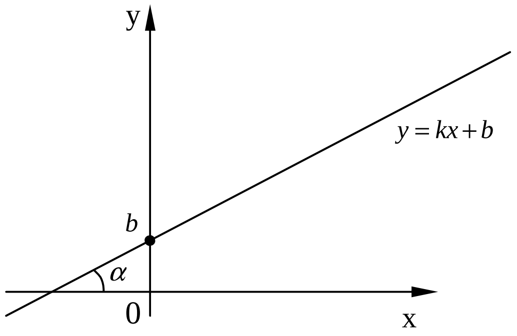


Рисунок 2.9

Здесь $k = tg\,\alpha$, b – начальная ордината.

2.2.11 Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть прямая l пересекает оси Ox и Oy в точках $M_1(0,b)$ и $M_2(a,0)$ (рис 2.10), $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда, используя уравнение (2.9) получим:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},\ \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b},\ \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$$ и, наконец,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ -} \qquad (2.14)$$

уравнение прямой в отрезках на осях.

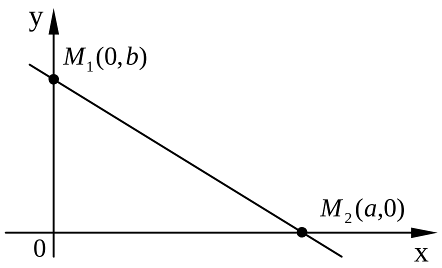


Рисунок 2.10

2.2.12 Угол между прямыми. Условие перпендикулярности и параллельности прямых, заданных общими уравнениями

Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. *Угол между прямыми* (рис. 2.11)- угол между их нормальными векторами.

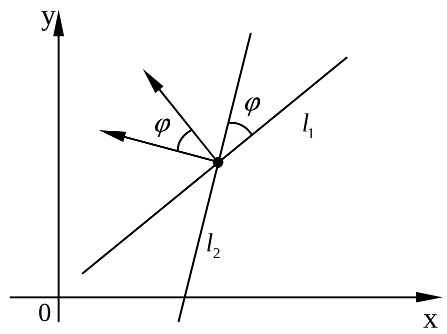


Рисунок 2.11

Тогда

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\ . \qquad (2.15)$$

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то и векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ перпендикулярны и

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (2.16)$$

есть *условие перпендикулярности* прямых, заданных общими уравнениями.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны и

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (2.17)$$

есть *условие параллельности* двух прямых на плоскости.

2.2.13 Угол между прямыми на плоскости, заданными угловыми коэффициентами. Условие параллельности двух прямых. Условие перпендикулярности двух прямых

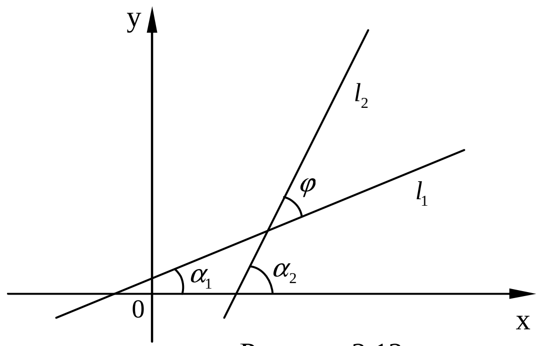


Рисунок 2.12

Пусть заданы прямые $l_1 : y = k_1 x + b_1$ и $l_2 : y = k_2 x + b_2$ (рис. 2.12.Выразим

$$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1, \ \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 ;$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1};$$

$$tg\alpha_1 = k_1, \ tg\alpha_2 = k_2 .$$

Тогда
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} - \qquad (2.18)$$

формула для вычисления тангенса угла между двумя прямыми.

1) Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то угол $\varphi = 0$, тогда из формулы (2.18) следует, что $tg\varphi = 0$ или $k_2 - k_1 = 0$,

$$k_2 = k_1 - \qquad (2.19)$$

условие параллельности двух прямых.

2) Если l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда из формулы (2.18) следует, что $1 + k_2 k_1 = 0$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} - \qquad (2.20)$$

условие перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.

2.2.14 Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть дана прямая l: $Ax + By + C$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис.2. 13), $\overline{n} = (A, B)$ - нормальный вектор прямой.

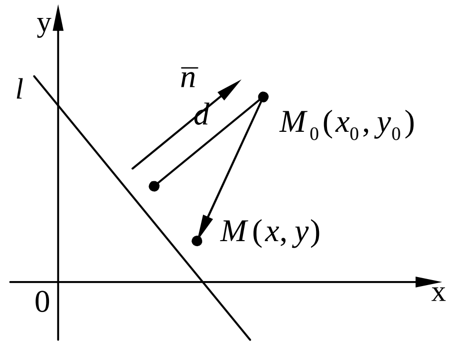


Рисунок 2.13

Расстоянием d от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую. Это значит, что расстояние от точки M_0 до прямой l можно вычислить как модуль проекции вектора $\overline{M_0M}$ (где $M(x, y)$-текущая точка прямой) на направление, определяемое вектором $\overline{n}$.

$$d = \left| np_{\overline{n}} \overline{M_0M} \right|, \text{ т.е.}$$

$$d = \frac{\left| \overline{M_0M} \cdot \overline{n} \right|}{\left| \overline{n} \right|},$$

$$d=\frac{\left|A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и,наконец,

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\text{ -}\qquad(2.21)$$

формула расстояния от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до прямой $Ax+By+C=0$ на плоскости (здесь $C=-Ax-By$, т.к. $M\left(x,y\right)$ - текущая точка на прямой).

Пример 1 Написать уравнение прямой l с нормальным вектором $\overline{n}=(2;-1)$, проходящей через точку $M_0\left(1,4\right)$, привести уравнение к общему виду и построить эту прямую.

Решение Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, с нормальным вектором $\overline{n}=(A;B)$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Тогда в нашем случае l:

$$2(x-1)-1(y-4)=0.$$

Приведем к общему виду:

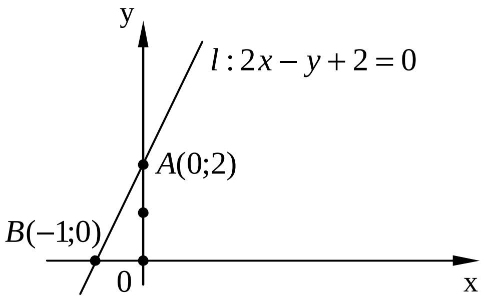
$$2x-y+2=0.$$

Для построения прямой необходимо и достаточно две точки:

$x=0$, $y=2$, т.е. $A(0;2)$,

$y=0$, $x=-1$, т.е. $B(-1;0)$.

Строим прямую:



Пример 2 Дан треугольник координатами своих вершин $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(6,1)$. Найти уравнение AM - высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, а также длину этой высоты $d = |AM|$.

Решение Уравнение высоты AM составим как уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (2;3)$:

$$l_{AM} : 2(x-1) + 3(y-2) = 0$$

или в общем виде

$$2x + 3y - 8 = 0.$$

Длину высоты d вычислим как расстояние от точки $A(1,2)$ до прямой l_{BC}.

Найдем уравнение l_{BC} как уравнение прямой, проходящей через точки $B(2,-2)$ и $C(6,1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{или}$$

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y+2}{1+2},$$

$$3(x-2) = 4(y+2),$$

$$3x - 4y - 6 - 8 = 0,$$

$$3x - 4y - 14 = 0.$$

Тогда

$$d = \frac{|3(1) - 4(2) - 14|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 8 - 14|}{5} = \frac{19}{5}.$$

2.3 ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.3.1 Уравнение плоскости заданной нормальным вектором, проходящим через данную точку

Положение плоскости в пространстве вполне определено нормальным вектором плоскости $\overline{n} = (A, B, C)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей плоскости (рис.2.14).

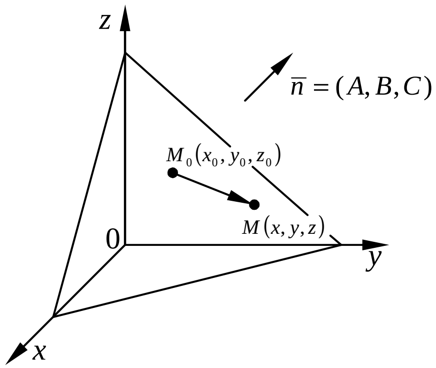


Рисунок 2.14

Пусть $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости. Вектор $\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен вектору $\overline{n} = (A, B, C)$. В силу перпендикулярности этих векторов получаем: $\overline{n} \cdot \overline{M_0 M} = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.22}$$

Это условие выполняется в том и только в том случае, если точка M лежит на плоскости. Уравнение (2.22) выполняется для всех точек плоскости и не выполняется для точек, не лежащих на этой плоскости. Значит, (2.22) и есть уравнение данной плоскости.

