Министерство образования и науки Украины

Донбасская государственная машиностроительная академия

Авторы: С. А. Колесников,

И. С. Дмитренко

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В печать экз.	Утверждено
Первый проректор	на заседании
________А. Н. Фесенко	ученого совета
	Протокол № 9 от 24.04.2008

Краматорск 2008

КРАМАТОРСЬК

С. А. Колесников, И. С. Дмитренко

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Министерство образования и науки Украины

Донбасская государственная машиностроительная академия

С. А. Колесников И. С. Дмитренко

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Утверджено
на заседании
ученого совета
Протокол № 9 от 24.04.2008

Краматорск 2008

УДК 336.6
ББК 65.26 я 73
К 60

Рецензенты:

Бондарев Б. В., д-р физико-математических наук, проф., зав. каф. теории вероятностей и математической статистики Донецкого национального университета;

Гордеев Г. Г., канд. физико-математических наук, зав. каф. математики и информатики Донецкого филиала Украинского государственного университета финансов и внешней торговли.

Колесников, С. А.
К 60 Финансовая математика : учебное пособие / С. А. Колесников**,** И. С. Дмитренко. – Краматорск : ДГМА, 2008. – 48 с.
ISBN

Содержатся основные определения, примеры и варианты контрольных и тестовых заданий по курсу «Финансовая математика» для студентов всех форм обучения, теоретические и практические методические рекомендации к их выполнению и список необходимой литературы.

УДК 336.6
ББК 65.26 я 73

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Включение образовательного пространства Украины в Болонский процесс, основывающийся на кредитно-модульной системе, усиливает значение самостоятельной работы студентов.

Это означает, что возникают новые формы контроля и, соответственно, должны быть рекомендации, обеспечивающие подготовку студента как дневной, так и заочной форм обучения.

Подготовка современного специалиста экономического направления невозможна без широкого применения математических методов и моделей. Разработанное учебное пособие предоставляет студентам экономических специальностей всех форм обучения возможность изучить классические модели курса финансовой математики и подготовиться к сдаче тестирования по соответствующим разделам.

Предлагаемое пособие состоит из трех частей, каждая из них поделена на разделы.

Первая часть пособия содержит краткие теоретические понятия, определения, формулы, а также примеры решения типовых контрольных практических заданий и тестовых упражнений.

Вторая часть пособия содержит варианты контрольных заданий по каждой из изучаемых моделей финансовой математики. По уровню сложности они различны, что позволяет дифференцированно оценивать знания студента после выполнения контрольной или расчетно-графической работы. Выполнение части этих заданий дает возможность студенту сдать модуль на необходимый минимум (55 баллов из 100).

Третья часть пособия содержит набор типовых тестовых заданий для самостоятельной подготовки к тестированию по соответствующей теме (модулю).

Количество заданий, состав и содержание контрольной работы, которую выполняют студенты заочной формы обучения, определяется решением кафедры высшей математики.

При оформлении контрольной работы необходимо записать условие каждого задания и привести его решение в полном объеме со всеми необходимыми теоретическими ссылками и объяснениями. Решение должно в обязательном порядке заканчиваться соответствующим ответом или ответами на все вопросы задачи.

Содержание заданий, входящих в контрольные работы не может охватить все модели курса финансовой математики, поэтому студенты заочной формы обучения должны научиться решать типовые тестовые задачи из третьей части настоящего пособия. Примеры решения таких заданий можно найти либо в самом пособии, либо в предлагаемой литературе или других учебниках по финансовой математике.

1 ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1 Модели развития операций по схеме простых процентов

В условиях рыночной экономики существуют различные варианты инвестирования. В простейшем случае кредитор и заемщик договариваются о величине кредита P (первоначальная денежная сумма), размере годовой процентной ставки i %, сроках кредита и длительности периода начисления процентов.

Процентная сумма определяется по формуле:

$$I = P \times \frac{i\ \%}{100\ \%} = P \times i,$$

где *i* – относительная величина годовой ставки ссудного процента:

$$i = \frac{i\ \%}{100\ \%}.$$

Модель накопления капитала по схеме простых процентов принимает вид:

$$S = P + n\,P\,i = P\left(1 + n\,i\right),$$

где n – количество интервалов начисления, длительность которых может быть месяц, квартал, год.

Параметр n, количество интервалов начисления, может быть как целым, там и дробным положительным числом:

$$n = t / K,$$

где *t* – продолжительность периода начисления процентов в днях,

K – количество дней в году.

Тогда приведенную модель можно записать в другом виде:

$$S = P\,(1 + i \times \frac{t}{K})$$

В зависимости от содержания поставленной задачи, можно определять различные показатели операции:

1 Величину первоначальной суммы (математическое дисконтирование):

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{S}{1+i\times\frac{t}{K}};$$

2 Относительную величину процентной ставки:

$$i = \frac{S-P}{P\times n} = \left(\frac{S-P}{P}\right)\times\frac{K}{t};$$

3 Продолжительность года:

$$K = \frac{i\times P\times t}{S-P};$$

4 Количество интервалов начисления (лет):

$$n = \frac{S-P}{i\times P};$$

5 Период начисления процентов (дней):

$$t = K\times\left(\frac{S-P}{P\times i}\right);$$

6 Коэффициент наращения по простой процентной ставке:

$$k_n = \frac{S}{P} = (1+i\times n)$$

Если на последовательных интервалах начисления процентов $n_1, n_2, n_3, ..., n_m$, устанавливаются разные ставки процентов: $i_1, i_2, i_3, ..., i_m$, то за весь срок договора наращенная сумма будет равна:

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_m = P + P\times n_1\times i_1 + P\times n_2\times i_2 + P\times n_3\times i_3 + \; + ... + P\times n_m\times i_m$$

$$S = P(1+\sum_{J=1}^{m} n_j j_j) = P\times k_H\ .$$

Следовательно, коэффициент наращения равен: $k_H = 1+\sum_{j=1}^{m} n_j i_j$.

Пример 1.1 11.08.06 г. банк выдает юридическому лицу (предприятию) кредит в сумме 200 тыс. грн. на месяц по ставке 36 % годовых. Срок возврата суммы кредита и уплаты процентов по нему – 11.09.06 г. Найти основные параметры операции.

Решение

Найдем полный срок кредита (11.08 – 11.09.06 г.) – 32 календарных дня (n), период начисления процентов по кредиту (11.08 – 10.09.06) – 31 календарный день (n – 1).

11.09.06 г., согласно условиям кредитного договора, предприятие-заемщик погашает перед банком задолженность по кредиту в сумме 200 тыс. грн. и производит уплату процентов за пользование кредитом в сумме:

$$200\,000\ \textit{грн.} \times \frac{36\%}{100\%} \times \frac{31\ \textit{день}}{365\ \textit{дней}} = 6\,115\ \textit{грн.}06\ \textit{коп.}$$

Погашаемая сумма 206 115 грн.06 коп.

1.2 Модели развития операций по схеме сложных процентов

1.2.1 Стандартная схема сложных процентов

В финансовых операциях используется схема сложных процентов, если начисляемая сумма процентных денег I (доход от капитала) суммируется с исходным капиталом P, и на следующем этапе процент начисляется уже от всей образовавшейся суммы (I + P). Этот вариант иногда называют капитализацией или реинвестированием, или «проценты на проценты». В этом случае сумма накопленного капитала составит к концу n-го года:

$$S_n = P\left(1+i_c\right)^n = P \times k_{н\,с};$$

где $k_{н\,с}$ – коэффициент наращения; $k_{н\,с} = \left(1+i_c\right)^n$.

Если t – продолжительность периода начисления процентов в днях (срок контракта), а K – количество дней в году, то расширенная модель имеет вид:

$$S_n = P\left(1+i_c\right)^n = P\,\left(1+i_c\right)^{t/k} = P \times k_{н\,с},$$

Отсюда находим формулы для определения различных показателей финансовой операции:

- величина первоначальной суммы:

$$P = \frac{S}{(1+i_c)^n} = \frac{S}{(1+i_c)^{t/k}}$$

(математическое дисконтирование при начислении сложных процентов);

- относительная величина процентной ставки:

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

(одна из наиболее применяемых формул, используется для нахождения так называемой эффективной ставки сложных процентов, характеризующей доходность финансовой операции);

- количество интервалов начисления (лет):

$$n = \frac{ln\frac{S}{P}}{ln\left(1+i_c\right)};$$

- период начисления процентов в днях:

$$t = K \times \frac{ln\frac{S}{P}}{ln\left(1+i_c\right)};$$

- продолжительность года в днях:

$$K = \frac{t\, ln\left(1+i_c\right)}{ln\frac{S}{P}};$$

- коэффициент наращения:

$$k_{нс} = \left(1+i_c\right)^n = \left(1+i_c\right)^{t/K}.$$

1.2.2 Периодическое начисление сложных процентов

Начисление сложных процентов может осуществляться несколько раз в году: по месяцам, кварталам, полугодиям. В таких случаях указывается ставка на периоде, а наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P\left(1+i_n\right)^N,$$

где i_n – ставка на периоде начисления;

N – количество интервалов начисления в течение срока действия контракта.

