

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ**

В.Н. Астахов, Г.С. Буланов

Теория случайных процессов

Учебное пособие

для студентов
дневной и заочной форм обучения

Утверждено на заседании
ученого совета ДГМА
Протокол № 3 от 01.12.05

Краматорск 2006

ББК 22.171
УДК 519.216
А91

Рецензенты:

Алтухов Е.В. – доцент кафедры теории упругостей и вычислительной математики Донецкого национального университета, канд. физ.-мат. наук.

Золотая А.В. – доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Донецкого национального университета, канд. физ.-мат. наук.

Астахов В.Н., Буланов Г.С.

А91 Теория случайных процессов: Учебное пособие для студентов дневной и заочной форм обучения. – Краматорск: ДГМА, 2006. – 52 с.

ISBN 966-379-035-0

Данное учебное пособие содержит теоретический материал и образцы решения типовых примеров по курсу «Теория случайных процессов». Даны также наборы заданий для расчетно-графических и контрольных работ.

ISBN 966-379-035-0

ББК 22.171

© В.Н. Астахов,
Г.С. Буланов, 2005

© ДГМА, 2005

Введение

Закономерности в экономике выражаются в виде связей и зависимостей экономических показателей, математических моделей их поведения. Изучение таких взаимосвязей осложняется тем, что они (особенно в макроэкономике) не являются строгими и в зависимости от исхода опыта принимают различный функциональный вид. Указать заранее, какой вид примет случайная функция, невозможно, однако закономерности, присущие множеству значений, принимаемых случайной функцией, как закономерности массового явления, можно изучать. Если в качестве аргумента (фактора) для случайной функции рассмотреть неслучайный параметр t – время, то такую функцию в математике называют случайным процессом.

Учебное пособие по курсу «Теория случайных процессов» соответствует учебному плану экономических специальностей в объеме 1,5-2 кредита. Это типовой семестровый курс с расчетно-графическими работами и тестами для студентов дневной формы обучения и с контрольной работой для студентов-заочников.

Пособие обеспечивает качественное проведение учебного процесса как на лекциях, так и на практических занятиях. Наличие образцов решения примеров, достаточно полный список литературы и приемлемая для студентов структура учебного пособия позволяют в полной мере освоить курс «Теория случайных процессов» самостоятельно.

Выделение базовой и основной частей коллоквиума преследует две цели:

1 Базовая часть актуализирует остаточные знания студентов по курсу высшей математики, теории вероятностей и математической статистике.

2 В основной части коллоквиума выделяются узловые теоретические вопросы данного курса. Умение излагать теоретический материал подчеркнет глубину освоения студентами курса. На все вопросы основной части коллоквиума авторы предлагают варианты ответов. Более того, нам представляется более важным не профессионально-лекторский ответ на поставленный вопрос, а студенческий вариант ответа.

В случае необходимости данная разработка может быть использована студентами, обучающимися по заочной форме. Студент-заочник после

изучения основ теоретического курса должен выполнить одну контрольную работу. Число вариантов каждого вида задач дано с избытком.

В контрольной работе студент выполняет 4 задания. Выбор варианта проводится в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1

Две последние цифры в зачетке (студбилете)	01	02	03	...	23	24	25
	26	27	28	...	48	49	50
	51	52	53	...	73	74	75
	76	77	78	...	98	99	00
<i>Номер варианта</i>	1	2	3	...	23	24	25

Приведем тематику этих заданий с указанием страниц, где они расположены в учебном пособии:

Задание 1. Тест «Функции со случайными параметрами» (с. 24).

Задание 2. Тест «Цепи Маркова с непрерывным временем» (с. 27).

Задание 3. Расчетно-графическая работа (РГР) «Моделирование цепного процесса» (с. 29).

Задание 4. РГР «Теория резервирования» (с. 30).

Программа курса «Теория случайных процессов»

Классификация. Функции со случайными параметрами. Каноническое разложение случайного процесса (СП). Стационарные СП. Эргодичность. Точечные процессы, потоки случайных событий. Поток Пуассона. Цепные процессы. Цепь Маркова с дискретным и непрерывным временем. Процессы гибели и размножения. Процессы накопления, восстановления, резервирования. Применение СП в теории массового обслуживания и теории надежности.

Основные характеристики. Законы распределения СП. Сечение, реализация (выборочная функция), математическое ожидание, дисперсия и корреляционные функции СП.

Цепи Маркова. Граф системы, классификация состояний. Вектор состояния, матрица перехода, предельные (финишные) вероятности. Системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Расчет времени жизни системы.

Процессы гибели и размножения. Разрешающая система дифференциальных уравнений, начальные условия. Формулы Эрланга. Введение в теорию резервирования. Математическое моделирование нагруженного, облегченного, ненагруженного, восстанавливаемого резервного оборудования.

Моделирование СП на ЭВМ. Генератор случайных величин с заданным законом распределения. Метод Монте-Карло. Моделирование цепей Маркова. Моделирование системы массового обслуживания.

Принятые обозначения понятий из теории вероятностей

- u - случайная величина.
- $\xi = M[u]$ - математическое ожидание.
- $u^0 = u - \xi$ - центрированная случайная величина.
- $D = M[(u - \xi)^2]$ - дисперсия.
- $D = 1$ - нормированная случайная величина.
- $\sigma = \sqrt{D}$ - среднее квадратическое отклонение.
- $v = M[u_1 u_2]$ - начальный момент системы случайных величин.
- $K = M[(u_1 - \xi_1)(u_2 - \xi_2)] = v - \xi_1 \xi_2$ - центральный момент, ковариация, корреляционный момент системы случайных величин.
- $\rho = \frac{K}{\sigma_1 \sigma_2}$ - коэффициент корреляции ($|\rho| < 1$).

Поток событий (случайный поток) – последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени t_n .

Плотность (интенсивность) потока – среднее число событий в единицу времени [6].

Случайный поток **без последствия** – числа событий в непересекающихся интервалах суть независимые случайные величины.

Случайный поток **ординарный** [1] – $P\{t_n < t_{n+1}\} = 1, \forall n$.

Поток Пуассона - ординарный поток случайных событий без последствия. Для произвольного интервала наблюдения за потоком Пуассона $(t_0; t_0 + \tau)$ при интенсивности потока $\lambda(t)$ имеем [6]:

$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$ – математическое ожидание числа регистраций событий;

$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ – вероятность регистрации ровно “m” событий.

Простейший поток – поток Пуассона при $\lambda(t) = \text{const}$ (обеспечивает стационарность потока) [6].

Основные определения из теории случайных процессов

Случайный процесс (стохастический процесс) – семейство случайных величин, по параметру t (наиболее часто этот параметр – время) [2].

Случайный процесс – это случайная функция времени. Ее значения при каждом t есть случайная величина $X(t)$ [3].

Реализация СП (траектория СП, выборочная функция СП) – это любая функция, которая может быть зарегистрирована при наблюдении СП.

Сечение СП – при фиксированном t_* случайная функция обращается в случайную величину $X(t_*)$, которая и называется сечением СП.

Одномерная плотность вероятности СП – функция плотности вероятности при любом t : $f_1(x, t)$ [6].

Двумерная плотность вероятности СП – совместная плотность распределения сечений при любых t_1 и t_2 : $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ [6].

$$\text{При любом } t_2 : \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_2 = f_1(x_1, t_1).$$

$$\text{При любом } t_1 : \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 = f_1(x_2, t_2).$$

Одномерная функция распределения СП

$$F_1(x, t) = P\{X(t) < x\}.$$

Двумерная функция распределения СП [5]

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\},$$

$$f_1(x, t) = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

В общем случае для полного описания случайного процесса требуется указать все k -мерные плотности или функции распределения.

Математическое ожидание СП [3]

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx.$$

Дисперсия СП $D_x(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f_1(x, t) dx.$

Среднее квадратическое отклонение СП $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$

Центрированный СП [3] $\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$

Корреляционная (автокорреляционная) функция СП [3]

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right].$$

Нормированная корреляционная функция СП [3]

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}}.$$

Взаимная корреляционная функция двух СП [3]

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M \left[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2) \right].$$

Стохастическая непрерывность СП [1]

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P \{ |X(t) - X(t_0)| > \varepsilon \} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Примечание. Стохастическая непрерывность случайного процесса не влечет за собой непрерывность каждой реализации этого процесса.

Например [1]:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq u, \\ 2 & t > u, \end{cases}$$

где u - случайная величина, распределенная, например, по показательному закону с параметром λ. Все реализации этого СП – разрывные функции. Но стохастически он непрерывен, потому что его сечения непрерывно зависят от t:

X	1	2
p	$e^{-\lambda t}$	$1 - e^{-\lambda t}$

Стационарность. В узком смысле законы распределения всех порядков инвариантны относительно сдвигов во времени. В широком смысле математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция СП зависит только от разности аргументов [3] : $K_x(t_1, t_2) = q(t_1 - t_2)$.

Эргодичность. Простейший случай – эргодичность по отношению к математическому ожиданию [1] :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = m_x = \text{const} ,$$

где $x(t)$ - любая реализация СП.

Точечный СП. Так называют последовательность случайных величин $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$. Если любой конечный интервал $[a; b]$ с вероятностью 1 содержит лишь конечное множество точек t_n , то говорят, что задан *случайный поток однородных событий*. Последовательность t_n можно интерпретировать как обычный СП многими способами. Например, $X(t)$ - число точек t_n , попавших в полуинтервал $[0; t)$.

Цепной процесс - СП полностью определяется k -мерной плотностью распределения. При $k = 2$ цепной процесс называется простым (очередное состояние зависит только от предыдущего) [5].

Цепь Маркова (ЦМ) - $X(t)$ в цепном процессе может принимать только дискретные значения $1, 2, 3, \dots$, которые можно считать номерами возможных состояний некоторой наблюдаемой физической системы [6].

ЦМ с дискретным временем. Система может совершать переходы из одного состояния в другое в фиксированные моменты времени. Тогда можно говорить о состоянии системы на k -м шаге. Двумерное распределение вероятностей в этом случае характеризуется матрицей перехода (пересчета вероятностей состояний) от k -го шага к m -му шагу. Если матрица перехода от текущего к следующему шагу не зависит от номера шага, то марковская цепь однородна [8].

ЦМ с непрерывным временем. Двумерное распределение вероятностей описывает матрица интенсивностей переходов системы из i -го состояния в j -е состояние. Независимость интенсивностей переходов от времени означает однородность цепи Маркова [8].

Предельная (финишная) вероятность состояния ЦМ – это вероятность обнаружить систему в данном состоянии при $t \rightarrow \infty$.

Несущественное состояние ЦМ. Состояние k называется несущественным, если с положительной вероятностью система может перейти в некоторое другое состояние m , из которого вероятность возврата в состояние k за любое число шагов равна нулю.

Безвыходное состояние ЦМ. Вероятности выхода из данного состояния во все другие состояния системы равны нулю. Если система имеет единственное безвыходное состояние, то его финишная вероятность равна **1**, а финишные вероятности всех остальных состояний равны нулю.

Сообщающиеся состояния ЦМ. Существует положительная вероятность, что система за конечное число шагов перейдет из m в k и из k в m . Сообщающиеся состояния всегда существенны.

Класс состояний ЦМ. Множество сообщающихся между собой состояний. Состояния разных классов между собой не сообщаются. Цепь Маркова, имеющая несколько классов состояний, называется разложимой (на классы).

Возвратная ЦМ. Все состояния системы сообщаются между собой (образуют единственный класс).

Процессы гибели и размножения. Случайная функция $X(t)$ может принимать только натуральные значения **0,1,2,3...** и описывает состояния E_k некоторой системы. За промежуток времени h система с вероятностью $\lambda_k h + o(h)$ переходит из E_k в E_{k+1} , а с вероятностью $\nu_k h + o(h)$ - из E_k в E_{k-1} . Вероятности переходов из E_k в E_{k+m} при $m > 1$ бесконечно малы по сравнению с h . При $\nu_k = 0$ имеем процесс чистого размножения, а при

$\lambda_k = 0$ - процесс чистой гибели.
 $\forall k$

Процесс восстановления – это процесс чистого размножения, когда $X(t) = N(t)$ есть число восстановлений за время t некоторых узлов наблюдаемой системы на резервные узлы. Возможное задание процесса восстановления: τ_1, τ_2, \dots - независимые случайные величины, характеризующие интервалы времени безотказной работы данного устройства. В моменты времени $t_1 = \tau_1, t_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots$ работоспособность устройства приходится восстанавливать. В этом случае [1]

$s_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ - моменты восстановления, $N(t) = \max \{n : s_n < t\}$.