2.3.2 Общее уравнение плоскости

Пусть дано уравнение плоскости. Преобразуем его:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0 .$$

Обозначим: $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тогда последнее уравнение примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \tag{2.23}$$

Здесь A, B, C одновременно не равны 0. Таким образом, уравнение плоскости может быть записано в форме (2.23).

Можно показать и обратное, т.е., что уравнение (2.23) всегда задает плоскость. В самом деле, всегда можно подобрать число (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющее условию

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Это уравнение вычтем из уравнения (2.23), получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

А это уравнение (2.22). Из доказанного можно заключить, что уравнение (2.23) является общим уравнением плоскости.

2.3.3 Исследование общего уравнения плоскости

Пусть дано уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Здесь коэффициенты A, B, C, D - любые действительные числа и A, B, C, не равны нулю одновременно.

1 Если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то плоскость пересекает оси координат (рис. 2.15)

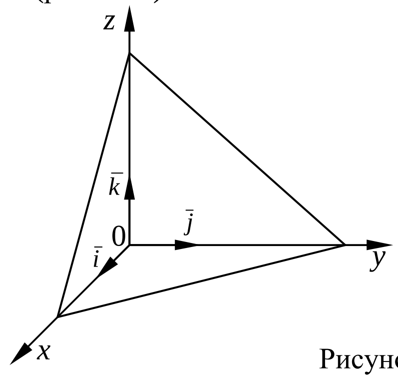


Рисунок 2.15

2 Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат (рис.2.16).

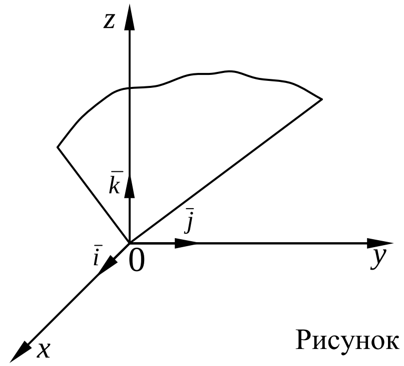
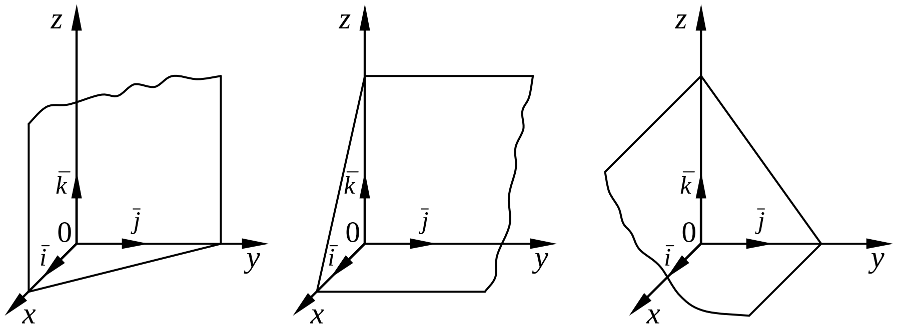


Рисунок 2.16

3 Если $C=0$, то уравнение $Ax+By+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz. Нормальный вектор $\bar{n}=(A,B,0)$ перпендикулярен вектору $\bar{k}=(0,0,1)$ (оси Oz), т.к. проекция вектора $\bar{n}$ на ось Oz равна 0 (рис. 2.17а).

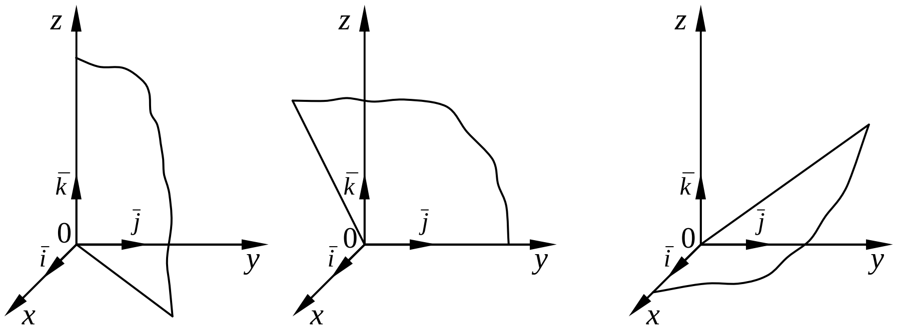


а б в

Рисунок 2.17

Аналогично, если $B=0$ и $A=0$, то уравнение $Ax+Cz+D=0$ и $Bx+Cz+D=0$ определяют соответственно плоскости, параллельные осям Oy и Ox. Нормальные векторы $\bar{n}=(A,0,C)$ и $\bar{n}=(0,B,C)$ перпендикулярны векторам $\bar{j}$ (оси Oy) и $\bar{i}$ (оси Ox) (рис. 2.17, б, в).

4 Если $C=0$, $D=0$, то уравнение $Ax+By=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz и проходящую через начало координат, а значит, – через ось Oz (рис. 2.18,а).

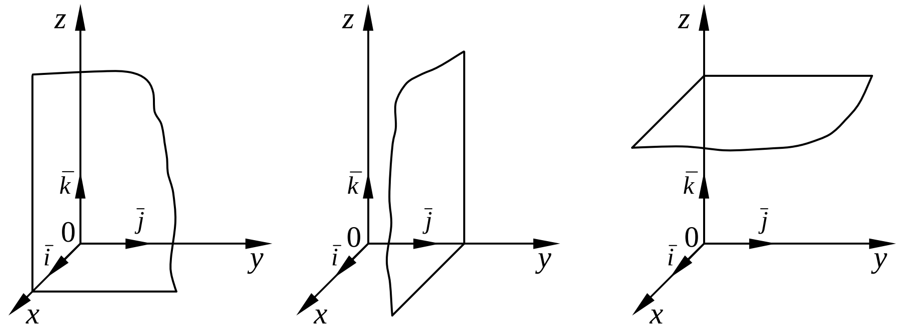


а б в

Рисунок 2.18

Аналогично, если $B=0$ и $A=0$, $D=0$ то уравнения $Ax+Cz=0$ и $By+Cz=0$ определяют соответственно плоскости, проходящие через оси Oy и Ox (рис. 2.18, б, в).

5 Если $B=0$, $C=0$, тогда уравнение $Ax+D=0$ определяет плоскость параллельную осям Oy и Oz, т.к. нормальный вектор $\bar{n}=(A,0,0)$ перпендикулярен векторам $\bar{j}$ (оси Oy) и $\bar{k}$ (оси Oz), а значит, эта плоскость параллельна координатной плоскости yOz (рис. 2.19,а).



а) б) в)

Рисунок 2.19

Аналогично, если $A=0$, $C=0$ и $A=0$, $B=0$, то плоскости $By+D=0$ и $Cz+D=0$ определяют соответственно плоскости, параллельные координатным плоскостям xOz и xOy (рис 19 б, в).

6. Если $B=0$, $C=0$, $D=0$; $A=0$, $B=0$, $D=0$; $A=0$, $C=0$, $D=0$, то уравнения $Ax=0$, $By=0$, $Cz=0$, определяют соответственно координатные плоскости $x=0$ (zOy), $z=0$ (xOy), $y=0$ (xOz) (рис 2.20).

