Міністерство освіти України
Донбаська державна машинобудівна академія

Методичні вказівки

до самостійної роботи по розділу курсу вищої математики

"Матриці та їх використання"

(конспект лекцій)

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол №__ від "__" _______ 1999

Краматорськ, 1999

УДК

Методичні вказівки до самостійної роботи по розділу курсу вищої математики “Матриці та їх використання” / Упор. В.О.Паламарчук, С.О. Шевцов. – 26 с.

Вказівки містять у собі велику кількість роз’яснень, вправ, задач та індивідуальні домашні завдання по розділу курсу вищої математики “Матриці та їх використання”.

Упорядники доц. В.О.Паламарчук,
ас. С.О. Шевцов.

Відповідний за випуск доцю Обухов А.М.

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} (i=1,2...m, j=1,2,...n), складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right),$$

де i – номер рядка, j – номер стовпця на перетині яких стоїть даний елемент.

Якщо m=n, то матриця називається *квадратною*, а число m – її *порядком*.

Матриця може мати лише один стовпець, або один рядок.

Якщо матриця має усі елементи рівні нулю, то вона називається *нульовою*. Квадратна матриця, у якої усі елементи крім тих, що знаходяться на головній діагоналі (a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}), дорівнюють нулю, називається *діагональною*. Та діагональна матриця, у якої a_{11}=a_{22}=...a_{nn}=1, має назву *одиничної* і позначається буквою **Е**. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для позначення елементів одиничної матриці зручно використовувати символ Кронекера δ_{ij}, визначений відповідно з правилом

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & при\ \ i=k \\ 0, & при\ \ i\neq k \end{cases}.$$

Тоді $\mathbf{E}=(\delta_{ij})$.

Дві матриці будуть *рівними* між собою, тоді і тільки тоді, коли мають однакові розміри, та всі їхні відповідні елементи рівні між собою. Тому рівність **А**=**В** вимагає a_{ij}=b_{ij}.

Визначник

Квадратна матриця **A** має *визначник*, що складається з її елементів і позначається символом det**A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Визначник утворюється підсумовуванням усіх таких добутків елементів матриці, у кожному з яких є по одному і тільки по одному елементу з кожного рядка і стовпця матриці, причому перед кожним добутком ставиться знак плюс або мінус. Наприклад, визначник для матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ дорівнює: $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, визначник для матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ дорівнює:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Графічно визначник можна подати так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - доданки зі знаком «+»;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - доданки зі знаком «-»

Визначники мають такі властивості:

1. Якщо кожен елемент деякого стовпця або рядка дорівнює нулю, то і сам визначник також дорівнює нулю.
2. Визначник не зміниться, якщо замінити рядки матриці стовпцями.
3. Якщо матриця **B** утворена з матриці **A** перестановкою двох її стовпців або рядків, то det**B**=-det**A**.
4. Визначник, який має два однакових рядка або стовпця, дорівнює нулю.
5. Множення всіх елементів деякого рядка або стовпця матриці на число *k* призведе до збільшення визначника у *k* разів.
6. Визначник матриці не зміниться, якщо до кожного елементу деякого стовпця або рядка додати добуток відповідних елементів іншого стовпця або рядка на число *k*.

Наприклад, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{то } \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - \\ -3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 0. \end{matrix}$$

Тобто наведена матриця має нульовий визначник. Іншими словами вона називається *виродженою*.

Прямокутна матриця ($m \neq n$) визначника не має.

Алгебраїчне доповнення

Мінором $\mathbf{D}_{ij}$ елементу a_{ij} називають визначник матриці, утвореної з матриці **A** викреслюванням *i*-го рядка та *j*-го стовпця. Наприклад, для матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ мінор } \mathbf{D}_{13} \text{ дорівнює } \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot8 - 5\cdot7 = 32 - 35 = -3 .$$

Алгебраїчним доповненням елементу a_{ij} називають $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{D}_{ij}$.

Наприклад, для матриці

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$ алгебраїчне доповнення до елементу a_{13} дорівнює

$$\mathbf{A}_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=1\cdot(4\cdot 8-5\cdot 7)=32-35=-3.$$

За допомогою алгебраїчних доповнень легко обчислювати визначники для матриць розміру 3 та більше розкладенням по елементам будь якого стовпця або рядка. Для матриці

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\cdot\mathbf{A}_{ik}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\cdot\mathbf{A}_{ki}$$, де k – стовпець або рядок.