Процесс накопления. Пусть, например, w_i - стоимость замены при i -м отказе оборудования. Тогда $w(t)$ - полная стоимость замен за время t - может быть получена по формуле $w(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} w_i$, где $N(t)$ определено выше.

Процесс резервирования. Простейший случай - резервирование без восстановления. Имеется основной прибор с интенсивностью отказов λ . При выходе из строя он заменяется на один из резервных. Ожидающие резервные приборы могут находиться в состояниях:

нагруженный резерв – резервирующий прибор находится в работе, как и основной, интенсивность его отказов равна интенсивности отказов основного прибора λ ;

облегченный резерв – ожидающий прибор не полностью выполняет все требуемые функции, степень износа его ниже, чем у основного, поэтому интенсивность отказов за время ожидания в резерве меньше, чем у основного;

ненагруженный резерв – интенсивность отказов равна нулю (до подключения вместо выбывшего из строя узла).

Образцы решения типовых заданий

Функции со случайными параметрами

Пусть $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... - обычные неслучайные функции, а u_1 , u_2 , ... - случайные величины (случайные параметры), тогда $X(t) = f_0(t) + u_1 f_1(t) + u_2 f_2(t) + \dots$ - случайная функция, а при заданных u_1, u_2, \dots - некоторая реализация СП.

Набор типовых заданий

- 1) Построить область возможных траекторий СП (u_k распределены на конечных интервалах).
- 2) Вычислить и построить график математического ожидания СП.
- 3) Вычислить дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию СП.
- 4) Составить прогноз $X(t_2)$ по заданному $X(t_1)$.

Пример 1. Задан случайный процесс $X(t)$ функцией со случайными параметрами u_1 и u_2 :

$$X(t) = 3 + u_1 t + \frac{u_2}{t+1}, \quad t \geq 0.$$

Известны числовые характеристики случайных параметров:

$$\begin{aligned} u_1 &\in [-2; 2], & \xi_1 &= 1, & D_1 &= 2.25, \\ u_2 &\in [0; 3], & \xi_2 &= 1, & D_2 &= 1, & \rho &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Выполнить типовые задания для этого процесса.

- 1) Область возможных траекторий

$$\begin{aligned} X_{\max}(t) &= 3 + 2t + \frac{3}{t+1}, & X_{\min}(t) &= 3 - 2t, \\ 3 - 2t &\leq X(t) \leq 3 + 2t + \frac{3}{t+1}. \end{aligned}$$

- 2) Математическое ожидание СП

$$m_x(t) = 3 + \xi_1 t + \frac{\xi_2}{t+1} = 3 + t + \frac{1}{t+1}.$$

Изобразим результаты расчета на графике (рис. 1).

- 3) Вычислив корреляционный момент параметров u_1 и u_2 :

$$\rho = \frac{K}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{2.25} = 1.5 = \frac{3}{2}, \quad \sigma_2 = 1,$$

$$K = \rho \sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

центрируем случайный процесс :

$$\overset{0}{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}(\mathbf{t}) - \mathbf{m}_x(\mathbf{t}) = (\mathbf{u}_1 - \xi_1)\mathbf{t} + \frac{\mathbf{u}_2 - \xi_2}{\mathbf{t} + 1}$$

и найдем корреляционную функцию СП:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \mathbf{M} \left[\overset{0}{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_1) \overset{0}{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_2) \right] = \\ &= \mathbf{M} \left[(\mathbf{u}_1 - \xi_1)^2 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + (\mathbf{u}_1 - \xi_1)(\mathbf{u}_2 - \xi_2) \left(\frac{\mathbf{t}_1}{\mathbf{t}_2 + 1} + \frac{\mathbf{t}_2}{\mathbf{t}_1 + 1} \right) + (\mathbf{u}_2 - \xi_2)^2 \frac{1}{\mathbf{t}_1 + 1} \cdot \frac{1}{\mathbf{t}_2 + 1} \right] = \\ &= \mathbf{D}_1 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{K} \left(\frac{\mathbf{t}_1}{\mathbf{t}_2 + 1} + \frac{\mathbf{t}_2}{\mathbf{t}_1 + 1} \right) + \mathbf{D}_2 \frac{1}{\mathbf{t}_1 + 1} \cdot \frac{1}{\mathbf{t}_2 + 1} = \\ &= \frac{9}{2} \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{t}_1}{\mathbf{t}_2 + 1} + \frac{\mathbf{t}_2}{\mathbf{t}_1 + 1} \right) + \frac{1}{\mathbf{t}_1 + 1} \cdot \frac{1}{\mathbf{t}_2 + 1} . \\ \mathbf{K}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \frac{9}{2} \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + \frac{\mathbf{t}_1^2 + \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2^2 + \mathbf{t}_2 + 2}{2(\mathbf{t}_1 + 1)(\mathbf{t}_2 + 1)} . \end{aligned}$$

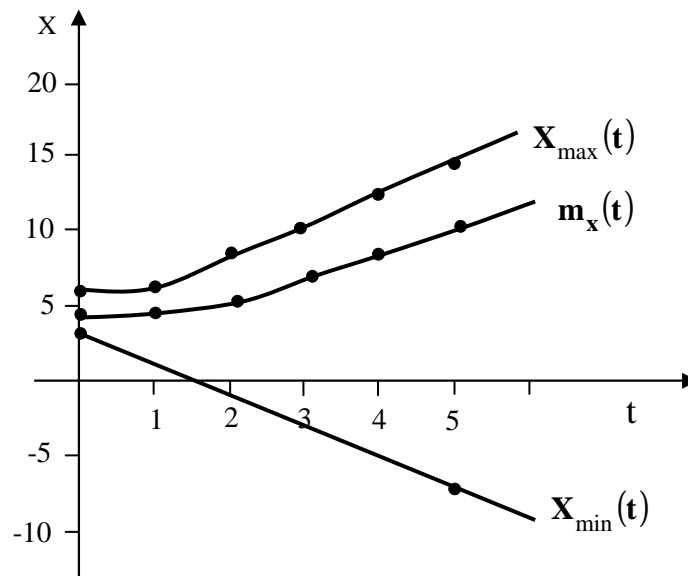


Рисунок 1

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение СП :

$$\mathbf{D}_x(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_x(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \frac{9}{2} \mathbf{t}^2 + \frac{\mathbf{t}^2 + \mathbf{t} + 1}{(\mathbf{t} + 1)^2} ,$$

$$\sigma_x(\mathbf{t}) = \sqrt{\mathbf{D}_x(\mathbf{t})} = \sqrt{\frac{9}{2} \mathbf{t}^2 + \frac{\mathbf{t}^2 + \mathbf{t} + 1}{(\mathbf{t} + 1)^2}} .$$

4) Пусть известно: $\mathbf{X}(1) = 4$, составить прогноз для $\mathbf{X}(2)$.

Используя уравнение линейной регрессии двумерной случайной величины

$$Y = M[Y] + \frac{K}{D_x}(X - M[X]),$$

запишем уравнение линейной регрессии случайной величины $X(2)$ на случайную величину $X(1)$:

$$X(2) = m_x(2) + \frac{K_x(1,2)}{D_x(1)}(X(1) - m_x(1)).$$

Вычислим с помощью этого уравнения прогноз:

$$X(2) = \left(3 + 2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{\frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1+1+4+2+2}{2 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1+1+1+1+2}{2 \cdot 2 \cdot 2}} \left(4 - \left(3 + 1 + \frac{1}{2}\right)\right) = 4,396.$$

Процессы размножения и гибели

Некоторая система (физическая, биологическая, экономическая) может находиться в одном из состояний: E_0, E_1, E_2, \dots (индекс - число элементов в системе). В случайные моменты времени система может совершать переход в соседнее состояние. Интенсивности переходов (среднее число переходов в единицу времени):

λ_k - интенсивность переходов из состояния E_k в E_{k+1} (интенсивность размножения),

ν_k - интенсивность переходов из состояния E_k в E_{k-1} (интенсивность гибели).

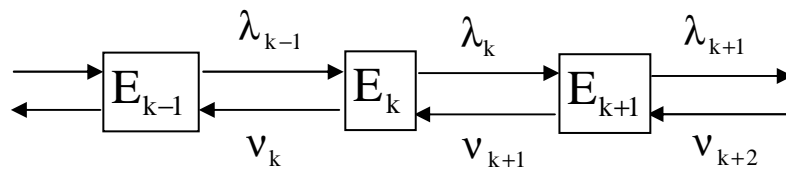


Рисунок 2

Вероятности состояний $p_k(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} p'_0(t) = \nu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t) \\ p'_1(t) = \nu_2 p_2(t) + \lambda_0 p_0(t) - (\nu_1 + \lambda_1) p_1(t) \\ \dots \\ p'_k(t) = \nu_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\nu_k + \lambda_k) p_k(t) \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

В общем случае решение задачи Коши для $\mathbf{p}_k(t)$ представляет серьезную математическую проблему. Для приближенного решения этой задачи можно применять различные методы, например с использованием рядов Маклорена [5].

Пример 2. Система находится в состоянии \mathbf{E}_k . Заданы интенсивности переходов λ_m и v_m . Оценить вероятности состояний системы через малый промежуток времени Δt . Малым промежутком времени считаем такой, при котором выполняется неравенство

$$\Delta t < \frac{1}{\max \lambda_k + \max v_k}.$$

Записываем разрешающую систему (1) в окрестности “k”:

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_{k-2}(t) = v_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) + \lambda_{k-3}\mathbf{p}_{k-3}(t) - (v_{k-2} + \lambda_{k-2})\mathbf{p}_{k-2}(t), \\ \mathbf{p}'_{k-1}(t) = v_k\mathbf{p}_k(t) + \lambda_{k-2}\mathbf{p}_{k-2}(t) - (v_{k-1} + \lambda_{k-1})\mathbf{p}_{k-1}(t), \\ \mathbf{p}'_k(t) = v_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) - (v_k + \lambda_k)\mathbf{p}_k(t), \\ \mathbf{p}'_{k+1}(t) = v_{k+2}\mathbf{p}_{k+2}(t) + \lambda_k\mathbf{p}_k(t) - (v_{k+1} + \lambda_{k+1})\mathbf{p}_{k+1}(t), \\ \mathbf{p}'_{k+2}(t) = v_{k+3}\mathbf{p}_{k+3}(t) + \lambda_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t) - (v_{k+2} + \lambda_{k+2})\mathbf{p}_{k+2}(t). \end{cases}$$

Учитывая малость Δt , полагаем :

$$\mathbf{p}_m \equiv 0, \quad \forall |m-k| > 2, \quad \lambda_{k+2} = 0, \quad v_{k-2} = 0$$

(система не может за малый промежуток времени совершить более двух переходов). Бесконечная система дифференциальных уравнений примет усеченный конечный вид:

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_{k-2}(t) = v_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) - \lambda_{k-2}\mathbf{p}_{k-2}(t), \\ \mathbf{p}'_{k-1}(t) = v_k\mathbf{p}_k(t) + \lambda_{k-2}\mathbf{p}_{k-2}(t) - (v_{k-1} + \lambda_{k-1})\mathbf{p}_{k-1}(t), \\ \mathbf{p}'_k(t) = v_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) - (v_k + \lambda_k)\mathbf{p}_k(t), \\ \mathbf{p}'_{k+1}(t) = v_{k+2}\mathbf{p}_{k+2}(t) + \lambda_k\mathbf{p}_k(t) - v_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t), \\ \mathbf{p}'_{k+2}(t) = \lambda_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t) - (v_{k+2} + \lambda_{k+2})\mathbf{p}_{k+2}(t). \end{cases} \quad (2)$$

Точное решение даже усеченной разрешающей системы (2) в общем случае связано с поиском корней характеристического уравнения 5-й степени. Поэтому только в отдельных случаях можно получить точную картину поведения вероятностей.

Рассмотрим алгоритм приближенного решения задачи методом рядов.

1) Вводим вектор $\bar{\mathbf{P}}(t) = \{\mathbf{p}_{k-2}(t), \dots, \mathbf{p}_{k+2}(t)\}$, записываем для него частичную сумму ряда Маклорена:

$$\bar{\mathbf{P}}(\Delta t) \approx \bar{\mathbf{P}}(0) + \bar{\mathbf{P}}'(0)\Delta t + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{P}}''(0)(\Delta t)^2. \quad (3)$$

2) Используя уравнения (2), находим $\bar{P}'(0)$, $\bar{P}''(0)$ и по формуле (3) получаем приближенное распределение вероятностей через время Δt .