В случае, когда начисление сложных процентов осуществляется через равные промежутки времени n, указывается номинальная годовая процентная ставка j и пользуются следующей формулой:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n},$$

где m – количество интервалов начисления за год;

n – срок контракта в годах;

$N = m \times n$ – количество интервалов начисления за весь срок контракта.

1.2.3 Непрерывное начисление процентов

На практике применяется еще и непрерывное начисление процентов по номинальной годовой процентной ставке j. В этом случае вычисление наращенной суммы находят из следующего выражения:

$$S = P \times e^{j\,n} = P \times k_{нс}$$

где $k_{н\,с} = e^{j\,n}$ – коэффициент наращения при непрерывном начислении процентов по номинальной годовой ставке j.

Пример 1.2. Коммерческий банк С начисляет доход по простой ставке, а банк D – по сложной. Начисление процентов происходит один раз в полгода. Через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на 40 %. Найти основные параметры операций за 4 года. В какой банк выгоднее положить деньги на полгода, а в какой – на полтора года? Найти простую ставку, эквивалентную сложной в конце четвертого года.

Решение

По условию задачи коэффициенты наращения банков C и D после двух начислений равны:

$$k_{н} = k_{н\,с} = 1{,}4 \,.$$

Для банка C ставку простых процентов определим для n = 2 из равенств:

$$k_{н} = 1 + n\, i = 1 + 2\, i = 1{,}4 \;, \quad i = \frac{1{,}4 - 1}{2} = 0{,}2 \;, \text{ или } i = 20\,\% \,.$$

Для банка D ставку сложных процентов определим для n = 2 из равенств:

$$k_{í} = (1 + i)^{n} = 1{,}4 \;, \; i_{c} = \sqrt{1{,}4} - 1 = 0{,}183216 \quad \text{или } i = 18{,}3216\,\%$$

Для сравнения результатов финансовых операций с банками C и D вычислим коэффициенты наращения (таблица 1).

Таблица 1– Коэффициенты наращения

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{н}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
$k_{н\,с}$	1,183216	1,4	1,6565	1,96	2,3191	2,744	3,2467	3,8416

Из таблицы 1 следует, что, например, на полтора года (как и вообще на любой срок свыше года) выгоднее положить деньги в банк D, поскольку $k_{нс} > k_{н}$.

Найдем значение эквивалентной ставки простых процентов, при которой $k_{н\,с} = k_{н}$ в конце срока начисления:

$$1 + 8\, i_{Э} = 3{,}8416 \qquad i_{Э} = 0{,}3552 \quad \text{или} \quad 35{,}52\ \%.$$

Пример 2.2. 5.08.06 г. банк заключает с заемщиком договор срочного банковского кредита на 21 день (срок возврата – 26.08.06 г.) Сумма кредита – 10 тыс. грн. Процентная ставка – 36 %, по условиям договора начисленные по итогам каждого дня срока действия кредита проценты увеличивают сумму.

Решение

26.08.98 г. заемщик возвращает банку кредит (с учетом ежедневной капитализации процентов) в сумме:

$$10\,000\ \text{грн.} \times \left(1 + \frac{36}{100\ \%} \times \frac{1\ \text{день}}{365\ \text{дней}}\right)^{21} = 10\ \ 209\ \text{грн.} 15\ \text{коп.}$$

1.3 Модели операций дисконтирования

Золотое правило бизнеса гласит: сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра.

Дисконтирование позволяет учитывать в операциях фактор времени. Различают математическое дисконтирование и коммерческий, или банковский, учет.

Математическое дисконтирование связано с определением так называемого «современного» или «приведенного» значения P на некоторый начальный момент времени, которое соответствует заданному значению S в другой момент времени. Простейшая задача связана с определением суммы вклада P на основе заданной конечной величины в будущем S через временной период начислений n под заданную, например, простую ставку процентов:

$$P = \frac{S}{1 + n\,i} = S \times k_Д, \qquad k_Д = \frac{1}{1 + n\,i}.$$

где $k_Д$ – коэффициент дисконтирования (приведения) по простой ставке процентов,

Дисконтированное значение будущей суммы вклада по сложной ставке процентов равно:

$$P = \frac{S}{\left(1 + i_c\right)^n} = S \times k_{ДС}$$

где $k_{ДС}$ – коэффициент дисконтирования (приведения).

$$k_{ДС} = \frac{1}{(1+i_c)^n},$$

По номинальной ставке процентов j при начислении процентов m раз в году:

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n}}.$$

Банковский учет

Банковский учет заключается в покупке денежных обязательств, например, векселя банком по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы. В этом случае говорят, что вексель учитывается, и клиент получает сумму:

$$P = S - D,$$

где: S – номинальная сумма данного обязательства;

P – цена покупки векселя банком;

D – дисконт, сумма процентных денег (доход банка).

Процентный доход банка-покупателя векселя, может определиться по простой годовой учетной ставке:

$$d\ \% = \frac{D}{S} \times 100\ \%.$$

Если срок n от даты учета до даты погашения будет составлять часть года, то дисконт определяется по формуле:

$$D = n \times d \times S = \frac{t}{K} \times d \times S,$$

где d – относительная величина простой учетной ставки.

Предъявителю учитываемого денежного обязательства будет выдана сумма:

$$P = S - D = S\,(1 - n\,d) = S\left(1 - \frac{t}{K}\,d\right).$$

Дисконтирование может быть связано и с проведением кредитной операции. В таком случае проценты начисляются в начале интервала начисления, и заемщик получает сумму *P* за вычетом процентных денег *D* из суммы кредита *S*, подлежащего возврату. Поэтому при проведении операции по простой учетной ставке *d* следует пользоваться формулой:

$$S = \frac{P}{1 - n d}.$$

При проведении операции по сложной процентной ставке d_c используют формулу:

$$S = \frac{P}{(1 - d_c)^n},$$

где d_c – относительная величина сложной учетной ставки,

Отсюда можно определить показатели операции:

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{\ln(1 - d_c)};$$

$$d_c = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}.$$

Выгодность метода начисления процентов по учетной ставке для кредитора или заемщика зависит от величины процентной ставки и срока кредита.

В финансовых операциях используется также и номинальная годовая учетная ставка f, по которой при начислении процентов m раз в год можно определить:

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m\,n}}$$

Отсюда находим следующие формулы расчета показателей операции:

$$n = \frac{ln \frac{P}{S}}{m \, ln \left(1 - \frac{f}{m} \right)}; \quad f = m \left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}} \right).$$

При непрерывном начислении процентов по номинальной годовой учетной ставке f справедливо соотношение:

$$S = \frac{P}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{f}{m} \right)^{m\,n}} = Pe^{\,f\,n},$$

из которого находим следующие формулы:

$$n = \frac{1}{f} \, ln \, \frac{S}{P};$$

$$f = \frac{1}{n} \, ln \, \frac{S}{P}.$$

Пример 3.1. Финансовая компания выдает ссуду 15 000 грн. на полгода по простой годовой процентной ставке d = 5 %. Определить сумму, которую получит клиент, и доход компании.

Решение

S = 15 000 грн.; d = 0,05; n = 0,5.

Тогда сумма, полученная клиентом, составит:

P=S (1 – n d) = 15 000(1 – 0,5 × 0,05) = 14 625 грн.

Доход финансовой компании определяется простым дисконтом, т. е. как процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент ее выдачи: $D = n\,d\,S = 0{,}5 \times 0{,}05 \times 15\,000 = 375$ *грн.*

Пример 3.2 Дата погашения дисконтного векселя – 22 июля текущего года. Определить выкупную цену и дисконт на 2 июля векселя номиналом 10 млн. грн., если вексельная ставка составляет 40 % годовых, а число дней в году принять за 360.

Решение

S=10 000 000 грн.; d = 0,4; t = 20 дней; K = 360.

Определим выкупную цену дисконтного векселя:

$$P = S - D = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 10\ 000\ 000\left(1 - \frac{20\,дней}{360\,дней} \times \frac{40\,\%}{100\,\%}\right) =$$

$$= 9\,777\,777\ грн.78\ коп$$

Пример 3.3. Клиент имеет вексель на 10 000 грн., который он хочет учесть 01.03.06 в банке по сложной учетной ставке, равной 7 %. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.07.06?

