

**Міністерство освіти і науки України**  
**Донбаська державна машинобудівна академія**

**К. В. Власенко, А. І. Степанов**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

**Навчальний посібник**  
**до практичних занять і самостійної роботи**

(для студентів денної та заочної форм навчання)

Затверджено  
на засіданні  
вченої ради ДДМА  
Протокол №      від      2010

**Краматорськ 2010**

**УДК 517.2(075.8)**

**ББК 22.11**

**В 58**

**Рецензенти:**

**Скафа О. І.**, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та методики викладання математики Донецького національного університету;

**Труш Н. І.**, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики Слов'янського державного педагогічного університету.

**Власенко, К. В.**

**В 58** Вища математика. Математичний аналіз : навчальний посібник до практичних занять та самостійної роботи / К. В. Власенко, А. І. Степанов. – Краматорськ : ДДМА, 2010. – 88 с.

ISBN

Навчальний посібник містить навчальні завдання для аудиторної й домашньої самостійної роботи над модулем «Математичний аналіз». До кожної з тем модуля пропонуються програми корекції знань студентів, що включають описання можливих помилок студентів; рекомендації щодо їх виправлення (покликання на теоретичний виклад питання; приклади розв'язання аналогічних задач, вправ).

**УДК 517.2(075.8)**

**ББК 22.11**

ISBN

© К. В. Власенко,

А. І. Степанов, 2010

© ДДМА, 2010

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	4
<b>1 Вправи до практичних занять</b> .....	5
1.1 Множини. Функції. Послідовності. Границя послідовності .....	5
1.1.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	5
1.1.2 Індивідуальні завдання .....	6
1.2 Границя функції .....	12
1.2.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	12
1.2.2 Індивідуальні завдання .....	13
1.3 Непереривність функції.....	21
1.3.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	21
1.3.2 Індивідуальні завдання .....	21
1.4 Похідна функції.....	24
1.4.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	24
1.4.2 Індивідуальні завдання .....	29
1.5 Диференціал функції. Основні теореми диференціального числення.....	36
1.5.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	36
1.5.2 Індивідуальні завдання .....	38
1.6 Застосування похідної до дослідження функцій .....	41
1.6.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	41
1.6.2 Індивідуальні завдання .....	44
<b>2 Тести для самоперевірки</b> .....	46
2.1 Вступ до математичного аналізу .....	46
2.2 Диференціальне числення функції однієї змінної .....	53
2.3 Дослідження функції за допомогою похідних .....	59
<b>3 Контрольні роботи</b> .....	62
3.1 Варіанти контрольних робіт .....	62
3.2 Підготовка до захисту контрольних робіт .....	78
<b>Література</b> .....	79
<b>Додаток А. Показчик відповідей на питання</b> .....	80

## ВСТУП

Самостійне навчання передбачає активне опанування знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника й додаткової літератури, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання. Навчальний посібник служить для поглибленого самостійного опрацювання курсу студентом й самоперевірки своїх знань з модуля «Математичний аналіз».

Навчальний посібник містить завдання для самостійного засвоєння модуля. Обсяги комплектів вправ дозволяють застосовувати їх для:

- 1) проведення практичних занять (аудиторної та самостійної роботи);
- 2) формування комплектів розрахунково-графічних завдань за всіма темами розділів (індивідуальні тестові завдання);
- 3) проведення тестування для самоперевірки окремо за кожним із розділів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Дослідження функції за допомогою похідних»;
- 4) формування комплектів контрольних робіт для студентів денної форми навчання й студентів-заочників (контрольні роботи за модулем).

У посібнику до всіх контрольних (або самостійних) робіт пропонуються рекомендації щодо корекції знань студентів, які включають:

- опис можливих питань студентів, що виникають під час розв'язування задач;
- рекомендації щодо з'ясування питань (покликання на теоретичний виклад питання, на приклади правильного розв'язання аналогічних задач, вправ);
- вправи, рекомендовані студентам для усунення помилок і закріплення навичок розв'язування задач.

# 1 ВПРАВИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

## 1.1 Множини. Функції. Послідовності. Границя послідовності

Множини. Функції. Класифікація функцій. Елементарні функції. Послідовність. Границя послідовності.

### 1.1.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи

1. Використовуючи визначення границі послідовності, доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}.$$

2. Обчисліть границі:

$$2.1. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+1000}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{2n+11}; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^2+n+1}{4n^3+5}.$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4-5n^2+4}{(n^3-n+2)(2n+3)} \quad 2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{13}{3}}+3n^{\frac{14}{4}}+2}{n^{\frac{16}{5}}-1} \quad 2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n^2+1)}{(n+2)!}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-(n+1)!} \quad 2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5+\dots+(2n+1)}{2n^2-3n+4} \quad 2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}.$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+2^n}{3^n+4^n} \quad 2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{4^{\frac{1}{n}}-1} \quad 2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2-n-2}-2n).$$

3. Побудуйте графіки функцій:

$$3.1. y = \frac{x-2}{x-3}.$$

$$3.2. y = x^2 - 4x.$$

$$3.3. y = \frac{1}{x^2+4}.$$

$$3.4. y = \sqrt{4-2x}.$$

$$3.5. y = \sqrt{4-2|x|}.$$

$$3.6. y = \sqrt{3-x^2} + 2x.$$

$$3.7. y = \log_2(1-x).$$

$$3.8. y = 3^{-|x|} 2^x.$$

$$3.9. y = 10^{\lg \sin x}.$$

$$3.10. y = \arcsin x + 2 \arccos x.$$

**Відповіді:**

**2.1.** а) 3; б)  $\infty$ ; в) 0. **2.2.** 2. **2.3.**  $\infty$ . **2.4.** 1. **2.5.** 1. **2.6.**  $\frac{1}{2}$ . **2.7.**  $\frac{1}{3}$ . **2.8.** 0.

**2.9.**  $\frac{1}{2}$ . **2.10.**  $-\frac{1}{4}$ . **3.1.** Указівка: графіком функції є гіпербола  $y = 1 + \frac{1}{x-3}$ .

**3.6.** Указівка: графіком функції є півколо  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ .

**3.10.** Указівка: скористайтеся тотожністю  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

**1.1.2 Індивідуальні завдання**

**1. Обчисліть границі:**

**1.1. а)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3 - (3+n)^3 + 1}{(2+n)^2 + (3+n)^2};$

**б)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{10}{3}} + 2n^{\frac{10}{4}} + 1}{n^{\frac{15}{4}} - 2};$

**в)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$

**г)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}.$

**1.2. а)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2(n+1)^2 + 2}{(2n+1)^3 + n - 1};$

**б)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{7}} - n^{\frac{3}{5}} + 3}{(n-1)^{\frac{5}{8}}};$

**в)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+\dots+(4n-3)}{1+7+\dots+(6n-5)};$

**г)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 3} - \sqrt{n^2 + 1}).$

**1.3. а)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n + 1}{2 - 7n - 2n^4};$

**б)**  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} + 2n^{\frac{3}{4}} + 1}{(n+3)^{\frac{7}{8}}};$

**в)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n+1)};$

**г)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} (\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3 - 2}).$

**1.4. а)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^4 - 3n + 1}{2 - 7n - n^5};$

**б)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{6}{5}} + 2n^{\frac{7}{6}} + 1}{n^{\frac{13}{10}} - 4};$

**в)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n});$

**г)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 3} - \sqrt{n^2 + n}).$

**1.5. а)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^4 - 3n^3 + n}{100 + 4n + n^3};$

**б)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{3}} + 2n^{\frac{5}{4}} + 5}{n^{\frac{11}{8}} - 2};$

**в)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+3)!}{(n+3)!};$

**г)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{5^n + 1}.$

$$1.6. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^4 + 5n^3 - 2n}{(4n)^3 - n - 6};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right);$$

$$1.7. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2(n-3) + 6n^3 - n}{(n-1)^3 + n + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)};$$

$$1.8. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2(n-1) + 3n^2 + 1}{(n-2)^3 + 2n + 5};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}\right)};$$

$$1.9. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)^2(n+2) + 2n^2 - 1}{(2n-1)^3 + n^2};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{(-1)^n}{4^n}\right)};$$

$$1.10. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)^2(n-2) - 5n^3}{8(n-1)^3 + 4n + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{3^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)};$$

$$1.11. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2(n-1) - 5n^2}{8(n+1)^5 + n + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{6^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^n}{4^n}\right)};$$

$$1.12. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2(n+2) + 3n^2}{5(n-3)^4};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{7^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{(-1)^n}{7^n}\right)};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4} + \sqrt[3]{7-2n^3}}{\sqrt[3]{8n^6} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{\frac{n}{2}} - 1}{8^{\frac{n}{2}} + 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3} + \sqrt[3]{5n^5}}{\sqrt[4]{2n^5} - \sqrt[7]{n^8} + 5};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 2} + \sqrt[3]{n^7}}{\sqrt[4]{2n^5} - \sqrt[7]{n^{16}} + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 1} + \sqrt[4]{n^9}}{\sqrt[4]{2n^{11}} - \sqrt[7]{n^9} + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n-2)!}{(n-1)! + (n-2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-3} + \sqrt[3]{3n^4}}{\sqrt[4]{2n^3} + \sqrt[3]{6n^4}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 7} - \sqrt[6]{5n^7}}{\sqrt[5]{n^7} + 3 + \sqrt{n}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)! + 3n!}{(n+2)! - n!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4 + 1} + \sqrt[5]{n^7}}{\sqrt[5]{n^8} + 2 + \sqrt{n}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!}.$$

$$1.13. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(n-1)^2 + 2n^3}{10(n+1)^3 + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$1.14. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(n-3)^2 + 7n^3}{14(n-1)^3 + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{\sqrt{2n^2+3}};$$

$$1.15. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(n-3)^2 - n^3}{11(n-2)^3 + 22};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{2n^2+1}};$$

$$1.16. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)(n+1)^2 + 3n^2}{6(n+2)^3 + 5};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{\sqrt{3n^2+1}};$$

$$1.17. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-1)^3}{3n^2 + 2n - 1};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+6+11+\dots+(5n-4)}{n\sqrt{4n^2+1}};$$

$$1.18. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 - (n-2)^3}{5n^2 + 2n - 6};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+7+13+\dots+(6n-5)}{n\sqrt{5n^2+1}};$$

$$1.19. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{2n^3 + n + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$1.20. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{4n^3 + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{3n-2}{n^2} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^7+5} + \sqrt[4]{3n^9}}{\sqrt[5]{n^7+2} + \sqrt{n}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + 5n!}{2(n+2)! - n!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^7} + \sqrt[4]{2n^{11}}}{\sqrt[5]{n^7+1} + \sqrt{n^5}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + 5(n+2)!}{3(n+3)! - (n+2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^{11}} + \sqrt[4]{3n^{13}}}{\sqrt[5]{n^{16}+1} + \sqrt{n}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - 4(n+2)!}{2(n+3)! + (n+2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^{10}} + \sqrt[4]{2n^{13}}}{\sqrt[5]{n^{16}+1} + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - 5(n+2)!}{3(n+3)! + (n+2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^7} + \sqrt[4]{5n^9}}{\sqrt[7]{n^{16}-1} + 3};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2(n-2)!}{\sqrt[7]{n^{16}-1} + 3}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5} + \sqrt[4]{3n^7}}{\sqrt[5]{n^8-1}};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 2(n-2)!}{n! + (n-2)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[5]{6n^6}}{\sqrt[5]{n^6-1} + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2(n-1)!}{4(n+1)! + (n-1)!}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4} + \sqrt[5]{3n^3}}{\sqrt[7]{n^6+1} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 4(n-1)!}{2(n+1)! + (n-1)!}.$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{1.21. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n(n-1)^3 - 2n}{2 - 8n^2 - 3n^4}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{7}} + 4n^{\frac{3}{8}} + 2}{(n+1)^{\frac{7}{16}}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+6+10+\dots+(4n-2)}{1+3+5+\dots+(2n+1)}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-4}). \\
\mathbf{1.22. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)^2 + 5n^3}{3(n+2)^3 + 1}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^7} + \sqrt[5]{4n^{11}}}{\sqrt[3]{n^7+1} + \sqrt{n^7}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+3)(n+1)}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4^{n+2}}{5-3 \cdot 4^n}. \\
\mathbf{1.23. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)(n-3) - 6n^3}{2(2n-1)^3}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt[7]{3n^4}}{\sqrt[4]{n^3} - \sqrt[9]{3n^4}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n})}{(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^n}{4^n})}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! + (n+2)!}{(n+4)! - (n+3)!}. \\
\mathbf{1.24. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 + 7n^3}{3(3n-1)^3}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt[6]{n^5}}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[7]{3n^4}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5+8+\dots+(3n-1)}{n\sqrt{(4n+2)(n+11)}}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)! + (n+4)!}{(n+5)! - (n+3)!}. \\
\mathbf{1.25. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-5)(n+1)(3n-1)}{(4n-1)^3}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7} + n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[3]{4n^4}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5+7+\dots+(2n+1)}{(n+1)\sqrt{2n+3}}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)! + (n+4)!}{(n+6)! - (n+5)!}. \\
\mathbf{1.26. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(n-1)(2n-3)}{(n+2)^3}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[5]{n^3} + \sqrt[3]{8n^4}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n\sqrt{n+3}}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! + n!}. \\
\mathbf{1.27. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(2n-1)(2n+3)}{(2n+5)^3}; & \mathbf{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5} + n^{\frac{7}{4}}}{\sqrt[5]{n^8} + \sqrt[3]{27n^4}}; \\
\mathbf{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+7+11+\dots+(4n-1)}{2+6+10+\dots+(4n-2)}; & \mathbf{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)! + (n+1)!}{3(n+2)! - n!}.
\end{array}$$

$$1.28. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)(3n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)^2}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{2+5+8+\dots+(3n-1)}$$

$$1.29. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(2n-3)(n+2)}{(n+4)(2n+7)^2}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5+7+\dots+(2n+1)}{2+4+6+\dots+2n}$$

$$1.30. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(2n-1)(n-1)}{(n+2)(2n+3)^2}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{4n-3}{n^2} \right)$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^9} + n^{\frac{11}{5}}}{\sqrt[5]{n^8} + \sqrt[6]{n^{13}}}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{10(n+2)! - (n+1)!}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} + n^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{n^2} + \sqrt[7]{n^2}}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! + (n+3)!}{n(n+3)! - (n+2)!}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^2} + n^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[5]{n^2} + \sqrt[7]{n^4}}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)! + (n+2)!}{n(n+1) - (n+2)!}$$

2. Побудуйте графіки функцій:

$$2.1. \text{ а) } y = \frac{x}{x-2}$$

$$\text{б) } y = 10^{\lg \cos 2x}$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{x^2 + 4x + 6}$$

$$2.2. \text{ а) } y = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{6-4x}$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$2.3. \text{ а) } y = \ln(e-x)$$

$$\text{б) } y = \sin x + \cos x$$

$$\text{в) } y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$2.4. \text{ а) } y = \log_2 x^2$$

$$\text{б) } y = \sin^2 x$$

$$\text{в) } y = \frac{x+2}{x+1}$$

$$2.5. \text{ а) } y = \log_3(|x|-1)$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}^2 x$$

$$\text{в) } y = \frac{x+2}{x-4}$$

$$2.6. \text{ а) } y = \frac{1}{x^2+2}$$

$$\text{б) } y = \operatorname{ctg}^3 x$$

$$\text{в) } y = \frac{x-2}{x+1}$$

$$2.7. \text{ а) } y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{б) } y = \sin(2x-1)$$

$$\text{в) } y = 2^{|x|}$$

$$2.8. \text{ а) } y = \log_2 x^4$$

$$\text{б) } y = 2 \cos^2 x$$

$$\text{в) } y = 3^{\sin x}$$

$$2.9. \text{ а) } y = \sqrt{\sin x}$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{в) } y = 5^{\cos x}$$

$$2.10. \text{ а) } y = 4^x + 4^{-x}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\cos x}$$

$$\text{в) } y = \frac{x+2}{2-x}$$

$$2.11. \text{ а) } y = 3^x + 3^{-x}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{в) } y = \lg \frac{10}{x}$$

<b>2.12. a)</b> $y = 2^x - 2^{-x};$	<b>б)</b> $y = -\sqrt{\sin^2 x};$	<b>В)</b> $y = \frac{x-1}{2-x}.$
<b>2.13. a)</b> $y = \frac{1}{x^2-4};$	<b>б)</b> $y = \sin 3x;$	<b>В)</b> $y = 4^{- x }.$
<b>2.14. a)</b> $y = x + 3^x;$	<b>б)</b> $y = -\sqrt{-\sin^2 x};$	<b>В)</b> $y = \log_2 \frac{4}{x}.$
<b>2.15. a)</b> $y = \frac{x}{-x+4};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{1-x^2};$	<b>В)</b> $y = \frac{1}{x^2+3}.$
<b>2.16. a)</b> $y = \frac{x}{3-x};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{-x^2+6x};$	<b>В)</b> $y = \log_x 4.$
<b>2.17. a)</b> $y = \lg( x +1);$	<b>б)</b> $y = \operatorname{arctg} 2x;$	<b>В)</b> $y = -2^{-x^2}.$
<b>2.18. a)</b> $y = \frac{x+2}{3-x};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{-x^2-2x};$	<b>В)</b> $y = 2^{\frac{1}{\cos x}};$
<b>2.19. a)</b> $y = \frac{ x }{1+ x };$	<b>б)</b> $y = -\sqrt{9-x^2};$	<b>В)</b> $y = 2^x + 5^x.$
<b>2.20. a)</b> $y = \frac{ x }{1+ x };$	<b>б)</b> $y = -\sqrt{4-x^2};$	<b>В)</b> $y = 2^{\operatorname{tg} x}.$
<b>2.21. a)</b> $y = x + 4^x;$	<b>б)</b> $y = \sqrt{-\cos^2 x};$	<b>В)</b> $y = \frac{-2x}{1+x}.$
<b>2.22. a)</b> $y = \frac{1}{x^2-4};$	<b>б)</b> $y = \operatorname{ctg} 2x;$	<b>В)</b> $y = \frac{x-1}{x-4}.$
<b>2.23. a)</b> $y = 5^x + 5^{-x};$	<b>б)</b> $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3};$	<b>В)</b> $y = \left  \frac{x+1}{2-x} \right .$
<b>2.24. a)</b> $y = \frac{x+2}{-x};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{-x^2-6x};$	<b>В)</b> $y = \frac{1}{\cos x}.$
<b>2.25. a)</b> $y = \frac{x^2-1}{1-x};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{25-x^2};$	<b>В)</b> $y = \frac{1}{\arcsin x}.$
<b>2.26. a)</b> $y = 6^x - 6^{-x};$	<b>б)</b> $y = \sin \frac{x}{4};$	<b>В)</b> $y = \left  \frac{x-2}{x} \right .$
<b>2.27. a)</b> $y = \frac{5}{x^2+5};$	<b>б)</b> $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$	<b>В)</b> $y = \frac{ x -1}{x+1}.$
<b>2.28. a)</b> $y = \operatorname{tg} 3x;$	<b>б)</b> $y = \log_2 x - \log_3 x;$	<b>В)</b> $y = \frac{4-x}{x+1}.$
<b>2.29. a)</b> $y = \frac{1}{x^2-9};$	<b>б)</b> $y = \operatorname{ctg} 3x;$	<b>В)</b> $y = \frac{x+1}{x+3}.$
<b>2.30. a)</b> $y = \frac{x+2}{1-x};$	<b>б)</b> $y = \sqrt{-x^2+2x};$	<b>В)</b> $y = 3^{\operatorname{ctg} x}.$

## 1.2 Границя функції

Границя функції. Теореми про границі. Перша важлива границя. Число  $e$ . Друга важлива границя. Висновки. Застосування еквівалентностей для обчислення границь.