Наприклад:

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(3\cdot 1-3\cdot 4)-2\cdot(2\cdot 1-1\cdot 4)=3-12-2\cdot(2-4)=-9+4=5$$

Операції над матрицями

Транспонована матриця

Операція *транспонування* матриці **A** полягає в переході до іншої матриці $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, рядками якої є стовпці матриці **A**, і, навпаки, стовпцями – рядки матриці **A**. Наприклад, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

В загальному вигляді $(a_{ij})^{\mathrm{T}}=(a_{ji})$. Очевидно $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Матриця, що співпадає зі своєю транспонованою матрицею, називається *симетричною*. У такої матриці $a_{ij}=a_{ji}$. Якщо $a_{ij}=-a_{ji}$, то матриця називається *кососиметричною*.

Долучена матриця

У кожної квадратної матриці існує *долучена* (приєднана) матриця. Долучену матрицю одержують, замінюючи кожний елемент вихідної матриці його алгебраїчним доповненням, та транспонуючи одержану матрицю алгебраїчних доповнень. Долучена матриця позначається символом adj**A**.

<u>Вправа 1</u>.

Знайти матрицю **B**, долучену до матриці **A**, тобто **B**=adj**A**, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці **A**.

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Складаємо долучену матрицю:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Додавання матриць

Матриці однакових розмірів можна додавати та віднімати за формулою:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{11} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Додавання матриць має такі властивості:

1. (**A**+**B**)+**C**=**A**+(**B**+**C**) – асоціативний закон;
2. **A**+**B**=**B**+**A** – комутативний закон.

Вправа 2.

Знайти суму матриць $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 0 & 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Множення матриць

Матрицю можна помножити на число. При цьому кожний елемент матриці помножується на це число.

$$k\mathbf{A}=\left(ka_{ij}\right)=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ & & \cdots & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Множення двох матриць можна здійснити лиш за умови, коли кількість стовпців однієї матриці дорівнює кількості рядків іншої. Такі матриці називаються *узгодженими*. Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

Добутком матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})$ розміром $m\times n$ на матрицю $\mathbf{B}=(b_{ij})$ розміром $n\times p$ називається така матриця $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(c_{ij})$ розміром $m\times p$, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці **A** на відповідний елемент j-го стовпця матриці **B**:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\ ,$$

$i=1,2\ldots m;\qquad j=1,2\ldots p.$

Добуток матриць має такі властивості:

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
3. $k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(k\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot(k\mathbf{B})$

Тут **A**, **B**, **C** – матриці, k – число.

<u>Вправа 3</u>.

Знайти $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ та $\mathbf{D}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}.$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0\cdot 1 & 0\cdot 2\\ -2\cdot 1 & -2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & -4\end{pmatrix};\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\end{pmatrix}.$$

Тобто операція множення не комутативна, при множенні матриць не можна міняти місцями множники.

Якщо для матриць **A** і **B** виконується умова **A**·**B**=**B**·**A**, то **A** і **B** носять назву *переставних*.

Вправа 4.

Відшукати усі матриці того ж розміру переставні з матрицею $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

Припустимо, що матриця $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ є переставною з матрицею **A**, тобто **A**·**B**=**B**·**A**.

Запишемо добуток матриць:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+7c & 3b+7d\\ 4a+3b & 4b+3d\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+4b & 3a+3b\\ 3c+4d & 7c+3d\end{pmatrix}.$$

Умова **A**·**B**=**B**·**A** потребує, щоб виконувались рівності

$$\begin{cases}3a+7c=3a+4b\\ 3b+7d=7a+3b\\ 4a+3b=3c+4d\\ 4b+3d=7c+3d\end{cases}.$$

Звідси $c=\dfrac{4}{7}b$, $d=a$. Отже, матриця **B** має вигляд: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{4}{7}b & a\end{pmatrix}$.

Тут a, b – будь які числа.

Можна довести, що $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{т}}=\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}}$, а

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}. \quad (1)$$

Обернена матриця та її використання для розв'язання системи лінійних рівнянь.

Обернена матриця

При множенні квадратних матриць одинична матриця **E** грає таку ж саму роль, як цифра “1” при множенні чисел. Тому завжди $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Продовжуючи аналогію, з множенням, будемо вважати *оберненою* таку матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, для якої виконується $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

З рівності (1) витікає $\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{-1}=\det\mathbf{E}=1$, або

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}. \qquad (2)$$

Рівність (2) вимагає, щоб визначник матриці А не дорівнював нулю:

$$\det\mathbf{A}\neq 0.$$

Якщо ця вимога не виконується, то матриця **A** – вироджена, тобто така, що не має оберненої.