Решение

Срок даты учета до даты погашения векселя равен:

$$t = 31 + 30 + 31 + 30 + 1 - 1 = 122\ \ дня;$$

Число дней в году K = 365 дней; S = 10 000 грн.; $d_c = 0{,}07$

Клиент получит сумму:

$$\text{P} = S\ (1 - d_c)^{\frac{t}{K}} = 10\ 000\ (1 - 0{,}07)^{\frac{122}{365}} = 9\ 760 \text{ грн. } 06 \text{ коп.}$$

1.4 Модели финансовых потоков

Финансовые потоки являются составной и неотъемлемой частью практически любой сферы человеческой деятельности. Примерами таких потоков является: оплата по заключенным договорам, которая может предусматривать как разовый платеж, так и ряд выплат, распределенных во времени; погашение банковской задолженности или коммерческого кредита частями и т. п. При этом может возникать целый ряд последовательных, например, равновеликих платежей R, которые и образуют поток платежей. Ряд последовательных финансовых платежей, производимых через равные промежутки времени, называется финансовой рентой или аннуитетом. Финансовая рента имеет следующие основные характеристики: член ренты R_1 – величина каждого отдельного платежа; интервал ренты τ_j – временной интервал между двумя платежами; срок ренты t – время от начала реализации ренты до момента последнего платежа (бывают и вечные ренты); процентная ставка для расчета наращения или дисконтирования платежей; наращенная будущая сумма ренты S, включающая все члены потока платежей с процентами на дату последней выплаты; современная (приведенная) величина ренты A – сумма всех членов потока платежей, дисконтированная (уменьшенная) на величину учетной ставки на начальный момент времени.

Ренты подразделяются на постоянные, когда члены ренты равны: $R_1 = R_2 = R_3 = ... = R_n$, и переменные.

По моменту выплат различают ренты: постнумерандо (обычные), в которых платежи осуществляются в конце соответствующих периодов, и пренумерандо, в которых платежи производят в начале указанных периодов.

Рассмотрим модели потоков ежегодных платежей с начислением процентов на платежи в конце каждого года (постнумерандо) по сложной процентной ставке.

Сумма первого платежа S_1 с наращенными на него за весь срок процентами определяем из уравнения:

$$S_1 = R\left(1+i_c\right)^{n-1}$$

n – количество платежей величиной R.

Для второго платежа, для которого проценты начисляются на один год меньше, соответственно получим:

$$S_2 = R\left(1+i_c\right)^{n-2}.$$

Для третьего платежа наращенная сумма составит:

$$S_3 = R\left(1+i_c\right)^{n-3}.$$

На последний платеж, произведенный в конце последнего n-го года, проценты не начисляются:

$$S_n = R\left(1+i_c\right)^{n-n} = R.$$

Тогда для всей наращенной суммы ренты получим:

$$S = \sum_{t=1}^{n} S_t = \sum_{t=1}^{n} R\left(1+i_c\right)^{n-1} = R\sum_{t=1}^{n}\left(1+i_c\right)^{n-1}.$$

Коэффициент наращения равен:

$$k_{на} = \sum_{t=1}^{n} (1+i_c)^{n-t},$$

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, полученное выражение для наращенной суммы ренты запишем в следующем виде:

$$S = R\,\frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c},$$

из которой следует, что коэффициент наращения можно определить таким выражением:

$$k_{на} = \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c}.$$

Для каждого платежа современное значение определяется формулой:

$$A_t = R\,\frac{1}{(1+i_c)^n},$$

откуда современная приведенная величина всей ренты будет определяться выражением:

$$A = \sum_{t=1}^{n} A_t = R\sum_{t=1}^{n} (1+i_c)^{-t} = a \times R,$$

где a является коэффициентом приведения ренты и вычисляется как сумма геометрической прогрессии:

$$a = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i_c}\right)^t = \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c}.$$

В результате получим выражение для приведенной величины ренты:

$$A = R\,\frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c}.$$

Полученные модели позволяют определить, например, величину платежа:

$$R = \frac{S}{k_{í}} = \frac{S \times i_{c}}{\left(1 + i_{c}\right)^{n} - 1}$$

или

$$R = \frac{A}{a} = \frac{A \times i_{c}}{1 - \left(1 + i_{c}\right)^{-n}}.$$

Для определения срока ренты можно получить следующие формулы:

$$n = \frac{ln\left[\left(\frac{S}{R}\right) i_{c} + 1\right]}{ln\left(1 + i_{c}\right)}.$$

Пример 4.1. Вкладчик в конце каждого месяца кладет в банк 1 000 грн. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной годовой ставке сложных процентов, составляющей 12 %. Опередить наращенную сумму на счете вкладчика через два года.

Решение

$$R = 1\ 000;\ n = 24;\ m = 12;\ i = \frac{i}{m} = \frac{12\ \%}{12} = 1\ \% = 0{,}01.$$

$$S = R \times \frac{\left(1 + i_{c}\right) - 1}{i_{c}} = 1\,000 \times \frac{\left(1 + 0{,}01\right)^{24} - 1}{0{,}01} = 10^{5}\left[\left(1{,}01\right)^{24} - 1\right] =$$

$$= 100\,000\left[\left(1{,}01\right)^{24} - 1\right] = 100\,000\left[1{,}27 - 1\right] = 26\ 973\ грн. 46\ коп.$$

При простом накоплении наращенная сумма составила бы всего 24 000 грн.

Другая задача, обратная этой, заключается в вычислении регулярных платежей финансовой ренты R по заданной наращенной сумме.

Пример 4.2. Вкладчик желает накопить в течение двух лет в банке 30 000 грн., производя ежемесячные равные вклады по сложной номинальной годовой ставке 12 %. Определить сумму ежемесячного вклада при условии, что проценты начисляются ежемесячно.

Решение

$$S = 30\,000;\ n = 24;\ j = 12\ \%;\ i_c = 0{,}01.$$

Сумма ежемесячного вклада составит:

$$R = \frac{S \times i_c}{(1 + i_c)^n - 1} = \frac{30\,000 \times 0{,}01}{(1 + 0{,}01)^{24} - 1} = \frac{300}{0{,}2697346} = 1\,112\ \text{ãðí}.20\ \text{êîï}\ .$$

Пример 4.3. Вкладчик оплатил обучение за первый год и намерен положить в банк сумму, чтобы его сын в течение еще пяти лет обучения мог снимать в конце каждого года по 5 000 грн. и израсходовать к концу учебы весь вклад. Определить сумму вклада, если годовая ставка сложных процентов составит 12 %.

Решение

Сумма вклада равна современной ценности ренты, состоящей из пяти платежей:

$$A = R\,\frac{1 - (1 + i_c)^{-n}}{i_c} = 5\,000\,\frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-5}}{0{,}12} = \frac{5\,000}{0{,}12}\left[1 - \frac{1}{1{,}12^5}\right] =$$
$$= \frac{5\,000\,[1 - 0{,}567427]}{0{,}12} = 18\,023\ \text{грн}.86\ \text{коп}.$$

Пример 4.4. Заемщик получил кредит 3 млн. грн. на 5 месяцев с условием гашения долга в конце каждого месяца равными срочными платежами. На величину долга начисляются сложные проценты по ставке 5 % за месяц. Определить сумму срочного платежа.

Решение

$$n = 5;\ A = 3\,000\,000\ \text{грн};\ i_c = 0{,}05.$$

Сумма срочного платежа:

$$R = \frac{A \times i_c}{1 - (1 + i_c)^{-n}} = \frac{3\,000\,000 \times 0{,}05}{1 - (1 + 0{,}05)^{-5}} = 692\,924\ \text{грн}.39\ \text{коп}.$$

1.5 Модели инфляции в операциях

Инфляция характеризуется обесцененением национальной валюты, снижением ее покупательной способности и общим повышение цен в стране.

Все показатели финансовой операции можно разделить на две группы: номинальные, рассчитанные в текущих ценах, и реальные, учитывающие влияние инфляции, рассчитанные в сопоставимых ценах базового периода.

Для оценки упомянутых процессов формируют определенный набор товаров и услуг, называемый потребительской корзиной, и фиксируют изменения ее стоимости в различные моменты времени.

Пусть стоимость потребительской корзины в базовом периоде t_0 равна S_0, а в анализируемом периоде t_j составит S_j. Изменение (рост или падение) потребительских цен определяется безразмерным показателем, называемым индексом инфляции, который показывает во сколько раз выросли цены:

$$I_u = \frac{S_j}{S_0},$$

а относительная величина уровня инфляции есть темп инфляции:

$$\alpha = \alpha_{0,\ j} = \frac{S_j - S_0}{S_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = I_u - 1,$$

откуда следует, что индекс инфляции равен:

$$I_u = 1 + \alpha.$$

Уровень инфляции определяют в процентах:

$$\alpha\,\% = \left(\frac{S_j - S_0}{S_j}\right) \times 100\,\%.$$

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены, а уровень инфляции – на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период.