### 1.2.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи

#### 1. Обчисліть границі:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x - 1}{8x^5 - 2(x-1)^4 - 2}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 5x + 3}{4x^2 - 2x^4 + 3}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 1}{-2x^6 - x^4 + 1}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{8x^3 - 4x^2}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 2}{x^2 + 5x - 6}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^2} - \sqrt[3]{1+7x}}{x^2 - 1}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+14} - 4}.$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x).$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - 1}).$$

#### 2. Обчисліть границі, використовуючи першу й другу важливі границі та висновки з них:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x + \sin 6x}{\sin 9x - \sin 5x}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos \frac{\pi x}{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{x}}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2 \cos \frac{\pi x}{6}}{x - 2}.$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 3} (9 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-1}{5x+1} \right)^{3x+2}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\sec x}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 3^x}{5^{\operatorname{tg} x} - 1}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(5x-19)}{x^2 - 6x + 8}.$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^7 - 2^x}{x}.$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^8 - (1-x)^8}{\ln(1+x)}.$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \log_{x^2} 2.$$

3. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \sqrt{x}) + e^x - x^2}{\arcsin 2x + \operatorname{arctg}^2 3x - x^4}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(10 - x^2)}{\sin 2\pi x}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (e^{3x} - 1)}{\sqrt[4]{1 + x} - 1}$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

**Відповіді:**

1.1.  $\frac{3}{8}$ . 1.2.  $\infty$ . 1.3. 0. 1.4.  $-1,5$ . 1.5.  $-\frac{5}{7}$ . 1.6. 0,125. 1.7.  $-\frac{5}{24}$ . 1.8.  $-\frac{4}{3}$ .  
 1.9.  $\infty$ , якщо  $x \rightarrow -\infty$ ; 2, якщо  $x \rightarrow \infty$ . 1.10. 0. 2.1. 3,5. 2.2.  $\frac{2}{7}$ . 2.3.  $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ . 2.4.  
 $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ . 2.5.  $\frac{12}{\pi}$ . 2.6.  $e^{\frac{6}{5}}$ . 2.7.  $e^{-\frac{3}{2}}$ . 2.8.  $e^{-1}$ . 2.9. 0,25. 2.10.  $\log_5 3$ . 2.11. 2,5. 2.12.  
 $14 - \ln 2$ . 2.13. 0. 2.14.  $\ln 2$ . 3.1.  $-0,5$ . 3.2.  $-\frac{3}{\pi}$ . 3.4. 12. 3.5.  $-\frac{2}{\pi}$ .

### 1.2.2 Індивідуальні тестові завдання

1. Знайдіть границі функцій:

$$1.1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 3x - 10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - \sqrt{2x + 3}}{2x^2 - 5x - 3}.$$

$$1.2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 2x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{5x + 6} - \sqrt{3x + 4}}.$$

$$1.3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 7x + x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x + 2} - 1}{4x^2 - 1}.$$

$$1.4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 5x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt{6x - 1} - \sqrt{12x - 3}}{3x^2 - 4x + 1}.$$

$$1.5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x - 5} - \sqrt{x + 1}}{2x^2 - 5x + 2}.$$

$$1.6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 5x - 4}{2x^2 + 3x + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 4} - \sqrt{x}}{2x^2 - x - 6}.$$

$$1.7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 9x - 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3(x + 1)} - 1}{27x^3 + 8}.$$

$$1.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{3x - 8}}{x^2 - 9x + 8}.$$

$$1.9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{5}} \frac{5x^2 + 8x + 3}{5x^2 - 7x - 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3}}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$1.10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{2x+9}}{4x^2 - 3x}.$$

$$1.11. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 2}{8x^3 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 2}.$$

$$1.12. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{12x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x - 1}.$$

$$1.13. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 11x - 4}{x^2 + 21x + 68};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{6x+6}}{9x^2 - 4}.$$

$$1.14. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 2}{8x^3 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 2}.$$

$$1.15. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{12x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x - 1}.$$

$$1.16. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 11x - 4}{x^2 + 21x + 68};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{6x+6}}{9x^2 - 4}.$$

$$1.17. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 3}{8x^{12} - 10x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$1.18. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{4x^2 + 3x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{16x^2 - 1}{\sqrt{12x+4} - \sqrt{4x+2}}.$$

$$1.19. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{4x^2 + 3x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+3} - \sqrt{3-2x}}{5x^2 - 6x}.$$

$$1.20. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{6x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10x-1} - \sqrt{5x+4}}{2x^2 + x - 3}.$$

$$1.21. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{4x^2 - 4x - 15}{2x^2 - 7x + 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-1}}{x^3 - 1}.$$

$$1.22. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{3x^2 + 10x - 8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{2x+3}}{2x^2 + 3x - 2}.$$

$$1.23. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 9x - 2}{x^3 - 8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6x+7} - \sqrt{2x+3}}{2x^2 + x - 1}.$$

$$1.24. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 7x + 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{2x-2}}{x^3 - 27}.$$

$$1.25. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{2x^2 - 9x + 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{16x^2 - 1}{\sqrt{8x + 3} - 1}.$$

$$1.26. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 11x + 2}{10x^2 + 3x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 4} - \sqrt{4 - x}}{2x^2 - 3x + 2}.$$

$$1.27. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - 8x + 5}{3x^2 + x - 10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 3}}{11x^2 + 10x - 1}.$$

$$1.28. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 5x - 2}{3x^2 + 4x + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3x + 2} - \sqrt{6x}}{3x^2 - 5x + 2}.$$

$$1.29. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 9x + 9}{x^2 + x - 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{6x - 3}}{x^2 - 4x - 5}.$$

$$1.30. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x + 2} - \sqrt{3x + 6}}{x^2 + 4x - 5}.$$

2. Знайдіть границі функцій, використовуючи першу важливу границю:

$$2.1. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{x \operatorname{tg} x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (5 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{10}.$$

$$2.2. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 7x}{\sin 3x - \sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{1 - \sin x}.$$

$$2.3. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

$$2.4. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 6x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin 2x - \cos 2x}{x^2}.$$

$$2.5. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \sin 5x}.$$

$$2.6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\sin^2 8x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}.$$

$$2.7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sin 3\pi x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 3 \cos 2x + \cos^2 2x}{x^2}.$$

$$2.8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x + 1}{\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$2.9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) \operatorname{ctg} 3\pi x;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 4x - 5 \cos 4x + 4}{x \sin x}.$$

$$2.10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 1}{\cos 3\pi x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 2x}.$$

$$2.11. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x \sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \operatorname{tg} x.$$

- 2.12. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 3x}$ ;
- 2.13. a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin 4x}$ ;
- 2.14. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 4x}$ ;
- 2.15. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ ;
- 2.16. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \operatorname{ctg} \pi x$ ;
- 2.17. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 3x}$ ;
- 2.18. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{\sin^3 x}$ ;
- 2.19. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 5x + 1}$ ;
- 2.20. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$ ;
- 2.21. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos 5\pi x + 1}{\cos 4\pi x - 1}$ ;
- 2.22. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \operatorname{tg} \frac{5x}{2}$ ;
- 2.23. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ ;
- 2.24. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \pi}{\operatorname{tg} 5x}$ ;
- 2.25. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 4x}$ ;
- 2.26. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\cos \frac{\pi x}{4}}$ ;
- 2.27. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ ;
- 2.28. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 x}$ ;
- 2.29. a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ ;
- 2.30. a)  $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi + x}{\operatorname{tg} 2x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 6x - \operatorname{tg}^2 3x}{\sin x^2}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2 + 1}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 3\sin x + 2}{2x - \pi}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x)}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \operatorname{tg} 3x}{\sin x - \arcsin 2x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{tg} \frac{1}{x^2 - 4}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3) \sin \frac{1}{x - 2}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 6\cos x + 5}{x^2}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 3x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{1 - \cos 6x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sin \frac{x - 3}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 7\cos x + 6}{\operatorname{tg}^2 2x}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) \sin \frac{1}{3x - 1}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{ctg} \pi x$ ;

3. Знайдіть границі функцій, використовуючи другу важливу границю або її висновки:

3.1. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+1} \right)^{x+2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$ .

3.2. a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)^{\frac{2}{x^2-4}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\ln \cos \sqrt{x}}$ .

3.3. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x-3)}{x-1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5-2x^2}{3-2x^2} \right)^{7-x^2}$ .

3.4. a)  $\lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{x+5}{2x+9} \right)^{\frac{3}{x+4}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ .

3.5. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1)[\ln(x-2) - \ln(x+1)]$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{2x-1} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$ .

3.6. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+3} \right)^{x-1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sin x}{\sin 2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$ .

3.7. a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{x+3} - 1}{x^2 + 2x - 3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{3x+7}{2x+6} \right)^{\frac{5}{x+1}}$ .

3.8. a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{\sin 3x}$ .

2.3.9  
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x-2}{2-x} \right)^{\frac{2}{x^3-1}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x \log_{1-x^2} e)$ .

3.10. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)[\ln(2x-1) - \ln(2x+3)]$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 8^x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

3.11. a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(x-4)}{x^2 - 4x - 5}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{4}{x^2-4}}$ .

3.12. a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x+7}{2x+9} \right)^{\frac{3}{x+2}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$ .

3.13. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{2}{x^2-1}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2-1) \log_x 2}$ .

3.14. a)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}} \frac{e^{5x+2} - 1}{5x^2 + 7x + 2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{3x-1} \right)^{2x+3}$ .

3.15. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{2}{x^2-4}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1+x^2)$ .

- 3.16. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+5}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos 2x} (1-x^2)$ .
- 3.17. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2) [\ln(2x+1) - \ln(2x+5)]$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-5}{4x+1} \right)^{6x+2}$ .
- 3.18. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5)^{\frac{2}{x^2-9}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\ln(4x-23)}{x^2-8x+12}$ .
- 3.19. a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x+5}{2x+8} \right)^{\frac{4}{x+3}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^{-x}}{\sin 4x}$ .
- 3.20. a)  $\lim_{x \rightarrow 7} (2x-13)^{\frac{3}{x-7}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{x^2-1} - 1}{x^2 + 2x - 3}$ .
- 3.21. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-4) [\ln(3x-1) - \ln(3x-2)]$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{2x+7}{3x+9} \right)^{\frac{3}{x+2}}$ .
- 3.22. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x+3}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{1-x^4} (1-x^2)$ .
- 3.23. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(5x-14)}{x^2-9}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+5}{6x-1} \right)^{4x+3}$ .
- 3.24. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x+2}{x+4} \right)^{\frac{5}{x^2-1}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+5^x)}$ .
- 3.25. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-7) [\ln(4x+3) - \ln(4x+1)]$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{6x} - 3^{-2x}}{\sin x}$ .
- 3.26. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x} - 2^{-x}}{3x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{\frac{3x}{2x^2+3}}$ .
- 3.27. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{x^2-4}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} \right)^{\frac{\sqrt{x}+1}{3}}$ .
- 3.28. a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{e^{4x-3} - 1}{4x^2 - 7x + 3}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+2}{5x+4} \right)^{\frac{5x^3}{x^2-1}}$ .
- 3.29. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-1} \right)^{\frac{x+3}{2}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos 3x} \cos 2x$ .
- 3.30. a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (3x+7)^{\frac{3}{x^2-4}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}$ .

4. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності:

4.1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi x}{\ln(1-x) \operatorname{tg} \pi x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^5 - 1}{e^{3x} - 1}$ .

4.2. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x - \sin x^4}{x^3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x})}{\sin \sqrt{x}}$ .

4.3. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin \sqrt[3]{x})}{\operatorname{tg}(2\sqrt[3]{x})}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2^x + 3^x}{e^x - 1}$ .

4.4. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{\arcsin x^2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$ .

4.5. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sqrt{x+1}} - 1}{\arcsin \sqrt[3]{x+1}}$ ;

4.6. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x - \arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+x)^3 - 8}{\ln(1+x)^6}$ .

4.7. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} \sqrt{x} - 2 \sin x}{x + x^2 + \operatorname{tg} x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{\operatorname{tg} x}$ .

4.8. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \arcsin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e + \ln(2 - x^2)}{2x^2 - 3x + 1}$ .

4.9. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x \sin x)}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} x)}{\arcsin \operatorname{tg} 2x}$ .

4.10. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x}{\operatorname{tg} \sqrt{x} + x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\operatorname{tg} x - x)}{\ln(1 + \sin x)}$ .

4.11. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^{-2x}}{\sin x}$ .

4.12. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} x)}{\arcsin \operatorname{tg} 2x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sqrt{x}} - \cos x}{\sin \sqrt{x}}$ .

4.13. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x - \sin 3x}{(e^{3x^2} - 1) \ln(1+x)}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x-1} - 1}{x^2 - 3x + 2}$ .

4.14. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x}{(e^{-x} - 1) \ln(1 + \sin x)}$ .

$$4.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}.$$

$$4.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin x - \sin 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}.$$

$$4.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{\sin 3x + 2^{3x^2} - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$4.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{x+1} - 4}{\ln(1 - x\sqrt{1 + x2^x})};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x) - 2\sin^2 x}{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$4.19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{e^{x^2} - 1 + x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(5x - 19)}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$4.20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin \pi(x+2)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4.21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} x - 2x^2 + x^4}{\arcsin 6x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$4.22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$$

$$4.23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2}{\ln \cos x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{e^{\sin \pi x} - 1}.$$

$$4.24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\cos 5x - \cos 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}.$$

$$4.25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^2)}{\arcsin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3} - 1}.$$

$$4.26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 4^{\sqrt{x}} - 2}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

$$4.27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{\sqrt[3]{8+x} - 2}.$$

$$4.28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x \sin x)}{\ln(1 + \sin x)}.$$

$$4.29. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}.$$

$$4.30. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^6 - (1 + x)^7}{\sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi x} - 1}{\ln(1 + \arcsin x)}.$$

### 1.3 Неперервність функції

Неперервність функції у точці. Властивості функції, неперервних у точці та на відрізку. Розриви та їх класифікація.

#### 1.3.1 Вправи до аудиторної і самостійної роботи

1. Доведіть за визначенням, що функція  $y = \cos x$  неперервна в будь-якій точці числової осі.

2. Дослідіть функції на неперервність. У точках розриву знайдіть лівосторонню та правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний графік в околі точок розриву:

$$2.1. \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}.$$

$$2.2. \quad f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}.$$

$$2.3. \quad f(x) = 5^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$2.4. \quad f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

$$2.5. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-6}.$$

$$2.6. \quad f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|.$$

#### Відповіді:

2.1.  $x = 2$  – точка усувного розриву;  $x = 4$  – точка розриву другого роду.

2.2.  $x = 1$  – точка розриву першого роду. 2.3.  $x = 2$  – точка розриву першого роду.

2.4.  $x = 0$  – точка розриву усувного роду;  $x = \pi$  – точка розриву другого роду.

2.5.  $x = 6$  – точка розриву першого роду. 2.6.  $x = 0; 1$  – точки розриву другого роду.

#### 1.3.2 Індивідуальні завдання

1. Дослідіть функцію  $f(x)$  на неперервність. У точках розриву знайдіть лівосторонню й правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний графік в околі точок розриву.

- 1.1 a)  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ ; б)  $f(x) = \frac{3}{2 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ .
- 1.2 a)  $f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}$ ; б)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ .
- 1.3 a)  $f(x) = \frac{5x^2 - x - 4}{x^2 + 2x - 3}$ ; б)  $f(x) = 7^{\frac{2}{x+3}}$ .
- 1.4 a)  $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 4x - 5}$ ; б)  $f(x) = \frac{5}{\lg|x+1|}$ .
- 1.5 a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 + x - 3}$ ; б)  $f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}} - 1}{5^{\frac{1}{x-1}} + 1}$ .
- 1.6 a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5x - 7}$ ; б)  $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ .
- 1.7 a)  $f(x) = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 + 5x - 6}$ ; б)  $f(x) = \frac{6}{3 + 2^{\frac{1}{x+4}}}$ .
- 1.8 a)  $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 + 3x - 4}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$ .
- 1.9 a)  $f(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ ; б)  $f(x) = (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .
- 1.10 a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x+2}} + 3^{\frac{1}{x-2}}}$ .
- 1.11 a)  $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 4}{x^2 - 4x + 3}$ ; б)  $f(x) = 2^{\frac{3}{x-7}}$ .
- 1.12 a)  $f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ ; б)  $f(x) = \frac{6}{6 + 6^{\frac{1}{x-6}}}$ .
- 1.13 a)  $f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 6x + 5}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{4^{\frac{1}{x+1}} + 4^{\frac{1}{x-1}}}$ .
- 1.14 a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 7}{x^2 - 7x + 6}$ ; б)  $f(x) = 2^{\frac{x}{x^2-9}}$ .
- 1.15 a)  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4}$ ; б)  $f(x) = (2x+3) \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$ .
- 1.16 a)  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 2}$ ; б)  $f(x) = \frac{x}{\lg(1+x)}$ .

- 1.17. a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 - 3x - 4}$ ; б)  $f(x) = \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x-5}}}$ .
- 1.18. a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 4x - 5}$ ; б)  $f(x) = 3^{\frac{x}{x^2-4}}$ .
- 1.19. a)  $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 7}{x^2 - 2x - 3}$ ; б)  $f(x) = (x+4) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .
- 1.20. a)  $f(x) = \frac{4x^2 - x - 5}{x^2 - 4x - 5}$ ; б)  $f(x) = 5^{\frac{x-2}{x-1}}$ .
- 1.21. a)  $f(x) = \frac{5x^2 - x - 6}{x^2 - 5x - 6}$ ; б)  $f(x) = \frac{4^{\frac{1}{x+3}} - 1}{\frac{1}{4^{x+3}} + 1}$ .
- 1.22. a)  $f(x) = \frac{6x^2 - x - 7}{x^2 - 5x - 6}$ ; б)  $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x+2}} - 1}{\frac{1}{3^{x+2}} + 1}$ .
- 1.23. a)  $f(x) = \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^2 - 6x - 7}$ ; б)  $f(x) = \frac{7^{\frac{1}{x}}}{4 + 2^{\frac{x}{x-2}}}$ .
- 1.24. a)  $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 9}{x^2 - 7x - 8}$ ; б)  $f(x) = \frac{x}{\lg(2-x)}$ .
- 1.25. a)  $f(x) = \frac{6x^2 - x - 7}{x^2 - x - 2}$ ; б)  $f(x) = \frac{3}{2 + 4^{\frac{1}{2-x}}}$ .
- 1.26. a)  $f(x) = \frac{7x^2 - x - 8}{x^2 - 7x - 8}$ ; б)  $f(x) = \frac{|x-1|}{\operatorname{arctg}(x-1)}$ .
- 1.27. a)  $f(x) = \frac{4x^2 - 7x - 11}{x^2 - 3x - 4}$ ; б)  $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}}}{4 + 2^{\frac{x}{x-5}}}$ .
- 3.1.28. a)  $f(x) = \frac{4x^2 + x - 3}{x^2 + 4x + 3}$ ; б)  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x-2}}}{1 + 3^{\frac{x}{x+1}}}$ .
- 1.29. a)  $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ ; б)  $f(x) = 6^{\frac{3}{x^2-1}}$ .
- 1.30. a)  $f(x) = \frac{5x^2 + x - 4}{x^2 + 5x + 4}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{2-x}{2+x}$ .

## 1.4 Похідна функції

Похідна функції, її геометричний, механічний і фізичний зміст. Дотична та нормаль. Диференційовність і неперервність. Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції. Похідна функцій, заданих неявно або параметрично. Логарифмічне диференціювання. Похідні вищих порядків функції, заданих явно, неявно або параметрично. Формула Лейбніца.

### 1.4.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи

1. Знайдіть похідні функцій:

1.1.  $y = 2 + x - x^2$ .

1.2. а)  $y = 3\sqrt[4]{x}$ ; б)  $y = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$ .

1.3.  $y = 3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - x^2$ .

1.4.  $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{\sin x} - x \ln x$ .

1.5. а)  $y = 3^x \arccos x$ ; б)  $y = \frac{10^x}{x}$ .

1.6.  $y = 4\sqrt[5]{x^5} \operatorname{tg} x$ .

1.7. а)  $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ; б)  $y = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}$ .

1.8.  $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ .

1.9.  $y = 2^x x^4 \operatorname{tg} x$ .

1.10.  $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ .

1.11.  $y = (3x + \sqrt{x})(\sqrt{x} - x)$ .

1.12. а)  $y = \frac{1 - x^5}{x^5 + 1}$ ; б)  $y = \frac{2 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[7]{x^2} + 2}$ .

1.13.  $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ .

1.14.  $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x})$ .

1.15.  $y = \frac{x\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ .

1.16.  $y = \frac{3}{(x^3 - 1)(1 - 2x^4)}$ .

1.17.  $y = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 3)$ .

