

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

ОТДЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к основам математических методов теории

автоматического управления

для студентов факультета автоматизации

специальностей ИЭФ, АПП, ИТ, ЭСА

всех форм обучения

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № от 2009

Краматорск 2010

Отдельные главы высшей математики : методические указания к основам математических методов теории автоматического управления для студентов факультета автоматизации специальностей ИЭФ, АПП, ИТ, ЭСА всех форм обучения. / сост. : А. Н. Обухов, И. В. Левандовская. – Краматорск : ДГМА, 2010. – 100 с.

(Данные методические указания содержат в кратком виде основной теоретический материал по курсу математических методов теории автоматического управления для студентов факультета автоматизации специальностей ИЭФ, АПП, ИТ, ЭСА всех форм обучения Указана тематика, приведены образцы решения и оформления заданий)

Составители:

А. Н. Обухов, доц.,
И. В. Левандовская, ст. преп.

Отв. за выпуск

В. Н. Астахов, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ	5
1.1 Ряды по ортогональным системам функций. Примеры ортогональных систем	5
1.2 Гармонический анализ	7
1.3 О приближении функций тригонометрическими полиномами	12
1.4 Сходимость ряда	13
1.5 Комплексная форма ряда Фурье	14
1.6 Понятие о спектрах	16
1.7 Интеграл Фурье	17
2 ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	22
2.1 Преобразования Лапласа. Его основные свойства. Изображения некоторых простейших функций	22
2.2 Изображения производных и интеграла от функции	25
2.3 Основные теоремы операционного исчисления	27
2.4 Изображение периодической функции	32
2.5 Изображение кусочно-аналитического сигнала	33
2.6 Изображение полигональной функции	36
2.7 Отыскание изображений при помощи рядов	38
2.8 Отыскание изображений при помощи рядов	39
2.9 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	42
2.10 Решение дифференциальных уравнений с кусочно-монотонной правой частью	43
2.11 Нахождение периодических решений линейных дифференциальных уравнений с периодической правой частью	47
5 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ И КУРСОВЫХ РАБОТ	55
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	

Квалификация современного инженера – специалиста по автоматическому регулированию в значительной степени определяется уровнем его математических знаний. Это объясняется тем, что овладение теорией автоматического регулирования и методами проектирования автоматических систем невозможно без знания довольно сложного математического аппарата. Общий курс математики, изучаемый в высших учебных заведениях, не в полной мере удовлетворяет требованиям подготовки инженеров на факультетах и кафедрах, в той или иной степени связанных с проблемами автоматического регулирования. По этой причине во многих вузах страны в учебные планы наряду с общим курсом высшей математики введены также и дополнительные главы.

Выбор материала, составляющего содержание данного пособия, определяется особенностями задач, решаемых в теории автоматического регулирования.

В теории автоматического регулирования получили широкое распространение частотные методы анализа и синтеза САР. Частотные методы являются весьма удобным инструментом, пригодным для суждения об устойчивости системы, точности ее работы, качества переходных процессов и т.д. Математической основой частотных методов являются спектральные представления сигналов и связанные с этими представлениями частотные характеристики систем. В свою очередь, спектральные представления непосредственно опираются на ту часть математического анализа, в которой рассматривается теория рядов Фурье и интеграла Фурье.

Таким образом знание этих разделов математики необходимо для восприятия частных методов исследования САР.

Одним из важнейших математических инструментов, применяемых при исследовании САР, является операционное исчисление. Использование методов операционного исчисления при интегрировании многих типов дифференциальных, интегро-дифференциальных и разностных уравнений приводит к упрощению процессов решения и поэтому операционное исчисление нашло значительное применение в теории автоматического регулирования при определении процессов происходящих в системах.

В пособии изложены указанные специальные разделы высшей математики. В нем содержатся сведения из наиболее важных дополнительных разделов высшей математики, усвоение которых необходимо студентам, специализирующимся в области автоматического регулирования. Кроме теоретического материала, приведены расчетно-графические задания для самостоятельной работы студентов по каждому из рассмотренных разделов, а так же типовые расчеты.

1. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1.1 Ряды по ортогональным системам функций. Примеры ортогональных систем

Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ такие, что их произведение есть интегрируемая на отрезке функция.

Определение 1. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a; b]$, если

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad (1.1)$$

Определение 2. Бесконечная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ (которую мы будем сокращенно обозначать $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$) называется ортогональной на отрезке $[a; b]$, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ A, & \text{если } m = n, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Пусть функция $f(x)$ не принадлежит ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$. Предположим, что эту функцию можно представить в виде функционального ряда по $\{\varphi_n(x)\}$,

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots \quad (1.3)$$

Найдем коэффициент a_m разложения. Умножая левую и правую части равенства (1.3) на $\varphi_m(x)dx$ и интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx &= a_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)dx + a_2 \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_m(x)dx + \\ &+ \dots + a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Согласно условию ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ (1.2) все слагаемые состоящие в правой части равенства обращаются в нули кроме одного $n = m$, т.е.

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x) dx = a_m \int_a^b \varphi_m^2(x) dx \quad (1.5)$$

отсюда

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x) dx}{\int_a^b \varphi_m^2(x) dx} \quad (1.6)$$

Если $f(x)$ разложима в функциональный ряд вида (1.3), то коэффициенты этого ряда определяются по формуле (1.6).

Приведем примеры ортогональных систем.

1. Тригонометрические системы функций.

1.1. Множество функций $\left\{\cos \frac{n\pi x}{l}; \sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональную на отрезке $[-l; l]$ систему функций (рекомендуем студенту обосновать это утверждение).

1.2. Множество функций $\left\{\cos \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональную на отрезке $[0; l]$ систему функций.

1.3. Множество функций $\left\{\sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональную на отрезке $[0; l]$ систему функций.

2. Множество полиномов Лежандра $\{P_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, где

$$P_0(x) = 1, \quad P_m(x) = \frac{1}{m! 2^m} \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

образует ортогональную на отрезке $[-1; 1]$ систему функций, так как

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Определение 3. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной на отрезке $[a; b]$ с весом $\rho(x) \geq 0$, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Приведем примеры.

1. Множество многочленов Чебышева $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), n = 0, 1, 2, \dots$$

образует ортогональную на отрезке $[-1; 1]$ систему функций с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Множество функций Бесселя $\{I_p\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)\}_{n=0}^{\infty}$ целого порядка p , где

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

а μ_n – n -й по счету положительный корень функции J_p , образует ортогональную на отрезке $[0; l]$ систему функций с весом $\rho(x) = x$, так как

$$\int_0^l I_p\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) I_p\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) dx = 0, \quad m \neq n$$

Замечание. Если система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[a; b]$ с весом $\rho(x)$, то система функций $\{\varphi_n(x)\sqrt{\rho(x)}\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на том же отрезке.

1.2 Гармонический анализ

В теории и практике автоматического регулирования часто встречаются процессы, которые могут рассматриваться как периодические.

Функция $f(t)$ называется периодической функцией, если при некотором постоянном числе $T > 0$ выполняется неравенство

$$f(t) = f(t + nT) \quad (1.7)$$

где T – период функции; n – любое целое число, а аргумент t принимает значение из области определения этой функции.

Отметим одно из важных свойств периодической функции. заключающиеся в том, интеграл от этой функции, взятый на интервале длиной T , не зависит от изменении пределов интегрирования при условии, что длина интервала интегрирования остается равной T , т.е.

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt \quad (1.8)$$

при любых a и b .

Примером простейшей периодической функции

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.9)$$

является конусоидальный (или синусоидальный) гармонический колебательный процесс. Функцию вида (1.7) называют гармоникой с амплитудой A , угловой частотой ω и начальной фазой φ . Легко убедиться, что гармоника имеет период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (см. рис. 1)