При проведении исследования стоимость потребительской корзины фиксируется через, например, равные промежутки времени:

$$t_0 , t_1 \ , t_2 \ \ t_3 , ..., t_I , ... t_N ,$$

что можно записать таким образом:

$$S_0 , S_1 , S_3 , ..., \ S_I , ... S_N .$$

Аналогично, для темпов инфляции на этих интервалах:

$$\alpha_{0,1} , \alpha_{1,2} , \ \alpha_{023} , \ ... \ \alpha_{l-1,l} , \ ... \ \alpha_{N-1,N} .$$

Тогда получим выражение для определения стоимости потребительской корзины в общем виде:

$$S_N = S_0 \times \prod_{l=1}^{N} \left(1 + \alpha_{l-1,l} \right),$$

Индекс инфляции за весь период будет равен:

$$I_u = \frac{S_N}{S_0} = \prod_{l=1}^{N} \left(1 + \alpha_{l-1,l} \right).$$

Темп инфляции за весь период:

$$\alpha = I_u - 1 = \left(\prod_{l=1}^{N} \left(1 + \alpha_{l-1,l} \right) \right) - 1.$$

При равенстве значений темпов инфляции на всех интервалах:

$$\alpha_{0,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2.3} = \alpha_{3,4} = ... = \alpha_{N-1,N} = \alpha_1 ,$$

индекс инфляции определяется по формуле:

$$I_u = \left(1 + \alpha_1 \right)^N .$$

1.5.1 Начисление простых процентов с учетом инфляции

Для простых процентов обозначим i_α ставку процентов, учитывающую инфляцию. Тогда для наращенной суммы имеем выражение

$$S_\alpha = P\left(1 + n\,i_{\ \alpha}\right).$$

Кроме того, если воспользоваться уравнением связи S_α с S через индекс инфляции:

$$S_\alpha = S \times I_u = P\left(1 + n\,i\right) I_u,$$

то можно записать равенство

$$S_\alpha = (1 + n\,i_{\ \alpha}) = P\left(1 + n\,i\right) I_u,$$

откуда получим модель определения ставки простых процентов, учитывающей инфляцию:

$$i_\alpha = \frac{\left(1 + n\,i\right) I_u - 1}{n} = \frac{\left(1 + n\,i\right)\left(1 + \alpha\right) - 1}{n}$$

Реальная доходность операции по ставке простых процентов при заданных i_α и I_u определяется по формуле:

$$i = \frac{n i_\alpha + 1 - I_u}{n I_u}.$$

1.5.2Начисление сложных процентов с учетом инфляции

Для сложных процентов аналогично запишем два выражения:

$$S_\alpha = P\left(1 + i_{\ c\,\alpha}\right)^n; \quad S_\alpha = P\left(1 + i_{\ c}\right)^n \times I_u;$$

из которых получим:

$$i_{c\alpha} = (1 + i_c)\sqrt[n]{I} - 1.$$

Перепишем формулу следующим образом:

$$i_c = \frac{1+i_{c\alpha}}{\sqrt[n]{I}} - 1 = \frac{1+i_{c\alpha}}{\sqrt[n]{1+\alpha}} - 1$$

Теперь можно сравнивать $i_{c\alpha}$ и α (больше, равно, меньше), проводить экономический анализ эффективности вложений и устанавливать, поглощается ли доход инфляцией или происходит реальный прирост вложенного капитала.

При начислении процентов несколько раз в году запишем аналогичные модели:

$$S = P\left(1+\frac{j_\alpha}{m}\right)^{mn}; \qquad S = P\left(1+\frac{j_\alpha}{m}\right)^{mn} \times I_u;$$

откуда получим выражение для номинальной сложной процентной ставки, учитывающей инфляцию:

$$j_\alpha = m\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[mn]{I_u} - 1\right],$$

а также уравнение для определения номинальной ставки:

$$j_\alpha = m\left[\left(\frac{1+\frac{j}{m}}{\sqrt[mn]{I_u}}\right) - 1\right],$$

Приведенные модели позволяют проводить взаиморасчеты с клиентами по показателям в контрактах с учетом информации.

Пример 5.1. Определить ожидаемый уровень инфляции за год при ежемесячном уровне инфляции 3 %.

Решение

$$\alpha\,\% = 3\,\%;\ \alpha = 0{,}03;\ N = 12.$$

Индекс инфляции за год составит:

$$I_u = (1+\alpha)^N = (1+0{,}03)^{12} = 1{,}42576.$$

Уровень инфляции за год составляет:

$$\alpha = I_u - 1 = 0{,}42576; \quad \alpha\% = 42{,}576\ \%.$$

Пример 5.2. Определить уровень инфляции за полгода, если уровни инфляции по месяцам составили соответственно 10, 15, 12, 9, 14, 13 %.

Решение

Индекс инфляции за полгода составит:

$$I_u = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)(1+\alpha_5)(1+\alpha_6) =$$

$$= (1+0{,}1)(1+0{,}15)(1+0{,}12)(1+0{,}09)(1+0{,}14)(1+0{,}13) =$$

$$= 1{,}1 \times 1{,}15 \times 1{,}12 \times 1{,}09 \times 1{,}14 \times 1{,}13 = 1{,}989.$$

Уровень инфляции за полгода равен:

$$\alpha = I_u - 1 = 1{,}989 - 1 = 0{,}989;\ \ \alpha\,\% = 98{,}9\,\%\,.$$

Пример 5.3. Банк выдал клиенту кредит на один год в размере 2 тыс. грн. по ставке 6 % годовых. Уровень инфляции за год составил 40 %. Определить с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму, сумму процентов за кредит и реальный доход банка.

Решение

$$P = 2\,000\ грн;\ i = 0{,}06;\ \alpha = 0{,}4;\ n = 1.$$

а) сумма погашения кредита с процентами, без учета инфляции составит:

$$S = P(1 + n\,i) = 2\,000\,(1 + 0{,}06) = 2\,120\ грн.$$

б) сумма процентов: $P \times n \times m = 2\,000 \times 1 \times 0{,}06 = 120\ грн.$

в) возвращаемая сумма с процентами, приведенная к моменту оформления кредита с учетом инфляции:

$$P_\alpha = \frac{S}{I_u} = \frac{S}{1+\alpha} = \frac{2\,120}{1{,}4} = 1\,514\ грн. 29\ коп;$$

г) реальный доход банка:

$$Д = P_{\alpha} - P = 1\,514{,}29 - 2\,000 = -\,485\,грн.71\,коп.,$$

что свидетельствует об убытке этой операции.

Найдем параметры операции, которые обеспечивают доходность банку в размере 6 % годовых:

д) чтобы обеспечить доходность банку в размере 6% годовых, ставках процентов по кредиту с учетом инфляции должна быть равна:

$$i_{\alpha} = \frac{(1+ni)(1+\alpha)-1}{n} = i + \alpha + i \times \alpha = 0{,}06 + 0{,}4 + 0{,}06 \times 0{,}4 = 0{,}484;$$

$$i_{\alpha}\% = 48{,}4\ \%$$

е) погашаемая сумма должна составлять:

$$S_{\alpha} = P\left(1 + i_{\alpha}\right) = 2\,000\left(1 + 0{,}484\right) = 2\,968\,грн.$$

ж) реальный доход банка составит:

$$Д = P_{\alpha} - P = \frac{S_{\alpha}}{I_n} - P = \frac{2\,968}{1{,}4} - 2000 = 120\,грн.$$

что обеспечит реальную доходность операции 6 % годовых.

Пример 5.4. Вклад на сумму 1 000 грн. положен в банк на полгода с ежемесячным начислением сложных процентов по номинальной ставке 36 % годовых. Определить реальный доход вкладчика, если ожидаемый ежемесячный уровень инфляции составит 4 %.

Решение

$$P = 1\,000\,грн;\, n = 0{,}5;\ m = 12;\ j = 0{,}36;\ \alpha = 0{,}04\,.$$

а) индекс инфляции за полгода составит:

$$I_u = \left(1 + \alpha\right)^{\,n} = \left(1 + 0{,}04\right)^{\,6} = 1{,}2653.$$

б) уровень инфляции будет равен:

$$\alpha = I_u - 1{,}2653 - 1{,}0 = 0{,}2653; \;\; \alpha\,\% = 26{,}53\,\%$$

в) наращенная сумма вклада с процентами составляет:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m\,n} = 1\,000\,(1 + 0{,}03)^{6} = 1\,194\,ãðí.06\,êîï\;.$$

г) сумма вклада с процентами, приведенная к моменту его оформления, составит:

$$P_u = \frac{S}{I_u} = \frac{1\,194{,}06}{1{,}2653} = 943\,грн.70\,коп.$$

д) реальный доход вкладчика составит:

$$Д = P_\alpha - P = 943{,}70 - 1\,000 = -56\,грн.30коп.,$$

следовательно, вкладчик понесет убытки с позиций покупательной способности получаемой в банке суммы.