1.18. а)  $y = \frac{x^3 - 4}{x + \sqrt{x}}$ ; б)  $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$ .

1.19.  $y = \log_2 x + \frac{1}{\ln x}$ .

1.20.  $y = \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x + 3 \arccos x$ .

2. Знайдіть похідні складених функцій:

2.1.  $y = (3x + 2)^5$ .

2.2.  $y = \cos^4 x$ .

2.3.  $y = \operatorname{tg} \log_3 x$ .

2.4.  $y = \arcsin(\ln x)$ .

2.5.  $y = \arccos \sqrt{x}$ .

2.6.  $y = 3^{x + \sqrt{x}}$ .

2.7.  $y = 2^{\operatorname{arctg} x}$ .

2.8.  $y = x \ln \sin 2x$ .

2.9.  $y = e^x \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x+1})$ .

**2.10.**  $y = \sqrt[4]{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}$ .

**2.11.**  $y = \sin^6(\cos 3x)$ .

**2.12.**  $y = \cos^5(\log_2^3 x)$ .

**2.13.**  $y = \arccos \frac{1-x}{1+x}$ .

**2.14. a)**  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ;

**2.15. б)**  $y = \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x - 1}}{\sqrt{\operatorname{arctg} x + 1}}$ .

**2.16.**  $y = \operatorname{sh} \left( \cos \frac{x}{1+x} \right)$ .

**2.17.**  $y = e^{\arccos(\ln x)}$ .

**2.18. a)**  $y = (x^2 - 1) \arccos \frac{1}{x}$ ;

**2.19. б)**  $y = \frac{x^2 + 1}{\arccos \sqrt{x}}$ .

**2.20.**  $y = \ln(\ln^2 x)$ .

**2.21.**  $y = \cos \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

**2.22.**  $y = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt[3]{\cos x}}$ .

**2.23.**  $y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x - x}}{\sqrt[4]{x}}$ ;

**2.24.**  $y = \frac{\ln(x + \operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} \ln x}$ .

**2.25.**  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{\arccos 4x}}$ .

**2.26.**  $y = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ .

**2.27.**  $y = 3 \sin 5x \cos^4 x$ .

**2.28.**  $y = 4 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ .

**2.29.**  $y = \sin(\cos x) \cos(\sin x)$ .

**2.30.**  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .

**2.31.**

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 4}{\sqrt[4]{x^3 - 1}}} + 4 \log_3^5 \cos 2x$$

**2.32.**

$$y = \ln(e^{3x} + \sqrt{x^2 - 1}) + \arccos e^{-3x}$$

**2.33.**  $y = (1 + x^2) \sqrt{1 - x^2}$ .

**3.** Знайдіть похідну  $\frac{dy}{dx}$  за правилом диференціювання оберненої функції, якщо:

**3.1.**  $x = y^2 + \sqrt{y^2 + 1}$ .

**3.2.**  $x = y \ln y + \sin y$ .

**3.3.**  $x = \lg \cos y + \cos \ln y$ .

**3.4.**  $x = e^{\arccos y}$ .

**4.** Знайдіть похідну  $y'$  неявно заданих функцій:

**4.1.**  $3^{x+y} = 3^x - 3^y$ .

**4.2.**  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**4.3.**  $x^y = y^x$ .

**4.4.**  $x^3 + y^3 = 3xy$ .

**4.5.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**5.** Знайдіть похідну  $y'_x$  для параметрично заданих функцій:

**5.1.**  $x = a \cos^2 t, y = b \sin^2 t$ .

**5.2.**  $x = \sqrt{t}, y = \sqrt[3]{t}$ .

**5.3.**  $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

**5.4.**  $x = e^t, y = e^{2t}$ .

**5.5.**  $x = e' \cos t, y = e' \sin t$ .

**5.6.**  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ .

**5.7.**  $x = t^2, y = \frac{t^3}{3} - t.$

**5.8.**  $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t.$

**5.9.**  $x = t \cos t, y = t \sin t.$

**5.10.**  $x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}.$

**6.** Знайдіть похідну  $y'$ , використовуючи логарифмічне диференціювання:

**6.1.**  $y = (\ln x)^x.$

**6.2.**  $y = (2x + 1)^{2x-1}.$

**6.3.**  $y = \frac{2^x \operatorname{tg} x \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-4}}.$

**6.4.**  $y = \frac{(x-4) \cdot \sqrt{x^3+3}}{(x-2)^3 \cdot \sqrt{x}}.$

**6.5.**  $y = (x^5 + 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}.$

**6.6.**  $y = x^{\ln x} + (\ln x)^x.$

**6.7.**  $y = (\sin x)^{\cos x} (\cos x)^{\sin x}.$

**6.8.**  $y = (x^5 + 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}.$

**6.9.**  $y = x^{-x}.$

**7.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривих, заданих параметрично:

**7.1.**  $x = t - \sin t, y = t - \cos t, \text{ у точці } t = \frac{\pi}{2}.$

**7.2.**  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, \text{ у точці } t = \frac{\pi}{4}.$

**7.3.**  $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, \text{ у точці } t = \frac{\pi}{2}.$

**7.4.**  $x = te^t, y = te^{-t}, \text{ у точці } x_0 = e.$

**8.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці  $M$ :

**8.1.**  $4x^4 + 6xy - y^4 = 0, M(1;2).$

**8.2.**  $x^2(2x - y) = 2x - y^3, M(1;1).$

**8.3.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8, M(8;8).$

**9.** Знайдіть похідну другого порядку функцій:

**9.1.**  $y = (x^3 - 2)^4.$

**9.2.**  $y = \sqrt{x^4 + 1}.$

**9.3.**  $y = e^x \sin 2x.$

**9.4.**  $y = 4^x(x+1).$

**9.5.**  $y = x^x.$

**9.6.**  $y = \ln \operatorname{tg} x.$

**9.7.**  $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

**9.8.**  $y = \frac{x^4}{2x-1}.$

**9.9.**  $y = (\ln x)^x.$

**9.10.**  $y = \sin^3 x.$

**9.11.**  $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

**10.** Знайдіть похідні  $n$ -го порядку функцій:

**10.1.**  $y = 3^{-x}$ .      **10.2.**  $y = \ln x$ .      **10.3.**  $y = \sin kx$ .      **10.4.**  $y = \sin x \sin 2x$ .

**10.5.**  $y = \frac{x^n}{\cos^2 x} - x^n \operatorname{tg}^2 x$ .      **10.6.**  $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ .      **10.7.**  $y = \frac{x-5}{x^2 - 4x + 3}$ .

**11.** За формулою Лейбніца обчисліть похідні  $n$ -го порядку для функцій:

**11.1.**  $y = (x^3 - 2x + 5) \sin x$ ,  $n = 10$ .      **11.2.**  $y = (x^2 + 4x - 3) 2^x$ ,  $n = 8$ .

**11.3.**  $y = x \ln(x^2 - 3x + 2)$ ,  $n = 6$ .

**12.** Знайдіть другі похідні для функцій, заданих неявно:

**12.1.**  $x^3 + y^3 = 3xy$ .      **12.2.**  $e^x + x = e^y + y$ .      **12.3.**  $\cos(x + y) = x$ .

**12.4.**  $y^2 = 2px$ .      **12.5.**  $y = \sin(x + y)$ .      **12.6.**  $\ln(x + y) = y - x$ .

**13.** Знайдіть похідні другого порядку  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функцій, заданих параметрично:

**13.1.**  $y = 3t - t^3$ ,  $x = 2t - t^2$ .      **13.2.**  $y = e^t \sin t$ ,  $x = e^t \cos t$ .

**13.3.**  $y = \ln t$ ,  $x = t^6$ .      **13.4.**  $y = \frac{t^2}{2}$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$ .

**13.5.**  $y = \cos 2t$ ,  $x = \sin^2 t$ .      **13.6.**  $y = \ln(1 + t^2)$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$ .

**Відповіді:**

**1.1.**  $1 - 2x$ .      **1.2.** а)  $\frac{3}{4\sqrt{x^3}}$ ;      б)  $y = -\frac{4}{x^3} + \frac{12}{x^5}$ .      **1.3.**  $-\frac{1}{x\sqrt{x}} - 3x^2$ .

**1.4.**  $-\frac{1}{x^2} - 3\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \ln x - 1$ .      **1.6.**  $\frac{12x + 5 \sin 2x}{3 \cos^2 x \sqrt{x}}$ .      **1.7.** а)  $-\frac{2x \sin x + \cos x}{x\sqrt{x}}$ .

**1.8.**  $\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos^2 x}$ .      **1.9.**  $2^x x^3 (\ln 2 \cdot x \sin x + x \cos x + 4 \sin x)$ .      **1.10.** а)  $0$ .

**1.11.**  $3\sqrt{x} - 6x + 1$ .      **1.12.** а)  $\frac{-10x^4}{(x^5 + 1)^2}$ .      **1.13.**  $8x^7$ .      **1.14.**  $4x^3 - 24x^2 + 40x - 19$ .

**1.15.**  $\frac{2x + 3\sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}$ .      **1.19.**  $\frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{x \ln^2 x}$ .      **2.1.**  $15(3x + 2)^4$ .      **2.2.**  $-4 \cos^3 x \sin x$ .

**2.3.**  $\frac{1}{x \ln 3 \cdot \cos^2(\log_3 x)}$ .      **2.4.**  $\frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ .      **2.6.**  $\frac{2^{\operatorname{arctg} x} \ln 2}{1 + x^2}$ .      **2.8.**  $\ln \sin 2x + 2x \operatorname{ctg} 2x$ .

**2.11.**  $-18 \sin^5(\cos 3x) \cos(\cos 3x) \sin 3x$ .      **2.13.**  $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ .      **34.**  $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{2.15.} \frac{-\operatorname{ch} \cos \frac{x}{x+1} \sin \frac{x}{x+1}}{(1+x)^2} & \mathbf{2.16.} \frac{-e^{\arccos \ln x}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} & \mathbf{2.19.} \sin \ln \frac{e^x-1}{e^x+1} \cdot \frac{2e^{2x}}{1-e^{2x}} \\
\mathbf{2.26.} \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} (3+\sin^2 x) & \mathbf{2.30.} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \mathbf{3.1.} \frac{\sqrt{y^2+1}}{y(2\sqrt{y^2+1}+1)} & \mathbf{3.2.} \frac{1}{\ln y+1+\cos y} \\
\mathbf{3.3.} \frac{3^x(1-3^y)}{3^y(1+3^x)} & \mathbf{3.4.} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}} & \mathbf{4.3.} \frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}} & \mathbf{4.4.} \frac{y-x^2}{y^2-x} & \mathbf{4.5.} -\frac{b^2 x}{a^2 y} & \mathbf{5.1.} -\frac{b}{a} \\
\mathbf{5.2.} \frac{2}{3\sqrt[6]{t}} & \mathbf{5.3.} \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} & \mathbf{5.4.} 2e^t & \mathbf{5.5.} \frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t} & \mathbf{5.6.} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} & \mathbf{5.7.} \frac{2\sin^2 t+\sin 2t}{2\cos^2 t-\sin 2t} \\
\mathbf{7.1.} y=x+2-\frac{\pi}{2}; y=-x+\frac{\pi}{2} & \mathbf{7.2.} y+x=\frac{\sqrt{2}}{2}; y=x & \mathbf{7.3.} y+x=3; y=x+1 \\
\mathbf{7.4.} y=\frac{1}{e}; x=e & \mathbf{8.1.} 4x-13y+12=0; 13x+14y-41=0 & \mathbf{8.2.} y=x; y=-x+2 \\
\mathbf{8.3.} y+x=16; y=x & \mathbf{9.1.} 12x(x^3-2)^2(11x^3-4) & \mathbf{9.2.} 2x^2(x^4+3)(x^4+1)^{\frac{3}{2}} \\
\mathbf{9.3.} e^x(4\cos 2x-3\sin 2x) & \mathbf{9.4.} 4^x(2\ln 4+(x+1)\ln^2 4) & \mathbf{9.5.} x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1} \\
\mathbf{9.6.} -\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} & \mathbf{9.7.} \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & \mathbf{9.8.} \frac{4x^2(4x^2-5x+3)}{(2x-1)^3} & \mathbf{9.9.} (\ln x)^x \cdot \left( (\ln \ln x + \ln^{-1} x)^2 + \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln^2 x} \right) \\
\mathbf{9.10.} 3(\sin 2x \cos x - \sin^3 x) & \mathbf{9.11.} -9\cos 3x & \mathbf{10.1.} (-1)^n 3^{-x} \ln^n 3 & \mathbf{10.2.} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \\
\mathbf{10.3.} k^n \sin(kx + \frac{\pi n}{2}) & \mathbf{10.4.} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - 3^n \cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) \right] & \mathbf{10.5.} n! \\
\mathbf{10.6.} (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right] & \mathbf{10.7.} (-1)^n n \cdot \left[ \frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-3)^{n+1}} \right] \\
\mathbf{11.1.} (30x^3+700)\cos x - (x^3-272x+5)\sin x & \mathbf{11.2.} 2^x \ln^6 2 \cdot [\ln^2 2(x^2+4x-3)+16\ln 2(x+2)+42] \\
\mathbf{11.3.} \frac{24(6x-11)}{(x-1)^6} + \frac{24(6x-23)}{(x-3)^6} & \mathbf{12.1.} \frac{2xy(3xy-x^3-y^3-1)}{(y^2-x)^3} & \mathbf{12.2.} \frac{(e^y-e^x)(e^{x+y}-1)}{(e^y+1)^3} \\
\mathbf{12.3.} \frac{-\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)} & \mathbf{12.4.} -\frac{p^2}{y^3} & \mathbf{12.5.} \frac{-\cos \frac{x+y}{2}}{4\sin^5 \frac{x+y}{2}} & \mathbf{12.6.} -\frac{4(x+y)}{(x+y-1)^3} & \mathbf{13.1.} \frac{3}{(4(1-t))} \\
\mathbf{13.2.} \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3} & \mathbf{13.3.} \frac{-1}{6t^{12}} & \mathbf{13.4.} 3t^4+4t^2+1 & \mathbf{13.5.} 0 & \mathbf{13.6.} 2(1+t^2)
\end{array}$$

## 1.4.2 Індивідуальні завдання

1. Знайдіть похідну першого порядку функції  $y = f(x)$ .

- 1.1.** а)  $y = \cos^2 x + \sin(\operatorname{tg} x)$ ; б)  $y = \ln^2 \arcsin \sqrt{x}$ .  
в)  $y = 2^{\sin x + \cos^2 x}$ ; г)  $y = \sqrt[5]{(2x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ .
- 1.2.** а)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x^2}$ ; б)  $y = \log_3 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  
в)  $y = 10^{\sqrt{\ln x}} 3^{\operatorname{tg} x}$ ; г)  $y = 5 \operatorname{arctg}(\ln^2 x) - 1$ .
- 1.3.** а)  $y = \sin \sqrt{x} - 2 \sin^3 x$ ; б)  $y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  
в)  $y = e^{\operatorname{arctg} x} \cos 2x$ ; г)  $y = \sqrt[4]{\log_3 \sin(x^3 + 1)}$ .
- 1.4.** а)  $y = \frac{x^2}{(1 + \cos^2 2x)}$ ; б)  $y = \sqrt[3]{\ln \cos \frac{x-2}{5}}$ ;  
в)  $y = \ln \sin(3^x x^2)$ ; г)  $y = 3^{\sqrt{x}} \cos^3(\operatorname{tg} x)$ .
- 1.5.** а)  $y = \cos^5(\sin 3x)$ ; б)  $y = (1 + \cos^2 x)^5 \sin 4x$ ;  
в)  $y = \ln(x + \arccos \sqrt{1-x^2})$ ; г)  $y = \ln^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .
- 1.6.** а)  $y = \frac{e^{x^2} \sqrt{x}}{\sin x^2}$ ; б)  $y = \frac{\operatorname{arctg} \ln x}{\ln \operatorname{arctg} x}$ ;  
в)  $y = 10^{2 - \operatorname{tg}^4 x}$ ; г)  $y = \sqrt[6]{e^{-x} + 1} \cdot \sin(4x + 1)$ .
- 1.7.** а)  $y = \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x^2$ ; б)  $y = (2 + \ln^2 \sin x)^3$ ;  
в)  $y = 5^{2^x} \cos x$ ; г)  $y = \log_2^3 \arcsin(x^2)$ .
- 1.8.** а)  $y = x \cos^2 x - \operatorname{ctg} 4x$ ; б)  $y = \arcsin^3 \ln \sin 2x$ ;  
в)  $y = \operatorname{arctg}^5(e^{2x} x)$ ; г)  $y = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x}}{x^3 + 2}$ .
- 1.9.** а)  $y = \frac{x^3}{(1 + \sin^4 x)}$ ; б)  $y = \log_2 \operatorname{arctg}(1 - x^2)$ ;  
в)  $y = 3^{\ln^2 \sin 5x} + \sqrt{2^x}$ ; г)  $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh} \frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .
- 1.10.** а)  $y = \sin \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ ; б)  $y = \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{3x}$ ;  
в)  $y = e^{-x^2} \sin(3x - 2)$ ; г)  $y = \cos(\sin^3(x \operatorname{tg} x))$ .
- 1.11.** а)  $y = \sqrt{2 + \sin \frac{1+x^2}{1-x^2}}$ ; б)  $y = \frac{1 - \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\ln^2 x}$ ;  
в)  $y = 2^{\sqrt[3]{\ln x}} x^3$ ; г)  $y = \operatorname{tg}^4(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\operatorname{tg} x^2)$ .

- 1.12.** а)  $y = \frac{5 \operatorname{ctg}^2 \left( 5 + \frac{1}{x} \right)}{x}$ ;  
 б)  $y = \operatorname{tg} \left( 2^{\cos x} \right) \ln \left( x 3^3 \right)$ ;
- 1.13.** а)  $y = \frac{\sin^3 \left( 1 + x^2 \right)}{\cos x} - 1$ ;  
 б)  $y = 5^{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \operatorname{ctg} 3^x$ ;
- 1.14.** а)  $y = \operatorname{tg} \left( \cos \left( 5 \operatorname{ctg} x \right) \right)$ ;  
 б)  $y = 3^{\sin x} \sin^3 x + 3$ ;
- 1.15.** а)  $y = \cos \left( \sin \sqrt{x \operatorname{tg} x} \right)$ ;  
 б)  $y = 6^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - 2^{\operatorname{tg} x}$ ;
- 1.16.** а)  $y = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x^2} - 5 \operatorname{ctg} 3x$ ;  
 б)  $y = x^3 e^{\frac{-x^2}{2}} - \cos 2^x$ ;
- 1.17.** а)  $y = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{3x}}{\sin \sqrt{x}}$ ;  
 б)  $y = 2^{\arccos x} \cos^2 x$ ;
- 1.18.** а)  $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg} \left( \frac{x}{4} \right) + \operatorname{ctg} 4x}$ ;  
 б)  $y = \operatorname{tg} \left( 4^{\ln x} 3^{\operatorname{tg} x} \right)$ ;
- 1.19.** а)  $y = \cos^3 5x - 8 \sin^3 4x$ ;  
 б)  $y = \frac{2^{x^2}}{x^2}$ ;
- 1.20.** а)  $y = \sqrt[5]{\sin^4 x - \cos \sqrt{x}}$ ;  
 б)  $y = 2^{\ln \arcsin \sqrt{x}}$ ;
- 1.21.** а)  $y = \operatorname{ctg}^3 \left( \sqrt[6]{2 - x \operatorname{tg}^2 x} \right)$ ;  
 б)  $y = e^{\sqrt[3]{\sin 5x - 5 \cos^2 x}}$ ;
- б)  $y = \ln \arccos (2x - 5)$ ;  
 г)  $y = \operatorname{ch}^2 (x^2 - 1) - \operatorname{ch} \sqrt{x}$ ;
- б)  $y = \log_2^4 \arcsin (3x^3)$ ;  
 г)  $y = \sqrt[4]{2^{-x} + 1} \cdot \cos 4\sqrt{x}$ ;
- б)  $y = \sqrt[3]{\ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ ;  
 г)  $y = \frac{\log_2 \left( x + \frac{1}{x} \right)}{2x^3}$ ;
- б)  $y = \ln^5 \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ ;  
 г)  $y = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}}$ ;
- б)  $y = \log_3^4 \sin \sqrt{1+x^3}$ ;  
 г)  $y = \operatorname{arctg}^2 (x \ln x)$ ;
- б)  $y = \arcsin^4 \ln \ln x$ ;  
 г)  $y = \ln \left( x + \ln \left( x + \sqrt{1-x^2} \right) \right)$ ;
- б)  $y = \arccos^2 \ln \sin x$ ;  
 г)  $y = \frac{1 - \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\log_3^4 x}$ ;
- б)  $y = \ln \ln \cos \ln \operatorname{tg} x$ ;  
 г)  $y = \sqrt[7]{\log_3^3 \sin \sqrt{1+x}}$ ;
- б)  $y = \frac{\sqrt{\ln (1 + \ln^2 x)}}{\log_2 x}$ ;  
 г)  $y = \frac{\operatorname{sh}^2 (1+x^2)}{\operatorname{ch} x} - 2 \operatorname{th} 2x$ ;
- б)  $y = \frac{\sqrt{\arcsin \ln x}}{\ln (x^2 + 1)}$ ;  
 г)  $y = \operatorname{tg} \left( 4^{\ln x} + 7^{\operatorname{ctg} x} \right)$ .