Пример. 3. Дано: $p_3(0) = 1$, $v_k = 2$, $\lambda_k = k$, $\Delta t = 0,1$.

Найти вероятности состояний системы через время Δt .

Решение. Вычислим производные вероятностей состояний

$$\begin{cases} p_1'(t) = 2p_2(t) - p_1(t), & p_1''(t) = 2p_2'(t) - p_1'(t), \\ p_2'(t) = 2p_3(t) + p_1(t) - 4p_2(t), & p_2''(t) = 2p_3'(t) + p_1'(t) - 4p_2'(t), \\ p_3'(t) = 2p_4(t) + 2p_2(t) - 5p_3(t), & p_3''(t) = 2p_4'(t) + 2p_2'(t) - 5p_3'(t), \\ p_4'(t) = 2p_5(t) + 3p_3(t) - 6p_4(t), & p_4''(t) = 2p_5'(t) + 3p_3'(t) - 6p_4'(t), \\ p_5'(t) = 4p_4(t) - 2p_5(t). & p_5''(t) = 4p_4'(t) - 2p_5'(t). \end{cases}$$

Учитывая, что $p_3(0) = 1$, запишем вектор вероятностей при $t = 0$:

$$P(0) = \{0; 0; 1; 0; 0\}.$$

Подставляя его компоненты в формулы для производных, найдем:

$$P'(0) = \{0; 2; -5; 3; 0\} \text{ и } P''(0) = \{4; -18; 35; -33; 12\}.$$

Теперь есть вся информация для получения результата по формуле (3):

$$\begin{aligned} P(0.1) &= \{0; 0; 1; 0; 0\} + 0,1\{0; 2; -5; 3; 0\} + 0,005\{4; -18; 35; -33; 12\} = \\ &= \{0.02; 0.11; 0.675; 0.135; 0.06\} \end{aligned}$$

Ответ: Вероятности состояний системы через время **0.1** таковы:

$$p_1 = 0.02, \quad p_2 = 0.11, \quad p_3 = 0.675, \quad p_4 = 0.135, \quad p_5 = 0.06.$$

Процесс резервирования

Рассматривается простейшая модель резервирования без восстановления. Имеются основной прибор и один или два резервных прибора. При выходе из строя основного прибора он заменяется резервным и так до тех пор, пока все приборы не выйдут из строя. Этот момент означает, что система потеряла работоспособность. Один из основных вопросов теории резервирования – надежность систем. Надежность можно оценить, например, математическим ожиданием времени жизни системы (периода работоспособности), вероятностью работоспособности системы в данный момент времени.

Обозначим:

λ_1 - интенсивность отказов основного прибора, а также резервного после момента замены им основного прибора.

λ_2 - интенсивность отказов первого резервного прибора;

λ_3 - интенсивность отказов второго резервного прибора;

резервный прибор может находиться:

в нагруженном состоянии - $\lambda_k = \lambda_1$,

в облегченном резерве - $0 < \lambda_k < \lambda_1$,

в ненагруженном состоянии - $\lambda_k = 0$;

$p_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в системе имеется k приборов (функционирующий прибор плюс резервные приборы).

Разрешающая система имеет цепной характер :

$$\begin{cases} p_3'(t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)p_3(t) = 0, & p_3(0) = 1, \\ p_2'(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)p_2(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)p_3(t), & p_k(0) = 0, \\ p_1'(t) + \lambda_1 p_1(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)p_2(t), & (k < 3). \\ p_0(t) = 1 - p_3(t) - p_2(t) - p_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

Если резервный прибор всего один, то система становится проще :

$$\begin{cases} p_2'(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)p_2(t) = 0, & p_2(0) = 1, \\ p_1'(t) + \lambda_1 p_1(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)p_2(t), & p_k(0) = 0, \\ p_0(t) = 1 - p_2(t) - p_1(t). & (k < 2). \end{cases} \quad (5)$$

Решив систему уравнений, можно найти основные параметры:

$1 - p_0(t)$ – вероятность рабочего состояния в момент времени t ,

$\int_0^{\infty} t p_0'(t) dt$ – математическое ожидание времени жизни.

Пример 4. Резервируется ответственный узел (устройство) некоторого агрегата, системы. Частота отказов основного устройства - 2 (в ед. времени). Имеются два резервных устройства: одно в облегченном резерве, с частотой отказов 1 (в ед. времени), а второе резервное - в ненагруженном состоянии. После отказа любого из устройств одно из двух оставшихся будет функционировать как основное, а другое будет в облегченном резерве. Устройство, оставшееся затем в одиночестве, функционирует как основное. При выходе из строя и этого устройства считается, что данный агрегат прекратил свое существование (работоспособность). Вычислить среднее время функционирования агрегата (до выхода из строя).

В данном случае имеем: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Запишем с этими параметрами систему уравнений (4):

$$\begin{cases} p_3'(t) + 3p_3(t) = 0, & p_3(0) = 1, \\ p_2'(t) + 3p_2(t) = 3p_3(t), & p_k(0) = 0, \\ p_1'(t) + 2p_1(t) = 3p_2(t), & (k < 3). \\ p_0(t) = 1 - p_3(t) - p_2(t) - p_1(t). \end{cases}$$

- 1) С учетом начального условия $p_3(t) = e^{-3t}$.
- 2) Второе уравнение $p_2'(t) + 3p_2(t) = 3e^{-3t}$ имеет резонансную правую часть и частное решение: $p_2(t) = 3te^{-3t}$.

- 3) Решив третье уравнение системы $p_1'(t) + 2p_1(t) = 9te^{-3t}$, получим:
- $$p_1(t) = 9(e^{-2t} - (t+1)e^{-3t}).$$

- 4) Находим вероятность гибели агрегата (потери работоспособности):
- $$p_0(t) = 1 - p_1(t) - p_2(t) - p_3(t) = 1 - 9e^{-2t} + (6t + 8)e^{-3t}.$$

Примечание. При правильном решении задачи $p_0(t)$ должно быть монотонно возрастающей функцией. Проверим полученное решение на монотонное возрастание:

$$p_0'(t) = 18e^{-2t} - 18(t+1)e^{-3t} = 18e^{-3t}(e^t - t - 1) > 0.$$

- 5) Вычислим математическое ожидание времени выхода из строя последнего устройства (среднее время жизни изучаемого объекта):

$$M[\tau] = \int_0^{\infty} t p_0'(t) dt = 18 \int_0^{\infty} (te^{-2t} - (t^2 + t)e^{-3t}) dt = 18 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{27} + \frac{1}{9} \right) \right) = \frac{7}{6}.$$

Сравним $\frac{7}{6}$ с работой узла без резервирования:

$$M[\tau] = \int_0^{\infty} te^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

Резервирование увеличило среднее время жизни в 2,33 раза.

Цепи Маркова с дискретным временем

Некоторая система может находиться в одном из состояний: E_1, E_2, \dots, E_n . В определенные моменты времени система может перейти с некоторой вероятностью в другое состояние. Отрезки времени между моментами переходов называют обычно «шаги»: на первом шаге система находилась в состоянии E_1 , на втором - в состоянии E_2 и т.д. Обычно обозначают:

$p_i(k)$ - вероятность того, что на k -м шаге система находится в состоянии E_i ;

$p_{ij}(k)$ - вероятность того, что система, находившаяся на k -м шаге в состоянии E_i , перейдет на следующем шаге в состояние E_j .

Если ввести вектор состояний $P(k) = \{p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)\}$ и матрицу перехода

$$A(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

то получим рекуррентную формулу $P(k+1) = P(k)A(k)$. Цепь Маркова называют однородной, если матрица перехода не зависит от номера шага k :

$$A(k) = A, \quad \forall k.$$

Остановимся на однородных марковских процессах. Имеет место теорема Маркова [8, 10].

Если все элементы матрицы A положительны, то существуют пределы:

$$\tilde{p}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k).$$

Числа \tilde{p}_i называются предельными или финишными вероятностями состояний системы. Такая марковская цепь является *эргодической*, т.е. вероятности \tilde{p}_i являются предельными значениями частот состояний:

$$\tilde{p}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n},$$

где n_i - число наблюдений системы в состоянии E_i за n шагов.

Для поиска предельных вероятностей нужно вычислить собственный вектор матрицы перехода, соответствующий собственному числу 1:

$$\tilde{P} = \tilde{P}A,$$

при дополнительном условии $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$.

Типовые задания

- 1 Записать матрицу по графу системы.
- 2 Изобразить граф системы по заданной матрице.
- 3 Найти предельные вероятности заданной системы ($n \leq 3$). (Вычислить процентное соотношение времен нахождения системы в каждом из состояний).
- 4 По заданному распределению вероятностей на k -м шаге системы вычислить распределение вероятностей на $(k+1)$ или $(k+2)$ шаге.
- 5 Вычислить математическое ожидание марковского процесса с заданной матрицей и числовыми значениями начальных состояний.

Пример 5. Некоторая экономическая система в состоянии E_1 получает 2000 грн. прибыли. На следующий день эта экономическая

система с вероятностью 0.3 может перейти в состояние E_2 и получить в этом состоянии 500 грн. прибыли или остаться в состоянии E_1 . Из состояния E_2 с вероятностью 0.4 система может вернуться в E_1 или перейти в состояние E_3 с вероятностью 0.6. Состояние E_3 означает для этой экономической системы 4500 грн. убытков. Из E_3 система обязательно переходит в E_1 . Все переходы возможны один раз в сутки.

Изобразить граф системы и записать матрицу ее переходов. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, вычислить процентное соотношение времен нахождения системы в каждом из состояний. Вычислить среднюю суточную прибыль системы.

Решение. Изобразим граф этой экономической системы :

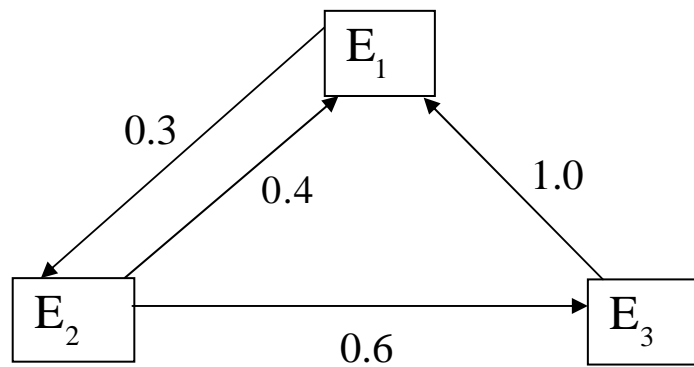


Рисунок 3

Запишем матрицу переходов: $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Введем вектор

предельных вероятностей состояний системы: $\vec{P} = \{u, v, w\}$. По смыслу предельных вероятностей запишем матричное уравнение $\vec{P} = \vec{P}A$ и преобразуем его в скалярную форму:

$$\begin{cases} 0.7u + 0.4v + w = u, \\ 0.3u = v, \\ 0.6v = w; \end{cases} \quad \begin{cases} -0.3u + 0.4v + w = 0, \\ 0.3u - v = 0, \\ 0.6v - w = 0. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} -0.3 & 0.4 & 1 \\ 0.3 & -1 & 0 \\ 0 & 0.6 & -1 \end{vmatrix}$$

Сумма всех строк определителя равна нулю, следовательно, $\Delta = 0$. Одно из уравнений является следствием остальных. Заменим первое уравнение на основное свойство вероятностей полной группы событий:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ 0.3u - v = 0, \\ 0.6v - w = 0, \end{cases}$$

Решим систему, подставляя u и w , выраженные через v , в первое уравнение системы: $u = \frac{25}{37}$, $v = \frac{15}{74}$, $w = \frac{9}{74}$.

Найдены предельные вероятности состояний экономической системы:

$$p(E_1) = \frac{25}{37}, \quad p(E_2) = \frac{15}{74}, \quad p(E_3) = \frac{9}{74}.$$

Вычислим процентное соотношение пребывания системы в каждом из возможных состояний :

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad \frac{25}{37} \cdot 100\% \approx 67.57\%, \\ E_2 &: \quad \frac{15}{74} \cdot 100\% \approx 20.27\%, \\ E_3 &: \quad \frac{9}{74} \cdot 100\% \approx 12.16\%. \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание прибыли – это и будет средняя суточная прибыль:

$$\begin{aligned} M(\text{приб}) &= \frac{25}{37} \cdot 2000 \text{ грн.} + \frac{15}{74} \cdot 500 \text{ грн.} - \frac{9}{74} \cdot 4500 \text{ грн.} = \\ &= \frac{1000 + 75 - 405}{74} \cdot 100 \text{ грн.} = 905.4 \text{ грн.} \end{aligned}$$

Вывод: В некоторые дни предприятие получает прибыль, в другие дни терпит убытки, но в среднем работает рентабельно – за длительный период времени заработок составит 905.4 грн./сут.