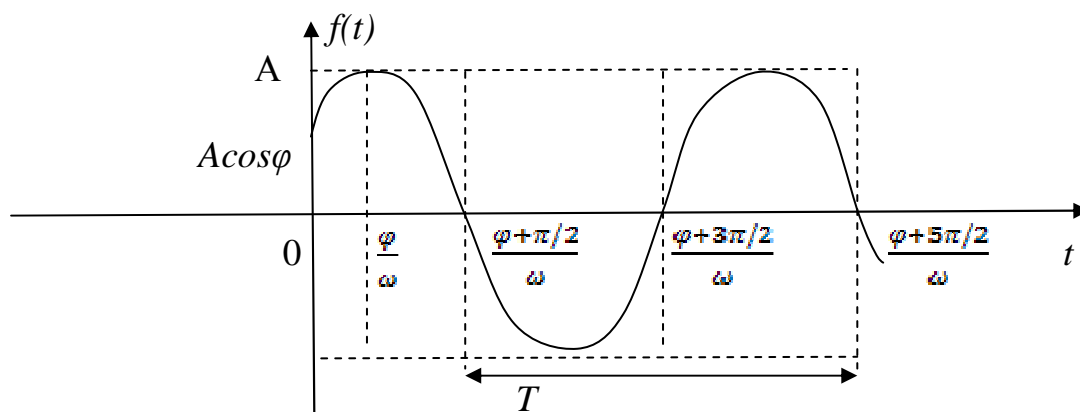


Рисунок 1

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) \quad (1.10)$$

представляющую собой сумму бесконечного числа гармоник. В результате суммирования членов ряда получаем периодическую функцию, причем ее период совпадает с периодом T первой гармоники ряда. Частоты соседних гармоник отличаются друг от друга на величину ω . Общий член ряда (4) $A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$ называется k -й гармоникой, частота k -й гармоники равны $k\omega$, т.е. кратна частоте первой гармоники ω .

Сделанные выше рассуждения об образовании периодической функции теперь подводят к следующим обратным вопросам. Всякую ли заданную периодическую функцию $f(t)$ можно представить в виде суммы

гармонических составляющих, т.е. произвести ее тригонометрическое разложение? Если функцию $f(t)$ можно разложить на гармоники то, как найти неизвестные параметры каждой из этих гармоник? Если учесть, что

$$A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) = A_k \cos \varphi_k \cos k\omega t + A_k \sin \varphi_k \sin k\omega t \quad (1.11)$$

и ввести обозначения

$$A_k \cos \varphi_k = a_k, \quad A_k \sin \varphi_k = b_k, \quad A_0 \cos \varphi_0 = \frac{a_0}{2} \quad (1.12)$$

то функцию вида (1.10) можно записать в форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \quad (1.13)$$

Форма (1.13) записи тригонометрического разложения будет в дальнейшем широко использоваться.

Периодическая функция $f(t)$, имеющая период T , оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных углу $\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ и имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \quad (1.14)$$

Пусть $f(t)$ определена при $t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, имеет период T и принадлежит к классу функций, для которых справедливо (1.14).

Определим неизвестные постоянные коэффициенты разложения (1.14) a_0, a_k, b_k , ($k=1,2,3,\dots$). Заметим, что система функций $\left\{1, \cos k \frac{2\pi}{T} t, \sin k \frac{2\pi}{T} t\right\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна на $t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, найдем коэффициент a_0 . Предполагая, что ряд (1.14) является равномерно сходящимся, проинтегрируем левую и правую часть равенства в пределах от $-\frac{T}{2}$ до $\frac{T}{2}$, получим

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{T}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k \frac{2\pi}{T} t dt + b_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{T}{2} a_0$$

все интегралы под знаком суммы равны нулю из-за ортогональности семейства функций, откуда

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (1.15)$$

Определим коэффициенты a_k и b_k . Для этого умножим обе части равенства (8) на $\cos n \frac{2\pi}{T} t$ и проинтегрируем в пределах от $-\frac{T}{2}$ до $\frac{T}{2}$:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k \frac{2\pi}{T} t \cos n \frac{2\pi}{T} t dt + b_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin k \frac{2\pi}{T} t \cos n \frac{2\pi}{T} t dt \right)$$

Первое слагаемое правой части, а также все интегралы под знаком суммы, кроме одного при $k=n$, из-за ортогональности системы обращаются в нуль, т.е.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.16)$$

Аналогично, умножая слева и справа ряд (1.14) на $\sin k \frac{2\pi}{T} t dt$, после интегрирования, получим

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.17)$$

Формулы (1.15)-(1.17) позволяют по заданной функции $f(t)$ с периодом T найти коэффициенты разложения этой функции в тригонометрический ряд (1.14), называемый рядом Фурье. Коэффициенты a_k и b_k называются коэффициентами Фурье.