- 1.22. а)  $y = \cos \frac{x}{\sqrt{\sin x}}$ ;  
 б)  $y = \cos e^{\sqrt[4]{x-\frac{1}{x}}}$ ;
- 1.23. а)  $y = \frac{x^2}{\sin^2 x - \cos(x^2)}$ ;  
 б)  $y = 2^{\frac{x^3-2}{\sin x}}$ ;
- 1.24. а)  $y = \cos \frac{\sin x}{x+1}$ ;  
 б)  $y = \frac{\cos 2x}{e^x + 3^{x^2}}$ ;
- 1.25. а)  $y = \frac{\sin x}{3 \cos x + \cos^3 x}$ ;  
 б)  $y = 5^{4^x} + 4^{5^x}$ ;
- 1.26. а)  $y = \cos \sqrt{1+x^3} + \sqrt{\cos x}$ ;  
 б)  $y = 10^{3x-1} (3x-4)^{10}$ ;
- 1.27. а)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)} + \cos \sqrt{\sin x}$ ;  
 б)  $y = 3^{\sin^2 3x} + \frac{3^{\cos x}}{x}$ ;
- 1.28. а)  $y = \cos^6 \frac{3}{x} + \frac{4}{x \cos x}$ ;  
 б)  $y = x \cos\left(2^{\operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}}\right)$ ;
- 1.29. а)  $y = \frac{\cos^3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}$ ;  
 б)  $y = \frac{e^{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}}}{\ln x}$ ;
- 1.30. а)  $y = x \sin^3 5x + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  
 б)  $y = \frac{\arcsin 8^{\sin x}}{2^{\cos x}}$ ;
- б)  $y = \log_x 3 + \log_3^4 x$ ;  
 г)  $y = \ln^5 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ ;
- б)  $y = x \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$ ;  
 г)  $y = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x^2+1} - 5 \operatorname{ctg}^4 2x$ ;
- б)  $y = \sin \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ;  
 г)  $y = \frac{\sqrt{1+\ln^4 x}}{\log_5 x}$ ;
- б)  $y = x^2 (\cos \ln x - \sin \ln x)$ ;  
 г)  $y = x \ln\left(x + \sqrt{4-x^2}\right)$ ;
- б)  $y = \log_2^3 (\ln x - \log_{\cos x} 2)$ ;  
 г)  $y = \arccos \frac{x-1}{x}$ ;
- б)  $y = \log_3^3 \log_2^2 \ln(5x-2)$ ;  
 г)  $y = \frac{\sqrt{\arcsin \ln x}}{x^2}$ ;
- б)  $y = \ln\left(\sin^2 x + \sqrt{\sin^3 \ln x}\right)$ ;  
 г)  $y = 10^{2x-5} \cdot (7x^2-1)^8$ ;
- б)  $y = \ln \cos \log_7 \operatorname{ctg} \ln x$ ;  
 г)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{\sin 2x + x^3}$ ;
- б)  $y = \ln^3 \sin(x \cos x)$ ;  
 г)  $y = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} x}{x \ln x}}$ ;

2. Знайдіть похідну  $\frac{dy}{dx}$  функції, заданої неявно:

2.1.  $x^2y + y^2x = x^3y^3$ .

2.3.  $\sin(xy) = x^2 + y^2$ .

2.5.  $3^x + 3^y = 3^{x+y}$ .

2.7.  $\ln(x+y) + x^2y = 1$ .

2.9.  $2^x - 2^y = 2^{x-y}$ .

2.11.  $\cos(xy) + \sin(xy) = y$ .

2.13.  $y^3 + x^3y + xy^2 = 1$ .

2.15.  $y = x - \arcsin y$ .

2.17.  $x^2y^2 + 2xy + x^3 = y^3$ .

2.19.  $x^2 + y^4x = x^3 - 2y$ .

2.21.  $x^3y - y^3x = (x-y)^3$ .

2.23.  $5^x - 5^y = 5^{x+y}$ .

2.25.  $3y \ln y = x^2(y+5)$ .

2.27.  $x^3y^2 + 2^{x-y} = y$ .

2.29.  $y = x + e^{1+xy}$ .

2.2.  $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y$ .

2.4.  $y \cos x = \sin(x-y)$ .

2.6.  $x^3 + y^3 - 4xy = 0$ .

2.8.  $x \sin y = x^2 + y^2$ .

2.10.  $\sin x - \cos y = x - y$ .

2.12.  $y \cos x = x^2 - y^2$ .

2.14.  $x^4 + y^4 = x^3y^3$ .

2.16.  $x^3y + y^3x = x - y^2$ .

2.18.  $\sin(x+y) = x - y$ .

2.20.  $x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x = yx$ .

2.22.  $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = x - y^2$ .

2.24.  $y \sin x + x \sin y = y$ .

2.26.  $y^3 - 5y + 6x = x^4$ .

2.28.  $3^{x+y} + 3^{x-y} = y^3$ .

2.30.  $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right) + yx = y$ .

3. Знайдіть похідну  $\frac{dy}{dx}$  функції, заданої параметрично:

3.1.  $x = 3' \cos t, \quad y = 3' \sin t$ .

3.2.  $y = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad x = \ln \operatorname{tg} t$ .

3.3.  $y = 5 \sin^3 t, \quad x = 2 \cos^3 t$ .

3.4.  $y = \frac{1}{\sin^w t}, \quad x = \ln \operatorname{ctg} t$ .

3.5.  $y = \ln(1+t^4), \quad x = \operatorname{arctg} t^2$ .

3.6.  $y = \frac{2t+1}{t^2}, \quad x = \frac{t^2-1}{t+2}$ .

3.7.  $y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x = (\arcsin t)^2$ .

3.8.  $y = e' \sin t, \quad x = e' \cos t$ .

3.9.  $y = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad x = \ln \cos t$ .

- |  |   |
|--|---|
| <b>3.10.</b> $y = \frac{2t^2}{1+t^3},$                             | $y = \frac{2t^2}{1+t^3},$                       |
| <b>3.11.</b> $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} t};$                 | $x = \sqrt{\operatorname{arctg} t}.$            |
| <b>3.12.</b> $y = t - \operatorname{arctg} t,$                     | $x = \ln \operatorname{ctg} t.$                 |
| <b>3.13.</b> $y = \frac{\cos t}{\sin^2 t},$                        | $x = (1 + \cos t)^2.$                           |
| <b>3.14.</b> $y = \frac{t^3}{1+t^4},$                              | $x = \frac{t^4}{1+t^4}.$                        |
| <b>3.15.</b> $y = \ln(1 + \sqrt{1-t^2}),$                          | $x = \frac{1}{t^2}.$                            |
| <b>3.16.</b> $y = \frac{t}{1+t^2},$                                | $x = \frac{t^2}{1+t^2}.$                        |
| <b>3.17.</b> $y = 2 \sin^2 t + \sin 2t,$                           | $x = \operatorname{tg} t.$                      |
| <b>3.18.</b> $y = \ln \operatorname{ctg} e',$                      | $x = \operatorname{tg}(2e^{-t}).$               |
| <b>3.19.</b> $y = \ln(1 + \sqrt{t^2-1}),$                          | $x = \ln^2 t.$                                  |
| <b>3.20.</b> $y = 3(\sin t - t \cos t),$                           | $x = 3(t \sin t + \cos t).$                     |
| <b>3.21.</b> $y = \operatorname{arcsin}(t-1),$                     | $x = \sqrt{2t-t^2}.$                            |
| <b>3.22.</b> $y = t\sqrt{t^2-1},$                                  | $x = \ln(t + \sqrt{t^2-1}).$                    |
| <b>3.23.</b> $y = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-t^2},$             | $x = \operatorname{arctg} \sqrt{t}.$            |
| <b>3.24.</b> $y = 4(1 - \cos 2t),$                                 | $x = 4(2t - \sin 2t).$                          |
| <b>3.25.</b> $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$                 | $x = \operatorname{arcsin} \frac{t}{1+t^2}.$    |
| <b>3.26.</b> $y = t - \operatorname{arctg} \frac{1}{t},$           | $x = t^3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{t^2}.$ |
| <b>3.27.</b> $y = \frac{2+3 \ln t}{t},$                            | $x = \frac{3 - \ln t}{t}.$                      |
| <b>3.28.</b> $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1+t^2}.$              | $x = \arccos\left(\frac{1}{t}\right).$          |
| <b>3.29.</b> $y = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t,$ | $x = \cos t - \sin t.$                          |
| <b>3.30.</b> $y = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-t},$               | $x = \arccos \sqrt{1-t^2}.$                     |

**4.** Знайдіть похідну  $\frac{dy}{dx}$  функції, користуючись правилом логарифмічного диференціювання:

- |   |  |
|---|--|
| <b>4.1.</b> $y = x^{\operatorname{arcsin} x}.$    | <b>4.2.</b> $y = (\lg x)^{\frac{x}{2}}.$                                   |
| <b>4.3.</b> $y = (x^3 + 1)^{\sin x}.$             | <b>4.4.</b> $y = (\cos 2x)^{\operatorname{Intg}\left(\frac{x}{2}\right)}.$ |
| <b>4.5.</b> $y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$  | <b>4.6.</b> $y = x^{e^x}.$   |
| <b>4.7.</b> $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{5x-1},$ | <b>4.8.</b> $y = (x^5 + 1)^{\operatorname{ctg} x}.$                        |

$$4.9. y = x^{2^{\lg x}}.$$

$$4.11. y = \frac{(x-5)^2 \sqrt[3]{x^2+1}}{e^x (x+2)^5}.$$

$$4.13. y = \frac{(x-1)^3 \sqrt[4]{x^2+x}}{4^x (3x-2)^3}.$$

$$4.15. y = (x^3 - x)^{x^2+1}.$$

$$4.17. y = x^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$4.19. y = (x \cos x)^{\ln x}.$$

$$4.21. y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.23. y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.25. y = (4x-3)^{\operatorname{arccos} x}.$$

$$4.27. y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.29. y = (5x+2)^{\sin x}.$$

$$4.10. y = (x^8 + 1)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.12. y = \frac{3^x (2x-1)(x+1)^4}{\sqrt{x} (x-3)^6}.$$

$$4.14. y = \frac{2^x (x-5)(x+1)^3}{\sqrt{x} (4x-3)^5}.$$

$$4.16. y = (2x-3)^{\cos x}.$$

$$4.18. y = (x \sin x)^{x^2}.$$

$$4.20. y = x^{2^x}.$$

$$4.22. y = (\arcsin x)^{\sin x}.$$

$$4.24. y = x^{4^x}.$$

$$4.26. y = (\ln(x+1))^{\ln^2 x}.$$

$$4.28. y = x^{\sin x} + (\sin x)^x.$$

$$4.30. y = x^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

5. Знайдіть похідну  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  функції, заданої параметрично:

$$5.1. y = \sin t^2, x = \cos t^2.$$

$$5.3. x = \frac{1}{\sin t}, y = \operatorname{ctg} t + t.$$

$$5.5. x = \sin(\lg t), y = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} t).$$

$$5.7. x = \operatorname{arctg} t, y = \log_3(t^2 + 1).$$

$$5.9. x = \arcsin e^t, y = \sqrt{1 - e^{2t}}.$$

$$5.11. x = \ln \operatorname{ctg} t, y = \frac{1}{\sin 2t}.$$

$$5.13. x = \ln(1+t), y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}.$$

$$5.15. x = \operatorname{tg} 2^t, y = \ln \cos 2^t.$$

$$5.17. x = \ln(1+t^6), y = \operatorname{arctg}(t^3).$$

$$5.19. x = \operatorname{tg} e^t, y = \ln \cos^2 e^t.$$

$$5.21. x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}.$$

$$5.23. x = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t, y = \frac{1}{\cos t}.$$

$$5.25. x = \sqrt{t^2+1}, y = \ln(t + \sqrt{t^2+1}).$$

$$5.27. y = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t.$$

$$5.29. x = \cos 2t + 2t \sin 2t, y = \sin 2t - 2t \cos 2t.$$

$$5.2. x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t - t.$$

$$5.4. x = \lg \sin t, y = \lg \cos t.$$

$$5.6. x = \sin^3 e^t, y = \cos^3 e^t.$$

$$5.8. x = \ln(1+t^2), y = t - \operatorname{arctg} t.$$

$$5.10. x = \sin e^t, y = \cos e^t.$$

$$5.12. x = \ln t, y = \frac{t-1}{t+1}.$$

$$5.14. x = \operatorname{arctg} e^t, y = \frac{1}{e^{2t} + 1}.$$

$$5.16. x = \arccos 2t, y = \sqrt{1-4t^2}.$$

$$5.18. x = \operatorname{arctg} t, y = \log_2(t^2 + 1).$$

$$5.20. x = \ln(1+t^4), y = \operatorname{arctg}(t^2).$$

$$5.22. x = \ln \operatorname{ctg} t, y = \frac{1}{\sin t}.$$

$$5.24. x = \operatorname{ctg}^2 e^t, y = \frac{1}{\sin e^t}.$$

$$5.26. x = \ln(1+4t^2), y = 2t - \operatorname{arctg} 2t.$$

$$5.28. x = \cos 2t - \ln \operatorname{ctg} t, y = \sin 2t.$$

$$5.30. x = 5(2t - \sin 2t), y = 10 \sin^2 t.$$

**6.** Складіть рівняння дотичної і нормалі:

- 6.1.** ... до кривої  $y = 2x^3 - 3x^2$  в точках, у яких коефіцієнт дотичної дорівнює 12.
- 6.2.** ... до еліпса  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  в точках еліпса, абсциси яких дорівнюють 1.
- 6.3.** ... до еліпса  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ , якщо дотична паралельна прямій  $y = -\frac{2}{3}x + 4$ .
- 6.4.** ... до кривої  $y = 5x - x^2 + 2$ , якщо дотична нахилена до осі абсцис під кутом  $45^\circ$ .
- 6.5.** ... до кривої  $y = x \cdot \sqrt[3]{3x-1}$  у точці з абсцисою  $x = 3$ .
- 6.6.** ... до кривої  $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$  у точці з абсцисою  $x = 1$ .
- 6.7.** ... до кола  $x^2 + y^2 = 4$  в точці, ордината якої дорівнює 1.
- 6.8.** ... до еліпса  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  у точці, ордината якої дорівнює 1.
- 6.9.** ... до кривої  $y = x^3 + 5x + 3$  в точці перетину цієї кривої з віссю ординат.
- 6.10.** ... до еліпса  $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$  в точці, для якої  $t = \frac{\pi}{4}$ .
- 6.11.** ... до кривої  $y = x^2 + 3x - 4$  в точках перетину параболи з віссю абсцис.
- 6.12.** ... до астроїди  $x = \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$  у точці, що відповідає значенню  $t = \frac{\pi}{4}$ .
- 6.13.** ... до кривої  $y = 2x^2 - 4x + 3$  в точці, у якій кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 8.
- 6.14.** ... до кривої  $y = x\sqrt{2x+3}$  у точці з абсцисою  $x = 3$ .
- 6.15.** ... до лінії  $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$  у точці з абсцисою  $x_0 = 3$ .
- 6.16.** ... до кривої  $y = (x+1)^3 \sqrt{3-x}$  у точці з абсцисою  $x_0 = 2$ .
- 6.17.** ... до астроїди  $x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, y = 2\sqrt{2} \sin^3 t$  у точці, для якої  $t = \frac{\pi}{4}$ .
- 6.18.** ... до циклоїди  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$  у точці, для якої  $t = \frac{\pi}{2}$ .
- 6.19.** ... до параболи  $y^2 - y + 2x - 4 = 0$  у точках з абсцисою  $x_0 = -4$ .
- 6.20.** ... до кривої  $x^2 + 2xy + 2y^4 = 5$  у точці  $M_0(1;1)$ .
- 6.21.** ... до циклоїди  $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)$  у точці, для якої  $t = \frac{3}{2}\pi$ .
- 6.22.** ... до кривої  $y = x^2 - x - 3$  у точках, в яких дотичні утворюють з віссю  $Ox$  кут  $135^\circ$ .
- 6.23.** ... до кривої  $y = x\sqrt{2x-1}$  у точці з абсцисою  $x = 5$ .
- 6.24.** ... до кривої  $x^4 + 3xy^2 + 3y^4 = 1$  у точці  $M_0(-1;1)$ .

- 6.25.** ...до циклоїди  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  у точці, для якої  $t = \frac{\pi}{2}$ .
- 6.26.** ...до астроїди  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$  у точці, що відповідає значенню  $t = \frac{\pi}{3}$ .
- 6.27.** ...до півкубічної параболи  $x = t^2$ ,  $y = t^3$  у точці, для якої  $t = 2$ .
- 6.28.** ...до кривої  $y = x^2 - x - 5$  у точках, у яких дотичні утворюють із віссю  $Ox$  кут  $45^\circ$ .
- 6.29.** ...до кривої  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = -3$  у точці  $M_0(1; 2)$ .
- 6.30.** ...до кривої  $y = x^2 + 2x$ , якщо дотична паралельна прямій  $y = 3x + 1$ .

## 1.5 Диференціал функції. Основні теореми диференціального числення

Диференціал функції. Геометричний зміст диференціала. Застосування диференціалів у наближених обчисленнях. Диференціали вищих порядків. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Формули Тейлора й Маклорена. Правило Лопіталя.

### 1.5.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи

1. Знайдіть приріст та диференціал функції  $y = x^2 - 4x + 3$ , якщо:

- 1.1.**  $x = 1$ ,  $\Delta x = 0,1$ ;      **1.2.**  $x = 3$ ,  $\Delta x = 0,05$ .

2. Знайдіть диференціал функцій:

- 2.1.**  $y = (4 - x^2)2^x$ .      **2.2.**  $y = \sqrt{\sin x} + \operatorname{tg}^2 x$ .      **2.3.**  $y = \ln \arcsin x$ .
- 2.4.**  $y = x^{2x+1}$ .      **2.5.**  $y = \frac{\arccos x}{x^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .      **2.6.**  $y = \sqrt[4]{x} + x \log_2 \operatorname{tg} x$ .

3. Знайдіть диференціал функцій, заданих неявно, у точці  $M_0(x_0; y_0)$ :

- 3.1.**  $x^3 + y^3 + 3xy - 15 = 0$ ,  $M_0(1; 2)$ .
- 3.2.**  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ,  $M_0(0; 1)$

4. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразів:

- 4.1.**  $\sqrt[3]{131}$ .      **4.2.**  $(0,95)^6$ .      **4.3.**  $\sin 9^\circ$ .      **4.4.**  $\operatorname{arctg} 1,05$ .

5. Розкладіть многочлен  $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + x + 2$  за степенями двочлена  $x-2$ .

6. Розкладіть функції за формулою Маклорена до  $o(x^n)$ :

6.1.  $\frac{1}{1-2x}$ .

6.2.  $\frac{1}{2+x}$ .

6.3.  $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ .

6.4.  $\frac{x^2+1}{x-2}$ .

6.5.  $x \cos^2 x$ .

6.6.  $\ln \frac{1-2x}{1+x}$ .

6.7.  $x \sin x$ .

6.8.  $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ .