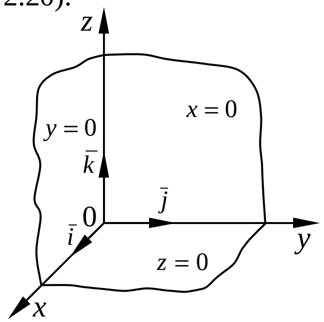


Рисунок 2.20

2.3.4 Уравнение плоскости через три заданные точки

Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, вполне определяют плоскость (рис.2.21). Составим уравнение. $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости. Векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарны, т. к. данные точки принадлежат одной плоскости. Из условия компланарности векторов $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$ следует уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.24)$$

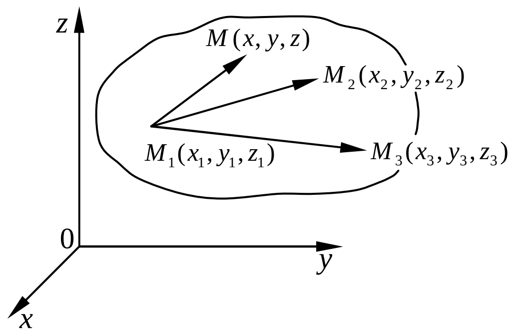


Рисунок 2.21

2.3.5 Уравнение плоскости в отрезках на осях

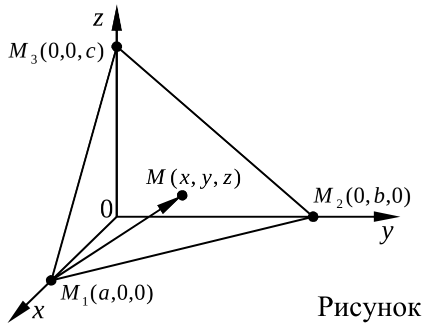


Рисунок 2.22

Пусть плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz соответственно в точках $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ (рис.2.22). Тогда, используя уравнение плоскости (2.24), получим:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-a)bc - y(-ac) + z(ab) = 0,$$

$$xbc + yac + zab = abc,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \tag{2.25}$$

уравнение плоскости в отрезках.

2.3.6 Угол между плоскостями

Пусть плоскости заданы уравнениями :

$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол между двумя плоскостями – это угол между их нормальными векторами $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$.

Один из этих углов, в общем случае, может быть острым, а другой – тупым. Тогда

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}}\right) = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1^2} - \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2^2}}. \tag{2.26}$$

Здесь $\pm$ означает, что можно рассматривать два угла, как острый, так и тупой.

2.3.7 Условие перпендикулярности двух плоскостей

Если плоскости P_1 и P_2 перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0\,. \qquad (2.27)$$

2.3.8 Условие параллельности плоскостей

Если плоскости P_1 и P_2 параллельны, то и векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ параллельны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,. \qquad (2.28)$$

2.3.9 Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана плоскость
$Ax + By + Cz + D = 0$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 2.23).

Расстоянием d от точки до плоскости называется *длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость*.

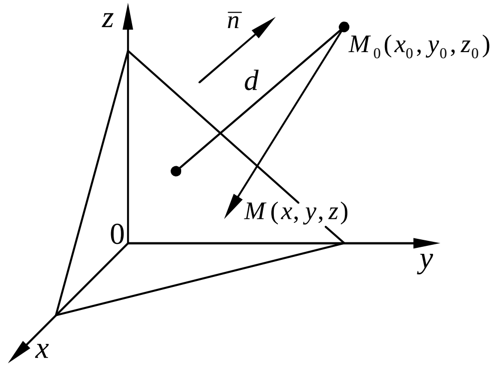


Рисунок 2.23

Тогда расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить как модуль проекции вектора $\overline{M_0 M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $M(x, y, z)$ – текущая точка плоскости, на направление, определяемое вектором $\overline{n} = (A, B, C)$:

$$d = \left| np_{\overline{n}}\, \overline{M_0 M} \right|,$$

$$d = \frac{\bar{n} \cdot \overline{M_0 M}}{|\bar{n}|},$$

$$d = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и, наконец,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2.29)$$

формула для вычисления расстояния от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. (Здесь $D = -Ax - By - Cz$, т.к. $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости).

Пример 1 Составить уравнение плоскости P', проходящей через точку $M_0(1,1,1)$ параллельно плоскости $P: -2x + y - z + 1 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_0 до плоскости P.

Решение

1 Уравнение плоскости P' имеет вид

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где x_0, y_0, z_0 - координаты точки M_0, а $\bar{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости P $(\bar{n} = (-2,1,-1))$, т.к. по условию $P' \parallel P$:

$$P': -2(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0$$

или

$$P': -2x + y - z + 2 = 0.$$

2

$$d = \frac{|-2 \cdot 1 + 1 - 1 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Пример 2 Составить уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1,1,1)$ и $M(0,2,1)$ параллельно вектору $\bar{a} = (2;0;1)$.

Решение Задача имеет единственное решение, т.к. векторы $\overline{M_1 M_2} = (-1;1;0)$ и $\bar{a} = (2;0;1)$ некомпланарны.

Пусть $M(x,y,z)$ - текущая точка плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M} = (x-1, y-1, z-1)$, $\overline{M_1M_2} = (-1,1,0)$ и $\overline{a} = (2,0,1)$ компланарны, т.е. $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M}_2 \cdot \overline{a} = 0$.

Таким образом, искомое уравнение плоскости-

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $P: x + y - 2z = 0$.

Так как в последнем уравнении отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

2.4 ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.4.1 Каноническое уравнение прямой в пространстве

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{q} = (m, n, p)$, а данная прямая проходит через точку M_0 параллельно данному вектору (рис2.24).

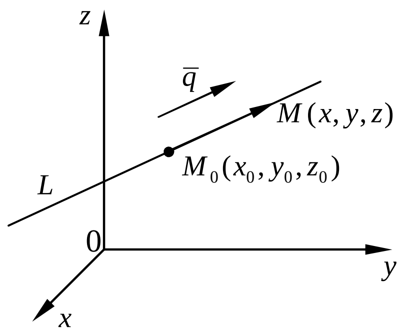


Рисунок 2.24

Вектор $\overline{q}$ называется *направляющим вектором прямой*. Выведем уравнение прямой L. Возьмем на прямой L текущую точку

$M(x, y, z)$. Вектор $\overline{M_0 M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\bar{q} = (m, n, p)$. Поэтому проекции векторов $\overline{M_0 M}$ и $\bar{q}$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.30)$$

Уравнения (2.30) называются *каноническими*.

2.4.2 Прямая, проходящая через две точки в пространстве

Пусть прямая L задана двумя точками: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Эту прямую можно рассматривать как прямую, проходящую через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ с направляющим вектором $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (рис.2.25).

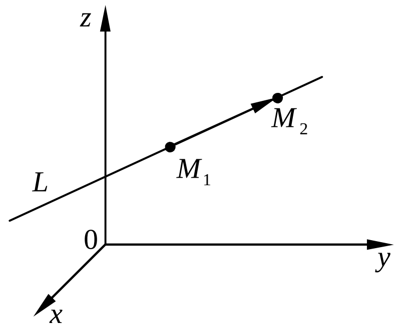


Рисунок 2.25

Тогда уравнение прямой L будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.31)$$

2.4.3 Общие уравнения прямой в пространстве

Пересечение двух непараллельных плоскостей $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \; (P_1)$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \; (P_2)$ (рис. 2.26) есть совокупность точек в пространстве, которые образуют прямую линию.

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad (2.32)$$

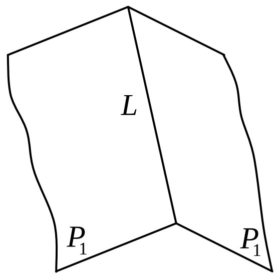


Рисунок 2.26

Каждая точка прямой удовлетворяет обоим уравнениям (2.32). Точки, не принадлежащие прямой, не могут одновременно удовлетворять обоим уравнениям. Следовательно, система(2.32) определяет уравнения прямой в пространстве.

2.4.4 Приведение прямой, заданной общими уравнениями, к каноническим уравнениям.

Пусть прямая L задана общими уравнениями (2.32)

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Для приведения ее к каноническим уравнениям найдем точку, принадлежащую прямой L. Задав x произвольное значение, например $x_0=0$, из (2.32) получим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} B_1y+C_1z+D_1=0, \\ B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

из которых мы найдем y_0 и z_0. Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит L. Задавая y произвольное значение, например $y_1=0$, получим систему

$$\begin{cases} A_1 x + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

из которой найдем x_1 и z_1. Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит L.

Составим уравнение прямой L:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \text{ или}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.30)$$

Примечание. Далее в примерах будет рассмотрен еще один способ приведения прямых к каноническому виду.

2.4.5 Параметрические уравнения прямой в пространстве

Канонические уравнения прямой (2.30) используют условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{q}$, что можно записать так:

$\overline{M_0M} = t\overline{q}$, где t - любое число.