Цепи Маркова с непрерывным временем

Некоторая система может находиться в одном из состояний: E_1, E_2, \dots, E_n . В случайные моменты времени система может переходить в другое состояние. Будем полагать, что моменты переходов образуют простейший поток событий. Интенсивности переходов для всех пар состояний заданы: λ_{ij} - интенсивность (число актов в единицу времени) переходов из i -го в j -е состояние. Вероятности состояний $p_i(t)$ находят путем решения задачи Коши:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21}p_2(t) + \lambda_{31}p_3(t) + \dots + \lambda_{n1}p_n(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \dots + \lambda_{1n})p_1(t), \\ p_2'(t) = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{32}p_3(t) + \dots + \lambda_{n2}p_n(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{2n})p_2(t), \\ \dots \\ p_n'(t) = \lambda_{1n}p_1(t) + \lambda_{2n}p_2(t) + \dots + \lambda_{n-1,n}p_{n-1}(t) - (\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \dots + \lambda_{n,n-1})p_n(t), \end{cases}$$

$$p_1(0) = p_{1,0}, \quad p_2(0) = p_{2,0}, \quad \dots \quad p_n(0) = p_{n,0}.$$

Если требуется найти только предельные вероятности, то можно обойти решение довольно громоздкой проблемы Коши. При $t \rightarrow \infty$ вероятности стремятся к предельным значениям, следовательно, для больших “ t ” вероятности постоянны и их производные равны нулю. Обозначив через p_i предельные вероятности, получим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 + \dots + \lambda_{n1}p_n - (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \dots + \lambda_{1n})p_1 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 + \dots + \lambda_{n2}p_n - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{2n})p_2 = 0, \\ \dots \\ \lambda_{1n}p_1 + \lambda_{2n}p_2 + \dots + \lambda_{n-1,n}p_{n-1} - (\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \dots + \lambda_{n,n-1})p_n = 0. \end{cases}$$

Из бесчисленного множества решений однородной системы выбираем то, для которого выполняется условие

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Пример 6. Некоторая экономическая система может находиться в одном из состояний: E_1, E_2, E_3 . При этом состояния E_1, E_2 приносят, соответственно, 2000 и 500 грн./сут. прибыли. А в состоянии E_3 эта экономическая система терпит 4500 грн./сут. убытков. Интенсивности переходов между состояниями таковы:

$$\begin{aligned} E_1 \rightarrow E_2 & - 0.5 \frac{1}{\text{сут}}, & E_2 \rightarrow E_1 & - 0.3 \frac{1}{\text{сут}}, \\ E_2 \rightarrow E_3 & - 0.6 \frac{1}{\text{сут}}, & E_3 \rightarrow E_2 & - 1.0 \frac{1}{\text{сут}}, \\ E_3 \rightarrow E_1 & - 0.4 \frac{1}{\text{сут}}. & \text{Переход } E_1 \rightarrow E_3 & \text{невозможен.} \end{aligned}$$

Изобразить граф системы и записать разрешающую систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, вычислить процентное соотношение времен нахождения системы в каждом из состояний. Вычислить среднюю суточную прибыль системы.

Решение. Изобразим граф этой экономической системы.

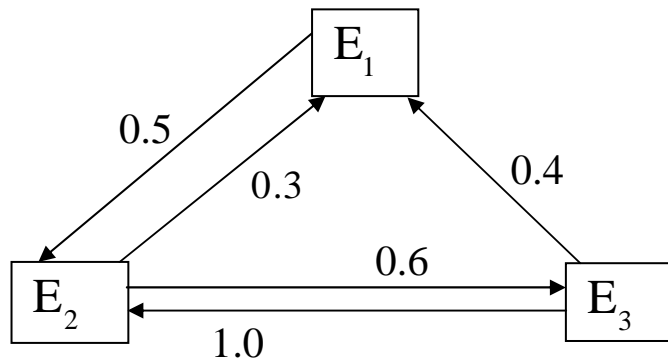


Рисунок 4

Запишем систему
дифференциальных
уравнений:

$$\begin{cases} p_1' = 0.3p_2 + 0.4p_3 - 0.5p_1, \\ p_2' = 0.5p_1 + p_3 - (0.3+0.6)p_2, \\ p_3' = 0.6p_2 - (1+0.4)p_3. \end{cases}$$

При правильном составлении уравнений, сумма всех правых частей системы равна нулю. Для вычисления предельных вероятностей полагаем равными нулю производные:

$$\begin{cases} 0.3p_2 + 0.4p_3 - 0.5p_1 = 0, \\ 0.5p_1 + p_3 - 0.9p_2 = 0, \\ 0.6p_2 - 1.4p_3 = 0. \end{cases}$$

Сумма всех уравнений системы равна нулю, следовательно, одно из них можно отбросить.

Заменив первое уравнение системы нормирующим условием, получим:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 0.5p_1 - 0.9p_2 + p_3 = 0, \\ 0.6p_2 - 1.4p_3 = 0. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.9 & 1 \\ 0 & 0.6 & -1.4 \end{vmatrix} = 1.66,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.9 & 1 \\ 0 & 0.6 & -1.4 \end{vmatrix} = 0.66, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1.4 \end{vmatrix} = 0.7,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{vmatrix} = 0.3,$$

По формулам Крамера получим решение системы:

$$p_1 = \frac{0.66}{1.66} \approx 0.398, \quad p_2 = \frac{0.7}{1.66} \approx 0.422, \quad p_3 = \frac{0.3}{1.66} \approx 0.181.$$

Запишем время посещения системой каждого из состояний в процентах:

$$p_1 - 39.76\%, \quad p_2 - 42.17\%, \quad p_3 - 18.07\% .$$

Определим среднюю суточную прибыль экономической системы:

$$П_{\text{сред}} = 2000 \cdot 0.398 + 500 \cdot 0.422 - 4500 \cdot 0.181 = 192.5 \text{ (грн./сут.)}.$$

Контрольные задания

Функции со случайными параметрами

Дано: функция $X(t) = u_1 f(t) + u_2 g(t) + h(t)$, где u_1 и u_2 - случайные величины (случайные параметры), распределенные, соответственно, на интервалах $[a;b]$ и $[c;d]$. Данные для вариантов представлены в табл.2,3, где K_{12} - корреляционный момент параметров u_1 и u_2 . Функция $X(t)$ описывает некоторый случайный процесс.

Требуется:

- 1) построить область возможных траекторий случайного процесса;
- 2) вычислить и построить график математического ожидания случайного процесса;
- 3) вычислить дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию случайного процесса;
- 4) с учетом заданных t_1 , t_2 и $X(t_1)$ составить прогноз $X(t_2)$.

Таблица 2

Вар.	[a;b]	[c;d]	$M(u_1)$	$D(u_1)$	$M(u_2)$	$D(u_2)$	K_{12}
1	[-2;1]	[0;1]	-1	1.5	0.75	0.1	-0.2
2	[-1;1]	[-1;2]	-0.5	0.5	1	1	-0.5
3	[-1;1]	[-1;2]	-0.5	0.5	1	0.75	-0.4
4	[-3;0]	[0;1]	-1	1	0.5	0.2	0.4
5	[-1;0]	[-1;1]	-0.5	0.1	0.5	0.75	-0.2
6	[0;5]	[-2;0]	2	4	-1	1	-1
7	[0;1]	[-4;0]	0.5	0.2	-2	3	0.5
8	[-2;3]	[-1;3]	1	4	1	2	1.5
9	[-1;3]	[-2;2]	1	3	1	2	1
10	[-1;1]	[-3;1]	0.5	0.5	-1	2.5	-1
11	[-2;4]	[-1;1]	1	5	0.5	0.75	1.25
12	[-2;0]	[0;2]	-1	1	1	1	-0.75
13	[0;1]	[0;2]	0.5	0.2	1	1	-0.2
14	[-1;1]	[-2;3]	-0.5	0.5	1	5	-1
15	[-1;1]	[-2;1]	0.5	0.5	-1	1	-0.5
16	[-1;1]	[-1;1]	0.5	0.5	-0.5	0.5	-0.2
17	[-1;0]	[0;1]	-0.5	0.2	0.5	0.2	0.1
18	[0;1]	[0;1]	0.5	0.2	0.5	0.2	0.15

Продолжение таблицы 2

Вар.	[a;b]	[c;d]	$M(u_1)$	$D(u_1)$	$M(u_2)$	$D(u_2)$	K_{12}
19	[-1;1]	[0;1]	0.5	0.5	0.5	0.2	0.2
20	[-1;1]	[0;2]	-0.5	0.5	1	0.5	-0.4
21	[-2;3]	[0;1]	1	3	0.5	0.2	0.5
22	[-1;1]	[-1;0]	0.5	0.5	-0.5	0.2	0.2
23	[-1;1]	[-2;1]	0.5	0.5	-1	0.5	-0.25
24	[-1;1]	[-1;2]	-0.5	0.5	1	1	-0.5
25	[0;1]	[-1;0]	0.5	0.2	-0.5	0.1	0.1
26	[-1;1]	[-3;3]	0.5	0.5	-1	6	1
27	[0;1]	[0;2]	-0.5	0.2	1	1	-0.2
28	[-2;2]	[-2;2]	-1	2	1	3	1.5
29	[0;1]	[0;2]	0.5	0.2	1	1	-0.2
30	[-1;1]	[-2;1]	-0.5	0.5	-1	0.5	0.25

Таблица 3

Вар.	$f(t)$	$g(t)$	t_1	$X(t_1)$	t_2
1	t	$t^2 - 2$	2	0	3
2	t^2	$1-t$	1	0	3
3	$-\sqrt{t+2}$	3	2	3.5	7
4	2	$3-t^2$	2	-3.5	4
5	2^t	4	1	0.5	2
6	1	2^{t-1}	1	0.5	3
7	2^{t-1}	2	1	-3	3
8	$\frac{6}{t+1}$	4	2	5	5
9	1	$\frac{4}{t+1}$	1	4	3
10	$\sqrt{t+1}$	2	0	-2	3
11	1	$\sqrt{t+2}$	2	1.5	7
12	2^{-t}	3	1	2	2
13	5	2^{1-t}	1	4	2
14	2^{2-t}	1	1	1	3
15	\sqrt{t}	3	1	-2	4
16	$t+1$	t^2-2	1	2	2
17	$2t$	t^2	1	-1	2

Продолжение таблицы 3

Var.	$f(t)$	$g(t)$	t_1	$X(t_1)$	t_2
18	$\frac{3}{t+1}$	4	0	2	2
19	$3-2t$	t^2-1	1	0	2
20	2^{3-t}	2	1	1	3
21	-1	\sqrt{t}	1	0	4
22	t^2+1	$2-t$	1	1	2
23	$-t^2$	t	1	-1	3
24	-2^{-t}	3	0	4	2
25	$2t-1$	$-t^2$	1	1.5	2
26	3	$-\frac{2}{t+1}$	0	4	1
27	2	-2^t	1	-4	2
28	$-\frac{5}{t+1}$	2	0	5	4
29	$4-t^2$	3	1	4	3
30	t^2+1	-t	0	-1	2

Цепи Маркова с дискретным временем

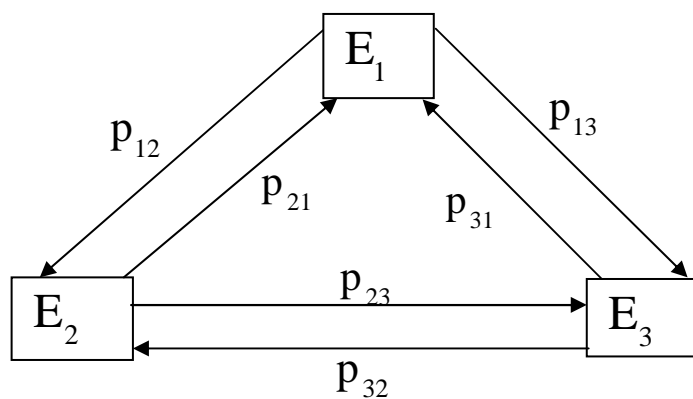


Рисунок 5

Дан граф состояний системы. Вероятности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 4. Требуется:

- 1) составить матрицу переходов;
- 2) вычислить предельные вероятности состояний системы.