6.9.  $\ln(x^2 - 3x + 2)$ .

7. Обчисліть границі, використовуючи правила Лопітала:

7.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x - 3}{x^2 + 2}$ .

7.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)e^{-x}$ .

7.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (tg 2x)^x$ .

7.4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x - \sin x}{x^3}$ .

7.5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ .

7.6.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 3^{x^2}$ .

7.7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(7-2x) \ln(6-2x)$ .

7.8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 8x)}$ .

7.9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$ .

7.10.  $\lim_{x \rightarrow 0} tg x \cdot \ln^2 x$ .

7.11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

7.12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctg x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

7.13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ .

7.14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}$ .

7.15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2}{e^{\sqrt{x}}}$ .

**Відповіді:**

1.1  $\Delta y = -0,19$ ,  $dy = -0,2$ ; 1.2.  $dy = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,1025$ . 2.1.  $2^x [(4-x^2) \ln 2 - 2x] dx$ ;

2.4.  $x^{2x} (2x \ln x + 2x + 1) dx$ . 3.1.  $-\frac{3dx}{5}$ ; 3.2.  $dx$ . 4.1. 5,08; 4.2. 0,7; 4.3. 0,157;

4.4. 0,81. 5.  $(x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 7(x-2)$ . 6.2. *Указівка:* запишіть вираз у вигляді

$\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ , після чого скористайтесь формулою для розкладання  $\frac{1}{1+x} = \dots$  ;

6.4. *Указівка:* зведіть вираз до вигляду  $x+2 - \frac{5}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$  і скористайтесь фор-

мулою для розкладання  $\frac{1}{1-x} = \dots$ . 7. 1.  $\infty$ . 7.2. 0. 7.3. 1. 7.4.  $-\frac{11}{6}$ . 7.5.  $e^2$ .

7.6.  $\infty$ . 7.7. 0. 7.8.  $\frac{3}{8}$ . 7.9. 0. 7.10. 0. 7.11. 0,5. 7.12. 1. 7.13. 1. 7.14.  $\frac{1}{3}$ . 7.15. 0.

### 1.5.2 Індивідуальні завдання

1. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразу:

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| 1.1. $\cos 61^\circ$ .               | 1.2. $e^{0.2}$ .                         | 1.3. $\sin 33^\circ$ .                   |
| 1.4. $\operatorname{arctg} 1,05$ .   | 1.5. $\sqrt{120}$ .                      | 1.6. $\sqrt[3]{340}$ .                   |
| 1.7. $\sqrt[3]{66}$ .                | 1.8. $\sqrt[5]{33}$ .                    | 1.9. $\sqrt[6]{70}$ .                    |
| 1.10. $\cos 85^\circ$ .              | 1.11. $\sin 8^\circ$ .                   | 1.12. $\sin 28^\circ$ .                  |
| 1.13. $\operatorname{arctg} 0,95$ .  | 1.14. $\operatorname{arctg} 0,9$ .       | 1.15. $e^{0.3}$ .                        |
| 1.16. $\ln 1,05$ .                   | 1.17. $\ln 0,97$ .                       | 1.18. $\ln 1,08$ .                       |
| 1.19. $\operatorname{tg} 47^\circ$ . | 1.20. $\operatorname{ctg} 50^\circ$ .    | 1.21. $(1,02)^5$ .                       |
| 1.22. $\arccos 0,35$ .               | 1.23. $\arcsin 0,52$ .                   | 1.24. $(1,97)^6$ .                       |
| 1.25. $(2,04)^4$ .                   | 1.26. $\ln \operatorname{tg} 48^\circ$ . | 1.27. $\ln \operatorname{tg} 43^\circ$ . |
| 1.28. $\cos 86^\circ$ .              | 1.29. $\sin 26^\circ$ .                  | 1.30. $\operatorname{tg} 40^\circ$ .     |

2. Знайдіть диференціал  $d^2 y$  у точці  $x_0$ :

- |   |   |
|---|---|
| 2.1. $y = x\sqrt{x-3}, x_0 = 12$ .                                | 2.2. $y = x^2\sqrt{x-5}, x_0 = 6$ .                               |
| 2.3. $y = x^2\sqrt{2x+3}, x_0 = 11$ .                             | 2.4. $y = (2x-1)^2\sqrt{x+2}, x_0 = 7$ .                          |
| 2.5. $y = (\ln x)\sqrt{2x-1}, x_0 = 5$ .                          | 2.6. $y = (\ln x)\sqrt{2x+1}, x_0 = 12$ .                         |
| 2.7. $y = \sin^3 x \cos^5 x, x_0 = \frac{\pi}{3}$ .               | 2.8. $y = \sin^2 x \cos^4 x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ .               |
| 2.9. $y = \sin^3 x \cos^7 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .               | 2.10. $y = \sin^4 x \cos^6 x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ .              |
| 2.11. $y = \sin^3 x \operatorname{tg}^5 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ . | 2.12. $y = \sin^2 x \operatorname{tg}^4 x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ . |
| 2.13. $y = (x-1)\sqrt[3]{5x+2}, x_0 = 5$ .                        | 2.14. $y = (2x-1)\sqrt[4]{3x+4}, x_0 = 4$ .                       |
| 2.15. $y = (x+1)^2\sqrt[3]{3x+5}, x_0 = 5$ .                      | 2.16. $y = (3x-1)^3\sqrt[4]{7x+2}, x_0 = 2$ .                     |
| 2.17. $y = (x-1)^5\sqrt[3]{2x-2}, x_0 = 5$ .                      | 2.18. $y = (4x-1)^3\sqrt[5]{x-2}, x_0 = 3$ .                      |
| 2.19. $y = \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{x^5}, x_0 = 2$ .                 | 2.20. $y = \frac{\sqrt{x+5}}{(x-2)^3}, x_0 = 4$ .                 |
| 2.21. $y = \frac{\sqrt[5]{x^2-4}}{x}, x_0 = 6$ .                  | 2.22. $y = \frac{\sqrt[4]{x^2-9}}{x^2}, x_0 = 5$ .                |
| 2.23. $y = \frac{\sin^3 x}{\cos x}, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .        | 2.24. $y = \frac{\cos^4 x}{\sin x}, x_0 = \frac{\pi}{3}$ .        |
| 2.25. $y = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .      | 2.26. $y = \operatorname{tg}^4 x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ .          |
| 2.27. $y = \operatorname{ctg}^5 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .         | 2.28. $y = (x+1)^3\sqrt[3]{x+2}, x_0 = 6$ .                       |
| 2.29. $y = x^4\sqrt{2x+7}, x_0 = 9$ .                             | 2.30. $y = (2x-3)^2\sqrt{x+3}, x_0 = 1$ .                         |

**3. Знайдіть похідну  $y^{(n)}$  функції, використовуючи формулу Лейбніца:**

**3.1.**  $y = e^{2x}(x^3 - 3x), n = 10.$

**3.2.**  $y = (x^3 - 2x)\sin 2x, n = 12.$

**3.3.**  $y = 2^x(3x^3 - 5), n = 15.$

**3.4.**  $y = (x^3 + 2x^2)\ln x, n = 8.$

**3.5.**  $y = (6x^2 + 4)\ln x, n = 10.$

**3.6.**  $y = (x^2 - 12) \cdot 2^x, n = 9.$

**3.7.**  $y = (x^3 + 5x^2)\sin x, n = 11.$

**3.8.**  $y = (x^3 - 2x)\cos x, n = 9.$

**3.9.**  $y = (x^3 - 4x + 3)\cos 2x, n = 8.$

**3.10.**  $y = (x^3 + 2x + 3)\ln x, n = 7.$

**3.11.**  $y = (x^2 - 5x)\ln(x + 1), n = 8.$

**3.12.**  $y = (x^2 + 7)\ln(x - 2), n = 10.$

**3.13.**  $y = (x^2 - 9x)\ln(x - 2), n = 6.$

**3.14.**  $y = (2x^2 - 11)3^x, n = 9.$

**3.15.**  $y = (4x^2 - x)4^{-x}, n = 10.$

**3.16.**  $y = (2x^3 - 4x^2)5^{-x}, n = 7.$

**3.17.**  $y = (x^2 + 3x)6^{-x}, n = 8.$

**3.18.**  $y = e^{-x}(x^3 - x^2 + 2), n = 10.$

**3.19.**  $y = 2^{-x-1}(x^3 - 6x + 3), n = 7.$

**3.20.**  $y = 3^{-x}(2x^2 + x + 3), n = 8.$

**3.21.**  $y = (4x^3 - 1)\cos 2x, n = 10.$

**3.22.**  $y = (3x^2 - 4x)\cos 2x, n = 9.$

**3.23.**  $y = (5x^2 - 3x)\sin 3x, n = 11.$

**3.24.**  $y = (6x^3 - 1)\sin 4x, n = 15.$

**3.25.**  $y = (2x^3 - 1)\ln(x - 3), n = 7.$

**3.26.**  $y = (3x^3 + 2)\ln x, n = 8.$

**3.27.**  $y = (x^2 - 1)\ln(2x - 1), n = 9.$

**3.28.**  $y = e^{-2x}(x^3 - 6), n = 8.$

**3.29.**  $y = (x^3 - 3)\ln(2x + 1), n = 8.$

**3.30.**  $y = 2^{-x}(x^3 - 4), n = 10.$

**4. Знайдіть границі, використовуючи правила Лопіталя:**

**4.1. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x;$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2 - 5x + 2};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$

**4.2. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln^2 x;$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2 + 3x + 1};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^x.$

**4.3. a)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x};$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$

**4.4. a)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1)4^{-x};$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$

**4.5. a)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x - 2) \cdot 3^{-x};$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

**4.6. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \operatorname{ctg} x);$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right);$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}.$

**4.7. a)**  $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \ln(x - 1)];$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x.$

**4.8. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$

**4.9. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 2^{\frac{1}{x^2}};$

**б)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x \cos x}{x^2};$

**в)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$

- 4.10. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} 2^{x^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ .
- 4.11. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-4} 5^{x^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{x^{-2}}$ .
- 4.12. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-4} 6^{x^{\frac{1}{4}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^x$ .
- 4.13. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(5-2x) \ln(4-2x)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ .
- 4.14. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(x-3) \ln(7-2x)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ .
- 4.15. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(2x-1) \ln(2-2x)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .
- 4.16. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-\cos x) \operatorname{ctg}^2 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 7x)}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$ .
- 4.17. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - 3 \cos x + 2) e^{x^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg}^3 x)}{\ln(\sin 4x)}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}$ .
- 4.18. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - 1) e^{x^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$ .
- 4.19. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^2 x) e^{x^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 4.20. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \ln^2(2x)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 4.21. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln^2 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{x^3 - x + 1}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\arcsin x}$ .
- 4.22. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln^2 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 3^x}{x^2 - 6x + 4}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x)^x$ .
- 4.23. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x} \ln^2 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 6}{(1,1)^x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ .
- 4.24. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln^2 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x - 2}{(1,5)^x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
- 4.25. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 2^{x^{\frac{1}{4}}}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 10x - 20}{(2,5)^x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$ .
- 4.26. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4x + 5) \cdot 3^{-x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(2x^2 - 1)}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{arctg} 2x}$ .
- 4.27. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 3x + x) \cdot 6^{-x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x^{\operatorname{arctg} x}$ .
- 4.28. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln^3 x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 2^x)}{x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x-\sin x}$ .

$$4.29. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \ln^2(x - 1); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(4x^2 + 3^x)}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x^{\ln x}.$$

$$4.30. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{-6} 2x^{\frac{1}{6}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^{tg x} - 1} \right); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{e^{-x}}.$$

## 1.6 Застосування похідної до дослідження функції

Монотонність функції. Екстремум. Інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину. Асимптоти. Найбільше та найменше значення функції. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

### 1.6.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функцій:

$$1.1. y = 6 - 3x^2 - x^3. \quad 1.2. y = x^4 - 2x^2. \quad 1.3. y = x \ln x.$$

$$1.4. y = x^2 e^{-x}. \quad 1.5. y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}.$$

2. Дослідіть на екстремум функції:

$$2.1. y = x^3 - 9x^2 + 15x - 10. \quad 2.2. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + x.$$

$$2.3. y = (x - 1)^2 (x - 2)^2. \quad 2.4. y = x(x - 1)^2 (x + 1)^3.$$

$$2.5. y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}. \quad 2.6. y = 3x + \frac{1}{x^3}. \quad 2.7. y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

3. Знайдіть максимальні та мінімальні значення функцій:

$$3.1. y = x e^{-x}. \quad 3.2. y = x - \ln(1 + x). \quad 3.3. y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

4. Дослідіть поведінку функції в околі заданих точок за допомогою похідних вищих порядків:

$$4.1. y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5, x_0 = 0. \quad 4.2. y = x \sin x - x^2, x_0 = 0.$$

5. Знайдіть інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

$$5.1. y = x^2 - 2x + 1. \quad 5.2. y = x^3 - 1. \quad 5.3. y = x^3 - 3x^2 + 9x + 6.$$

$$5.4. y = x^2 \ln x. \quad 5.5. y = e^{-x^2}. \quad 5.6. y = x e^x. \quad 5.7. y = \ln x + 2x^2.$$

6. Знайдіть асимптоти кривих:

$$6.1. y = \frac{6x^4 + 3x^3}{5x^3 + 1}. \quad 6.2. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}. \quad 6.3. y = x \cdot e^{\frac{2}{x}} + 1.$$

7. Дослідіть функції та побудуйте графіки:

7.1.  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .

7.2.  $y = (2x + 3)e^{\frac{2}{x+1}}$ .

7.3.  $y = xe^{\frac{x^2}{2}}$ .

7.4.  $y = (x+1)^2(x-2)$ .

7.5.  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

7.6.  $y = x^2 \ln x$ .

7.7.  $y = \frac{e^{x+1}}{x+1}$ .

7.8.  $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$ .

7.9.  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ .

7.9.  $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ .

7.10.  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ .

7.11.  $y = 16x(x-1)^3$ .

7.12.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

**Відповіді:**

1.1.  $(-\infty; -2)$  і  $(0; \infty)$  – спадає;  $(-2; 0)$  – зростає. 1.2.  $(-\infty; -1)$  і  $(0; 1)$  – спадає;  $(-1; 0)$  і  $(1; \infty)$  – зростає. 1.3.  $(0; \frac{1}{e})$  – спадає;  $(\frac{1}{e}; \infty)$  – зростає. 1.4.  $(-\infty; 0)$  і  $(2; \infty)$  – спадає;  $(0; 2)$  – зростає. 1.5.  $(-\infty; 1 - \sqrt{3})$  і  $(1 + \sqrt{3}; \infty)$  – зростає;  $(1 - \sqrt{3}; 1)$  і  $(1; 1 + \sqrt{3})$  – спадає. 2.2.  $x = 2$  – максимум,  $x = 3$  – мінімум. 2.3.  $x = 1$  – максимум,  $x = 3$  – мінімум. 2.4.  $x = 1; 2$  – мінімум,  $x = \frac{3}{2}$  – максимум. 2.5.  $x = -\frac{4}{3}; 1$  – мінімум,  $x = \frac{1}{2}$  – максимум. 2.6.  $x = \frac{1}{2}$  – мінімум,  $x = -1$  – максимум,  $x = 1$  – мінімум. 2.7.  $x = 1$  – максимум. 3.1.  $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e}$ . 3.2.  $y_{\min} = y(0) = 0$ . 3.3.  $y_{\min} = y(1) = 0$ ,  $y_{\max} = y(e^2) = \frac{4}{e^2}$ . 4.1. Мінімум. 4.2. Максимум. 5.3.  $(-\infty; 1)$  – опукла,  $(1; \infty)$  – вгнута,  $(1; 13)$  – точка перегину. 5.4.  $(0; e^{\frac{3}{2}})$  – опукла,  $(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$  – вгнута,  $(e^{\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2e^3})$  – точка перегину. 5.5.  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty)$  – вгнута,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$  – опукла,  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$  – опукла,  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; e^{\frac{1}{2}})$  – точки перегину. 5.7.  $(0; \frac{1}{2})$  – опукла,  $(\frac{1}{2}; \infty)$  – вгнута,  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2)$  – точка перегину. 6.1.  $6x - 5y + 3 = 0$  – похила асимптота,  $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$  – вертикальна асимптота. 6.2.  $x = 1; 2$  – вертикальні асимптоти,  $y = 0$  – горизонтальна асимптота. 6.3.  $y = x + 3$ . 7.1.  $y = x$ ,  $x = 0$  – асимптоти;  $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$  – зростає,  $(0; 2)$  – спадає;  $x_{\min} = 2$ ,  $y_{\min} = 3$ ;  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$  – вгнута.

**7.2.** Визначена скрізь, крім  $x = -1$ ; екстремумів немає; функція зростаюча;  $(-2; -e^2)$  – точка перегину;  $x = -1$  – асимптота. **7.3.** Непарна;  $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$  при  $x = 1$ ;  $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$  при  $x = -1$ ;  $(0; 0)$ ,  $(-1; -\frac{1}{\sqrt{e}})$ ,  $(1; \frac{1}{\sqrt{e}})$  – точки перегину;  $y = 0$  – асимптота. **7.4.**  $y_{\min} = -4$  при  $x = -1$ ,  $(-\infty; 0,5)$  – опукла,  $(0,5; \infty)$  – вгнута;  $(0,5; -\frac{27}{8})$  – точка перегину; асимптот немає. **7.5.** Непарна;  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  – зростає,  $(-1; 0) \cup (0; 1)$  – спадає;  $y_{\max} = -4$  при  $x = -1$ ,  $y_{\min} = 4$  при  $x = 1$ ;  $y = 3x$ ,  $x = 0$  – асимптоти;  $(-\infty; 0)$  – опукла,  $(0; \infty)$  – вгнута. **7.6.** Визначена для  $x > 0$ ;  $y_{\min} = -\frac{1}{2e}$  при  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ;  $(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}})$  – опукла;  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; \infty)$  – вгнута;  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3})$  – точка перегину;  $y(+0) = 0$ ; асимптот немає. **7.7.** Визначена скрізь, крім  $x = -1$ ;  $y_{\min} = e$  при  $x = 0$ ;  $x = -1$  – асимптота;  $(-\infty; -1)$  – опукла,  $(-1; \infty)$  – вгнута; точок перетину немає. **7.8.** Парна;  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ ;  $y = 4$  – асимптота;  $(\pm 1; 1)$  – точки перегину;  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  – опукла,  $(-1; 1)$  – вгнута. **7.9.** Визначена скрізь крім  $x = \pm 2$ ; непарна;  $y_{\max} = -3\sqrt{3}$  при  $x = -2\sqrt{3}$ ;  $y_{\min} = 3\sqrt{3}$  при  $x = 2\sqrt{3}$ ;  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$  – опукла;  $(-2; 0) \cup (2; \infty)$  – вгнута;  $(0; 0)$  – точки перегину;  $y = x$ ,  $y = \pm 2$  – асимптоти. **7.10.**  $y_{\max} = \frac{4}{27}$  при  $x = \frac{8}{27}$ ;  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$  – опукла; точок перегину та асимптот немає. **7.11.** Визначена скрізь, крім  $x = 0$ ;  $y_{\min} = 3$  при  $x = 1$ ;  $x = 0$  – асимптота;  $(-\sqrt[3]{2}; 0)$  – опукла,  $(-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (0; \infty)$  – вгнута;  $(-\sqrt[3]{2}; 0)$  – точка перегину. **7.12.**  $y_{\min} = -\frac{27}{16}$  при  $x = \frac{1}{4}$ ;  $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$  – вгнута,  $(\frac{1}{2}; 1)$  – опукла;  $(\frac{1}{2}; -1)$ ,  $(1; 0)$  – точки перегину; асимптот немає. **7.13.** Визначена для  $x > 0$ ;  $(e^2; \frac{2}{e})$  – точка локального максимуму;  $x = 0$  – асимптота;  $(0; e^{\frac{8}{3}})$  – опукла;  $(e^{\frac{8}{3}}; \infty)$  – вгнута;  $(e^{\frac{8}{3}}; \frac{8}{3e^3})$  – точка перегину.

## 1.6.2 Індивідуальні завдання

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функцій.