Позначивши вихідну матрицю $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, можна показати, що обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$ дорівнює

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{adj\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}, \qquad (3)$$

де $\mathbf{A}_{ij}$ – алгебраїчне доповнення відповідного елемента матриці **A**.

Це твердження можна перевірити безпосередніми обчисленнями, тобто помноживши **A** на $\mathbf{A}^{-1}$ зліва та справа. При цьому використовується властивість визначника третього порядку:

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + a_{i3}\mathbf{A}_{i3} = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{якщо } i = j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j \end{cases}.$$

Вправа 5.

Знайти матрицю **C**, обернену до матриці $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У вправі 1 ми вже обчислили матрицю **B**=adj**A** - $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо $\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=15$. Складаємо обернену матрицю:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім множенням переконуємося, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Матриці дають можливість стисло записати систему рівнянь першого степеня:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}.$$

У загальному вигляді

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}. \qquad (4)$$

Тут

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо det**A**≠0, то одразу дістаємо розв’язок:

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}.$$

<u>Вправа 6</u>.

За допомогою оберненої матриці знайти розв’язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+2x_2+4x_3=4 \\ x_1+3x_2+9x_3=2 \end{cases}.$$

Впровадимо позначення:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Початкова система тепер має вигляд: **A**·**X**=**B**.

Обчислимо визначник матриці **A**:

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=2.$$

Зважаючи на те, що det**A**≠0, існує обернена матриця, а система має єдиний розв’язок. Відшукаємо обернену матрицю. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення усіх елементів **A**:

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=6 \quad \mathbf{A}_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=-5 \quad \mathbf{A}_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1$$

$$\mathbf{A}_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=-6 \quad \mathbf{A}_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=8 \quad \mathbf{A}_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$$

$$\mathbf{A}_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2 \quad \mathbf{A}_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-3 \quad \mathbf{A}_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$$

Отже, долученою до матриці **A** матрицею є

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що det**A**=2, оберненою матрицею є

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Помноживши обидві частини матричного рівняння на $\mathbf{A}^{-1}$ зліва, дістаємо $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, або

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задано матрицю **A**=(a_{ij}), i=1,...,m, j=1,...,n. Виділимо в матриці будь які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число не більше чисел m і n, тобто $k\le\min(m,n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором* k-го порядку матриці **A**.

Рангом r(**A**) матриці **A** називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає:

1. Ранг існує для будь-якої матриці, причому $0\le r(\mathbf{A})\le\min(m,n)$.
2. r(**A**)=0 тоді і тільки тоді, коли **A**=0.
3. Ранг квадратної матриці n-го порядку дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

На цих правилах базується метод знаходження рангу матриці.

Вправа 7.

Знайти ранг матриці

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо матрицю **A** таким чином, щоб усі елементи будь якого стовпця (наприклад третього), крім елемента a_{13} обернулися на нуль. Для цього до другого рядка додаємо перший, до третього додаємо перший, помножений на –2, до четвертого додаємо третій. Отримаємо

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Далі перетворимо матрицю **A** таким чином, щоб усі елементи четвертого стовпця, крім елементів a_{14} та a_{24} обернулися на нуль. Для цього до четвертого рядка додаємо другий, помножений на –1. Отримаємо

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 3, бо її мінор 3-го порядку відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=9\,.$$

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}.$$

Складемо основну матрицю **A** та розширену $\tilde{\mathbf{A}}$ матрицю даної системи:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Відповідь на запитання про існування розв’язку системи дає теорема Кронекера-Капеллі (наводимо без доведення).

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо при цьому ранги дорівнюють числу невідомих, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранги менші числа невідомих (але рівні між собою), то система має безліч розв'язків.

Вправа 8.