1.6 Модели сравнения операций

Для выбора наиболее выгодной схемы финансовой или коммерческой операции необходимо проводить их сравнение. Юридические или физические лица, участвующие в операции (сделке), должны ясно представлять ее результаты, оценить выгоду, определить доходность или эффективность операции.

Простейшим видом финансовой операции является однократное предоставление кредитором в долг какой-либо суммы P заемщику (дебитору) с условием, что через некоторое время n будет возвращена сумма S. Для оценки эффективности такой операции можно использовать следующие показатели:

- относительный рост, относительная величина ставки процента, называемая интересом:

$$i = \frac{S - P}{P};$$

- относительная скидка, или дисконт:

$$d = \frac{S - P}{S}.$$

Эти показатели характеризуют приращение капитала кредитора, отнесенное либо к первоначальной сумме (интерес), либо к конечной сумме (дисконт).

Между этими показателями существует связь, которая находится путем совместного решения этих уравнений, откуда можно получить следующие модели:

$$i = \frac{d}{1 - d}; \quad d = \frac{i}{1 + i}.$$

В операциях иногда вместо дисконта используют дисконт-фактор, определяемый по такой формуле:

$$V = 1 - d = \frac{P}{S} = \frac{1}{1 + i}.$$

Для определения выгодности финансовых операций используют сравнительную доходность, которая на основе допущения о равенстве финансовых результатов различных вариантов проведения операций приводит к понятию эквивалентных процентных ставок простых или сложных процентов. Это позволяет получить инструмент корректного сравнения финансовых операций.

Эквивалентные ставки дают одинаковые финансовые результаты или наращенные суммы S при равных промежутках времени n.

Для этих целей используют базовые модели вычисления наращенных сумм реальных процентных ставок:

$$S = P(1 + n\,i), \quad S = \frac{P}{1 - n\,d},$$

$$S = P\,(1 + i\;c)^n, \; S = \frac{P}{(1 - d_c)^{\,n}},$$

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m\,n}, \quad S = \frac{P}{\left(1 - \frac{j}{m}\right)^{m\,n}}.$$

Для нахождения эквивалентных ставок составляют уравнения эквивалентности по следующим правилам. Рассматривается результат инвестирования капитала *P* на срок n лет:

$$S = P + Д,$$

где $Д$ – доход

Эту операцию можно сопоставить с эквивалентной операцией вложения средств, например, по ставке простых процентов $i_{ý}$. Тогда сумма вложенных средств с процентами будет равна:

$$S = P(1 + n\,i_{\;ý}).$$

Доход по этой операции составляет:

$$Д = S - P = P\,n\,i_э = P\,\frac{t}{K}\,i_э,$$

где *t* – срок операции в днях.

Следовательно, эквивалентная ставка простых процентов будет равна:

$$i_э = \frac{Д}{P \times n} = \frac{Д \times K}{P \times t}.$$

На основе равенства двух выражений можно составить уравнения эквивалентности для других сочетаний различных вариантов процентных ставок. Так, например, приравнивая наращенные суммы при схемах начисления простых и сложных процентов:

$$S = P\,(1 + n\,i); \;\; S = P\,(1 + i_C)^{\,n};$$

получим следующее уравнение эквивалентности:

$$P\,(1 + n\,i) = P\,(1 + i_C)^{\,n},$$

из которого следует определение эквивалентной ставки простых процентов:

$$i_э = \frac{(1 + i_{\,c})^{\,n} - 1}{n}$$

или эквивалентной ставки сложных процентов:

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{1 + n\,i} - 1.$$

Для начисления сложных процентов получаем следующее уравнение эквивалентности:

$$(1 + i_c)^{\,n} = (1 + j/m)^{\,m\,n},$$

откуда получим эквивалентную годовую ставку сложных процентов:

$$i_{сэ} = (1 + j/m)^{\,m} - 1,$$

которая определяет так называемую годовую эффективную ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке, и не зависит от срока операции n. Эффективная ставка сложных процентов, эквивалентная сложной учетной ставке, равна:

$$i_{сэ} = \frac{d_c}{1 - d_c};$$

а ставка, эквивалентная номинальной сложной учетной процентной ставке, равна:

$$i_{сэ} = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-m} - 1.$$

Эти показатели необходимы для оценки реальной доходности финансовых операций или для сравнения различных процентных ставок, что в конечном итоге позволяет вычислять доходность и аргументировать выбор варианта для инвестирования капитала.

При учете денежных обязательств, например, векселей с использованием учетной ставки, доход (дисконт) определяется формулой:

$$D = ndS = S - P,$$

откуда эквивалентная ставка простых процентов будет равна:

$$i_э = \frac{D}{(S - D)\,n} = \frac{n\,d\,S}{S\,(1 - n\,d)\,n} = \frac{d}{1 - n\,d}.$$

Пример 6.1. Кредит на 2 года получен под 36 % номинальную ставку сложных процентов. Начисление происходит ежеквартально. Оценить эффективность операции через эквивалентные простую и сложную ставки процентов.

Решение

$$j = 0{,}36;\ n = 2;\ m = 4.$$

а) эквивалентная ставка простых процентов:

$$P\left(1+i\times n\right)=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n}. \qquad 1+i\times n=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n},$$

$$i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n}-1}{n}=\frac{\left(1+\frac{0{,}36}{4}\right)^{8}-1}{2}=0{,}4963;\ \ i=49{,}63\ \%$$

б) эквивалентная эффективная ставка сложных процентов:

$$\left(1+i_c\right)^{n}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n},\ i_c=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=\left(1+\frac{0{,}36}{4}\right)^{4}-1=0{,}4116;\ \ i_c=41{,}16\ \%$$

Пример 6.2. Срок оплаты долгового обязательства составляет полгода по простой учетной ставке 40 %. Оценить доходность операции по эквивалентным ставкам (считать, что номинальная ставка начисляется ежеквартально).

Решение

$$d=0{,}4;\ \ n=0{,}5;\ \ m=4.$$

а) эквивалентная простая ставка ссудного процента:

$$1+n\,i=\frac{1}{1-n\,d} \quad \Rightarrow$$

$$i=\frac{d}{1-n\,d}=\frac{0{,}4}{1-0{,}4\times0{,}5}=\frac{0{,}4}{0{,}8}=0{,}5; \quad i\ \%=50\ \%;$$

б) эквивалентная ставка сложного процента:

$$\left(1+i_c\right)^{n}=\frac{1}{1-n\,d}\Rightarrow$$

$$i_c=\sqrt[n]{\frac{1}{1-n\,d}}-1=\left(\frac{1}{1-0{,}5\times 0{,}4}\right)^{\frac{1}{0{,}5}}-1=\left(\frac{1}{0{,}8}\right)^{2}-1=0{,}5625;\quad i_c\%=56{,}25.$$

в) эквивалентная номинальная ставка сложного процента:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,n}=\frac{1}{1-n\,d}\Rightarrow$$

$$j=m\left(\sqrt[mn]{\frac{1}{1-n\,d}}-1\right)=4\left(\sqrt{\frac{1}{1-0{,}5\times 0{,}4}}-1\right)=0{,}471;\quad j\,\%=74{,}2\,\%$$

г) эквивалентная сложная учетная ставка:

$$\frac{1}{(1-d_c)^{n}}=\frac{1}{1-n\,d}\Rightarrow$$

$$d_c=1-\sqrt[n]{1-n\,d}=1-\left(1-0{,}5\times 0{,}4\right)^{2}=1-0{,}64=0{,}36;\quad d_c\,\%=36\,\%.$$

д) эквивалентная номинальная учетная ставка:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m\,n}}=\frac{1}{1-n\,d}\Rightarrow$$

$$f=m\left(1-\sqrt[mn]{1-n\,d}\right)=4\left(1-\sqrt{1-0{,}5\times 0{,}4}\right)=0{,}422;\quad f\,\%=42{,}2\,\%;$$

1.7 Модели операций с облигациями

Облигации представляют собой долговую ценную бумагу, в соответствии с которой заемщик гарантирует кредитору выплату по истечении определенного срока полной суммы долга с процентами на определенную дату в будущем.

Эмитент выпускает облигации, на которых указана их номинальная стоимость N и срок, по истечении которого облигации выкупаются (погашаются) эмитентом по номинальной стоимости.