- 1.1.  $y = x^2 - \ln x^2$ .      1.2.  $y = \sqrt{x-1}(x-2)$ .      1.3.  $y = (x-1)^2(x+1)^3$ .  
1.4.  $y = \frac{x^2}{x^4+4}$ .      1.5.  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ .      1.6.  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x+24}$ .  
1.7.  $y = \frac{x^2}{2^x}$ .      1.8.  $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$ .      1.9.  $y = \frac{x^5}{3^x}$ .  
1.10.  $y = x^4 \ln x$ .      1.11.  $y = \ln(x^2+1) - x$ .      1.12.  $y = \frac{x^3}{e^x}$ .  
1.13.  $y = 9^{-x} - 3^{-x}$ .      1.14.  $y = x \ln^3 x$ .      1.15.  $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ .  
1.16.  $y = (x-5)^3(x+4)^2$ .      1.17.  $y = x^2 \ln x$ .      1.18.  $y = x \ln^2 x$ .  
1.19.  $y = x^2 e^{-x^2}$ .      1.20.  $y = 2^x - 4^x$ .      1.21.  $y = \frac{x^2+3x-4}{x-5}$ .  
1.22.  $y = (x-4)^3(x+5)^2$ .      1.23.  $y = \sqrt{2x-x^2}$ .      1.24.  $y = \sqrt{x} \ln x$ .  
1.25.  $y = \frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$ .      1.26.  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .      1.27.  $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$ .  
1.28.  $y = \frac{x^2}{x^4+4}$ .      1.29.  $y = e^{-x} - e^{-2x}$ .      1.30.  $y = x + \frac{1}{x}$ .

2. Знайдіть точки перегину, інтервали опуклості та вгнутості функцій:

- 2.1.  $y = x^2 \sqrt{x+1}$ .      2.2.  $y = \operatorname{arctg} x^2$ .      2.3.  $y = (x-4)^4(x+7)^3$ .  
2.4.  $y = e^{x^3}$ .      2.5.  $y = \ln(1+x^2)$ .      2.6.  $y = x + \sin x$ .  
2.7.  $y = 3x^2 - x^3$ .      2.8.  $y = xe^{-x}$ .      2.9.  $y = 15x^2 + x^{\frac{5}{3}}$ .  
2.10.  $y = 3x^2 - 4x\sqrt{x}$ .      2.11.  $y = \ln(x^4+1)$ .      2.12.  $y = \ln x + \ln^2 x$ .  
2.13.  $y = e^{-x^4}$ .      2.14.  $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ .      2.15.  $y = (x-1)^2 \sqrt{x}$ .  
2.16.  $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ .      2.17.  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ .      2.18.  $y = \frac{x}{x^2-2x+x}$ .  
2.19.  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .      2.20.  $y = \frac{x^2}{x+2}$ .      2.21.  $y = \frac{x^2}{(x-1)^3}$ .  
2.22.  $y = \frac{x^2+2x+1}{x^3}$ .      2.23.  $y = \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ .      2.24.  $y = x\sqrt{x}(4-x)^{\frac{1}{2}}$ .  
2.25.  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ .      2.26.  $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2}$ .      2.27.  $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$ .  
2.28.  $y = x^4 + 6x^3 + 12x^2$ .      2.29.  $y = \frac{x^3}{4x^2+1}$ .      2.30.  $y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$ .

3. Проведіть повне дослідження функції  $y = f(x)$  та побудуйте її графік:

3.1.  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ .

3.2.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ .

3.3.  $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$ .

3.4.  $y = \frac{x}{1+x^2}$ .

3.5.  $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ .

3.6.  $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ .

3.7.  $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$ .

3.8.  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .

3.9.  $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ .

3.10.  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

3.11.  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ .

3.12.  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .

3.13.  $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ .

3.14.  $y = \frac{4x^2}{3 - x}$ .

3.15.  $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$ .

3.16.  $y = \frac{8}{x^2 - 4}$ .

3.17.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

3.18.  $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ .

3.19.  $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ .

3.20.  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ .

3.21.  $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ .

3.22.  $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ .

3.23.  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ .

3.24.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .

3.25.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ .

3.26.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

3.27.  $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$ .

3.28.  $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$ .

3.29.  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ .

3.30.  $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$ .

## 2 ТЕСТИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

### 2.1 Вступ до математичного аналізу

1. Знайдіть область визначення функцій  $y_i (i = 1, \dots, 5)$ , використовуючи для цього підказку:

$$y_1 = \frac{x+1}{x^2-1}; \quad y_2 = \sqrt{2-x-x^2}; \quad y_3 = \lg(1-x^2);$$
$$y_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}; \quad y_5 = \begin{cases} 3^{-x} + 1, & \text{якщо } -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{якщо } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{x}{x^2-2}, & \text{якщо } \pi < x < 6. \end{cases}$$

#### Підказка

Наведемо області визначення деяких елементарних функцій. Позначення  $D(f)$  – область визначення функції  $f(x)$ .

1. Нехай  $f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \dots + a_n, a_0, a_1, \dots, a_n \in R$  – многочлен. Тоді  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2. Нехай  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , де  $P(x)$  і  $Q(x)$  – многочлени. Тоді  $D(f)$  – множина розв'язків нерівності  $Q(x) \neq 0$ . Або символічно  $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$ .

3. Нехай  $f(x) = \sqrt[2n]{P(x)}$ , де  $P(x)$  – многочлен,  $2n$  – натуральне кратне число. Тоді  $D(f)$  – множина розв'язків нерівності  $P(x) \geq 0$ . Або символічно  $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \{x \mid P(x) < 0\}$ .

4. Нехай  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$ , де  $P(x)$  – многочлен. Тоді  $D(f)$  – множина розв'язків нерівності  $P(x) > 0$ . Або символічно  $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \{x \mid P(x) \leq 0\}$ .

5. Нехай  $f(x) = \log_a P(x)$ , де  $a > 0, a \neq 1, P(x)$  – многочлен. Тоді  $D(f)$  – множина розв'язків нерівності  $P(x) > 0$ . Або символічно  $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \{x \mid P(x) \leq 0\}$ .

6. Нехай  $f(x) = \operatorname{tg} P(x)$ , де  $P(x)$  – многочлен. Тоді  $D(f)$  – множина розв'язків сукупності нерівностей  $P(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ . Або символічно  $D(f) = (-\infty; +\infty) \setminus \left\{x \mid P(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$ .

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

$y_i$	Номер відповіді				
	1	2	3	4	5
$y_1$	$(-\infty; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$
$y_2$	$(-2; 1)$	$[-1; 2]$	$(-1; 2]$	$(-2; -1)$	$[-2; 1]$
$y_3$	$(-1; 1)$	$[-1; 1]$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; +\infty)$
$y_4$	$(5; +\infty)$	$(0; 5)$	$(-\infty; 5)$	$[0; 5]$	$(-5; 0)$
$y_5$	$[-1; 6)$	$[-1; \pi) \cup (\pi; 6)$	$(-1; 6)$	$[-1; 6]$	$[-1; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; 6)$

**2.** Повторіть визначення складної функції. Для кожної пари функцій  $f(x)$  і  $\varphi(x)$ , які задані умовами 2.1–2.3, складіть дві складні функції –  $u(x) = f(\varphi(x))$  і  $v(x) = \varphi(f(x))$ :

**2.1.**  $f(x) = x^5$ ;  $\varphi(x) = 2x - 3$ ;

**2.2.**  $f(x) = 2^x$ ;  $\varphi(x) = x^2$ ;

**2.3.**  $f(x) = \ln \sqrt{x}$ ;  $\varphi(x) = \sin x$ .

У кожному з випадків знайдіть області визначення складних функцій  $u(x)$  і  $v(x)$ .

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

	Номер відповіді		
	1	2	3
<b>2.1</b>	$u = 2(x-3)^5, D(u) = R;$ $v = (2x)^5 - 3, D(v) = R$	$u = (2x-3)^5, D(u) = R;$ $v = 2x^5 - 3, D(v) = R$	$u = 2^5 x - 3^5, D(u) = R;$ $v = (2x-3)^5, D(v) = R$
<b>2.2</b>	$u = 2x^2, D(u) = R;$ $v = 4x, D(v) = R$	$u = (2x)^2, D(u) = R;$ $v = 2^{x^2}, D(v) = R$	$u = 2^{x^2}, D(u) = R;$ $v = 2^{2x}, D(v) = R$
<b>2.3</b>	$u = \ln \sqrt{\sin x},$ $D(u) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2\pi n; \pi + 2\pi n);$ $v = \sin(\ln \sqrt{x}),$ $D(v) = (0; +\infty)$	$u = \sqrt{\ln \sin x},$ $D(u) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\};$ $v = \sin(\ln^2 x),$ $D(v) = (0; +\infty)$	$u = \ln \sin x, D(u) = R;$ $v = \sin \sqrt{\ln x},$ $D(v) = [1; +\infty)$

**3.** Прочитавши підказку, згадайте, як виконуються елементарні перетворення графіків. Визначте, за допомогою якого з перетворень графіка функції  $y = \sin x$  можна отримати графік функції  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ):

**3.1.**  $y_1 = -\sin x$ ;    **3.2**  $y_2 = |\sin x|$ ;    **3.3**  $y_3 = \sin x + 2$ ;

**3.4**  $y_4 = 2 \sin x$ ;    **3.5**  $y_5 = \sin 2x$ ;    **3.6**  $y_6 = \sin(x+2)$ .

### Підказка

Розглянемо елементарні перетворення графіків функцій.

**Симетрія відносно осі  $Oy$ .** Графік функції  $y = f(-x)$  отримуємо з графіка  $y = f(x)$  симетричним відображенням останнього відносно осі  $Oy$ .

**Симетрія відносно осі  $Ox$ .** Графік функції  $y = -f(x)$  отримуємо з графіка функції  $y = f(x)$  симетричним відображенням останнього відносно осі  $Ox$ .

**Паралельне перенесення вздовж осі  $Oy$ .** Графік функції  $y = f(x) + a$  отримуємо з графіка функції  $y = f(x)$  паралельним перенесенням уздовж осі  $Oy$  на  $a$  одиниць угору, якщо  $a > 0$ , і вниз, якщо  $a < 0$ .

**Паралельне перенесення вздовж осі  $Ox$ .** Графік функції  $y = f(x - a)$  отримуємо з графіка функції  $y = f(x)$  паралельним перенесенням на  $a$  одиниць праворуч, якщо  $a > 1$ , і ліворуч, якщо  $a < 0$ .

**Розтягання (стискання) вздовж осі  $Oy$ .** Графік функції  $y = af(x)$  отримуємо розтяганням (стисканням) графіка  $y = f(x)$  у  $a$  разів уздовж осі  $Oy$ , якщо  $a > 1$ ; стискаємо в  $a^{-1}$  разів, якщо  $0 < a < 1$ .

**Розтягання (стискання) вздовж осі  $Ox$ .** Графік функції  $y = f(ax)$  отримуємо розтяганням (стисканням) у  $a$  разів ( $a^{-1}$  разів) уздовж осі  $Ox$ , якщо  $a > 1$  ( $0 < a < 1$ ).

**Графік функції  $y = |f(x)|$**  отримуємо з графіка  $y = f(x)$  дзеркальним відображенням відносно осі  $Ox$  тієї частини графіка, яка лежить нижче від цієї осі.

*Варіанти відповідей* наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Номер відповіді	Варіант відповіді
1	«Стискання» в 2 рази вздовж осі $Ox$
2	«Розтягання» в 2 рази в напрямку осі $Oy$
3	Паралельне перенесення вздовж осі $Ox$ на 2 одиниці ліворуч
4	Паралельне перенесення вздовж осі $Ox$ на 2 одиниці праворуч
5	Паралельне перенесення вздовж осі $Oy$ на 2 одиниці угору
6	Симетричне відображення відносно осі $Ox$
7	Дзеркальне відображення ділянок графіка, які лежать нижче від осі $Ox$ , відносно цієї осі (знизу угору)

#### 4. Сформулюйте визначення:

- скінченної границі функції  $y(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ;  $x \rightarrow x_0 + 0$ ;  $x \rightarrow x_0 - 0$ ;  $x \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow -\infty$  (де  $x_0$  – число);
- нескінченної границі функції  $y(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ;  $x \rightarrow x_0 + 0$ ;  $x \rightarrow x_0 - 0$ ;  $x \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow -\infty$  (де  $x_0$  – число).

Зобразьте схематично графіки функцій  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  для наведених нижче множин:

$$y_1 = 2^x; \quad y_2 = x^3; \quad y_3 = \ln(x+2); \quad y_4 = \operatorname{tg} x;$$

$$y_5 = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad y_6 = \frac{1}{x}.$$

Користуючись визначенням границі і побудованими графіками, серед множини функцій  $y_1 - y_6$  вкажіть ті функції, які задовольняють такі умови:

**4.1.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$ ;

**4.2.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$ ;

**4.3.**  $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = -1$ ,  $y(0) = 0$ ;

**4.4.**  $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$ ;

**4.5.**  $\lim_{x \rightarrow -2+0} y(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} y(x) = 0$ ;

**4.6.**  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)+0} y(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)-0} y(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi k} y(x) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**5.** У вказаній множині функцій  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 7$  знайдіть нескінченно малі при  $x \rightarrow 0$  функції:

$$y_1 = 2x+3; \quad y_2 = x^2; \quad y_3 = 2^{x-1}; \quad y_4 = 2^x - 1; \quad y_5 = \cos 2x;$$

$$y_6 = \sin^3 5x; \quad y_7 = \sqrt{x+4} - 2.$$

**6.** Згадайте основні важливі границі. Використовуючи їх, знайдіть ті значення  $a$ , при яких справедливі наведені границі:

**6.1.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1$ ; **6.2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{ax} = 1$ ; **6.3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{a/x} = e$ ;

**6.4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$ ; **6.5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-2x)}{ax} = \frac{1}{\ln 3}$ .

*Підказка*

Наведемо основні важливі границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{a(x) \rightarrow 0} \frac{\sin a(x)}{a(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{a(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} a(x)}{a(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad \text{і} \quad \lim_{a(x) \rightarrow 0} (1+a(x))^{1/a(x)} = e.$$

$$\text{При } a > 0, a \neq 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{і} \quad \lim_{a(x) \rightarrow 0} \frac{a^{a(x)} - 1}{a(x)} = \ln a.$$

$$\text{При } a > 0, a \neq 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \text{і} \quad \lim_{a(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+a(x))}{a(x)} = \frac{1}{\ln a}.$$

*Варіанти відповідей:*

**1)**  $a = e$ ; **2)**  $a = 0$ ; **3)**  $a = -2$ ; **4)**  $a = \pi$ ; **5)**  $a = 1$ ; **6)**  $a = -1$ .

**7.** Розкрийте зміст поняття невизначеності, яке використовується при обчисленні границь. Поясніть значення символічних позначень невизначеностей:

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right], \quad [0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad [1^\infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0].$$

Визначте, чи містять невизначеності (якщо так, то якого типу) такі границі:

$$\mathbf{7.1.} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}; \quad \mathbf{7.2.} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 8x + 15};$$

$$\mathbf{7.3.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{11 + 2x}}; \quad \mathbf{7.4.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} \right);$$

$$\mathbf{7.5.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}; \quad \mathbf{7.6.} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$$

$$\mathbf{7.7.} \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x; \quad \mathbf{7.8.} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^x.$$

*Варіанти відповідей:*

**1)**  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ ; **2)** Невизначеності немає; **3)**  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ ; **4)**  $[0^0]$ ; **5)**  $[0 \cdot \infty]$ ; **6)**  $[\infty^0]$ ; **7)**  $[\infty - \infty]$ ; **8)**  $[1^\infty]$ .

**8.** Сформулюйте визначення:

- неперервності функції у точці;
- неперервності функції у точці праворуч;
- неперервності функції у точці ліворуч.

Використовуючи ці визначення, знайдіть такі значення  $a$ , при яких функція  $y_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) буде неперервною в указаній точці  $x_0$ :

$$\mathbf{8.1.} \quad y_1 = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 1, \\ a + \ln x, & \text{якщо } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \quad \mathbf{8.2.} \quad y_2 = \begin{cases} \frac{1}{3^{x-2}}, & \text{якщо } x < 2, \\ \frac{a}{x}, & \text{якщо } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$8.3. y_3 = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & \text{якщо } x < 0, \\ a, & \text{якщо } x = 0, \\ \frac{x}{2x + x^2}, & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0; \quad 8.4. y_4 = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{якщо } x < \frac{\pi}{4}, \\ 4 \cos^2 x + a, & \text{якщо } x \geq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$8.5. y_5 = \begin{cases} (1 - 2x)^{1/x}, & \text{якщо } x < 0, \\ (1 + 4x)^{1/2x}, & \text{якщо } x > 0, \\ e^a, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

*Підказка*

Визначення неперервності в точці  $x_0$  функції: функція  $f(x)$ , яка визначена у точці  $x_0$  і задовольняє умову  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , називається неперервною у точці  $x_0$ .

Функція  $f(x)$  називається неперервною в точці  $x_0$  праворуч (ліворуч), якщо вона визначена в цій точці і  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ).

**Увага!**

Якщо функція невизначена у точці  $x_0$ , то в цій точці вона не є неперервною (тобто є розривною в точці  $x_0$ ).

Функція є неперервною в точці  $x_0$ , тоді і тільки тоді, якщо вона неперервна в ній праворуч і ліворуч, тобто

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

*Підказка*

Теорема про неперервність елементарних функцій: будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

*Варіанти відповідей:*

1)  $a = \frac{1}{2}$ ; 2)  $a = 0$ ; 3) таких значень немає; 4)  $a = -1$ ; 5)  $a = 1$ .

9. Використовуючи поняття точки розриву функцій і визначення типів точок розриву, з'ясуйте, чи є точка  $x_0 = 3$  точкою розриву даних функцій (у випадку позитивної відповіді визначте тип розриву):

$$y_1 = (x-3)^2; \quad y_2 = \frac{1}{x-3}; \quad y_3 = \ln(x-3);$$

$$y_4 = \frac{(x-3)^2}{x-3}; \quad y_5 = \sin x + \frac{1}{x^2 + x - 3}; \quad y_6 = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < 3, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

### *Підказка*

Дамо класифікацію точок розриву.

Точка  $x_0$  називається точкою усувного розриву для функції  $f(x)$ , якщо в цій точці лівостороння та правостороння границі функції дорівнюють одному й тому самому числу, яке не співпадає зі значенням  $f(x_0)$ , якщо функція  $f(x)$  визначена в точці  $x_0$ .

Точка  $x_0$  називається точкою розриву I роду функції  $f(x)$ , якщо лівостороння та правостороння границі в цій точці кінцеві, але різняться.

Точка  $x_0$  називається точкою розриву II роду функції  $f(x)$ , якщо хоча б одна з односторонніх границь у цій точці або не існує, або нескінченна.

### **Увага!**

Для визначення характеру точки розриву  $x_0$  треба обчислити односторонні границі в цій точці або встановити, що цих границь не існує.

*Варіанти відповідей:*

- 1) не є точкою розриву; 2) точка неусувного розриву;
- 3) точка розриву I роду; 4) точка розриву II роду.

### **Відповіді до тестів**

#### **Тест 1**

<i>Номер функції</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
<i>Номер відповіді</i>	4	5	1	2	2

#### **Тест 2**

<i>Номер умови</i>	2.1	2.2	2.3
<i>Номер відповіді</i>	2	3	1

#### **Тест 3**

<i>Номер функції</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
<i>Номер відповіді</i>	6	7	5	2	1	3

#### **Тест 4**

<i>Номер умови</i>	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
<i>Номер функції</i>	$y_2$	$y_1$	$y_5$	$y_6$	$y_3$	$y_4$

#### **Тест 5**

$\{y_2; y_4; y_6; y_7\}$ .

#### **Тест 6**

<i>Номер задачі</i>	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
<i>Номер відповіді</i>	2	4	6	1	3

**Тест 7**

Номер задачі	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8
Номер відповіді	3	2	1	7	2	8	4	6

**Тест 8**

Номер функції	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
Номер відповіді	5	2	1	4	3

**Тест 9**

Номер функції	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
Номер відповіді	1	4	1	2	1	3

**2.2 Диференціальне числення функції однієї змінної**

1. Знайдіть приріст  $\Delta f(x_0, \Delta x)$  функції  $f(x) = x^2$  у точці  $x_0 = 1$ , якщо  $\Delta x = 0,1$ , використовуючи формулу  $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Варіанти відповідей:

1) 0,1; 2) 0,21; 3) 0,01; 4) 1,21; 5) 1.