Если функция $f(t)$ четная на интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$, то в этом случае коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad b_k = 0 \quad (1.18)$$

и разложение имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t \quad (1.19)$$

Если функция $f(t)$ нечетная на интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$, то в этом случае коэффициенты Фурье

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt \quad (1.20)$$

и разложение имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \quad (1.21)$$

Зная коэффициенты a_k и b_k легко определить значения амплитуды и начальной фазы k -й гармоники:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

Совокупность операций, в результате которых могут быть определены гармоники периодической функции $f(t)$, называются гармоническим анализом.

Пример 1. Разложить на сумму гармонических составляющих прямоугольную волну, определенную функцией

$$f(t) = \begin{cases} -a, & \text{при } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0, \\ a, & \text{при } 0 < t \leq \frac{T}{2}; \end{cases}$$

Предполагая, что заданная функция допускает ее разложение в ряд Фурье, определим коэффициенты разложения a_0 , a_k , b_k . Так как $f(t)$ нечетная, то $a_0 = a_k = 0$, ($k = 1, 2, \dots$). Определим коэффициент b_k , применяя формулу (1.20):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4a}{T} \cdot \frac{T}{2\pi k} \left(-\cos k \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \frac{2a}{\pi k} (-\cos k\pi + 1) = \\ &= \frac{2a}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{при } k - \text{четном}, \\ \frac{4a}{\pi k}, & \text{при } k - \text{нечетном}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье, представляющий собой разложение прямоугольной волны на сумму бесконечного числа гармоник, в соответствии с формулой (1.21) имеет вид

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{2\pi}{T} t + \dots \right].$$

Замечание. Пусть функция $f(t)$ задана на интервале $\left(\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ и допускает на этом интервале разложение в ряд Фурье. Это значит, что тригонометрический ряд (1.14) с коэффициентами a_0, a_k, b_k , определенными по формулам (1.15)-(1.17), сходится к $f(t)$. При этом $f(t)$ может быть непериодической. Разложение подобной функции в ряд Фурье на $\left(\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ означает, что функция $f(t)$ периодически продолжена вне интервала $\left(\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ на всю ось Ot . Функция, получившаяся в результате продолжения функции $f(t)$, будет периодической с периодом T ; на интервале $\left(\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ эта новая функция совпадает с функцией $f(t)$.

1.3 О приближении функций тригонометрическими полиномами

При разложении периодических функций на сумму гармоник, необходимом при решении многих задач техники, обычно ограничиваются несколькими первыми гармониками, а остальные отбрасываются. В этом случае представление функции с помощью гармонических составляющих производится с точностью, зависящей от числа отброшенных членов тригонометрического ряда. Приближенно представляя функцию $f(t)$ с помощью тригонометрического многочлена вида

$$S_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + \beta_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (1.23)$$

Можно получить большую или меньшую ошибку представления в зависимости от способа выбора коэффициентов многочлена $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$. Оценить величину ошибки наиболее удобно с помощью средней квадратической погрешности δ_n , определенной для периодической с периодом T функции $f(t)$ равенством

$$\delta_n^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ f(t) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + \beta_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right) \right\}^2 dt \quad (1.24)$$

Ответ на вопрос, при каких условиях величина имеет минимальное значение, дает следующая теорема.

Теорема 1. Средняя квадратическая погрешность приближенного представления функции $f(t)$ с помощью тригонометрического многочлена порядка n будет наименьшей, если коэффициентами этого многочлена являются коэффициенты Фурье функции $f(t)$.