Таблица 4

Вар.	p_{12}	p_{21}	p_{13}	p_{31}	p_{32}	p_{23}
1	0,3	0,3	0,4	0,25	0,5	0,2
2	0,35	0,3	0,2	0,25	0,5	0,25
3	0,15	0,3	0,2	0,5	0,15	0,25
4	0,25	0,4	0,2	0,5	0,15	0,25
5	0,2	0,45	0,2	0,5	0,15	0,25
6	0,2	0,45	0,2	0,1	0,15	0,25
7	0,2	0,45	0,4	0,1	0,15	0,25
8	0,2	0,45	0,3	0,45	0,15	0,2
9	0,35	0,45	0,3	0,45	0,15	0,4
10	0,35	0,45	0,2	0,55	0,35	0,4
11	0,35	0,45	0,2	0,55	0,3	0,2
12	0,3	0,45	0,2	0,45	0,3	0,2
13	0,3	0,65	0,2	0,45	0,3	0,2
14	0,3	0,65	0,2	0,45	0,2	0,2
15	0,3	0,25	0,2	0,45	0,2	0,2
16	0,3	0,25	0,2	0,6	0,2	0,2
17	0,3	0,25	0,3	0,7	0,2	0,2
18	0,3	0,25	0,3	0,2	0,2	0,5
19	0,1	0,25	0,3	0,2	0,2	0,5
20	0,3	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3
21	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,3
22	0,3	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3
23	0,1	0,25	0,5	0,2	0,2	0,5
24	0,3	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3
25	0,5	0,2	0,3	0,5	0,4	0,3
26	0,5	0,2	0,3	0,2	0,6	0,3
27	0,5	0,3	0,3	0,2	0,6	0,3
28	0,2	0,3	0,6	0,2	0,6	0,3
29	0,6	0,3	0,2	0,2	0,5	0,3
30	0,4	0,3	0,2	0,3	0,5	0,3

Цепи Маркова с непрерывным временем

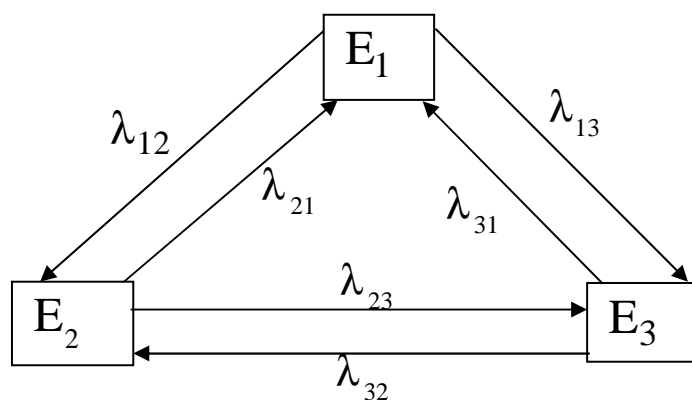


Рисунок 6

Дан граф состояний системы. Интенсивности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 5. Требуется:

- 1) составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы;
- 2) вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

Таблица 5

Вар.	λ_{12}	λ_{21}	λ_{13}	λ_{31}	λ_{32}	λ_{23}
1	2	3	1	3	2	1
2	5	2	1	4	2	2
3	3	1	2	2	1	4
4	2	0	7	3	2	1
5	3	1	2	2	4	2
6	2	3	4	2	5	3
7	1	4	3	3	2	1
8	2	5	4	1	5	2
9	4	2	3	2	4	1
10	2	1	3	4	5	2
11	1	0,5	0,5	0,25	0,75	0,25
12	0,25	0,75	0,25	1	1	0,5
13	0,2	0,2	0,7	0,3	0,2	0,1
14	0,3	0,1	0,2	0,2	0,4	0,2
15	0,2	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3
16	0,1	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1
17	3	2	1	2	3	1
18	4	2	2	5	2	1
20	2	1	4	3	1	2
21	3	2	1	2	0	7
22	2	4	2	3	1	2
23	2	5	3	2	3	4
24	3	2	1	1	4	3
25	1	5	2	2	5	4
26	2	4	1	4	2	3
27	4	5	2	2	1	3
28	3	2	1	1	2	2
29	1	0,5	0,75	0,25	0,75	0,25
30	0,5	0,75	0,25	0,25	1	0,5

Моделирование цепного процесса

Дан граф состояний системы (рис. 5). Вероятности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 6, указано также и начальное состояние системы.

Таблица 6

Вар.	P_{12}	P_{21}	P_{13}	P_{31}	P_{32}	P_{23}	Начальное состояние
1	0.3	0.5	0.2	0.4	0.3	0.3	E_1
2	0.3	0.4	0.3	0.5	0.3	0.3	E_1
3	0.3	0.4	0.3	0.5	0.2	0.3	E_1
4	0.1	0.25	0.5	0.2	0.2	0.5	E_1
5	0.3	0.4	0.3	0.5	0.4	0.3	E_1
6	0.5	0.2	0.3	0.5	0.4	0.3	E_1
7	0.5	0.2	0.3	0.2	0.6	0.3	E_1
8	0.5	0.3	0.3	0.2	0.6	0.3	E_1
9	0.2	0.3	0.6	0.2	0.6	0.3	E_1
10	0.6	0.3	0.2	0.2	0.5	0.3	E_2
11	0.4	0.3	0.2	0.3	0.5	0.3	E_2
12	0.3	0.3	0.4	0.25	0.5	0.2	E_2
13	0.35	0.3	0.2	0.25	0.5	0.25	E_2
14	0.15	0.3	0.2	0.5	0.15	0.25	E_2
15	0.25	0.4	0.2	0.5	0.15	0.25	E_2
16	0.2	0.45	0.2	0.5	0.15	0.25	E_2
17	0.2	0.45	0.2	0.1	0.15	0.25	E_2
18	0.2	0.45	0.4	0.1	0.15	0.25	E_2
19	0.2	0.45	0.3	0.45	0.15	0.2	E_3
20	0.35	0.45	0.3	0.45	0.15	0.4	E_3
21	0.35	0.45	0.2	0.55	0.35	0.4	E_3
22	0.35	0.45	0.2	0.55	0.3	0.2	E_3
23	0.3	0.45	0.2	0.45	0.3	0.2	E_3
24	0.3	0.65	0.2	0.45	0.3	0.2	E_3
25	0.3	0.65	0.2	0.45	0.2	0.2	E_3
26	0.3	0.25	0.2	0.45	0.2	0.2	E_3
27	0.3	0.25	0.2	0.6	0.2	0.2	E_3
28	0.3	0.25	0.3	0.7	0.2	0.2	E_3

Продолжение таблицы 6

Вар.	p_{12}	p_{21}	p_{13}	p_{31}	p_{32}	p_{23}	Начальное состояние
29	0.3	0.25	0.3	0.2	0.2	0.5	E_3
30	0.1	0.25	0.3	0.2	0.2	0.5	E_3

Таблица 7 - таблица случайных чисел

0.837	0.953	0.787	0.608	0.136	0.880	0.364	0.206
0.665	0.188	0.118	0.440	0.086	0.305	0.454	0.386
0.524	0.273	0.996	0.032	0.851	0.922	0.416	0.091

Примечание. Порядок чисел в таблице построчный.

Требуется выполнить следующие задания:

1. Составить матрицу переходов системы за один шаг.
2. Моделировать 24 шага переходов системы с помощью таблицы случайных чисел (табл. 7) по следующему принципу.

Пусть на данном шаге система находится в состоянии M . Обозначим через p_1, p_2, p_3 вероятности переходов из состояния M в состояния E_1, E_2, E_3 . С помощью очередного случайного числа x определяем следующее состояние системы по правилу:

$$E_1, \text{ если } x \leq p_1 ;$$

$$E_2, \text{ если } p_1 < x \leq p_1 + p_2 ;$$

$$E_3, \text{ если } p_1 + p_2 < x .$$

3. Вычислить относительные частоты каждого состояния системы за 24 шага перехода плюс исходное состояние.
4. Вычислить вероятности каждого состояния системы за 5 шагов, начиная с заданного.
5. Вычислить предельные вероятности системы.
6. Выполнить сравнения:
 - а) при правильном расчете распределения вероятностей пункта 5 должны стремиться к предельным;
 - б) относительные частоты состояний должны не слишком отличаться от предельных (при большом числе шагов – стремятся к предельным).

Теория резервирования

Дана система, состоящая из трех устройств – одного основного и двух резервных. Указаны интенсивности отказов в единицу времени каждого из устройств: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Считается что резервные устройства находятся в нагруженном режиме. На первом этапе в работе системы участвуют 3

устройства, поэтому интенсивность отказов в системе равна $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. После выхода из строя любого из этих устройств наступает второй этап жизни системы – одно из оставшихся устройств становится основным с интенсивностью отказов λ_1 , а второе – первым резервным с интенсивностью отказов λ_2 . Поэтому на втором этапе интенсивность отказов в системе равна $\lambda_1 + \lambda_2$. На третьем этапе в системе остается единственное устройство, включается в работу в качестве основного и интенсивность отказов в системе равна λ_1 .

Требуется выполнить следующие задания :

1. Составить задачу Коши, описывающую вероятности состояний системы: $p_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в системе работоспособны k устройств.
2. Найти аналитическое решение задачи Коши, построить графики функций $p_k(t)$ на интервале $[0; b]$, где $b = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_1}$.
Вероятности вычислять с точностью до сотых.
3. Найти формулы для функций:
 $n(t)$ - математическое ожидание числа работоспособных устройств в системе в момент времени t ;
 $m(t)$ - математическое ожидание числа отказов устройств в системе в момент времени t .
4. Построить графики функций $n(t)$, $m(t)$ на интервале $[0; b]$. Значения n , m вычислять с точностью до десятых.
5. Вычислить среднее время жизни системы.

Таблица 8

Продолжение таблицы 8

П/п	λ_1	λ_2	λ_3	П/п	λ_1	λ_2	λ_3
1	4	2	1	16	0.4	0.2	0.2
2	2	2	0	17	0.3	0.3	0.3
3	1	1	0	18	2	1	0
4	2	0	0	19	2	1	0.5
5	6	2	2	20	0.5	0.5	0
6	5	3	2	21	1	1	1
7	2	1	1	22	0.1	0.1	0.1
8	3	2	1	23	0.05	0	0
9	3	1	0	24	0.2	0.1	0.1
10	0.5	0	0	25	1	0.2	0
11	1	0.5	0	26	0.6	0.3	0.1
12	0.2	0.1	0	27	0.4	0.2	0.1
13	0.2	0.2	0.1	28	0.3	0.1	0
14	0.1	0.1	0	29	0.1	0	0
15	0.1	0.05	0.05	30	0.3	0.2	0.1

Вопросы коллоквиума

Базовая часть

- 1 Запись ряда геометрической прогрессии, формула его суммы.
- 2 Запись обобщенного гармонического ряда и условие его сходимости.
- 3 Формула числа сочетаний.
- 4 Вероятность суммы несовместных событий.
- 5 Вероятность суммы совместных событий.
- 6 Вероятность произведения независимых событий.
- 7 Вероятность произведения зависимых событий.
- 8 Формула Бернулли в схеме повторных испытаний.
- 9 Формула расчета математического ожидания дискретной случайной величины.
- 10 Формула расчета математического ожидания непрерывной случайной величины.
- 11 Формула расчета выборочного среднего.
- 12 Формула расчета выборочного среднего с весовыми коэффициентами.
- 13 Формула производной произведения двух функций.
- 14 Формула производной частного двух функций.
- 15 Уравнение прямой, проходящей через две точки.
- 16 Формула Ньютона-Лейбница.
- 17 Формула площади треугольника по основанию и высоте.
- 18 Формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.
- 19 Формула площади трапеции по основанию и высоте.
- 20 Записать в общем виде квадратное уравнение и формулы для его корней.
- 21 Формула площади круга.
- 22 Формула объема пирамиды .
- 23 Формула длины окружности.
- 24 Формула объема конуса.
- 25 Формула объема шара.
- 26 Формулы Крамера.
- 27 Скалярное произведение векторов через координаты.
- 28 Векторное произведение векторов через координаты.
- 29 Площадь поверхности сферы.
- 30 Формула вычисления дисперсии непрерывной случайной величины.
- 31 Обозначение и формула вычисления математического ожидания случайного процесса.
- 32 Обозначение и формула вычисления дисперсии случайного процесса.
- 33 Обозначение и формула вычисления корреляционной функции случайного процесса.
- 34 Обозначение и определение понятия «центрированный случайный процесс».
- 35 Определение понятия «возвратная цепь Маркова».