Запишем последнее равенство в координатной форме:

$$x - x_0 = tm,$$

$$y - y_0 = tn,$$

$$z - z_0 = tp..$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases} \quad - \qquad (2.33)$$

параметрические уравнения прямой в пространстве. Здесь t называется переменным параметром. При изменении параметра t точка с координатами (x, y, z) движется по прямой.

2.4.6 Угол между двумя прямыми в пространстве

Пусть заданы две прямые L_2 и L_1 уравнениями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

(рис. 2.27).

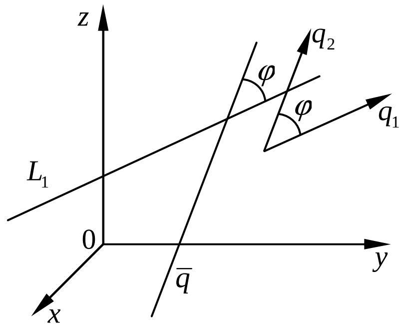


Рисунок 2.27

За угол между прямыми можно принять угол между направляющими векторами L_1 и L_2: $\overline{q}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{q}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Тогда

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{q_1}, \overline{q_2}\right) = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_1^2}}. \qquad (2.34)$$

1 Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то условие их перпендикулярности

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (2.35)$$

2 Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то условие их параллельности

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.36)$$

2.4.7 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть заданы точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая L своими каноническими уравнениями (рис. 2.28)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

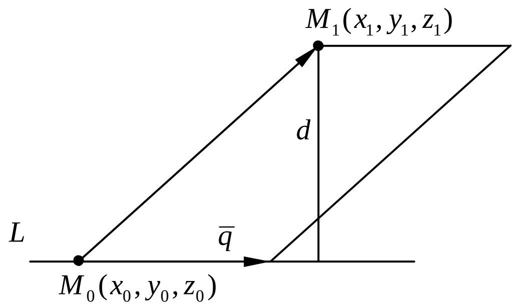


Рисунок 2.28

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой L можно определить как высоту параллелограмма, сторонами которого служат вектор $\overline{M_0M_1}$ и направляющий вектор $\overline{q}$ прямой L, отложенный от точки M_0 этой прямой. Поэтому расстояние d можно вычислить по формуле

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{q}\right|}{\left|\overline{q}\right|}. \qquad (2.37)$$

2.4.8 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть заданы прямые L_1 и L_2:

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тогда возможны следующие три случая взаимного расположения:
1 Прямые пересекаются (рис.2.29):

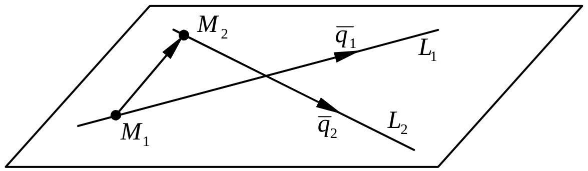


Рисунок 2.29

Можно доказать что прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости (пересекаются) в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (2.32)$$

которое известно как условие пересечения двух прямых.
2 Прямые скрещиваются (рис. 2.30):

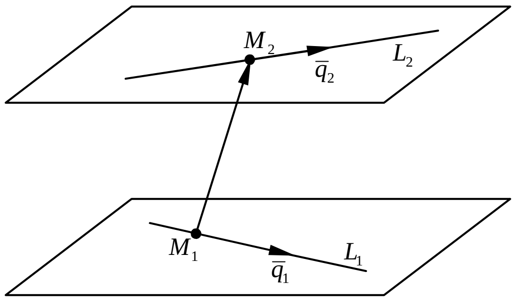


Рисунок 2.30

Можно доказать, что расстояние d между скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле

$$d=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\cdot\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\right|}{\left|\overline{q_1}\times\overline{q_2}\right|}. \qquad (2.32)$$

3 Прямые параллельны (рис. 2.31):

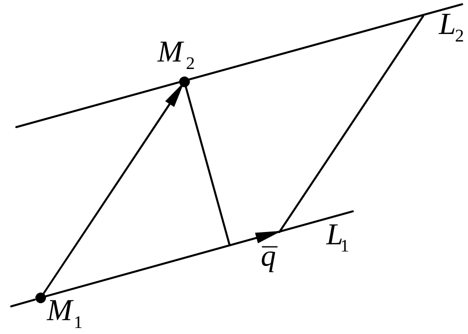


Рисунок 2.31

Расстояние между параллельными прямыми L_1 и L_2 вычисляется по формуле

$$d=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{q}\right|}{\left|\overline{q}\right|}. \qquad (2.40)$$

Пример 1 Написать канонические уравнения прямой:

$$L:\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\ x+2y-z-1=0\end{cases}$$

Решение

Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

1 Найдём точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащую прямой L.

Пусть $z_0=0$, тогда из системы

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$$ находим x_0 и y_0:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 .$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7, \quad \text{тогда} \quad x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{7}{5}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, \quad \text{тогда} \quad y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{1}{5}$$

$$M_0\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right).$$

2 Найдём направляющий вектор прямой $\overline{q} = (m, n, p)$ как векторное произведение нормальных векторов $\overline{n_1} = (2,-1,2)$ и $\overline{n_2} = (1,2-1)$:

$$\overline{q} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-4)\overline{i} - (-2-2)\overline{j} + (4+1)\overline{k} = -3\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k} = (-3,4,5)$$

3 Каноническое уравнение-

$$\frac{x - \frac{7}{5}}{-3} = \frac{y + \frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5}.$$

Пример 2 Найти расстояние между прямыми

$$L_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}, \quad L_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$$

Решение

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 находим по формуле

$$d = \frac{\left|\overline{M_1M_2} \cdot \overline{q_1} \cdot \overline{q_2}\right|}{\left|\overline{q_1} \times \overline{q_2}\right|}.$$

1 $M_1(-7,-4,-3)$, $M_2(21,-5,2)$, $M_1M_2 = (28,-1,5)$.

$q_1 = (3,4,-2)$, $q_2 = (6,-4,-1)$.

2

$$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}=\begin{vmatrix}28 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -2\\ 6 & -4 & -1\end{vmatrix}=28(-4-8)+1(-3+12)+5(-12-24)=$$

$=28(-12)+9+5(-36)=-507\neq 0,$ т.е. прямые скрещиваются,

$$\overline{q}_1\times\overline{q}_2=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 6 & -4 & -1\end{vmatrix}=-12\overline{i}-9\overline{j}-36\overline{k}.$$

$$\left|\overline{q}_1\times\overline{q}_2\right|=\sqrt{(-12)^2+(-9)^2+(-36)^2}=\sqrt{144+81+1296}=\sqrt{1521}=39.$$

3 $d=\dfrac{|-507|}{39}=13.$

2.5 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.5.1 Угол между прямой и плоскостью

Углом φ *между прямой и плоскостью* называется меньший из двух углов между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

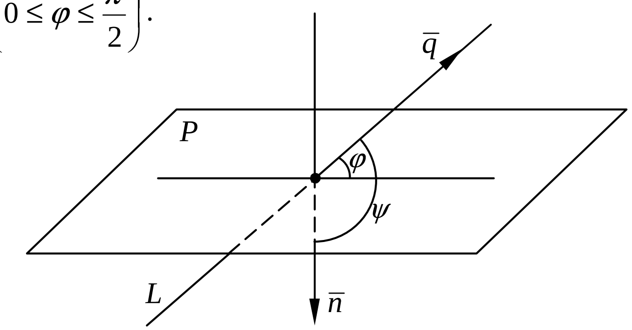


Рисунок 2.32

Пусть заданы плоскость P уравнением $P: Ax+By+Cz+D=0$ и прямая

$L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Обозначим угол между направляющим вектором прямой L $\overline{q}=(m,n,p)$ и нормальным вектором $\overline{n}=(A,B,C)$ плоскости P через ψ, тогда $\psi=\dfrac{\pi}{2}\pm\varphi$,

$$\cos\psi=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\varphi\right)\right|=\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (2.41)$$

Это и есть формула для вычисления синуса угла между прямой и плоскостью. Здесь модуль означает, что $\sin\varphi\ge 0$, т.к. $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

2.5.2 Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть прямая L перпендикулярна плоскости P, тогда вектор $\overline{q}=(m,n,p)$ коллинеарен нормальному вектору $\overline{n}=(A,B,C)$. В силу коллинеарности двух векторов получаем:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (2.42)$$

2.5.3 Условие параллельности прямой и плоскости

Пусть прямая L параллельна плоскости P, тогда вектор $\overline{q}=(m,n,p)$ перпендикулярен нормальному вектору плоскости $\overline{n}=(A,B,C)$. Из условия перпендикулярности векторов следует , что

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (2.43)$$

Пример 1

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ и плоскости $2x+y+7z-3=0$.