Покупатель, приобретающий облигации по цене, меньшей номинала, предоставляет тем самым эмитенту ссуду и практически является кредитором. В таком случае покупатель получает доход, определяемый разностью между номиналом и ценой покупки облигации и называемый дисконтом. Если к облигации прилагаются купоны, то, например, ежегодно или ежеквартально ему выплачиваются проценты по указанной на них ставке. Это является дополнительным, так называемым купонным доходом.

Целью операций с облигациями является использование одного из вариантов финансовых вложений для получения дохода, и тем самым, обеспечение защиты от обесценения капитала и гарантия его роста в условиях инфляции.

При расчете доходности покупки облигации, используют понятие курса облигации P_k, выраженного в процентах от стоимости номинала:

$$P_k = \frac{P}{N} \cdot 100,$$

где P – цена облигации; N – номинальная стоимость облигации.

Откуда цена облигации при заданном курсе определяется выражением:

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = 0{,}01\ P_k\ N.$$

Если по облигациям выплачиваются проценты, то облигации называются процентными, а доход по каждой выплате определяется от ее номинальной стоимости:

$$I = i_{обл} \cdot N.$$

Если проценты по облигациям не выплачиваются, то источником дохода будет являться разность между ценой выкупа (номиналом, эмитентом) и ценой покупки, которая называется дисконтом, такие облигации называются дисконтными, например, государственные краткосрочные обязательства (ГКО). Доход от этих облигаций находим как разность между номиналом и ценой:

$$Д = N - P = N - \frac{P_k\ N}{100} = N\left(1 - 0{,}01\ P_k\right).$$

Доходность облигаций к погашению можно определить по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{Д}{P\ n} = \frac{N-P}{P\ n} = \frac{100-P_k}{P_k\ n} = \left(\frac{100-P_k}{P_k}\right)\frac{K}{t}.$$

Доход от покупки долгосрочных облигаций с выплатой процентов будет состоять из суммы полученных процентов и разницы между ценой их погашения (номиналом) и ценой покупки.

Если проценты по облигациям выплачиваются в конце года, например, по ставке сложных процентов i_c, то сумма процентных денег при погашении облигации через n лет определяется выражением:

$$I = N\left(1+i_c\right)^n - N = N\left[\left(1+i_c\right)^n - 1\right].$$

Общий доход можно определить по формуле:

$$Д = I + N - P = N\left(1+i_c\right)^n - P = N\left[\left(1+i_c\right)^n - \frac{P_k}{100}\right]$$

Доходность операции покупки-погашения облигации в виде эффективной ставки сложных процентов можно определить из выражений:

$$S = P\left(1+i_c\right)^n, \quad Д = S - P - P\left[\left(1+i_c\right)^n - 1\right].$$

На основании приведенных соотношений получим:

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{P+Д}{P}} - 1 = \frac{1+i_c}{\sqrt[n]{P_k/100}} - 1.$$

При определении общего дохода следует учитывать возможность реинвестирования, если проценты выплачиваются периодически.

Пример 7.1. Курс облигаций номиналом 500 грн. составляет 75. Определить цену облигации.

Решение

$$P_k = 75; \quad N = 500\,грн.$$

Цена облигации:

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = \frac{75 \cdot 500}{100} = 375\,грн.$$

Пример 7.2. Доход по облигации номиналом 1000 грн. выплачивается каждые полгода по ставке 50 % годовых. Вычислить сумму дохода по каждой выплате.

Решение

$$N = 1\,000\,грн.; \;\; i = 0{,}5; \;\; n = 0{,}5.$$

Сумма дохода по каждой выплате: $I = N \cdot n \cdot i = 1\,000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 250\,грн.$

Пример 7.3. Облигация номиналом 1 000 грн. и сроком ее обращения 90 дней продается по курсу 85. Определить сумму дохода от покупки 5 облигаций и доходность финансовой операции при расчетном количестве дней в году 360.

Решение

$$N = 1\,000\,грн.; \; t = 90\,дн.; \; K = 360; \; P_k = 85.$$

Доход от покупки одной облигации при условии ее погашения составит:

$$P = \left(N - \frac{P_k \cdot N}{100} \right) = N \left(1 - \frac{P_k}{100} \right) = 1\,000 \left(1 - \frac{85}{100} \right) = 150\,грн.$$

Сумма дохода от покупки 5 облигаций составит:

$$W = 5 \cdot 150 = 750\,грн.$$

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной ставке простых процентов составляет:

$$i_э = \frac{N-P}{P} \cdot \frac{K}{t} = \frac{1\,000-850}{850} \cdot \frac{360}{90} = \frac{150}{850} \cdot 4 = 0{,}706 = 70{,}6\ \%$$

Пример 7.4. Облигации номиналом 1 000 грн и сроком обращения 180 дней были приобретены в момент их выпуска по курсу 65 и проданы через 80 дней по курсу 85. Определить доходность к погашению и текущую доходность в результате продажи для К = 360 дней.

Решение:

$$N = 1\,000 грн.;\ t_1 = 180\ дн.; t_2 = 90 дн.;\ К = 260 дн.; P_{k1} = 65;$$

$$P_{k2} = 85;$$

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной простой ставке процентов:

$$i_c = \frac{N-P}{P} \cdot \frac{K}{t_1} = \frac{100-P_{k1}}{P_{k1}} \cdot \frac{K}{t_1} = \frac{100-65}{65} \cdot \frac{360}{180} = 1{,}077\ \%;$$

Текущая доходность в результате их продажи составит:

$$i_э = \frac{P_2-P_1}{P_1} \cdot \frac{K}{t_2} = \frac{P_{k2}-P_{k1}}{P_{k1}} \cdot \frac{K}{t_2} = \frac{85-65}{65} \cdot \frac{360}{90} = 1{,}231 = 123{,}1\ \%.$$

Пример 7.5. Облигация куплена по курсу 95 и будет погашена через 10 лет. Проценты по облигации выплачиваются в конце срока по сложной ставке 5 % годовых. Определить доходность приобретения облигации.

Решение

$$P_k = 95;\ q = 0{,}05;\ n = 10;$$

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = 0{,}95\ N.$$

Процентный доход за 10 лет составит:

$$I = N\,(1+q)^n - N = N\left[(1+q)^n - 1\right] = N\left[(1+0{,}05)^n - 1\right] =$$
$$= N\left[1{,}05^{10} - 1\right] = 0{,}629\ N.$$

Доход от погашения составил:

$$W_n = N\left(1 - 0{,}01\, P_k\right) = N\left(1 - 0{,}95\right) = 0{,}05\, N.$$

Общий доход составил:

$$W = I + W_n = 0{,}629\, N + 0{,}05\, N = 0{,}679\, N.$$

Доходность покупки облигации по эффективной ставке сложных процентов равна:

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{\frac{W+N}{N}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{0{,}679\, N + N}{N}} - 1 =$$

$$= \sqrt[10]{1{,}679} - 1 = 1{,}053 - 1 = 5{,}3\ \%.$$

1.8 Модели операций с акциями

Акция представляет собой долевую ценную бумагу, в которой указывается непосредственная доля держателя акции в реальной собственности и обеспечивает получение дивиденда. В зависимости от порядка начисления и выплаты дивидендов акции делят на привилегированные и обыкновенные.

Дивиденды по привилегированным акциям объявляются в фиксированных процентах от номинальной ее стоимости N и определяется выражением:

$$D_1 = f \times N,$$

где f – годовая ставка дивиденда.

Доход на одну обыкновенную акцию:

$$Д_о = \frac{ЧП - D_{пр}}{M_о},$$

где Ì î – количество обыкновенных акций;

$ЧП$ – распределяемая чистая прибыль,

$D_{пр}$ – дивиденд по всем привилегированным акциям,

$$D_{пр} = M_{пр} D_1;$$

где $M_{пр}$ – количество привилегированных акций.

Обычно на выплату дивидендов по обыкновенным акциям может идти не весь доход, а только его часть, поэтому величина выплачиваемого дивиденда определяется дивидендным выходом:

$$D_{вых} = \frac{D_0}{Д_0}$$

где $D_о$ – дивиденд на одну обыкновенную акцию.

Доходность по акциям определяется доходом от выплачиваемых дивидендов, а также разницей в цене покупки и продажи, что и определяет эффективность инвестиций:

$$Э = \frac{P_1 - P_a + D}{P_a},$$

где P_a – цена покупки;

P_1 – цена продажи;

D – дивиденды за время владения акций.

Для проведения анализа операций с акциями необходимо проводить расчеты по нескольким показателям.

Доходность текущая, без учета налогообложения, определяется по формуле:

$$i_т = \frac{D}{P_a},$$

Доходность конечная определяется суммой дивидендов и дополнительным доходом от перепродажи:

$$i_э = \frac{D \cdot n + P_1 - P_a}{P_a \cdot n}.$$

Доходность текущая, с учетом налогообложения, определяется выражением:

$$i_{тн} = \frac{D\left(1 - i_н\right)}{P_a} \cdot 100\,\%,$$

где $i_н$ – ставка налогообложения.