- 36 Смысл элементов p_{ij} в матрице перехода.
- 37 Определение понятия «сечение случайного процесса».
- 38 Определение понятия «предельная вероятность состояния» в цепи Маркова.
- 39 Формула расчета вероятностей состояний на k -м шаге процесса Маркова.
- 40 Формулировка понятия «стохастическая матрица».
- 41 Формулировка теоремы о стохастических матрицах.
- 42 Формулировка теоремы Маркова.
- 43 Классификация резервных элементов.
- 44 Формулировка понятия «интенсивность отказов» для резервируемой системы.
- 45 Смысл функций $p_k(t)$ в теории резервирования.
- 46 Формула расчета среднего времени жизни резервируемой системы.

Теоретическая часть

- 1 Вывод формул линейного прогноза, часть 1 ($\hat{U} = kV + b$).
- 2 Вывод формул линейного прогноза, часть 2 ($X(t_2) =$).
- 3 Теорема Маркова, часть 1 ($\max_i p_{ij}^{(k)} \leq \max_i p_{ij}^{(k-1)}$).
- 4 Теорема Маркова, часть 2 ($0 \leq \delta < 1$).
- 5 Теорема Маркова, часть 3 (оценка $\left| \max_t p_{tr}^{(k)} - \min_t p_{tr}^{(k)} \right|$).
- 6 Теорема Маркова, часть 4 (заключительная).
- 7 Простейший вариант теоремы Маркова.
- 8 Анализ теоремы Маркова.
- 9 Вывод системы ДУ для цепи Маркова с непрерывным временем.
- 10 Вывод формул Эрланга.
- 11 Анализ формул Эрланга.
- 12 Приближенное решение задач гибели-размножения с помощью рядов.
- 13 Вывод расчетной формулы среднего времени жизни системы с резервированием.
- 14 Моделирование случайных процессов.

Версии ответов на вопросы теоретической части коллоквиума

Вывод формул линейного прогноза

Часть 1. Пусть имеется система случайных величин и известны их основные числовые характеристики. Требуется получить простейшую формулу прогноза U по известному значению V . Будем обозначать прогноз случайной величины U символом \hat{U} . Наиболее простая зависимость – линейная:

$$\hat{U} = kV + b. \quad (6)$$

Рассмотрим случайную величину $Z = (U - \hat{U})^2$. При каждом акте прогноза Z принимает некоторое неотрицательное значение. Чем меньше число Z , тем точнее оказался прогноз. Выберем коэффициенты формулы (6) так, чтобы минимизировать математическое ожидание Z , тем самым будет минимизирована средняя ошибка прогноза по формуле (6).

$$\begin{aligned} M(Z) &= M((U - kV - b)^2) = D(U - kV - b) + M(U - kV - b)^2 = \\ &= D(U - kV) + (M(U - kV) - b)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} D(U - kV) &= M((U - kV)^2) - M(U - kV)^2 = M(U^2) - 2kM(UV) + k^2M(V^2) - \\ &- (M(U)^2 - 2kM(U)M(V) + k^2M(V)^2) = (M(U^2) - M(U)^2) - \\ &- 2k(M(UV) - M(U)M(V)) + k^2(M(V^2) - M(V)^2) = D(U) - 2kK_{uv} + k^2D(V) = \\ &= D(U) - 2kK_{uv} + k^2D(V) = D(U) + D(V) \left(k - \frac{K_{uv}}{D(V)} \right)^2 - \frac{K_{uv}^2}{D(V)} = \\ &= D(U) \left(1 - \frac{K_{uv}^2}{D(U)D(V)} \right) + D(V) \left(k - \frac{K_{uv}}{D(V)} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в формулу (7):

$$M(Z) = D(U) \left(1 - \frac{K_{uv}^2}{D(U)D(V)} \right) + D(V) \left(k - \frac{K_{uv}}{D(V)} \right)^2 + (M(U - kV) - b)^2.$$

Первое слагаемое в формуле для $M(Z)$ не зависит от выбора коэффициентов k и b , а остальные слагаемые неотрицательны при любых k и b . Следовательно, минимум для $M(Z)$ будет обеспечен, если второе и третье слагаемые обратить в нуль:

$$k = \frac{K_{uv}}{D(V)}, \quad b = M(U - kV) = M(U) - \frac{K_{uv}}{D(V)}M(V). \quad (9)$$

Часть 2. Пусть имеется случайный процесс $X(t)$. Известно значение этого процесса в момент времени t_1 . По известным числовым

характеристикам процесса $m_x(t)$ и $K_x(\tau_1, \tau_2)$ составить прогноз значения процесса в момент времени t_2 (обычно $t_1 < t_2$).

Введем случайные величины $U = X(t_1)$, $V = X(t_2)$. Тогда согласно свойствам случайных процессов можно записать:

$$\begin{aligned} M(U) &= m_x(t_1), & M(V) &= m_x(t_2), \\ D(U) &= K_x(t_1, t_1), & D(V) &= K_x(t_2, t_2), \\ K_{uv} &= K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1). \end{aligned}$$

Запишем коэффициенты для линейной формулы прогноза $\hat{U} = kV + b$:

$$k = \frac{K_{uv}}{D(V)}, \quad b = M(U - kV) = M(U) - \frac{K_{uv}}{D(V)}M(V) \quad (10)$$

и вернем величинам U и V их смысл по отношению к случайному процессу $X(t)$. Получим формулу линейного прогноза случайного процесса:

$$X(t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{D(t_2)}X(t_1) + m_x(t_1) - \frac{K_x(t_1, t_2)}{D(t_2)}m_x(t_2).$$

Окончательно получим после преобразования:

$$X(t_2) = m_x(t_1) + \frac{K_x(t_1, t_2)}{D(t_2)}(X(t_1) - m_x(t_2)). \quad (11)$$

Воспользовавшись формулой

$$M(Z) = D(U) \left(1 - \frac{K_{uv}^2}{D(U)D(V)} \right) + D(V) \left(k - \frac{K_{uv}}{D(V)} \right)^2 + (M(U - kV) - b)^2,$$

учитывая, что при надлежащем выборе коэффициентов k и b в правой части остается только первое слагаемое, получим:

$$M((U - kV)^2) = D(U) \left(1 - \frac{K_{uv}^2}{D(U)D(V)} \right). \quad (12)$$

Левая часть неотрицательна, $D(U)$ неотрицательно по смыслу дисперсии, следовательно, для любых случайных величин U и V выполняется неравенство

$$\frac{K_{uv}^2}{D(U)D(V)} \leq 1. \quad (13)$$

Это позволяет ввести коэффициент корреляции:

$$r = \frac{K_{uv}}{\sqrt{D(U)D(V)}}, \quad |r| \leq 1,$$

определяющий тесноту линейной корреляции между случайными величинами, а для случайного процесса - степень корреляции между его сечениями t_1 и t_2 :

$$r = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}}. \quad (14)$$

Теорема Маркова

Часть 1. Формулировка теоремы. Если в матрице перехода все элементы положительны, то предельные вероятности состояний существуют.

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad p_{ij} > 0, \quad \forall i, j$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{p_1; p_2; \dots; p_n\} A^k = \{p_{1, \text{пред}}; p_{2, \text{пред}}; \dots; p_{n, \text{пред}}\}.$$

Согласно определению матрицы перехода A и свойству вероятностей полной группы событий имеем: $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \forall i$. Матрицы, элементы которых $\in [0;1]$ и сумма элементов любой строки равна 1, называют стохастическими. Рассмотрим свойства матрицы

$$A^k = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

По определению степени матриц $A^k = AA^{k-1}$, следовательно,

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{m=1}^n p_{im} p_{mj}^{(k-1)} \leq \sum_{m=1}^n p_{im} \max_r p_{rj}^{(k-1)} = \max_r p_{rj}^{(k-1)} \sum_{m=1}^n p_{im}.$$

Учитывая свойство стохастических матриц $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, получим:

$$p_{ij}^{(k)} \leq \max_r p_{rj}^{(k-1)}.$$

Это неравенство выполняется для всех i , поэтому можно записать:

$$\max_i p_{ij}^{(k)} \leq \max_i p_{ij}^{(k-1)}.$$

Аналогично доказываем, что $\min_i p_{ij}^{(k)} \geq \min_i p_{ij}^{(k-1)}$.

Часть 2. Обозначим для матрицы $A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$:

\sum_m^+ – суммирование по индексу m неотрицательных элементов;

\sum_m^- – суммирование по индексу m отрицательных элементов.

$$\delta^+(i, j) = \sum_m^+ (p_{im} - p_{jm}), \quad \delta^-(i, j) = -\sum_m^- (p_{im} - p_{jm}).$$

Выясним свойства этих величин:

$$\delta^+(i, j) = \sum_m^+ (p_{im} - p_{jm}) < \sum_m^+ (p_{im} - 0) \leq \sum_{m=1}^n p_{im} = 1.$$

Первое неравенство строгое: согласно условию теоремы Маркова все $p_{ij} > 0$. Последнее равенство использует свойство стохастических матриц.

Кроме того, согласно обозначению имеем: $\delta^+(i, j) \geq 0$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \delta^+(i, j) - \delta^-(i, j) &= \sum_m^+ (p_{im} - p_{jm}) + \sum_m^- (p_{im} - p_{jm}) = \sum_{m=1}^n (p_{im} - p_{jm}) = \\ &= \sum_{m=1}^n p_{im} - \sum_{m=1}^n p_{jm} = 1 - 1 = 0 \quad (\text{по свойству стохастических матриц}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta^+(i, j) = \delta^-(i, j)$.

Таким образом, получена оценка для всех i, j :

$$0 \leq \delta^+(i, j) = \delta^-(i, j) < 1.$$

Если обозначить $\delta = \max_{i,j} \delta^+(i, j)$, то $0 \leq \delta < 1$.

Часть 3. Рассмотрим свойства матрицы $A^k = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$.

$A^k = AA^{k-1}$, следовательно,

$$\begin{aligned} |p_{ir}^{(k)} - p_{jr}^{(k)}| &= \left| \sum_{m=1}^n (p_{im} - p_{jm}) p_{mr}^{(k-1)} \right| = \\ &= \left| \sum_m^+ (p_{im} - p_{jm}) p_{mr}^{(k-1)} + \sum_m^- (p_{im} - p_{jm}) p_{mr}^{(k-1)} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_m^+ (p_{im} - p_{jm}) \max_t p_{tr}^{(k-1)} + \sum_m^- (p_{im} - p_{jm}) \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right| \leq \\ &\leq \left| \delta^+(i, j) \max_t p_{tr}^{(k-1)} - \delta^-(i, j) \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right| \leq \\ &\leq \delta^+(i, j) \left| \max_t p_{tr}^{(k-1)} - \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right| \leq \\ &\leq \delta \left| \max_t p_{tr}^{(k-1)} - \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right|. \end{aligned}$$

$\delta^+(i, j) =$ $\delta^-(i, j)$
--

Так как неравенство выполняется для всех i, j , то получим:

$$\left| \max_t p_{tr}^{(k)} - \min_t p_{tr}^{(k)} \right| \leq \delta \left| \max_t p_{tr}^{(k-1)} - \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right|.$$

Часть 4. Учитывая свойства матрицы $A^k = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$,

$$\max_i p_{ij}^{(k)} \leq \max_i p_{ij}^{(k-1)}, \quad \min_i p_{ij}^{(k)} \geq \min_i p_{ij}^{(k-1)}, \quad (15)$$

$$\left| \max_t p_{tr}^{(k)} - \min_t p_{tr}^{(k)} \right| \leq \delta \left| \max_t p_{tr}^{(k-1)} - \min_t p_{tr}^{(k-1)} \right|,$$

причем $0 \leq \delta < 1$, запишем:

$$\left| \max_t p_{tr}^{(k)} - \min_t p_{tr}^{(k)} \right| \leq \delta^k \left| \max_t p_{tr} - \min_t p_{tr} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (16)$$

Формулы (15) означают, что с ростом k максимальный элемент любого столбца матрицы не возрастает, а минимальный не убывает. А соотношение (16) указывает на то, что разность между максимальным и минимальным элементами стремится к нулю. Следовательно, все элементы r -го столбца матрицы A^k стремятся к общему пределу:

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} p_{1 \text{ пред}} & p_{2 \text{ пред}} & \cdots & p_{n \text{ пред}} \\ p_{1 \text{ пред}} & p_{2 \text{ пред}} & \cdots & p_{n \text{ пред}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1 \text{ пред}} & p_{2 \text{ пред}} & \cdots & p_{n \text{ пред}} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{p_1; p_2; \dots; p_n\}$ - произвольный вектор вероятностей состояний на старте марковского процесса. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{p_1; p_2; \dots; p_n\} A^k = \{p_{1, \text{пред}}; p_{2, \text{пред}}; \dots; p_{n, \text{пред}}\},$$

так как $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, что и требовалось доказать – предельные вероятности состояний существуют.