Решение

1 Запишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = t + 3 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$$

2 Подставим найденные x, y и z в уравнение плоскости и вычислим t :

$$2(3t+7)+(t+3)+7(-2t-1)-3=0$$
$$6t+14+t+3-14t-7-3=0$$
$$-7t=-7$$
$$t=1.$$

3 Найденное значение $t=1$ определяет точку пересечения:

$$x_0 = 3\cdot 1+7=10$$
$$y_0 = 1+3=4$$
$$z_0 = -2\cdot 1-1=-3$$

т.е. $M_0(10,4,-3)$

Пример 2 Найти уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(-1,2,0)$ перпендикулярно плоскости $P: 4x+y-6z-5=0$.

Решение Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

В нашем случае $x_0=-1$, $y_0=2$, $z_0=0$. В качестве направляющего вектора прямой $\bar{q}=(m,n,p)$ примём нормальный вектор плоскости $\bar{n}=(4,1,-6)$,т.к. по условию $\bar{q}\parallel\bar{n}$, тогда

$$L: \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-6}.$$

Пример 3 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,1)$, перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$.

Решение Уравнение плоскости , проходящей через точку, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

В нашем случае $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$.

В качестве нормального вектора плоскости $\overline{n} = (A, B, C)$ выбираем направляющий вектор прямой $\overline{q} = (2, -5, -2)$, т.к. по условию $\overline{n} \| \overline{q}$.

Таким образом , имеем:

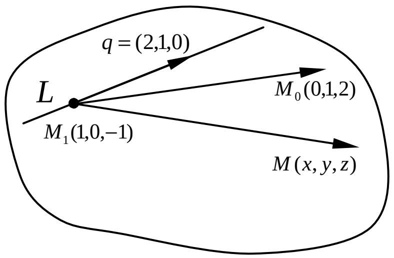
$$2(x-1) - 5(y-1) - 2(z-1) = 0$$

или

$$2x - 5y - 2z + 5 = 0.$$

Пример 4 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,1,2)$ и прямую

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$$ ($M_0 \notin L$, проверить!).



Решение. Искомое уравнение плоскости можно записать как условие компланарности трёх векторов $\overline{q}, \overline{M_1M_0}$ и $\overline{M_1M}$, где $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости : $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_0} \cdot \overline{q} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x - 2y + z = 0.$$

2.6 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривая второго порядка – это кривая, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.44}$$

где A, B, C, D, E - действительные число, а коэффициенты A, B и C одновременно не равны 0.

2.6.1 Окружность

Выше было приведено уравнение окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{2.45}$$

Это уравнение второй степени относительно x и y. Преобразуем его.

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2aby + b^2 = R^2 \tag{2.46}$$

Сравним уравнение (2.46) и (2.44), видим, что для уравнения окружности характерно следующее: а) отсутствует член C произведения координат xy; б) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.

2.6.2 Эллипс

Эллипсом называется г.м.т. плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), эта величина больше расстояния между фокусами ($2c$).

Выведем уравнение эллипса. Введем декартову систему координат, а фокусы F_1 и F_2 (рис.2.33) расположим на оси абсцисс так, чтобы начало координат совпадало в серединой отрезка $F_1F_2 = 2c$. Тогда $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

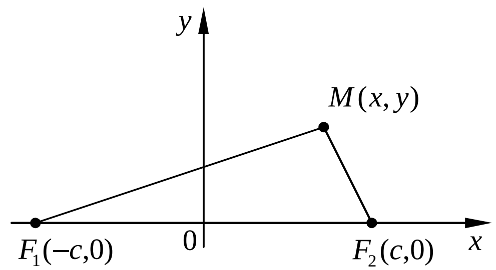


Рисунок 2.33

Пусть $M(x, y)$ - текущая точка эллипса. По определению эллипса

$$\left|\overline{F_1M}\right| + \left|\overline{F_2M}\right| = 2a$$

$$\left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ,\ \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad 2.47)$$

Это и есть уравнение эллипса. Упростим его. Перенесем первый радикал в правую часть

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ .$$

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2\ ,$$

Изолируя радикал, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x\ .$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2\ ;$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2\ ,$$

или

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2\ ,$$

$$\frac{x^2\left(a^2 - c^2\right)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2\ ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\ .$$

По определению эллипса $2a > 2c$. Обозначим: $a^2 - c^2 = b^2$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \qquad 2.48)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса (рис. 2.34).

1 Симметрия эллипса

Уравнение (2.48) содержит квадраты текущих координат, поэтому график эллипса будет симметричен относительно осей координат (рис.2.34).

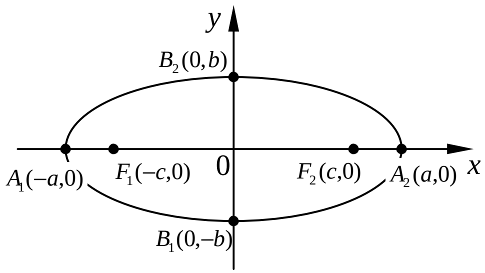


Рисунок 2.34

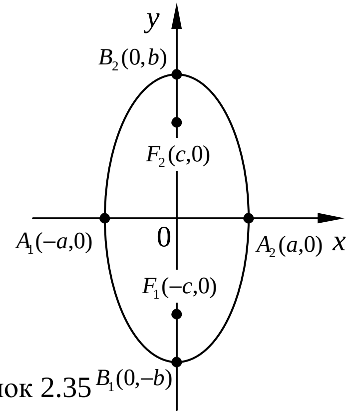


Рисунок 2.35

Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые совпадают с координатными осями.

Оси симметрии эллипса называются *осями эллипса*.

Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*.

Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы эллипса, называется *фокальной осью*.

Отрезок F_1F_2 называется фокусным расстоянием эллипса.

2 Вершины эллипса

Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*:

а) Пересечение с осью ox: пусть в выражении(2.48) $y=0$, тогда $\frac{x^2}{a^2}=1$, $x^2=a^2$, $x=\pm a$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ - вершины эллипса.

б) Пересечение с осью oy: пусть в выражении (2.48) $x=0$, тогда $\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2=b^2$, $y=\pm b$; точки $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - вершины эллипса.

Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$, соединяющие противоположные вершины эллипса, называются соответственно большой и малой осями эллипса.

Числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*.

3 Эксцентриситет эллипса

Число, равное отношению половины фокусного расстояния к большой полуоси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается буквой ε:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

По определению эллипса $c<a$, поэтому $0<\varepsilon<1$.

Примечание. Если $a=b$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $x^2+y^2=a^2$ - окружность. Здесь $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$.

4 Эксцентриситет окружности

$$\varepsilon=\frac{0}{a}=0.$$

Примечание. Если в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a<b$, то его фокусы расположены на оси oy (рис.2.35) и $c^2=b^2-a^2$.

Пример 1

Построить эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты вершин, фокусов, эксцентриситет.

Решение

Здесь $a = 4$, $b = 3$. Строим прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям Ox и Oy и соответственно равными $2a = 8$ и $2b = 6$. Внутрь этого прямоугольника вписываем эллипс (рис. 2.36)

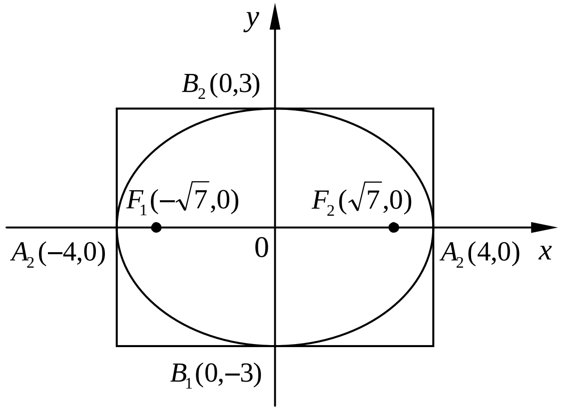


Рисунок 2.36

Запишем координаты вершин эллипса: $A_1(-4,0)$, $A_2(4,0)$, $B_1(0,-3)$, $B_2(0,3)$.