Курсовая стоимость определяется также и от номинальной цены акции:

$$P_a = \frac{f}{i} \cdot N.$$

Рыночная цена акций определяется спросом, и в связи с этим показатель ценности акций на рынке находится так:

$$P/E = \frac{P_a}{Д_a}.$$

При долгосрочных операциях с акциями можно применять формулы определения эквивалентных ставок простых и сложных процентов:

$$S = P\,(1 + n\,i_э); \qquad S = P\,(1 + n\,i_э)^{\,n};$$

Доход от финансовых операций в таких случаях определяется так:

$$Д = S - P = n\,i_э P; \qquad Д = P\,[(1 + i_э)^{\,n} - 1],,$$

откуда эквивалентные ставки простых и сложных процентов:

$$i_э = \frac{Д}{n \cdot D} \qquad i_{сэ} = \sqrt[n]{\frac{P + Д}{P}} - 1 = \sqrt[n]{1 + \frac{Д}{P}} - 1.$$

Пользуясь приведенными моделями можно проводить сравнение выгодности финансовых операций с акциями и, следовательно, решить задачу выбора оптимального инвестиционного проекта.

Пример 8.1. Банк объявил, что дивиденды по его акциям за прошедший год составляют 10 % годовых по обыкновенным акциям и 20 % годовых по привилегированным акциям. Определить сумму дивиденда на одну привилегированную акцию номиналом 3000 грн. и на десять обыкновенных акций номиналом 1 000 грн.

Решение

Сумма дивиденда на одну привилегированную акцию равна: $D_{пр} = 0{,}2 \cdot 3000\,грн. = 600\,грн.$ Сумма дивиденда на одну обыкновенную акцию равна: $D_o = 0{,}1 \cdot 1\,000 = 100\ грн.$, а на десять акций – 1 000грн.

Пример 8.2. Определите ожидаемый доход от покупки акции номиналом 1000 грн. при условии получения дивидендов в размере 40 % годовых и ежегодного роста стоимости акции на 10 % от номинала, если акция будет продана через 5 лет. Определить доходность операции.

Решение

$$N = 1\,000\,грн.;\ \ f = 0{,}4;\ \ n = 5\,лет;\ \ \Delta P_1 = 0{,}1N.$$

Величина годовых дивидендов за 5 лет составит:

$$Д = n \cdot f \cdot N = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 1\,000 = 2\,000\,грн.$$

Стоимость акции через 5 лет составит:

$$P_a = N + n \cdot \Delta P_1 = N + 0{,}1 \cdot N \cdot 5 = N\,(1 + 0{,}5) = 1\,500\,грн.$$

Общий доход составит:

$$Д_a = D + P_a - N = 2\,000 + 1\,500 - 1\,000 = 2\,500\,грн.$$

Доходность покупки акции в виде эквивалентной ставки сложных процентов составит:

$$i_{сэ} = \sqrt[n]{\frac{N + Д_a}{N}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{1\,000 + 2\,500}{1\,000}} - 1 = 0{,}2848 \Rightarrow 28{,}48\ \%$$

Пример 8.3. АО с уставным фондом 1 млн. грн. имеет следующую структуру капитала: 85 обыкновенных акций и 15 привилегированных. Размер прибыли к распределению между акционерами составляет 120 тыс. грн. Фиксированный дивиденд по привилегированным акциям составляет 10 %. Определить дивиденды для владельца обыкновенной акции.

Решение

$$ЧП = 120\,000\ \ грн.,\ \ M_0 = 85,\ M_{пр} = 15,$$

$$УК = 100\,000\ \ грн;\ \ \ f = 0{,}1.$$

а) номинал одной акции находим как отношение уставного фонда к общему числу акций:

$$N = \frac{УК}{M_o + M_{пр}} = 1\,000\,000\,/\,(85 + 15) = 10\,000\,грн.$$

б) выплаты по всем привилегированным акциям равны:

$$Д_{пр} = M_{пр}\ Д_1 = N \cdot 15 \cdot f = 15\,000\,грн.$$

в) выплаты на одну обыкновенную акцию равны:

$$Д_о = \frac{ЧП - Д_{пр}}{M_о} = \frac{120\,000 - 15\,000}{85} = 1\,235\,грн.29\,коп.$$

Пример 8.4. Балансовая прибыль АО с уставным фондом 2 млн. грн., полученная от производственной деятельности, составила 10 млн. грн. Собрание акционеров постановило, что оставшуюся после уплаты налогов прибыль следует распределить так: 20 % на развитие производства, а 80 % на выплату дивидендов. Определить курс акций, если банковский процент составляет 80 %, номинал акции составляет 100 грн., а ставки налога на прибыль – 32 %.

Решение

$$УК = 2\,000\,000\,грн., БП = 10\,000\,000\,грн., Д_{вых} = 0{,}8;$$
$$i = 0{,}8;\ N = 100\,грн., W = 0{,}32.$$

а) определяем количество акций АО:

$$M = \frac{УК}{N} = 2\,000\,000 / 100 = 20\,000\ шт.$$

б) вычислим прибыль после уплаты налогов:

$$ЧП = БП(1 - W) = 10\,000\,000\,(1 - 0{,}32) = 6\,800\,000\,грн. = 6{,}8\,млн.грн.$$

в) находим величину дивидендов на выплату акционерам:

$$D_{\sum} = ЧП \times Д_{вых} = 6\,800\,000 \times 0{,}8 = 5\,440\,000\,грн.$$

г) определяем выплату дивидендов на одну акцию:

$$D_1 = \frac{Д_{\sum}}{M} = 5\,440\,000 / 20\,000 = 272\,грн./\,акц.$$

д) курс акции составляет:

$$P_a = \frac{Д_1}{i} 272 / 0{,}8 = 340\,грн.$$

2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1.1 – 1.25. Первоначальный вклад равен Р грн., номинальная годовая ставка – j %, срок контракта в годах – n (таблица 2).Определить величину наращенной суммы в конце срока контракта при следующих способах начисления:

а) по простой ставке S;

б) по сложной ставке S_c;

в) при периодическом начислении k раз в год $S_н$;

г) при непрерывном начислении.

Найти эквивалентную величину ставки простых процентов, при которой в конце срока контракта будет справедливо равенство $S = S_н$. Построить на одном чертеже графики зависимости $S(n)$ по простой и сложной ставках.

Задание 2.1 – 2.25. Коммерческие банки С и D начисляют доход один раз в полгода, причем банк С – по простой процентной ставке, а банк D – по сложной ставке. Через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на L %. Срок контракта в годах равен Т (таблица 2). Найти:

а) коэффициент наращения за год;

б) соответствующие значения простой и сложной процентной ставок;

в) коэффициенты наращения через каждые полгода для простой и сложной ставки (результаты расчетов оформить в виде таблицы на весь срок контракта);

г) в какой банк выгоднее положить деньги на полгода, и в какой – на полтора года;

д) новую простую ставку, которую должен установить банк С, начиная со второго года, чтобы средства инвестора в конце срока начисления были равны.

Задание 3.1 – 3.25. Банк покупает вексель стоимостью S тыс. грн. за N лет до срока его оплаты по простой учетной ставке d % (таблица 3). Определить:

а) современную стоимость векселя Р;

б) доход банка Д;

в) какую сложную учетную ставку должен установить банк на срок контракта, чтобы его доход не уменьшился;

г) какую простую учетную ставку должен установить банк, чтобы его доход увеличился в R раз (таблица 3).

д) какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы его доход увеличился в R раз (таблица 3).

Таблица 2 – Коэффициенты для заданий 1, 2

	P	j	n	k	L	T
1	200	12	4	2	50	4
2	300	14	3	2	60	3
3	400	16	2	4	21	3,5
4	100	15	5	3	44	3
5	500	20	4	4	70	2,5
6	600	24	2	2	80	4
7	400	12	4	2	69	3,5
8	600	14	3	2	96	2,5
9	800	16	2	4	90	3
10	200	15	5	3	100	2,5
11	1000	20	4	4	225	3
12	1200	24	2	2	56	4
13	600	12	4	2	82	3,5
14	900	14	3	2	58	2,5
15	1200	16	2	4	64	3
16	300	15	5	3	210	4
17	1500	20	4	4	34	3,5
18	1800	24	2	2	72	3
19	800	12	4	2	68	2,5
20	1200	14	3	2	88	4
21	1600	16	2	4	54	3
22	400	15	5	3	38	2,5
23	2000	20	4	4	76	3,5
24	2400	24	2	2	94	3
25	500	12	4	2	18	4

Задание 4.1 – 4.25. Уровни инфляции в процентах за прошедший год по месяцам были равны поквартально (таблица 3): $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$; $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$; $\alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9$; $\alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha_{12}$. Вычислить:

а) индекс, темп и уровень инфляции за год;

б) средний ежемесячный темп инфляции и проверить полученное значение, вычислив с помощью него индекс инфляции;

в) на сколько процентов возросли цены с 01.01 по 01.06;

г) во сколько раз возросли цены на 01.12 по отношению к ценам на 01.06;

д) на сколько процентов цены на 01.01 будут ниже цен на 01.10.