Простейший вариант теоремы Маркова

Пусть система может принимать только два состояния: E_1 и E_2 . Обозначим вероятности переходов системы на каждом шаге:

$$\alpha \text{ из } E_1 \text{ в } E_2 \quad - \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\beta \text{ из } E_2 \text{ в } E_1 \quad - \quad 0 < \beta < 1.$$

Теорема. При любом исходном состоянии системы вероятности состояний E_1 и E_2 стремятся к предельным значениям, когда число переходов стремится к бесконечности.

Обозначим: u_k – вероятность того, что система находится в состоянии E_1 после k шагов, а v_k – в состоянии E_2 . По свойству полной группы событий $u_k + v_k = 1$. По формуле полной вероятности запишем:

$$u_1 = (1 - \alpha)u_0 + \beta v_0 = (1 - \alpha)u_0 + \beta(1 - u_0) = \beta + (1 - \alpha - \beta)u_0,$$

$$v_1 = (1-\beta)v_0 + \alpha u_0 = (1-\beta)v_0 + \alpha(1-v_0) = \alpha + (1-\alpha-\beta)v_0,$$

далее:

$$\begin{aligned} u_2 &= (1-\alpha)u_1 + \beta v_1 = (1-\alpha)(\beta + (1-\alpha-\beta)u_0) + \beta(\alpha + (1-\alpha-\beta)v_0) = \\ &= (1-\alpha)(\beta + (1-\alpha-\beta)u_0) + \beta(\alpha + (1-\alpha-\beta)(1-u_0)) = \\ &= \beta + \beta(1-\alpha-\beta) + (1-\alpha-\beta)((1-\alpha)-\beta)u_0 = \\ &= \beta + \beta(1-\alpha-\beta) + (1-\alpha-\beta)^2 u_0. \end{aligned}$$

Аналогично для v_2 . Обозначим: $q = 1 - \alpha - \beta$, тогда

$$\begin{aligned} u_3 &= \beta + \beta q + \beta q^2 + q^3 u_0, & v_3 &= \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + q^3 v_0, \\ & \dots & & \\ u_n &= \frac{\beta - \beta q^n}{1 - q} + q^n u_0, & v_n &= \frac{\alpha - \alpha q^n}{1 - q} + q^n v_0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, имеем: $|q| < 1$.

$$\text{Следовательно, } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\beta}{1 - q} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\alpha}{1 - q} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

что не только доказывает существование предельных вероятностей, но и указывает их значение.

Анализ теоремы Маркова

Теорема Маркова указывает на достаточные условия существования предельных вероятностей. Покажем, что эти условия не являются необходимыми. Для этого приведем пример цепи Маркова, в которой финишные вероятности существуют, а условия теоремы не выполняются. Рассмотрим такую матрицу перехода A :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Начальные вероятности состояний системы $\{p_1^0; p_2^0; p_3^0\}$ представим в виде $\left\{\frac{1}{3} + \alpha; \frac{1}{3} + \beta; \frac{1}{3} + \gamma\right\}$, при этом $\frac{1}{3} + \alpha + \frac{1}{3} + \beta + \frac{1}{3} + \gamma = 1$. Следовательно,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad |\alpha| \leq \frac{2}{3}, \quad |\beta| \leq \frac{2}{3}, \quad |\gamma| \leq \frac{2}{3}, \quad \gamma = -(\alpha + \beta), \quad |\alpha + \beta| \leq \frac{2}{3}.$$

Вычислим вероятности состояний после первого шага:

$$\{p_1^1; p_2^1; p_3^1\} = \{p_1^0; p_2^0; p_3^0\}A = \left\{\frac{1}{3} + \alpha; \frac{1}{3} + \beta; \frac{1}{3} + \gamma\right\}A =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\alpha + \gamma}{2}; \frac{1}{3} + \frac{\alpha + \beta}{2}; \frac{1}{3} + \frac{\beta + \gamma}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\beta}{2}; \frac{1}{3} + \frac{\alpha + \beta}{2}; \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{2} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} + u_1; \frac{1}{3} + v_1; \frac{1}{3} + w_1 \right\}.$$

Оценим числа u_1, v_1, w_1 :

$$|u_1| = \frac{|\beta|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad |v_1| = \frac{|\alpha + \beta|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad |w_1| = \frac{|\alpha|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

Вероятности состояний после второго шага:

$$\{p_1^2; p_2^2; p_3^2\} = \{p_1^1; p_2^1; p_3^1\} \mathbf{A} = \left\{ \frac{1}{3} + u_2; \frac{1}{3} + v_2; \frac{1}{3} + w_2 \right\} \mathbf{A}.$$

Оценка чисел u_2, v_2, w_2 :

$$|u_2| = \frac{|v_1|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad |v_2| = \frac{|u_1 + v_1|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad |w_2| = \frac{|u_1|}{2} \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Далее по методу математической индукции получим:

$$\{p_1^k; p_2^k; p_3^k\} = \left\{ \frac{1}{3} + u_k; \frac{1}{3} + v_k; \frac{1}{3} + w_k \right\},$$

$$|u_k| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad |v_k| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad |w_k| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Переходя к пределу, находим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_i^k = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, финишные вероятности существуют, хотя не все элементы матрицы перехода положительны.

Вывод системы ДУ для цепи Маркова с непрерывным временем

Пусть имеется некоторая физическая (экономическая) система, которая может находиться в одном из n состояний: $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$. В случайные моменты времени система может переходить из текущего состояния \mathbf{E}_k в

другое из возможных состояний. Для каждой пары состояний частота взаимных переходов есть простейший поток событий [8]. Обозначим:

$p_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии E_k ;

λ_{km} - интенсивность переходов из состояния E_k в E_m (среднее число переходов в единицу времени).

Пусть Δt - положительная бесконечно малая величина. Согласно свойствам простейшего потока событий $\lambda_{km}\Delta t$ - вероятность того, что за время Δt система, находившаяся в состоянии E_k , перейдет в состояние E_m . По формуле полной вероятности запишем:

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{m=1}^n p_m(t) \lambda_{mk} \Delta t + p_k(t) \left(1 - \sum_{m=1}^n \lambda_{km} \Delta t \right). \quad (17)$$

Звездочка у символа суммы означает отсутствие слагаемого с индексом k . Первая сумма относится к гипотезам, что в момент времени t система находилась в состоянии E_m и за время Δt перешла в состояние E_k . Вторая сумма описывает гипотезу, что в момент времени t система находилась в состоянии E_k и за время Δt не перешла ни в одно другое состояние E_m . Преобразуем формулу (17):

$$p_k(t + \Delta t) - p_k(t) = \left(\sum_{m=1}^n p_m(t) \lambda_{mk} - p_k(t) \sum_{m=1}^n \lambda_{km} \right) \Delta t. \quad (18)$$

Разделим обе части формулы на Δt и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \sum_{m=1}^n p_m(t) \lambda_{mk} - p_k(t) \sum_{m=1}^n \lambda_{km}.$$

Учитывая, что вывод справедлив для любого k , запишем систему дифференциальных уравнений:

$$p'_k(t) = \sum_{m=1}^n p_m(t) \lambda_{mk} - p_k(t) \sum_{m=1}^n \lambda_{km}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Вывод формул Эрланга

Рассмотрим случайный процесс гибели-размножения:

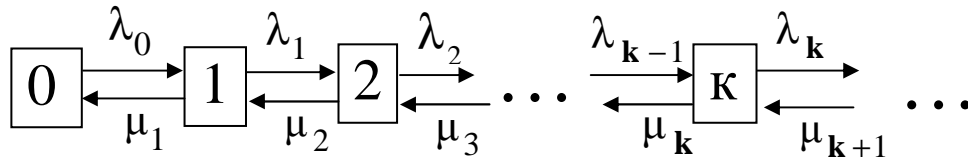


Рисунок 7

Запишем разрешающую систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний в случае, когда все $\lambda_k = \lambda$ и $\mu_k = \mu$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}'_0 = \mu \mathbf{p}_1 - \lambda \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p}'_1 = \lambda \mathbf{p}_0 + \mu \mathbf{p}_2 - (\lambda + \mu) \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}'_2 = \lambda \mathbf{p}_1 + \mu \mathbf{p}_3 - (\lambda + \mu) \mathbf{p}_2, \\ \dots \\ \mathbf{p}'_k = \lambda \mathbf{p}_{k-1} + \mu \mathbf{p}_{k+1} - (\lambda + \mu) \mathbf{p}_k. \\ \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_k(0) = \mathbf{p}_k, \\ \mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots, \infty. \end{array} \quad (20)$$

Рассмотрим стационарный режим процесса, когда вероятности \mathbf{p}_k стабилизировались. В этом случае $\mathbf{p}'_k = 0$. Разделим все уравнения на λ и введем обозначение $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_1 = \varphi \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p}_2 = (1 + \varphi) \mathbf{p}_1 - \varphi \mathbf{p}_0, \\ \dots \\ \mathbf{p}_{k+1} = (1 + \varphi) \mathbf{p}_k - \varphi \mathbf{p}_{k-1}. \\ \dots \end{array} \right. \quad (21)$$

Подставим первое уравнение во второе:

$$\mathbf{p}_2 = ((1 + \varphi)\varphi - \varphi) \mathbf{p}_0 = \varphi^2 \mathbf{p}_0. \quad (22)$$

Получаем: $\mathbf{p}_1 = \varphi \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_2 = \varphi^2 \mathbf{p}_0$. Сделаем предположение, что формула $\mathbf{p}_k = \varphi^k \mathbf{p}_0$ справедлива и для всех $\mathbf{k} > 2$. Проверим это предположение по

(k+1)-му уравнению системы (21):

$$\mathbf{p}_{k+1} = \left((1+\varphi)\varphi^k - \varphi^k \right) \mathbf{p}_0 = \varphi^{k+1} \mathbf{p}_0.$$

Следовательно, справедлива общая формула $\mathbf{p}_k = \varphi^k \mathbf{p}_0$. Воспользуемся свойством вероятностей полной группы событий:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \dots &= 1, \\ \mathbf{p}_0 + \varphi \mathbf{p}_0 + \varphi^2 \mathbf{p}_0 + \dots &= (1 + \varphi + \varphi^2 + \dots) \mathbf{p}_0 = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

В скобках получился ряд геометрической прогрессии. Он сходится только при $\varphi < 1$ (по смыслу параметров λ и μ число φ не может быть отрицательным). Можно сделать вывод, что стационарный режим возможен только тогда, когда $\lambda < \mu$, в противном случае очередь будет неограниченно расти. Из формулы (23) получим:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{1 + \varphi + \varphi^2 + \dots} = 1 - \varphi,$$

что позволяет записать в окончательном виде формулы вероятностей состояний – формулы Эрланга:

$$\mathbf{p}_k = \varphi^k (1 - \varphi).$$

Анализ формул Эрланга

Рассмотрим случайный процесс гибели-размножения (рис.7). Запишем формулы Эрланга :

$$\mathbf{p}_k = \varphi^k (1 - \varphi). \quad (24)$$

Эти формулы справедливы для случая стационарного режима случайного процесса при условиях:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda, \quad \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu, \quad \lambda < \mu, \quad \varphi = \frac{\lambda}{\mu}.$$

В формулах Эрланга \mathbf{p}_k - вероятность обнаружить в некоторый момент времени в системе k особей.

Если ввести случайную величину X с законом распределения :

X	0	1	...	k	...
p	\mathbf{p}_0	\mathbf{p}_1	...	\mathbf{p}_k	...

то $M(X)$ - это среднее число особей в данной системе,

$$M(X) = 0(1 - \varphi) + 1\varphi(1 - \varphi) + 2\varphi^2(1 - \varphi) + \dots = (1\varphi + 2\varphi^2 + \dots)(1 - \varphi) = \\ = (1 + 2\varphi + 3\varphi^2 \dots)(\varphi - \varphi^2) = \left(\frac{1}{1 - \varphi}\right)' (\varphi - \varphi^2) = \frac{1}{(1 - \varphi)^2} (\varphi - \varphi^2) = \frac{(\varphi - \varphi^2)}{(1 - \varphi)^2} = \frac{\varphi}{1 - \varphi} .$$

$$M(X) = \frac{\varphi}{1 - \varphi} . \quad (25)$$

При $\varphi \rightarrow 1$ из формулы (25) следует: $M(\varphi) \rightarrow \infty$. Это объясняется тем, что вероятности переходов системы в сторону увеличения числа k и в сторону его уменьшения есть близкие числа. Следовательно, велика вероятность достижения системой больших значений k , что и приводит к росту математического ожидания – среднего числа особей в системе.