2. Дайте визначення похідної функції в точці  $x_0$ . Яка з границь є похідною функції  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) в точці  $x_0$ , якщо  $y_1 = 4x^3 - 1$ ,  $y_2 = \cos 3x$ ?

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Відповідь	Функція $y_i$	
	$y_1$	$y_2$
1	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(4x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0^3}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos 3(x_0 + \Delta x) - \cos 3x_0}{\Delta x}$
2	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(4x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0 - 2}{x_0}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x_0 + \Delta x) - \cos 3x_0}{\Delta x}$
3	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0^3}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x_0 - \cos 3\Delta x}{\Delta x}$
4	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(4x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0^3 - 2}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos 3(x_0 + \Delta x) - \cos 3x_0}{x_0}$

3. Згадайте, у чому полягає геометрична суть похідної, який вигляд має рівняння дотичної до графіка диференційованої функції. Чому дорівнює тангенс кута нахилу параболи  $y = \frac{x^2}{2}$  до осі  $Ox$  у точці з абсцисою  $x_0 = -1$ ?

### Підказка 1

Геометрична суть похідної у точці: похідна функції  $f(x)$  у точці  $x_0$  чисельно дорівнює тангенсу кута  $\alpha$  нахилу дотичної, проведеної до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $M_0(x_0; f(x_0))$ , тобто  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ .

### Підказка 2

Рівняння дотичної, що проведена до графіка функції  $f(x)$  у точці  $M_0(x_0; f(x_0))$ , має вигляд  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Варіанти відповідей:

1)  $\frac{1}{2}$ ; 2)  $-1$ ; 3)  $1$ ; 4)  $0$ ; 5)  $-\frac{1}{2}$ .

4. У якій точці  $M_0(x_0; y_0)$  дотична до кривої  $y = e^x$  утворює кут  $45^\circ$  з віссю  $Ox$ ?

За підказками звернутись до тесту 3.

Варіанти відповідей:

1)  $\left(-1; \frac{1}{e}\right)$ ; 2)  $(1; e)$ ; 3)  $(1; 0)$ ; 4)  $(0; 1)$ ; 5)  $(0; 0)$ .

5. Складіть рівняння дотичних до графіків функцій  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в точках із заданими абсцисами:

5.1.  $y_1 = x^2 - x$ ,  $x_0 = 0$ ; 5.2.  $y_2 = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -1$ ; 5.3.  $y_3 = \sqrt{x} + 2$ ,  $x_0 = 4$ .

За підказками звернутись до тесту 3.

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Задачі	Номер відповіді			
	1	2	3	4
5.1	$y = 2x - 1$	$y = x$	$y = x + 1$	$y = -x$
5.2	$y = x - 2$	$y = -x - 2$	$y = x$	$y = -x + 2$
5.3	$y = \frac{x}{4} + 3$	$y = \frac{x}{4} + 5$	$y = 4x + 3$	$y = x$

6. Повторіть визначення складеної функції й формулу, за якою обчислюється похідна складеної функції. Чому дорівнює похідна функції  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), якщо  $y_1 = \sin x^3$ ;  $y_2 = \sin^3 x$ ;  $y_3 = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ ;  $y_4 = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ ?

### Підказка

Похідна складеної функції обчислюється так: якщо задана складена функція  $F(x) = f(u(x))$ , причому в точці  $x$  існує похідна  $u'(x)$  внутрішньої функції  $u(x)$ , а у відповідній точці  $u(x)$  існує похідна  $f'(u)$  зовнішньої функції  $f(u)$ , то похідна складеної функції  $F(x)$  у точці  $x$  обчислюється за формулою  $F'(x) = f'(u)u'(x)$ .

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Функція	Номер відповіді				
	1	2	3	4	5
$y_1$	$\cos x^3$	$\cos x^3 3x^2$	$-\cos x^3 3x^2$	$3 \sin x^2$	$-\cos x^3$
$y_2$	$3 \sin^2 x \cos x$	$3 \sin^2 x$	$3 \cos^2 x$	$-3 \sin^2 x \cos x$	$-3 \cos^2 x$
$y_3$	$\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 \sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$	$\frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}$
$y_4$	$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$	$-\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$	$\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \sqrt{x}}$

7. Обчисліть похідні  $\frac{dy}{dx}$  для функцій заданих неявно і параметричними рівняннями:

7.1.  $y^3 + xy - x^3 = 1$ ;    7.2.  $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sh} 3t, \\ y = \operatorname{ch} 3t. \end{cases}$

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Задача	Номер відповіді			
	1	2	3	4
7.1	$\frac{3x^2 - y}{x + 3y^2}$	$\frac{3x^2 - 3y^2 - y}{x}$	$\frac{3x^2 - 3y^2}{x}$	$\frac{3x^2 - y + 1}{x + 3y^2}$
7.2	$2 \operatorname{th} 3t$	$-2 \operatorname{cth} 3t$	$\frac{1}{2} \operatorname{cth} 3t$	$\frac{1}{2} \operatorname{th} 3t$

8. Повторіть визначення диференціалу й формулу для його обчислення. Дайте відповідь на питання: чому дорівнює диференціал функції  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) в заданій точці  $x_0$ , якщо в обох випадках приріст  $\Delta x = 0,1$ :

8.1.  $y_1 = \ln x$ ,  $x_0 = 2$ ;    8.2.  $y_2 = \sqrt{x+1}$ ,  $x_0 = 3$ ?

*Підказка*

Диференціал функції  $f(x)$  у точці  $x_0$  обчислюється за формулою  $df(x_0; \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ , де  $\Delta x = x - x_0$ .

9. Використовуючи визначення другої похідної як похідної від першої похідної,  $y''(x) = (y'(x))'$ , знайдіть другу похідну функцій у вказаних точках:

9.1.  $y_1 = e^{x^2}$ ,  $x_0 = 0$ ;    9.2.  $y_2 = \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = \pi$ .

**10.** Вивчіть правила Лопітала обчислення границь функцій і, використовуючи підказку, обчисліть границі:

**10.1.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{2x^4 - x - 1}$ ; **10.2.**  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$ ; **10.3.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$ .

*Підказка*

**Правила Лопітала.** Нехай необхідно обчислити  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ .

Про функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  відомо, що в деякому околі точки  $x_0$ :

- 1)  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  диференціюються, причому  $\varphi'(x) \neq 0$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$  ( або  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$  ).

Тоді, якщо існує  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , існує і шукана границя, при цьому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**11.** Побудуйте графіки елементарних функцій:

$$y_1 = x^2; \quad y_2 = x^3; \quad y_3 = \sqrt{x}; \quad y_4 = \frac{1}{x}; \quad y_5 = \frac{1}{x^2}; \quad y_6 = 2;$$

$$y_7 = \log_2 x; \quad y_8 = \log_{3/5} x; \quad y_9 = \operatorname{tg} x; \quad y_{10} = \operatorname{ctg} x; \quad y_{11} = \sin x; \quad y_{12} = \arcsin x;$$

$$y_{13} = \operatorname{arctg} x; \quad y_{14} = \operatorname{arcsctg} x.$$

Виходячи з геометричного зображення функцій, зробіть висновки про монотонність функцій, обираючи з функцій  $y_1 - y_{14}$  ті, які задовольняють такі умови:

**11.1.** Функція монотонно зростає на всій області визначення.

**11.2.** Функція монотонно спадає на всій області визначення.

**11.3.** Функція змінює характер монотонності.

**12.** Побудуйте графіки функцій  $y_1 - y_4$ :

$$y_1 = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1; \\ \ln x, & x > 1; \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} -2^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & x > 0; \end{cases};$$

$$y_3 = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; \\ 2(x-\pi) - 1, & x > \pi; \end{cases} \quad y_4 = \begin{cases} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

На основі побудованих графіків для кожної функції  $y_1 - y_4$  знайдіть:

**12.1.** Точки (якщо вони є), у яких похідна не існує.

**12.2.** Інтервали монотонного зростання функції.

**12.3.** Інтервали монотонного спадання функції.

**12.4.** Точки мінімуму та максимуму функції (якщо вони є).

**12.5.** Інтервали випуклості вгору.

**12.6.** Інтервали випуклості вниз.

**12.7.** Точки перегину (якщо вони є).

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Задача	Номер відповіді					
	1	2	3	4	5	6
12.1	Всюди диференційована	$x = -1$	$x = 1$	$x = \pm \frac{\pi}{2}$	$x = 0$	$x_1 = -\frac{\pi}{2},$ $x_2 = \pi$
12.2	$\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (\pi; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Немає інтервалів зростання	$(1; +\infty)$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
12.3	$\left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(0; \pi)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$	$(-\infty; 1)$
12.4	$x = 0$ – т. max $x = \pi$ – т. min	$x = 1$ – т. min	$x = -\frac{\pi}{2}$ – т. min, $x = \frac{\pi}{2}$ – т. max	Немає точок екстремуму	$x = 0$ – т. min	$x = -\frac{\pi}{2}$ – т. max
12.5	$(1; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$	$(-\infty; 0)$	$\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Немає інтервалів випуклості вгору
12.6	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$(-\infty; 1)$	$\left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; +\infty)$
12.7	$x_1 = -\frac{\pi}{2},$ $x_2 = \pi$	Немає точок перегину	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = 1$	$x = -1$

## Відповіді до тестів

### Тест 1

Варіант 2.

### Тест 2

Функція	$y_1$	$y_2$
Номер відповіді	3	1

### Тест 3

Варіант 2.

### Тест 4

Варіант 4.

### Тест 5

Номер задачі	5.1	5.2	5.3
Номер відповіді	4	2	1

### Тест 6

Функція	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
Номер відповіді	2	1	4	3

### Тест 7

Номер задачі	7.1	7.2
Номер відповіді	1	4

### Тест 8

Номер задачі	8.1	8.2
Відповідь	0,05	0,025

### Тест 9

Номер задачі	9.1	9.2
Відповідь	2	0

### Тест 10

Номер задачі	10.1	10.2	10.3
Відповідь	3/7	-3/2	0

### Тест 11

Номер умови	11.1	11.2	11.3
Функція	$y_2, y_3,$ $y_6, y_7,$ $y_9, y_{12}, y_{13}$	$y_4, y_8,$ $y_{10}, y_{14}$	$y_1, y_5, y_{11}$

### Тест 12

Функція $y_i$	Номер задачі						
	12.1	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	12.7
$y_1$	3	5	6	2	1	4	2
$y_2$	5	4	2	5	3	6	2
$y_3$	6	2	4	1	5	3	4
$y_4$	4	3	1	4	2	5	3

## 2.3 Дослідження функції за допомогою похідних

1. Для функцій  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) знайдіть інтервали зростання:

**1.1.**  $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ; **1.2.**  $y_2 = |x^2 - 3x|$ ; **1.3.**  $y_3 = \sqrt[3]{|x|}$ ; **1.4.**  $y_4 = x^3$ .

*Підказка*

Достатня умова монотонності функції: якщо на інтервалі  $(a; b)$  виконується нерівність  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ), то функція  $y = f(x)$  зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

Номер функції	Номер відповіді			
	1	2	3	4
1.1	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
1.2	$(-\infty; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}; +\infty)$	$(0; \frac{3}{2}) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; 3)$
1.3	$\emptyset$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
1.4	$(-\infty; 0)$	$\emptyset$	$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$

2. Повторіть визначення випуклих (угору і вниз) на інтервалі функцій і достатні умови випуклості. Для заданих функцій знайдіть інтервали, на яких графіки цих функцій є випуклими вгору.

**2.1.**  $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ; **2.2.**  $y_2 = |x^2 - 3x|$ ; **2.3.**  $y_3 = \sqrt[3]{|x|}$ ; **2.4.**  $y_4 = x^3$ .

*Підказка*

Достатня умова випуклості: якщо на інтервалі  $(a; b)$  виконується нерівність  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ), то графік функції  $y = f(x)$  є випуклим вниз (угору) на цьому інтервалі.

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

Номер функції	Номер відповіді			
	1	2	3	4
2.1	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
2.2	$(-\infty; \frac{3}{2})$	$(0; 3)$	$(0; \frac{3}{2}) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$
2.3	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
2.4	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

3. Знайдіть точки максимуму функції  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ):

3.1.  $y_1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$ ;    3.2.  $y_2 = x^2 e^{-x}$ .

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.11.

Таблиця 2.11

Номер функції	Номер відповіді			
	1	2	3	4
3.1	$x = 0$	$x = -1$	$x_1 = 0$ $x_2 = -1$	0
3.2	$x_1 = 0$ $x_2 = -2$	$x = 0$	$x = 2$	$x = -2$

4. Знайдіть найменше значення функції  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) на заданому відрізку, використовуючи для цього алгоритм, що наводиться в підказці:

4.1.  $y_1 = x^3 - 3x - 7$ ,  $x \in [0; 2]$ ;    4.2.  $y_2 = x^2 + \frac{16}{x}$ ,  $x \in [1; 4]$ .

*Підказка*

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функцій  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ :

1. Знайдіть  $f'(x)$ .

2. Розв'яжіть систему  $f'(x) = 0$ ,  $x \in [a; b]$ . Нехай  $x_1, \dots, x_k$  – розв'язки цієї системи.

3. Обчисліть значення функції у вказаних точках:  $f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b)$ .

4. Серед множини знайдених значень оберіть максимальне і мінімальне. Це і будуть шукані найбільше й найменше значення функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ .

5. Згадайте визначення точки перегину й достатні умови перегину. Знайдіть точки перегину функцій  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ):

5.1.  $y_1 = \frac{x^6}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x$ ;    5.2.  $y_2 = xe^x$ .

*Підказка*

Достатня умова перегину: якщо в точці  $x_0$  функція  $f(x)$  задовольняє такі умови:

1) існує  $f'(x_0)$ ;

2)  $f''(x_0)$  або дорівнює нулю, або не існує;

3) зліва і справа від точки  $x_0$  функція має відмінні напрямки випуклості, то  $x_0$  є точкою перегину функції  $f(x)$ .

Варіанти відповідей наведено в табл. 2.12.

Таблиця 2.12

Номер функції	Номер відповіді			
	1	2	3	4
5.1	$x = 0$	$x_1 = 0; x_2 = 1$	$x_1 = -1; x_2 = 1$	О
5.2	$x = -1$	$x = -2$	О	$x = 0$

**Відповіді до тестів****Тест 1**

Номер функції	1.1	1.2	1.3	1.4
Номер відповіді	1	3	4	4

**Тест 2**

Номер функції	2.1	2.2	2.3	2.4
Номер відповіді	3	2	1	4

**Тест 3**

Номер функції	3.1	3.2
Номер відповіді	2	3

**Тест 4**

Номер функції	4.1	4.2
Відповідь	-9	12

**Тест 5**

Номер функції	5.1	5.2
Номер відповіді	3	2

### 3 КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

#### 3.1 Варіанти контрольних робіт

##### Варіант 1

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{3^x} \cdot 2^x$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos t / (1 + 2 \cos t), \\ y = \sin t / (1 + 2 \cos t). \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ , заданої на відрізку  $[0, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = 1/(x^4 - 1)$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = (16 - 6x^2 - x^3)/8$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = x + \sqrt{x^3}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = (x^3 + x^2 - 3x - 1)/(2x^2 - 2).$$

##### Варіант 2

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 3n + 3} \right)^{n^2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arcsctg} x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$ , заданої на відрізку  $[2, 5]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = -(x/(x+2))^2$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = -(x^2 - 4)^2 / 16$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$ ,  $x_0 = -8$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = (x^2 + 6x + 9)/(x + 4).$$

### Варіант 3

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin(5x/2)\cos x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x-4}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ , заданої на відрізку  $[1, 5]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = (x^3 - 32)/x^2$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 2x^2 + 3x - 1$ ,  $x_0 = -2$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = (3x^2 - 10)/\sqrt{4x^2 - 1}.$$

### Варіант 4

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^4} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 3n - 1} \right)^{-n^2}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{7n} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [n - \sqrt{n(n-1)}]$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{e^{\cos x}}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ , заданої на відрізку  $[-3, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = (x^3 + 4)/x^2$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = (4x - x^2)/4$ ,  $x_0 = 2$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = (17 - x^2)/(4x - 5).$$

### Варіант 5

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x - e^x}{\sin 5x - \sin 3x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 7} + \sqrt[3]{n^2 + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 5} + \sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left( \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin[\pi(x+2)]} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{2x} 5^x$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  
 $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5$ , заданої на відрізку  $[-2, 1]$ .
6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$ .
7. Побудуйте графік функції:  $y = 3x - x^3$ .
8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої у точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 2x^2 + 3x - 1$ ,  $x_0 = -2$ .
9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:  
 $y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}$ .

### Варіант 6

1. Обчисліть границю функції:
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n - n^3}.$$
2. Обчисліть границю послідовності:
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4} + \sqrt{n - 4}}{\sqrt[5]{n^6 + 6} - \sqrt{n - 6}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} (\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1}),$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5(x + \pi)]}{e^{3x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{e^{\sin x}}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t - 3}, \\ y = \ln(t - 2). \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ , заданої на відрізку  $[1, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = x^2(x - 2)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої у точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = x - x^3$ ,  $x_0 = -1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}.$$

### Варіант 7

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 18n + 9} \right)^{2n+1}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} [n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x} - \sqrt{2x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2} \ln \operatorname{arctg} x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ , заданої на відрізку  $[1, 4]$

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{4x^2}{3 + x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x^3 - 9x^2}{4} + 6x - 9$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$ ,  $x_0 = 4$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}$$

### Варіант 8

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3} \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x^2} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{(n^8-1)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\sin \sqrt{x})^{\ln(\sin \sqrt{x})}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ , що задано на відрізку  $[0, 6]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = 12x/(9 + x^2)$ .
7. Побудуйте графік функції:  $y = 2 - 3x^2 - x^3$ .
8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 2x^2 + 3$ ,  $x_0 = -1$ .
9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}.$$

### Варіант 9

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 2n + 7} \right)^{n+1}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(\pi(x/2 + 1))}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2 + 5}\sqrt{x}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\sin x)^{5e^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$ ,

заданої на відрізку  $[-3, 3]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$$

### Варіант 10

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2 + x^3}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\arcsin x)^{e^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 2\sqrt{x} - x$ , заданої на відрізку  $[0, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 3x^2 - 2 - x^3$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 2x + \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$$

### Варіант 11

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n+2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + 3x^2} - (1 + x)}{\sqrt[3]{x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\ln x)^{3^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ , заданої на відрізку  $[-1, 5]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{x^2 - 4x + x}{x - 4}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = (x-1)^2(x-3)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$ ,  $x_0 = 4$

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}.$$

### Варіант 12

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 + n^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+4}{n+2} \right)^n.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7 + 5} + \sqrt{n-5}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 5})n\sqrt{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{\arcsin x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ , заданої на відрізку  $[1, 9]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}.$$

### Варіант 13

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{10x}{1+x^2}$ , заданої на відрізку  $[0, 3]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 6x - 8x^3$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^2 - 6x + 4}{3x - 2}.$$

### Варіант 14

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7-n+n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n \sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{e^{\lg x}}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ , заданої на відрізку  $[-3, 3]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 16x^2(x-1)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})$ ,  $x_0 = 1$

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}.$$

### Варіант 15

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n^4}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ , заданої на відрізку  $[2, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 16x^2(x-1)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{1}{3x+2}$ ,  $x_0 = 2$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$$

### Варіант 16

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt{n-1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + \sqrt[3]{4-n^3} \right)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\cos 5x)^{e^x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$ , заданої на відрізку  $[-1, 2]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x_0 = -2$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$$

### Варіант 17

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - n^4) - (6 + n)^4}{(1 + n)^3 - (1 - n)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} \left( 2\pi \left( x + \frac{1}{2} \right) \right)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x \sin x)^{8 \cdot \ln(x \sin x)}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/(1+t^2). \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ , заданої на відрізку  $[-1, 6]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$ ,  $x_0 = 3$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$$

### Варіант 18

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{-n+1}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}$ , заданої на відрізку  $[1, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = (2x+1)^2(2x-1)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$$

### Варіант 19

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ , заданої на відрізку  $[-1, 7]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right)$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}.$$

### Варіант 20

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{e^{x^2} - e^{4x^2}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = x^{\sin x^3}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ , заданої на відрізку  $[1, 5]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}.$$

## Варіант 21

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n-2}}{4\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n-2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sin(\pi(x+7))} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x^2 - 1)^{\text{sh}x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ , заданої на відрізку  $[-4, 2]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}.$$

## Варіант 22

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 4n - 1}{3n^2 + 2n + 7} \right)^{2n+5}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x^2 + 5)^{\text{ctg}x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \text{ch } t, \\ y = \sqrt[3]{\text{sh}^2 t}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ , заданої на відрізку  $[-4, -1]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}$$

### Варіант 23

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (\sin x)^{5x/2}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ , заданої на відрізку  $[-2, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x(12-x^2)}{8}$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{3x-2x^3}{3}$ ,  $x_0 = 1$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

### Варіант 24

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 5n + 7}{2n^2 + 5n + 3} \right)^n.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n}) \sqrt{5-n+n^2}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}$ ,

заданої на відрізку  $[1, 4]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x^2(x-4)^2}{16}$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = x^2/10 + 3$ ,  $x_0 = 2$

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^3 + 2x - 3x + 2}{1 - x^2}.$$

### Варіант 25

1. Обчисліть границю функції:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

2. Обчисліть границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 - (n+2)^3}{(3n+2) + (4n+1)^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}.$$

3. Знайдіть похідну функції:  $y = 19^{x^{19}} \cdot x^{19}$ .