Вычислим c: $c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 16 - 9$, $c^2 = 7$, $c = \sqrt{7}$.

Тогда координаты фокусов $F_1(-\sqrt{7},0)$, $F_2(\sqrt{7},0)$.

Эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Пример 2

Составить каноническое уравнение эллипса, если $a = 5$, $c = 4$.

Решение

Вычислим b : $b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 = 25 - 16$, $b^2 = 9$, $b=3$.

Уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=16 .$$

2.6.3 Гипербола

Гиперболой называется г.м.т. плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная *(2a)*, эта величина меньше расстояния между фокусами *(2c)*.

Выведем уравнение гиперболы. Введем декартову систему координат, а фокусы F_1 и F_2 (рис2.33) расположим на оси абсцисс так, чтобы начало координат совпало с серединой отрезка $F_1F_2=2c$, тогда: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка гиперболы. По определению гиперболы

$$\left|\overline{F_1M}\right|-\left|\overline{F_2M}\right|=\pm 2a;$$

$$\left|\overline{F_1M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \qquad \left|\overline{F_2M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2} .$$

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a .$$

Это и есть уравнение гиперболы. Упростим его:

$$-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} .$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2;$$

$$-2cx=4a^2\mp 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2cx;$$

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx;$$

$$\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x .$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2;$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

или

$$x^2\left(1-\frac{c}{2a}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2\left(a^2-c^2\right)}{a^2}+y^2=a^2-c^2;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

По определению гиперболы $2a<2c$, обозначим $a^2-c^2=-b^2$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

называется *каноническим уравнением гиперболы*

1 Симметрия гиперболы

Уравнение гиперболы содержит квадраты координат, поэтому график гиперболы будет симметричен относительно осей координат (рис. 2.37,рис. 2.38).

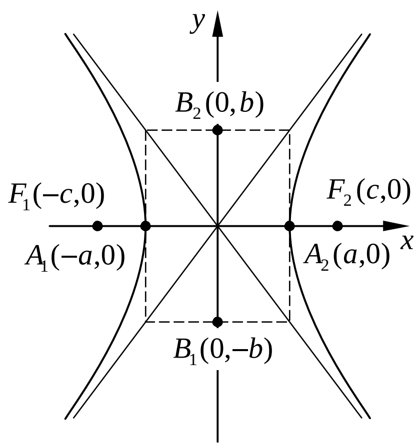


Рисунок 2.37

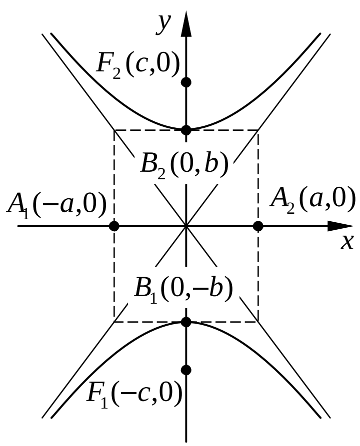


Рисунок 2.38

Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые совпадают с осями координат. Оси симметрии называются *осями гиперболы*.

Точка пересечения осей гиперболы называется *центром гиперболы*.

Ось симметрии гиперболы, на которой расположены фокусы гиперболы, *называется фокальной осью*.

Отрезок F_1F_2 называется фокусным расстоянием гиперболы.

2 Вершины гиперболы

Точки пересечения гиперболы с осями координат называются *вершинами гиперболы*:

а) Пересечение с осью ox: пусть в (2) $y=0$, тогда $\frac{x^2}{a^2}=1$, $x^2=a^2$, $x=\pm a$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$-вершины гиперболы;

б) пересечение с осью oy: $x=0$, тогда $-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}=-1$, $y^2=-b^2$, $y=\pm bi$. Точки $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - *мнимые вершины гиперболы*: пересечения с осью oy нет.

Фокальная ось гиперболы называется ее действительной осью, $A_1A_2=2a$, а ось симметрии, перпендикулярная фокальной оси, называется мнимой осью гиперболы, $B_1B_2=2b$.

a - полуось по Ox, b - полуось по Oy.

Эксцентриситет гиперболы – число, равное отношению фокусного расстояния и действительной оси.

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a};$$

У гиперболы $\varepsilon>1$.

3 Асимптоты гиперболы

Асимптотой линии, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, которая обладает тем свойством, что когда точка по кривой удаляется в бесконечность, ее расстояние до этой прямой стремится к *0*.

Рассмотрим уравнение гиперболы в виде

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \, .$$

Если x бесконечно возрастает, то выражение под знаком радикала стремится к 1, так как $\frac{a}{x}$ стремится к 0. Если заменить радикал единицей, то

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2.49)$$

Это и есть *уравнения асимптот* правой и левой ветви гиперболы.

Замечание. Если уравнение гиперболы примет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \, ,$$

то это означает, что фокальная ось – ось oy и координаты фокусов- $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ (рис. 2.38).

Пример 1 Построить гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, найти координаты вершин,фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

Решение

Данная гипербола имеет центр симметрии в начале координат, полуоси $a = 4$ (действительная), $b = 3$ (мнимая).

Чтобы построить гиперболу, сначала следует построить прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям ox и oy и равными соответственно $2a = 8$ и $2b = 6$.

Продолженные неограниченно диагонали прямоугольника будут асимптотами гиперболы, уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

Ветви гиперболы проведем через вершины A_1 и A_2 (рис.2.39)

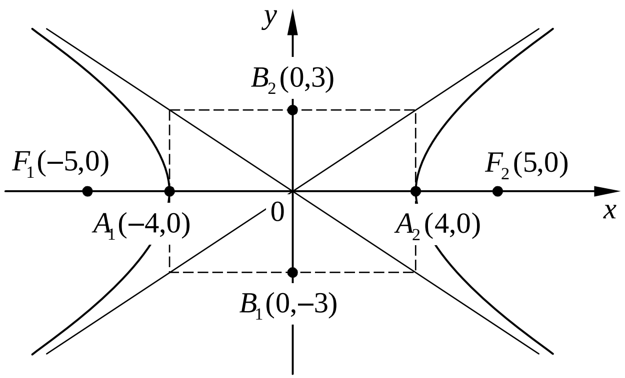


Рисунок 2.39

Вершинами гиперболы будут точки $A_1(-4{,}0)$ и $A_2(4{,}0)$ - действительные, $B_1(0,-3)$ и $B_2(0{,}3)$ -мнимые вершины.

Параметр c вычислим по формуле $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c^2 = 16 + 9$, $c^2 = 25$, $c = 5$.

Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-5{,}0)$ и $F_2(5{,}0)$.

Эксцентриситет равен:

$$\varepsilon = \frac{2a}{2c} = \frac{4}{5}.$$

Пример 2 Дан эллипс $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса. Построить эллипс и гиперболу.

Решение

Для данного эллипса: $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$.

Для искомой гиперболы: $c = \sqrt{8}$, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8-3} = \sqrt{5}$.

Тогда уравнение гиперболы (рис.2.40) имеет вид

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

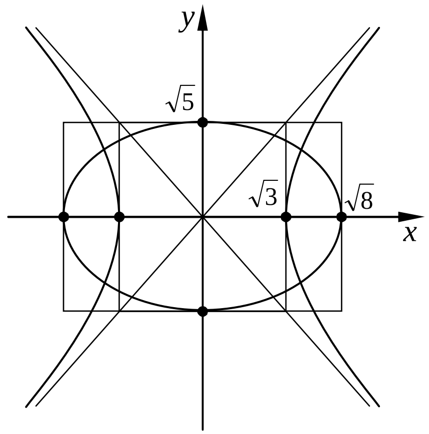


Рисунок 2.40.