Примечание. Формулы Эрланга, в частности, применяют в теории очередей. Так, если в некоторой системе массового обслуживания обозначить:

λ – среднее число клиентов, поступающих в единицу времени,

β – среднее время обслуживания одного клиента ,

то можно положить $\mu = \frac{1}{\beta}$, тогда $\varphi = \lambda\beta$. Общее число особей X в этом случае состоит из одного клиента, которого в данный момент обслуживают, и $X-1$ клиентов, ожидающих в очереди. Вычислим среднюю длину очереди:

$$n_{\text{средн}} = 0p_0 + 0p_1 + 1p_2 + 2p_3 + \dots = (\varphi^2 + 2\varphi^3 + 3\varphi^4 \dots)(1 - \varphi) = \\ = (1 + 2\varphi + 3\varphi^2 \dots)(\varphi^2 - \varphi^3) = \frac{(\varphi^2 - \varphi^3)}{(1 - \varphi)^2} = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi} .$$

Можно найти и среднее время ожидания в очереди (ожидание клиентами начала обслуживания):

$$\tau_{\text{средн}} = \beta n_{\text{средн}} = \frac{\beta\varphi^2}{1 - \varphi} .$$

Приближенное решение задач гибели-размножения с помощью рядов

Рассмотрим случайный процесс гибели-размножения (см. рис.7). Запишем разрешающую систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_0 = \mu_1 \mathbf{p}_1 - \lambda_0 \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p}'_1 = \lambda_0 \mathbf{p}_0 + \mu_2 \mathbf{p}_2 - (\lambda_1 + \mu_1) \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}'_2 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \mu_3 \mathbf{p}_3 - (\lambda_2 + \mu_2) \mathbf{p}_2, \\ \dots \\ \mathbf{p}'_k = \lambda_{k-1} \mathbf{p}_{k-1} + \mu_{k+1} \mathbf{p}_{k+1} - (\lambda_k + \mu_k) \mathbf{p}_k, \\ \dots \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{p}_k(0) = \mathbf{p}_k, \\ \\ \\ \mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots, \infty. \end{matrix} \quad (26)$$

Только в некоторых частных случаях эта система может быть решена точными методами. Один из приближенных методов решения таких задач базируется на ряде Маклорена в векторной форме.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0(\mathbf{t}) \\ \mathbf{p}_1(\mathbf{t}) \\ \dots \\ \mathbf{p}_k(\mathbf{t}) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & -\lambda_1 - \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 - \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0^0 \\ \mathbf{p}_1^0 \\ \dots \\ \mathbf{p}_k^0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Волной сверху помечены бесконечномерные объекты. Теперь задача (26) примет вид:

$$\tilde{\mathbf{P}}'(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}), \quad \tilde{\mathbf{P}}(0) = \tilde{\mathbf{P}}_0. \quad (27)$$

Запишем в векторной форме ряд Маклорена для функции $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t})$:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{P}}(0) + \tilde{\mathbf{P}}'(0)\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{P}}''(0)\frac{\mathbf{t}^2}{2!} + \dots \quad (28)$$

С учетом векторного уравнения (27) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}'(\mathbf{t}) &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}), \quad \tilde{\mathbf{P}}''(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}'(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}), \quad \dots \\ \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) &= \tilde{\mathbf{P}}(0) + \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}(0)\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{P}}(0)\frac{\mathbf{t}^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть в некоторый момент времени, который мы примем за 0, в системе гибели-размножения имеется \mathbf{k} особей. В этом случае вектор $\tilde{\mathbf{P}}_0$

содержит компоненту $\mathbf{p}_k = 1$, а все остальные равны нулю. Считая прогнозируемый интервал времени \mathbf{t} достаточно малым, обрываем ряд (29) и получаем приближенное выражение вектора вероятностей. Кроме того, полагаем, что за малый промежуток времени в системе не может значительно измениться число особей \mathbf{k} . Поэтому в системе (26) оставляем уравнения и функции в окрестности индекса \mathbf{k} . Например, можно записать формулы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_{k-2} & \mu_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{k-2} & -(\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}) & \mu_k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{k-1} & -(\lambda_k + \mu_k) & \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & -(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}) & \mu_{k+2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{k+1} & -\mu_{k+2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{k-2}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{p}_{k-1}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{p}_k(\mathbf{t}) \\ \mathbf{p}_{k+1}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{p}_{k+2}(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{k-2}^0 \\ \mathbf{p}_{k-1}^0 \\ \mathbf{p}_k^0 \\ \mathbf{p}_{k+1}^0 \\ \mathbf{p}_{k+2}^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{t}) \approx \left(\mathbf{E} + \mathbf{tA} + \frac{\mathbf{t}^2}{2!} \mathbf{A}^2 \right) \mathbf{P}_0. \quad (30)$$

Результаты расчетов по формуле (30) справедливы для тех \mathbf{t} , при которых последнее слагаемое в скобках значительно меньше предыдущего, в противном случае следует увеличивать число слагаемых в этих скобках. Кроме того, если функции $\mathbf{p}_{k-2}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{p}_{k+2}(\mathbf{t})$ не слишком малы по отношению к другим функциям, то следует увеличивать и размерность векторов $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, \mathbf{P}_0 и порядок матрицы \mathbf{A} .

Вывод расчетной формулы среднего времени жизни системы с резервированием

Рассматривается некоторая система, состоящая из основного и резервных узлов. Общее количество всех узлов равно n . По мере выхода узлов из строя система переходит в новое состояние:

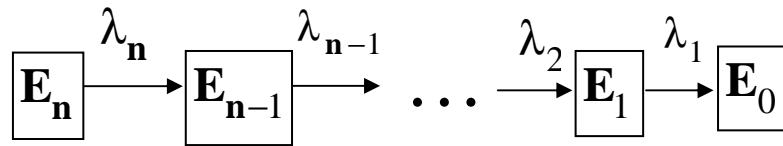


Рисунок 8

Состояние E_0 означает, что в системе не осталось работоспособных узлов, следовательно, система прекратила свое существование. Каждый переход системы происходит в случайный момент времени, λ_k - интенсивности переходов (интенсивность – это среднее число переходов в единицу времени, причем переходы образуют простейший поток событий). Используя теорию марковских процессов с непрерывным временем, находим функции $p_k(t)$:

$p_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии E_k .

Пусть найдена функция $p_0(t)$. По смыслу этой функции можно заключить, что она монотонно возрастает в области $[0; \infty)$ от нуля до единицы. Введем непрерывную случайную величину $X(t)$ - время жизни системы. Функция распределения этой случайной величины $F(t) = p_0(t)$.

Действительно, пусть τ - некоторое положительное число. Рассмотрим событие $X(t) < \tau$. Это событие означает, что время жизни системы оказалось меньше числа τ . Другими словами, это событие означает, что в момент времени τ в системе работоспособны 0 узлов. Но вероятность обнаружить в момент времени τ , что в системе 0 работоспособных узлов, и есть $p_0(t)$. Заметим также, что, как и требуется теорией вероятностей, $F(t) = p_0(t)$ монотонно возрастает.

Используя формулу математического ожидания, получим:

$$M(X) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t F'(t) dt = \int_0^{\infty} t p_0'(t) dt.$$

Математическое ожидание случайной величины $X(t)$ и есть среднее время жизни системы:

$$\tau_{\text{сред}} = \int_0^{\infty} t p_0'(t) dt .$$

Учитывая, что $p_0(\tau)$ монотонно возрастает, отметим, что подынтегральное выражение неотрицательно. Поэтому, как и следует предполагать, среднее время жизни системы есть положительная величина.

Моделирование случайных процессов

Ограниченный круг проблем в экономике, технике и в других областях человеческой деятельности может быть исследован точными методами или даже описан уравнениями или системами. В более сложных случаях прибегают к моделированию случайных процессов и анализу полученных таким путем статистических данных. Узловым моментом моделирования случайного процесса является генерирование случайных величин с заданным законом распределения – таким, который наблюдается в реальном процессе.

В большинстве современных компьютерных систем имеются датчики случайных чисел с равномерным распределением в некотором интервале $[a;b]$. Обозначим случайное число, которое получено от компьютерного датчика, τ . С помощью формулы

$$\xi = \frac{\tau - a}{b - a}$$

можно получать случайные числа, равномерно распределенные на интервале $[0;1]$. Поэтому остановимся на методах получения требуемых случайных величин с помощью ξ - равномерного распределения на интервале $[0;1]$. Мы будем пользоваться основным свойством этого распределения:

$$P\{0 \leq u \leq \xi < v \leq 1\} = v - u .$$

Вероятность попадания в интервал $[u;v]$ отрезка $[0;1]$ равна длине этого интервала.

Пусть требуется получить дискретную случайную величину с заданным законом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Вычислим числа:

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = p_1 + p_2, \quad \dots \quad q_{n-1} = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

и рассмотрим функцию

$$X(\xi) = \begin{cases} x_1 & 0 \leq \xi < q_1, \\ x_2 & q_1 \leq \xi < q_2, \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} & q_{n-2} \leq \xi < q_{n-1}, \\ x_n & q_{n-1} \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Эта функция может принимать только значения x_1, x_2 и т.д. При этом вероятность значения x_k равна $q_k - q_{k-1} = p_k$, что и требуется по условию.

Пусть требуется получить непрерывную случайную величину с заданным законом распределения.. Эту величину можно описать интегральной функцией распределения $F(x)$, которая, как известно, монотонно возрастает от нуля до единицы. Следовательно, существует обратная функция $X(\xi)$ с областью определения $[0;1]$, на которой она также монотонно возрастает. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha; \beta]$ равна по условию $F(\beta) - F(\alpha)$. Так как $X(\xi)$ есть обратная к $F(x)$ функция, то в том случае, когда аргумент $X(\xi)$ принадлежит интервалу $[F(\alpha); F(\beta)]$, значения этой функции будут принадлежать интервалу $[X(F(\alpha)); X(F(\beta))] = [\alpha; \beta]$, что и требуется по закону распределения.

Построение обратной функции $X(\xi)$ не всегда является простым делом, поэтому довольно часто используют искусственные приемы. Например, для моделирования нормального закона распределения можно

выбрать достаточно большое число n и, обратившись n раз к датчику случайных чисел, составить случайную величину:

$$U = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Согласно закону больших чисел U стремится к нормально распределенной случайной величине при $n \rightarrow \infty$. Для получения нужных параметров нормального закона отметим, учитывая, что ξ_k попарно и в совокупности независимы:

$$M(U) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2},$$

$$D(U) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots = n \cdot \frac{1}{12} = \frac{n}{12}.$$

Поэтому случайная величина

$$X = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - \frac{n}{2} \right)$$

моделирует нормированную нормально распределенную случайную величину.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Коваленко И.Н. Случайные процессы: Справочник / И.Н.Коваленко, Н.Ю.Кузнецов, В.М.Шуренков. – К.: Наукова думка, 1983. – 340 с.
- 2 Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 375 с.
- 3 Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. – 422 с.
- 4 Вишневский Л.Д. Математическая статистика и случайные процессы: Практикум / Л.Д.Вишневский, Д.В.Гусак, Т.А.Погребецкая, Г.Л.Тер-Саакянц. – К.: Вища школа, 1992. – 530 с.
- 5 Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн. – М.: Наука, 1974. – 960 с.
- 6 Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. – М.: Наука, 1969. – 390 с.
- 7 Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. - М.: Наука, 1968. - 230 с.
- 8 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
- 9 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1972. – 370 с.
- 10 Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 8200 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Программа курса «Теория случайных процессов»	5
Принятые обозначения понятий из теории вероятностей	6
Основные определения из теории случайных процессов	7
Образцы решения типовых заданий	12
Контрольные задания	24
Вопросы коллоквиума	32
Версии ответов на вопросы теоретической части коллоквиума	34
Литература	51

Астахов Виктор Николаевич,

Буланов Геннадий Станиславович.

Теория случайных процессов: Учебное пособие для студентов дневной и заочной форм обучения

Редактор Хахина Н.А.

Подп. в печать

Формат 60x84 1/16.

Ризограф. печать. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,36

Тираж 100 экз.

№ зак

ДГМА. 84313, Краматорск, ул. Шкадинова, 72