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $y = x - 4\sqrt{x+1}$ , заданої на відрізку  $[1, 9]$ .

6. Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$ .

7. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$ .

8. Складіть рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$ :  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}$ ,  $x_0 = 4$ .

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}.$$

### 3.2 Підготовка до захисту контрольних робіт

1. Обчисліть границю функції [1, ч. 1, гл. VI, § 4; 2, гл. 3, § 3.5; 5, гл. 3, § 4; 6, т. 1, гл. II, § 4–7].

2. Обчисліть границю послідовності [2, гл. 3, § 3.1–3.4; 5, гл. 3, § 2].

3. Знайдіть похідну функції [3, ч. II, практ. зан. 22; 6, т. 1, гл. III, § 2–15].

4. Знайдіть похідну другого порядку від функції, заданої параметрично [6, т. 1, гл. III, § 18, § 22, § 24].

5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції, заданої на відрізку [3, ч. II, практ. зан. 32; 6, т. 1, гл. V, § 4–6].

6. Дослідіть функції на монотонність [3, ч. II, практ. зан. 31; 6, т. 1, гл. V, § 2].

7. Побудуйте графік функції [2, гл. 5, § 5.1; 3, ч. 2, практ. зан. 35].

8. Скласти рівняння дотичної та нормалі до даної кривої в точці з абсцисою  $x_0$  [2, гл. 4, § 4.7; 6, т. 1, гл. III, § 26].

9. Знайдіть асимптоти функції та побудуйте її графік [2, гл. 5, § 5.1; 5, гл. 4, § 31].

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ОНИКС – 21 век ; Мир и Образование, 2002. – Ч. 1.
2. **Зими́на, О. В.** Высшая математика : решебник / О. В. Зими́на, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. – М. : Физико-математическая литература, 2003. – 356 с.
3. **Каплан, И. А.** Практические занятия по высшей математике / И. А. Каплан. – Харьков : Харьковский государственный университет, 1971. – Ч. I. – 412 с.
4. **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис ; под ред. Н. В. Воскресенской. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 640 с.
5. **Овчинников, П. П.** Вища математика : підручник : у 2 ч. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – 2-е вид. – К. : Техніка, 2000. – 592 с.
6. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2001. – Т. 1 – 429 с.

**ДОДАТОК А**  
**ПОКАЖЧИК ВІДПОВІДЕЙ НА ПИТАННЯ** (табл. А.1, А.2)

*Таблиця А.1 – Вступ до математичного аналізу*

Питання	Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике	Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1	Пискунов Н. К. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I	Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике
	Практика	Практика	Теорія	Теорія
1	2	3	4	5
1. Як знайти область визначення функції?	Ч. 2, № 2.19–2.24, № 3.16, № 3.17	Гл. 5, § 2, № 472–474	Гл. 1, § 6, с. 20	Гл. 1, § 3, п. 15, с. 42
2. Як знайти область значень функції?				Гл. 1, § 3, п. 15, с. 43
3. Як визначити періодичність функції?	Ч. 2, № 9.8–9.11		Гл. 1, § 8, с. 24	Гл. 1, § 3, п. 16, с. 46
4. Як визначити монотонність функції?			Гл. 1, § 7, с. 20	Гл. 1, § 3, п. 16, с. 44
5. Як визначити парність функції?	Ч. 2, № 4.1–4.2, № 4.6	Гл. 5, § 2, № 471	Гл. 5, § 11, с. 183	Гл. 1, § 3, п. 16, с. 47
6. Як визначити обмеженість функції?			Гл. 2, § 3, с. 39	
7. Як знайти обернену функцію?	Ч. 2, № 9.1–9.2, № 9.4		Гл. 1, § 8, с. 23	Гл. 1, § 3, п. 21, с. 52
8. Як побудувати графік функції?	Ч. 2, № 4.13–4.14	Гл. 5, § 3, № 483–485	Гл. 1, § 8, с. 23	Гл. 1, § 3, п. 14, с. 41
9. Як задати функцію аналітично?	Ч. 2, № 4.21	Гл. 5, § 3, № 486–497	Гл. 1, § 7, с. 21	Гл. 1, § 3, п. 13, с. 39

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5
10. Як задати функцію графічно?	Ч. 2, № 6.1–6.2, № 6.4	Гл. 5, § 3, рис. 22, с. 185	Гл. 1, § 7, с. 21	Гл. 1, § 3, п. 13, с. 40
11. Як задати функцію таблично?	Ч. 2, № 5.1, № 5.5		Гл. 1, § 7, с. 20	Гл. 1, § 3, п. 13, с. 40
12. Як задати функцію неявно?		Гл. 1, § 4, № 187–195		Гл. 1, § 3, п. 20, с. 51
13. Як знайти загальний член послідовності?	Ч. 2, № 10.1–10.4			Гл. 3, § 1, п. 1, с. 93
14. Як знайти границю послідовності?	Ч. 2, № 11.1–11.3	Гл. 5, § 2, № 498–499		
15. Як застосувати властивості границь послідовностей?	Ч. 2, № 12.1, № 12.3			
16. Як визначити нескінченно малу послідовність?	Ч. 2, № 12.1			
17. Як застосувати властивості нескінченно малих послідовностей?	Ч. 2, № 12.1–12.2, № 12.11			
18. Як знайти границю функції в точці?	Ч. 2, № 14.1, № 14.3, № 14.5;	Гл. 5, § 4, № 500–508	Гл. 2, § 2, с. 33	Гл. 3, § 2, п.4, с. 97
19. Як знайти лівосторонню границю функції в точці?	Ч. 2, № 15.19, № 15.21, № 20.23	Гл. 5, § 4, № 513–514	Гл. 2, § 2, с. 35	
20. Як знайти правосторонню границю функції в точці?	Ч. 2, № 15.19, № 15.21, № 20.23	Гл. 5, § 4, № 513–514	Гл. 2, § 2, с. 35	
21. Як застосувати властивості функцій, що мають границю в точці?	Ч. 2, № 14.1, № 14.3, № 14.5, № 14.13, № 14.11		Гл. 2, § 5, с. 43	Гл. 3, § 2, п.5, с. 99
22. Як визначити нескінченно малу функцію?			Гл. 2, § 4, с. 40	Гл. 3, § 1, п.1, с. 93

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5
23. Як застосувати властивості нескінченно малих функцій?			Гл. 2, § 4, с. 41	Гл. 3, § 1, п. 2, с. 95
24. Як визначити нескінченно велику функцію?			Гл. 2, § 3, с. 3	Гл. 3, § 1, п. 3, с. 96
25. Як застосувати властивості нескінченно великих функцій?			Гл. 2, § 3, с. 3	Гл. 3, § 1, п. 3, с. 96
26. Як застосувати властивості границь функцій?	Ч. 2, № 15.1, № 15.6–15.9, № 15.10, № 15.12	Гл. 5, § 4, № 500–514	Гл. 2, § 5, с. 43	Гл. 3, § 2, п. 5, с. 99
27. Як застосувати першу важливу границю?	Ч. 2, № 16.6, № 16.7, № 16.9	Гл. 5, § 4, № 507	Гл. 2, § 6, с. 47	
28. Як застосувати висновки з першої важливої границі?	Ч. 2, № 16.6, № 16.7, № 16.9, № 16.12	Гл. 5, § 4, № 507	Гл. 2, § 6, с. 48	
29. Як застосувати другу важливу границю?	Ч. 2, № 17.1–17.9, № 17.13, № 17.15	Гл. 5, § 4, № 512	Гл. 2, § 7, с. 50	
30. Як застосувати висновки з другої важливої границі?	Ч. 2, № 17.1–17.9, № 17.13, № 17.15	Гл. 5, § 4, № 512	Гл. 2, § 7, с. 52	
31. Як застосувати означення границі функції в точці мовою « $\xi$ - $\delta$ »?			Гл. 2, § 2, с. 33	
32. Як порівняти нескінченно малі функції?	Ч. 2, № 19.6, № 19.7, № 19.9	Гл. 5, § 5, № 564–566	Гл. 2, § 11, с. 61	Гл. 3, § 3, п. 7, с. 104
33. Як обчислити границю за допомогою еквівалентних функцій?	Ч. 2, № 19.11	Гл. 5, § 5, № 567	Гл. 2, § 11, с. 61	Гл. 3, § 3, п. 8, с. 105

*Продовження таблиці А.1*

1	2	3	4	5
34. Як застосувати властивості нескінченно малих функцій?			Гл. 2, § 4, с. 41	Гл. 3, § 1; п. 2, с. 95
35. Як визначити неперервність функції ?	Ч. 2, № 20.1–20.4, № 20.15, № 20.16		Гл. 2, § 9, с. 54	Гл. 1, § 3, п. 16, с. 45; гл. 3, § 4
36. Як визначити розрив першого роду?	Ч. 2, № 20.32	Гл. 5, § 6, № 584	Гл. 2, § 9, с. 58	Гл. 3, § 4, п. 12, с. 109
37. Як визначити розрив другого роду?	Ч. 2, № 20.28	Гл. 5, § 6, № 583		
38. Як визначити виправний розрив?	Ч. 2, № 20.33, № 20.34	Гл. 5, § 6, № 585		Гл. 3, § 4, п. 13, с. 108
39. Як застосувати властивості неперервних функцій на відрізку?	Ч. 2, № 35.1, п. 3		Гл. 2, § 10, с. 58	Гл. 3, § 4, п. 14, с. 110

**Таблиця А.2 – Диференціальне числення функції однієї змінної**

Питання	Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике	Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1	Пискунов Н. К. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I	Мышкин А. Д. Лекции по высшей математике
	Практика	Практика	Теорія	Теорія
1	2	3	4	5
1. Як застосувати визначення похідної?	Ч. 2, № 21.1	Гл. 6, § 1, № 596–598	Гл. 3, § 2, с. 68	Гл. 4, § 1, п. 2, с. 116
2. Як застосувати механічний зміст похідної?	Ч. 2, № 21.3		Гл. 3, § 1, с. 66	Гл. 4, § 1, п. 1, с. 115
3. Як застосувати геометричний зміст похідної?	Ч. 2, № 21.5		Гл. 3, § 3, с. 70	Гл. 4, § 1, п. 3, с. 117
4. Як знайти рівняння нормалі до графіка функції?		Гл. 6, § 1, № 775	Гл. 3, § 26, с. 119	
5. Як знайти рівняння дотичної до графіка функції?		Гл. 6, § 1, № 775	Гл. 3, § 26, с. 118	
6. Як знайти похідну суми функцій?	Ч. 2, № 22.6	Гл. 6, § 1, № 605	Гл. 3, § 7, с. 77	Гл. 4, § 1, п. 4, с. 119
7. Як знайти похідну добутку функцій?	Ч. 2, № 23.10	Гл. 6, § 1, № 606–607	Гл. 3, § 7, с. 78	Гл. 4, § 1, п. 4, с. 120
8. Як знайти похідну частки функцій?	Ч. 2, № 22.26–22. 27, № 22.29,	Гл. 6, § 1, № 609-610	Гл. 3, § 7, с. 79	Гл. 4, § 1, п. 4, с. 120
9. Як знайти похідну складеної функції?	Ч. 2, № 22.9–22.10, № 2.12, № 23.13, № 22.19–22.20	Гл. 6, § 1, № 611–627	Гл. 3, § 9, с. 81	Гл. 4, § 1, п. 4, с. 121
10. Як знайти похідну оберненої функції?	Ч. 2, № 24.1–24.4, № 24.6	Гл. 6, § 1; № 622, № 624	Гл. 3, § 13, с. 89	Гл. 4, § 1; п. 4, с. 121

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5
11. Як знайти похідну гіперболічної функції?	Ч. 2, № 23.1, № 23.13, № 26.2		Гл. 3, § 19, с. 103	Гл. 4, § 1, п. 5, с. 124
12. Як продиференціювати неявну функцію?	Ч. 2, № 26.4–26.5, № 23.7, № 26.9	Гл. 6, § 1, № 756–757	Гл. 3, § 11, с. 85	Гл. 4, § 1, п. 4, с. 122
13. Як знайти похідну логарифмічної функції?	Ч. 2, № 25.8, № 25.11, № 25.1, № 25.3	Гл. 6, § 1, № 628–630	Гл. 3, § 8, с. 80	Гл. 4, § 1, п. 5, с. 123
14. Як знайти диференціал функції?	Ч. 2, № 28.1		Гл. 3, § 20, с. 106	Гл. 4, § 2, п. 7, с. 127
15. Як знайти диференціал добутку функцій?			Гл. 3, § 20, с. 109	Гл. 4, § 2, п. 9, с. 130
16. Як знайти диференціал частки функцій?			Гл. 3, § 20, с. 109	
17. Як знайти диференціал складеної функції?	Ч. 2, № 38.1, № 38.4, № 38.11		Гл. 3, § 20, с. 109	
18. Як застосувати геометричний зміст диференціала?			Гл. 3, § 21, с. 110	Гл. 4, § 2, п. 8, с. 129
19. Як знайти диференціал функції, заданої параметрично?	Ч. 2, № 27.9а, № 27.10	Гл. 6, § 1, № 768	Гл. 3, § 18, с. 102	Гл. 4, § 2, п. 8, с. 130
20. Як знайти рівняння дотичної до графіка функції, заданої неявно?	Ч. 2, № 36.1–36.2, № 36.6	Гл. 6, § 1, № 775		
21. Як знайти рівняння нормалі до функції, заданої неявно?	Ч. 2, № 36.1–36.2, № 36.6	Гл. 6, § 1, № 775		
22. Як застосувати диференціал для наближених обчислень ?	Ч. 2, № 28.13–28.14, № 28.17	Гл. 6, § 1, № 830–831		Гл. 4, § 2, п. 10, с. 131
23. Як знайти похідну вищого порядку?	Ч. 2, № 29.1–29.5, № 29.8	Гл. 6, § 1, № 795–799	Гл. 3, § 22, с. 111	Гл. 4, § 3, п. 11, с. 133

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5
24. Як знайти похідну $n$ -го порядку від суми функцій?	Ч. 2, № 29.2, № 39.1	Гл. 6, § 1, № 795	Гл. 3, § 22, с. 112	Гл. 4, § 3, п. 11, с. 133
25. Як знайти похідну $n$ -го порядку добутку ф-цій (ф-ла Лейбніца)?	Ч. 2, № 29.24, № 39.16–39.17		Гл. 3, § 22, с. 113	Гл. 4, § 3, п. 11, с. 133
26. Як застосувати теорему Ролля ?		Гл. 6, § 2, № 846–849	Гл. 4, § 1, с. 131	
27. Як застосувати геометричний зміст теореми Ролля?			Гл. 4, § 1, с. 132	
28. Як застосувати теорему Лагранжа?		Гл. 6, § 2, № 850	Гл. 4, § 2, с. 133	
29. Як застосувати геометричний зміст теореми Лагранжа?			Гл. 4, § 2, с. 134	
30. Як застосувати теорему Коші?		Гл. 6, § 2, № 851	Гл. 4, § 3, с. 134	
31. Як застосувати правило Лопіталя?	Ч. 2, № 30.2–30.5, № 30.9–30.10	Гл. 6, § 2, № 865–873	Гл. 4, § 4, с. 135	Гл. 4, § 4, с. 135
32. Як застосувати теорему Тейлора про розкладання функції в ряд?		Гл. 6, § 2, № 852	Гл. 4, § 6, с. 143	Гл. 4, § 5, с. 138
33. Як за допомогою похідної визначити проміжки зростання функції?	Ч. 2, № 31.1, № 31.4, № 31.6, № 31.8	Гл. 6, § 1, № 895–897	Гл. 5, § 2, с. 153	
34. Як за допомогою похідної визначити проміжки спадання функції ?	Ч. 2, № 31.1, № 31.4, № 31.6, № 31.8	Гл. 6, § 1, № 895–897	Гл. 5, § 2, с. 153	

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5
35. Як знайти точку максимуму функції ?	Ч. 2, № 32.1–32.2, № 32.5, № 32.8		Гл. 5, § 3, с. 155	Гл. 4, § 6, п. 19, с. 144
36. Як знайти точку мінімуму функції?	Ч. 2, № 32.1–32.2, № 32.5, № 32.8		Гл. 5, § 3, с. 155	Гл. 4, § 6, п. 19, с. 144
37. Як знайти екстремуми функції?	Ч. 2, № 32.1–32.2, № 32.5, № 32.8	Гл. 6, § 2, № 898–902	Гл. 5, § 3, с. 156	Гл. 4, § 6, п. 18, с. 143
38. Як дослідити функцію на екстремуми за допомогою похідних вищих порядків?	Ч. 2, № 32.1–32.8, № 33.10, № 33.12	Гл. 6, § 2, № 899–900	Гл. 5, § 5, с. 163	Гл. 4, § 6, п. 18, с. 143
39. Як знайти найбільше значення функції?	Ч. 2, № 33.5, № 42.8	Гл. 6, § 2, № 903–904	Гл. 5, § 6, с. 167	Гл. 4, § 6, п. 19, с. 144
40. Як знайти найменше значення функції ?	Ч. 2, № 33.6–33.7, № 33.4, № 42.8	Гл. 6, § 2, № 903	Гл. 5, § 3, с. 167	Гл. 4, § 6, п. 19, с. 144
41. Як дослідити функцію на опуклість?	Ч. 2, № 34.1–34.2, № 34.4	Гл. 6, § 2, № 930	Гл. 5, § 9, с. 172	Гл. 4, § 7, п. 20, с. 148
42. Як дослідити функцію на вгнутість?	Ч. 2, № 34.1–34.2, № 34.4	Гл. 6, § 2, № 930	Гл. 5, § 9, с. 172	Гл. 4, § 7, п. 20, с. 148
43. Як знайти точки перегину?		Гл. 6, § 2, № 931–932	Гл. 5, § 9, с. 176	Гл. 4, § 7, п. 20, с. 148
44. Як знайти похилі асимптоти?	Ч. 2, № 34.12–34.13, № 34.16	Гл. 6, § 2, № 937–940	Гл. 5, § 10, с. 180	Гл. 4, § 7, п. 21, с. 148
45. Як знайти вертикальні асимптоти ?	Ч. 2, № 34.12–34.13, № 34.16, № 34.20	Гл. 6, § 2, № 937–940	Гл. 5, § 10, с. 179	Гл. 4, § 7, п. 21, с. 148

*Навчальне видання*

**ВЛАСЕНКО Катерина Володимирівна,  
СТЕПАНОВ Аркадій Іванович**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

**Навчальний посібник**

**до практичних занять і самостійної роботи**

(для студентів денної та заочної форм навчання)

Редактор                    О. М. Болкова  
Комп'ютерна верстка    О. С. Орда

87/2010. Підп. до друку                    . Формат 60 x 84/16.  
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 5,12. Обл.-вид. арк. 3,84.  
Тираж                    прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру  
серія ДК №1633 від 24.12.2003