Дослідити, чи сумісна система

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Складемо основну матрицю $\mathbf{A}$ та розширену $\tilde{\mathbf{A}}$ матрицю цієї системи та знайдемо $\mathrm{r}(\mathbf{A})$, $\mathrm{r}(\tilde{\mathbf{A}})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Елементарні перетворення запишемо таким чином:

$\mathrm{r}(\mathbf{A})$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 21 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 21 & 10 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 24 & 11 & 0 \\ 0 & 21 & 10 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 24 & 11 & 0 \\ 0 & 70 & 32 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 11 \\ 0 & 0 & 70 & 32 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 11 \\ 0 & 0 & 70 & 32 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3.$$

$r(\tilde{\mathbf{A}})$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 21 & 10 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 18 & 9 & 0 & 0 & 11 \\ 70 & 32 & 0 & 0 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 70 & 32 & 38 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 70 & 6 & 38 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\tilde{\mathbf{A}}) = 4.$

У відповідності з теоремою Кронекера-Капеллі ця система не є сумісною.

Задачі для контрольних завдань

1. Знайти матриці **B**=adj**A**, якщо

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&-1&2\\2&-1&0\end{pmatrix}$.

2. Знайти добуток матриць **A**·**B** та **B**·**A**

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$;

б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\5&7&1\\1&4&3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&-1&2&1&-1\\2&2&0&1&1\\1&-1&5&4&4\end{pmatrix}$.

3. Відшукати усі матриці того ж розміру, переставні з матрицею

а) $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

4. Знайти усі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці другого порядку.
5. Знайти обернені матриці для матриць

а) $\begin{pmatrix}3&5\\7&-9\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}1&2&1\\4&3&-2\\-5&-4&-1\end{pmatrix}$.

6. За допомогою оберненої матриці знайти розв'язок систем рівнянь.

а) $\begin{cases}x_1+4x_2-5x_3=8\\2x_1+3x_2-4x_3=9\\x_1-2x_2-x_3=6\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=3\\5x_1+12x_2-2x_3=-1\\4x_1+9x_2-2x_3=2\end{cases}$.

7. Знайти ранг матриці

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. При якому значенні а ранг матриці дорівнює трьом?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & a & a \end{pmatrix}$.

9. Дослідити, чи сумісна система

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$.

Індивідуальні домашні завдання

ІДЗ №1

Є дві матриці **A** і **B**. Знайти а) **A**·**B**; б) **B**·**A**; в) $\mathbf{A}^{-1}$.

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$;

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$;

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & -9 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$;

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$;

20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$;

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 7\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$;

26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 2 & 3 & -4\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

ІДЗ №2

Дослідити, чи сумісна система. При потребі розв’язати за допомогою оберненої матриці.

1. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x+y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+4y-z=-9 \\ 4x-y+5z=-2 \\ 3y-7z=-6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \\ 2y+7z=17 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-2y-z=-2 \\ 2x-y=-1 \\ y+z=-2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+4y-5z=8 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-2y-z=6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 5x+12y-2z=-1 \\ 4x+9y-2z=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x+y+3z=-9 \\ 8x+3y+5z=-13 \\ 2x+5y-z=-5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=5 \\ 2y-z=3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+2y=3 \\ -x+y+2z=5 \\ 3x+z=-2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \\ 2y+7z=17 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 3x-y+5z=0 \\ 5x+2y+13z=2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y-z=-2 \\ y+z=-2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x+2y+z=1 \\ y-z=-3 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y + 4z = -6 \\ x + z = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ 2x - y = -1 \\ y + z = -2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$

Короткий українсько-російський допоміжний словник

Безпосередньо	Непосредственно
Відповідний	Соответствующий
Відшукати	Отыскать
Визначник	Определитель
Виконувати	Выполнять
Використати	Использовать
Вимога	Требование
Вихідна	Исходная
Властивість	Свойство
Впровадити	Ввести
Добуток	Произведение
Довести	Доказать
Доповнення	Дополнение
Загальний	Общий
Зважити	Учесть
Існування	Существование
Неможливо	Невозможно
Отримана	Полученная
Перетин	Пересечение
Приєднана	Присоединенная
Прямокутна	Прямоугольная
Розв’язок	Решение
Рядок	Строка
Стовпець	Столбец
Тобто	То есть
Узгоджена	Согласованная

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. – 1993. – 648 с.
2. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч.1./ Гурский Е.И. и др. – Минск.: Вышейшая школа. – 1989. – 349с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. / Под ред. Рябушко А.П. – Минск: Вышейшая школа. – 1990. – 268с.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи по розділу курсу вищої математики

“Матриці та їх використання”

Упорядники: Віктор Олександрович Паламарчук,
Сергій Олександрович Шевцов.

Редактор

5. Подп. в печать Формат
Офсетная печать. Усл.печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж экз.

ДГМА, 349313, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72.