2.6.4 Парабола

Параболой называется г.м.т. плоскости, равноудалённых от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выведем уравнение параболы. Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно p, т.е. $BF = p$, где p называется параметром параболы (рис.2.41)

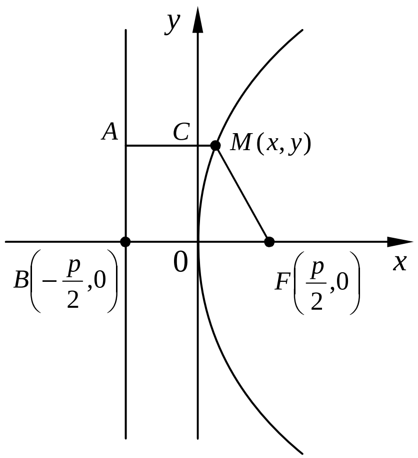


Рисунок 2.41

Ось абсцисс возьмём так, чтобы она проходила через фокус F перпендикулярно директрисе. Начало координат – в середине перпендикуляра BF. Тогда фокус- $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка параболы. По определению параболы $AM=MF$, но $AM=AC+CM=\frac{P}{2}+x$, а $FM=\sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2}$, тогда

$$\frac{P}{2}+x=\sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2}. \qquad (2.50)$$

Это и есть уравнение параболы. Упростим его. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{p^2}{4}+px+x^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

или

$$y^2=2px \qquad (2.51)$$

Уравнение (2.51) называется *каноническим уравнением параболы*.

2.6.5 Исследование формы параболы по её каноническому уравнению.

В уравнение (2.51) y входит в квадрате, поэтому ось ox является осью симметрии параболы.

Ось симметрии параболы называется *фокальной осью*.

Точка пересечения параболы с осью симметрии называется её вершиной. При $x=0$ получим $y=0$, значит, парабола имеет единственную вершину $O(0,0)$.

Из уравнения (2.51)

$y=\pm\sqrt{2px}$,

поэтому при $p > 0, x \geq 0$, значит, все точки параболы лежат справа от оси Oy.

Из уравнения (2.51) также следует, что при неограниченном возрастании x абсолютная величина y неограниченно возрастает.

Примечание. Если $y^2 = -2px$, то все точки параболы расположены слева от оси Oy.

Примечание. Если за фокальную ось принять ось ординат, то уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py,$$

ось симметрии которой Oy, все точки параболы расположены выше оси ox.

Если $x^2 = -2py$, все точки параболы расположены ниже оси Ox.

Пример1 Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что парабола проходит через точку $A(9,6)$ и симметрична относительно оси абсцисс. Найти уравнение директрисы, координаты фокуса.

Решение Так как по условию парабола проходит через начало координат, точка с абсциссой $x = 9 > 0$, симметрична оси Ox, то её уравнение- $y^2 = 2px$. Точка A принадлежит параболе, значит, её координаты удовлетворяют уравнению параболы:

$$6^2 = 2p \cdot 9, p = 2.$$

Тогда уравнение искомой параболы:

$$y^2 = 4x.$$

Уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Фокус находится в точке $F(1,0)$.

2.6.6 Преобразование уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Если в уравнении второго порядка отсутствует член с произведением координат, т.е. уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

то оно преобразуется к каноническому виду после параллельного переноса осей координат.

Пример 1 Упростить уравнение линии

$$2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0.$$

Определить тип, найти координаты центра симметрии, полуоси, построить.

Решение Группируем члены с одноименными координатами:

$$\left(2x^2 - 4x\right) + \left(3y^2 + 6y\right) - 7 = 0$$

или

$$2\left(x^2 - 2x\right) + 3\left(y^2 + 2y\right) - 7 = 0.$$

Дополним скобки до полных квадратов:

$$2\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + 3\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) - 7 = 0,$$

$$2(x-1)^2 + 3(y+1)^2 - 12 = 0,$$

$$\frac{2(x-1)^2}{12} + \frac{3(y+1)^2}{12} = 1,$$

$$\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Данная линия – эллипс (рис.2.42).

Центр симметрии находится в точке $C(1,-1)$, $a = \sqrt{6}, b = 2$.

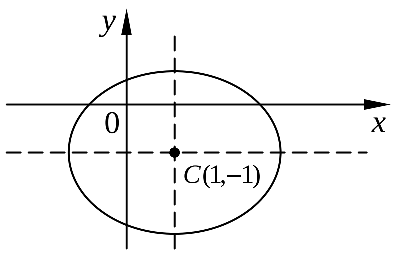


Рисунок 2.42

Пример 2 Упростить уравнение линии

$$4x^2-8x-16y^2-96y-76=0.$$

Определить тип линии, центр симметрии, построить.

Решение Группируем члены с одноимёнными координатами:

$$\left(4x^2-8x\right)-\left(16y^2+96y\right)-76=0,$$

$$4\left(x^2-2x\right)-16\left(y^2+6y\right)-76=0.$$

Дополним скобки до полных квадратов:

$$4\left(x^2-2x+1-1\right)-16\left(y^2+6y+9-9\right)-76=0,$$

$$4(x-1)^2-16(y+3)^2-4+144-76=0,$$

$$4(x-1)^2-16(y+3)^2=-64,$$

$$-\frac{4(x-1)^2}{64}+\frac{16(y+3)^2}{64}=1,$$

$$-\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1.$$

Данная линия – гипербола.

Центры симметрии – точка $C(1,-3)$, $a=4, b=2$,

Построим её (рис.2.43).

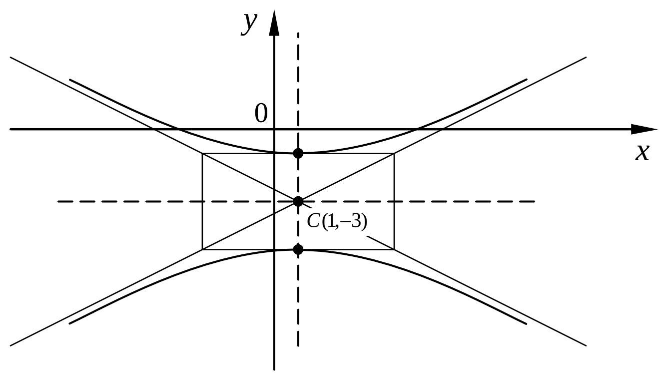


Рисунок 2.43

Пример 3 Упростить уравнение линии

$y^2-2y-x+3=0$.

Определить тип линии и построить её.

Решение Выделим полный квадрат по y:

$y^2-2y-x+3=0,$

$\left(y^2-2y+1-1\right)-x+3=0,$

$\left(y-1\right)^2-1-x+3=0,$

$\left(y-1\right)^2=\left(x-2\right).$

Данная линия – парабола. Центр симметрии – точка $C(2,1)$. Ось симметрии – параллельна оси Ox.

Строим параболу (рис 2.44).

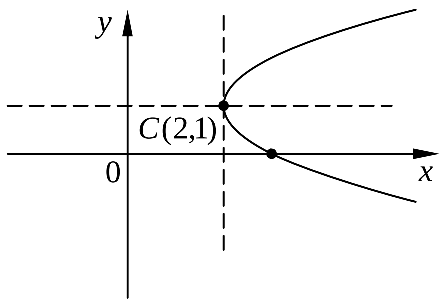


Рисунок 2.44

2.7 ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.7.1 Сфера

Выше было выведено уравнение сферы с центром в точке $O_1(a,b,c)$ и радиусом R.

$$(x-a)^2+(z-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (2.52)$$

Преобразуем уравнение (2.52):

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0, \qquad (2.53)$$

получим уравнение второй степени относительно текущих координат x, y, z, в котором:

1) отсутствуют члены с произведением координат;

2) координаты при x^2, y^2, z^2 равны между собой.

Любое уравнение с указанными свойствами, вообще говоря, есть уравнение сферы.

2.7.2 Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью (или цилиндром) называется поверхность, описываемая прямой (образующей), проходящей параллельно некоторой фиксированной прямой и пересекающей данную линию (направляющую) (рис. 2.45,рис.2.46,рис. 2.47).

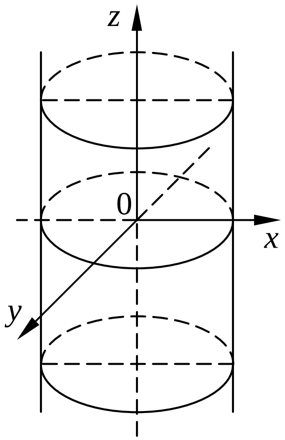


Рисунок 2.45

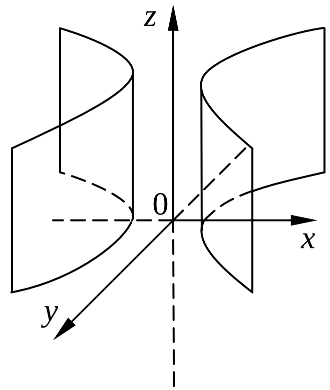


Рисунок 2.46

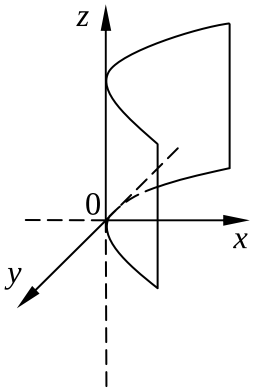


Рисунок 2.47

Всякая цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz (соответственно Ox, Oy) может быть представлена уравнением $F(x,y)=0$ (соответственно $F(y,z)=0$, $F(x,z)=0$).