Таблица 3 – Коэффициенты для заданий 3, 4

	S	N	d	R	α_1	α_4	α_7	α_{10}
1	20	2	6	1,5	3	4	5	2
2	40	2	9	1,3	5	6	4	3
3	30	4	6	1,4	2	4	5	6
4	50	3	12	1,2	1	3	5	6
5	60	6	8	1,6	2	3	4	7
6	10	5	6	1,8	7	6	5	1
7	20	3	4	1,5	2	5	4	3
8	40	3	6	1,3	3	4	5	6
9	30	8	3	1,4	5	6	2	4
10	50	4	9	1,2	3	1	6	5
11	60	4	12	1,6	3	2	7	4
12	10	3	10	1,8	1	5	6	7
13	20	5	2.4	1,5	4	3	2	5
14	40	4	4.5	1,3	6	5	4	3
15	30	3	8	1,4	4	2	5	6
16	50	5	7.2	1,2	5	6	1	3
17	60	8	6	1,6	7	4	2	3
18	10	4	7.5	1,8	5	1	7	6
19	20	4	3	1,5	5	2	3	4
20	40	5	3.6	1,3	4	3	6	5
21	30	6	4	1,4	6	5	4	2
22	50	6	6	1,2	6	5	3	1
23	60	12	4	1,6	4	7	3	2
24	10	6	5	1,8	6	7	5	1
25	20	6	2	1,4	3	4	2	5

Задание 5.1 – 5.8. Известны номинальные цены на 01.03 трех товаров: соответственно N_1, N_2, N_3 тыс. грн.; а на 01.09 – соответственно M_1, M_2, M_3 тыс. грн (таблица 4). Определить:

а) на сколько процентов изменились реальные цены каждого товара за этот период;

б) на сколько процентов изменились цены второго и третьего товаров относительно цены первого товара;

в) на сколько процентов стали относительно дешевле (дороже) указанные товары в ходе инфляционного процесса.

Таблица 4 – Коэффициенты для задания 5

Вариант	N_1	N_2	N_3	M_1	M_2	M_3
1	10	9	11	21	20	22
2	20	10	12	44	22	20
3	12	18	24	24	40	48
4	8	7	10	15	15	24
5	12	10	14	24	22	28
6	10	8	12	21	20	22
7	16	12	14	36	27	30
8	18	16	15	42	34	35

Задание 5.9 – 5.17. Первоначально месячная заработная плата составляла R_1 грн., а цена товара А – Z_1 грн. Через m месяцев заработная плата достигла R_2 грн., а цена товара повысилась до Z_2 грн. Среднемесячный уровень инфляции в рассматриваемый период составлял α % (таблица 5). Определите:

а) приведенную к первоначальному периоду новую цену товара с учетом инфляции;

б) на какую величину в гривнах и на сколько процентов изменилась цена товара с учетом инфляции;

в) на какую величину в гривнах и на сколько процентов изменилась реальная заработная плата за рассматриваемый период.

Таблица 5 – Коэффициенты для задания 5

Вариант	R_1	R_2	Z_1	Z_2	m	α
9	30	40	1200	1300	7	12
10	20	40	400	600	7	15
11	18	36	900	1000	6	10
12	10	20	800	1000	5	10
13	36	48	900	1000	4	20
14	18	36	600	900	6	12
15	12	20	400	600	5	8
16	14	21	600	800	4	12
17	24	32	500	700	3	12

Задание 5.18 – 5.25. Кредит на n лет получен под номинальную ставку сложных процентов j %. Количество начислений за год r (таблица 6). Найти коэффициент наращения кредита. Оценить эффективность операции при осуществлении депозита:

а) по эквивалентной простой ставке процентов;

б) по эквивалентной эффективной ставке сложных процентов.

Найти коэффициент наращения депозита, если эквивалентная эффективная ставка стала номинальной, а начисление происходит h раз в году.

Таблица 6 – Коэффициенты для задания 5

Вариант	n	j	r	h
18	2	40	4	3
19	3	36	6	4
20	4	60	2	3
21	2	36	3	4
22	3	24	6	4
23	4	40	4	2
24	2	60	4	3
25	3	30	6	2

3 ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ И СОСТАВЛЕНИЯ ТЕСТОВ

Задача 1. Компания А выдаёт ссуду 2000 единиц на 3 года по простой ставке 12 %, а компания Б – по сложной ставке 10 %. Ссуда выдается на условиях банковского учёта. Найти:

а) выдаваемую компаниями А и Б сумму кредита и их доход;

б) сделать сравнительные выводы о выгодности операций для кредитора и заемщика.

Задача 2. Уровни инфляции за 4 месяца составили соответственно 4, 5, 6, 8 %. Считать, что в месяце 30 дней. Вычислить:

а) индекс, темп и общий уровень инфляции;

б) средний ежемесячный темп инфляции;

в) на сколько процентов возросли цены с начала 1-го месяца на конец 3-го;

г) во сколько раз возросли цены с 30.02 по отношению к ценам на 01.01;

д) на сколько процентов цены на 01.01 будут ниже цен на 30.04.

Задача 3. Клиент хранит деньги на банковском депозите под 12 % годовых в размере 1000 единиц. При условии инфляции 2 % ежемесячно, требуется найти:

а) наращенную сумму за 6 месяцев;

б) реальный (приведенный к моменту начала операции) доход клиента;

в) вычислить величину ставки депозита, чтобы реальная доходность составила не менее 12 % годовых;

г) по этой ставке найти наращенную сумму, обеспечивающую эту доходность;

д) доказать, что по этой ставке доходность будет не менее12 % годовых.

Задача 4. Срок оплаты долгового обязательства составляет ½ года по простой учетной ставке 30 %. Оценить доходность операции по эквивалентным ставкам банковского депозита, когда начисляются:

а) простые проценты;

б) сложные проценты;

в) ставка номинальная, начисление ежеквартальное;

Задача 5. Облигация куплена по курсу 92 и будет погашена через 3 года.

а) оценить доходность приобретения облигации по эффективной ставке сложных процентов;

б) оценить доходность приобретения облигации по ставке простых процентов;

в) оценить доходность приобретения облигации по эффективной ставке сложных процентов, если на облигацию начисляются простые проценты в 5 % годовых.

Задача 6. Осуществлена покупка акции номиналом 2000 грн., на которую начисляются дивиденды в размере 10 % годовых, а также предполагается ежегодный рост стоимости одной акции на 4 % от номинала. Акция будет продана через 3 года. Определить:

а) величину годовых дивидендов;

б) стоимость акции;

в) ожидаемый общий доход;

г) доходность покупки акции в виде эквивалентной ставки простых процентов;

д) доходность покупки акции в виде эквивалентной ставки сложных процентов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Бочаров, П. П.** Финансовая математика : учебник / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М. : Гардарика, 2002. – 642 с., ил. – ISBN 5–8297–0078–6 (в пер.).

2 **Малыхин, В. И.** Финансовая математика : учеб. пособие для вузов. / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247с. – ISBN 5–238–00099–5.

3 **Фомин, Г. П.** Математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 544 с., ил. – ISBN 5–279–02310–8.

4 **Четыркин, Е. М.** Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. – 2-е изд., испр. – М. : Дело, 2002. – 400 с. – ISBN 5–7749–0193–9.

5 **Уотшем, Т. Дж.** Количественные методы в финансах : учеб. пособие для вузов ; пер. с англ. / Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу ; под ред. М. Р. Ефимовой. – М. : Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с. – ISBN 5-28-00036-7.

6 **Бугір, М. К.** Математика для економістів / М. К. Бугір. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998.- 192 с.

7 Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 471 с. – ISBN 5-238-00030-8.

8 **Жлуктенко, В. І.** Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник. У 2-х ч. Ч. 1: Теорія ймовірностей. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний , С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.

9 **Жлуктенко, В. І.** Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник. У 2-х ч. Ч. 2: Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С.С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.

Навчальне видання

КОЛЕСНИКОВ Сергій Олексійович,

ДМИТРЕНКО Ірина Сергіївна

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

(*Російською мовою*)

Редактор Я. О. Бершацька

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

219/2007. Підп. до друку . Формат 60 х 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 3,13.
Тираж прим. Зам. № .

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.