На плоскости xoy уравнение $F(x,y)=0$ определяет линию L - направляющую той цилиндрической поверхности. Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой- эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а образующие параллельны оси Oz. Такая поверхность называется *эллиптическим цилиндром* (рис. 2.45)

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет цилиндрическую поверхность, называемую *гиперболическим цилиндром* с образующими, параллельными оси oz и направляющей $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболой на плоскости xOy (рис.2.46).

Уравнение $x^2=2py$ определяет цилиндрическую поверхность, называемую *параболическим цилиндром*, с образующими, параллельными оси oz, и направляющей $x^2=2py$ - параболой в плоскости xOy (рис. 2.47).

2.7.3 Конус

Конической поверхностью (*конусом*) называется поверхность, описываемая прямой (образующей), проходящей через данную точку (x_0,y_0,z_0) (вершину) и пересекающую данную линию (направляющую) конической поверхности (рис 2.48).

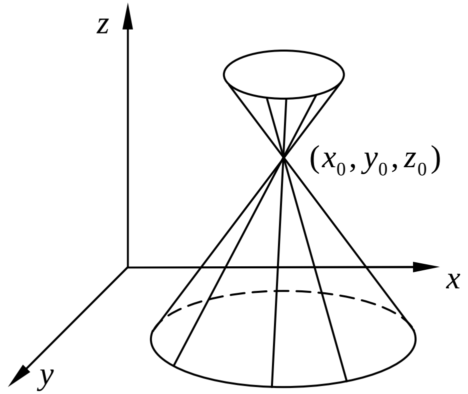


Рисунок 2.48

Уравнение конуса второго порядка имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{2.54}$$

В сечении конуса плоскостями $x=0$, $y=0$ получаются пары прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \quad y=0 \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \quad y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \quad x=0 \\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, \quad x=0, \end{cases}$$

с помощью которых, соответственно, можно изобразить конус (2.54).

2.7.4 Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется г.м.т., которое образуется при вращении наклонной плоской линии (образующей) вокруг оси l (оси вращения). Каждая точка образующей при вращении ее вокруг оси l описывает окружность.

Если в плоскости xoy дана некоторая линия $F(y,x)=0$, то, чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением этой линии вокруг оси oy, нужно в уравнении этой линии заменить x на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

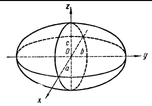
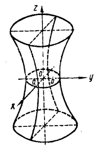
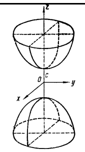
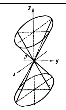
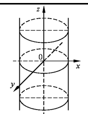
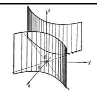
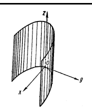
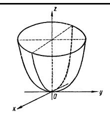
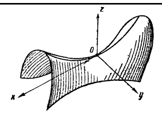
. Полученная поверхность будет выражена уравнением

$$F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0,$$

а вокруг оси *ox*- $F\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0.$

Некоторые поверхности второго порядка приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1

№	Поверхности II порядка			
	Название		Канонические уравнения	Схематический чертеж
1	Эллипсоид		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (2.55)	
2	Гиперболоид	Однополостный	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (2.56)	
3	Гиперболоид	Двуполостный	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (2.57	
4	Конус		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (2.58)	
5	Цилиндр	Эллиптический	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (2.59)	
6	Цилиндр	Гиперболический	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (2.60)	
7	Цилиндр	Параболический	$y^2=2px$ (2.61)	
8	Параболоид	Эллиптический	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz$ (2.62)	
9	Параболоид	Гиперболический	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz$ (2.63)	

Если в уравнениях (2.56), (2.57), (2.58), (2.62) и (2.63) переменную z поменять местами с одной из двух других переменных, а в уравнениях (2.59),(2.60),(2.61) заменить одну из переменных другой, отсутствующей в данном уравнении, то вид поверхности не изменится, но изменится ее ориентация относительно координатных осей.

Например, если в уравнении однополостного гиперболоида(2.56) ось Oz является осью симметрии, то уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ также задает однополостный гиперболоид, но с осью симметрии Oy.

Основным методом изучения форм поверхности является *метод параллельных сечений*.

Рассмотрим поверхность, определяемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (2.57)$$

Это однополостный гиперболоид (рис. 2.49).

<u>1 Симметрия</u>

Так как текущие координаты x, y, z входят в уравнение (2.56) в квадратах, однополостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, а центр симметрии – в начале координат.

<u>2 Вершины</u>

Вершинами однополостного гиперболоида называются точки пересечения его с действительными осями координат. Таких точек четыре: $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$.

<u>3 Сечения</u>

а) Пересечем однополостный гиперболоид плоскостью $z=0$, получим в сечении эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - горловой эллипс, с наименьшими полуосями a и b.

б) Пересечем однополостный гиперболоид плоскостью $x=0$, получим гиперболу $\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

в) Пересечем плоскостью $y=0$, получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

г) Пересечем плоскостью $z=h$, получим эллипс, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1\cdot$$

Из уравнения видно, что полуоси возрастают с возрастанием h по модулю.

4 Поверхность вращения

Если $a=b$, то получим однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

5 Однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность

Можно показать, что уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

можно переписать в виде

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=m\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{m}\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}\qquad(2.64)$$

где m - произвольное число, а уравнения системы задают совокупность прямых.

Можно показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой из каждого семейства (2.64) (рис.2.50). Эти прямые называются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида, т.е. однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность.

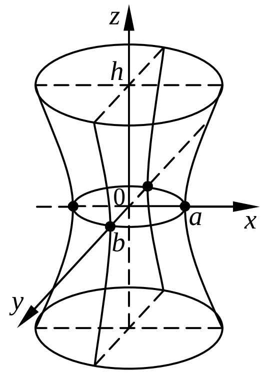


Рисунок 2.49

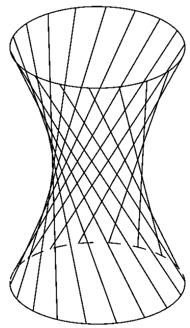


Рисунок 2.50

Приме. Привести уравнение поверхности II порядка к каноническому виду

$$-3x^2+2y^2+z^2+4xy+8xz+12yz=4.$$

Решение

Для решения задачи используем теорию квадратичных форм. Запишем симметрическую матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 6\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Приведем эту матрицу к диагональному виду, где диагональные элементы – собственные числа λ_i матрицы A, $A\overline{x}=\lambda\overline{x}$. Для этого решим характеристическое уравнение

$|A-\lambda E|=0$ или

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & 2-\lambda & 6\\ 4 & 6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(-3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 6\\ 6 & 1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 6\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2 & 2-\lambda\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0,$$

$$(-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-34)-2(-2\lambda-22)+4(4+4\lambda)=0,$$

$$-\lambda^3+63\lambda+162=0, \qquad \lambda^3-63\lambda-162=0.$$

Методом подбора находим:

$\lambda_1=-3$.

Далее раскладываем многочлен на множители и вычисляем остальные корни:

$$\lambda^3-63\lambda-162=\lambda^3-9\lambda-54\lambda-162=\lambda(\lambda^2-9)-54(\lambda+3)=$$

$$(\lambda+3)(\lambda(\lambda-3)-54)=(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda-54)=0.$$

По теореме Виета $\lambda_2=-6$, $\lambda_3=9$.

Тогда диагональный вид матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix},$$

а канонический вид поверхности II порядка

$$-3x_1^2-6y_1^2+9z_1^2=4,$$

и эта поверхность – двуполостный гиперболоид.

Векторная алгебра.
Аналитическая геометрия.

Методические указания
Для студентов-заочников всех специальностей.

Составитель Наталия Георгиевна Бражник

Редактор Нелли Александровна Хахина

Подписано в печать Формат *60×84/16*
Ризографич. печать.Усл. печ.л….
Тираж Заказ №

ДГМА. 84813, г. Краматорск, ул. Шкадинова 72