Из теоремы можно получить соотношение, называемое неравенством Бесселя:

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (1.25)$$

А.М. Ляпуновым было установлено, что для всякой функции $f(t)$ с интегрируемым квадратом средняя квадратическая погрешность $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Неравенство (1.25) в этом случае дает соотношение, называемое равенством Ляпунова:

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (1.26)$$

Следующая теорема устанавливает еще одно свойство коэффициентов ряда Фурье.

Теорема 2. Коэффициенты Фурье для любой кусочно-монотонной, в интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ функции $f(t)$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

1.4 Сходимость ряда

Рассмотрим, какие периодические функции $f(t)$ могут быть разложены на гармоники, т.е. представлены в виде ряда Фурье. Ряд Фурье

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + \beta_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right)$$

будет сходиться и его сумма будет равна функции лишь в том случае, если наложить на эту функцию определенные ограничивающие условия.

Эти условия сформулируем в виде теоремы Дирихле.

Теорема 3 (Дирихле) Если функция кусочно-монотонна в интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ и имеет на нем конечное число точек разрыва непрерывности (первого рода), то ее ряд Фурье сходится в этом интервале; сумма ряда равна $f(t)$ в точках, где функция непрерывна и равна $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ в каждой точке разрыва непрерывности.

Условия, указанные в теореме (3), называются условиями Дирихле.

Пример.2 Разложить в ряд Фурье в интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ функцию $f(t)=t$.

Решение. Построим график на интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$

Так как $f(t)$ нечетна на интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$, то $a_0 = a_k = 0, (k = 1, 2, \dots)$.

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и ряд Фурье

$$f(t) = 2 \left[\sin \frac{2\pi}{T} t - \frac{1}{2} \sin 2 \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi}{T} t + \dots \right]$$

Изобразим на рисунке 2 сумму ряда Фурье для $f(t)$.

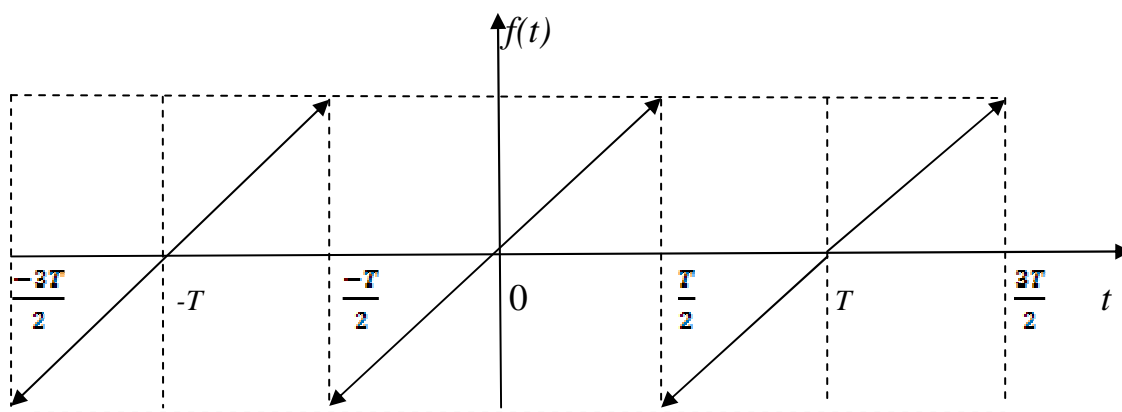


Рисунок 2

Заметим, что сумма ряда Фурье при $x = n\frac{T}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$ обращается в нуль

$$\frac{f\left(n\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(n\frac{T}{2} - 0\right)}{2} = 0$$

1.5 Комплексная форма ряда Фурье

Запишем тригонометрический ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1.27)$$

в комплексной форме. Используя формулы Эйлера

$$\cos \frac{2\pi k}{T} t = \frac{e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}}{2}; \quad \sin \frac{2\pi k}{T} t = \frac{e^{i\frac{2\pi k}{T}t} - e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}}{2i} \quad (1.28)$$

получим $\left(\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t = a_k \frac{e^{ik\Delta\omega t} + e^{-ik\Delta\omega t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\Delta\omega t} - e^{-ik\Delta\omega t}}{2i};$$

или, вводя обозначения

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}; \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (1.29)$$

$$a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t = c_k e^{ik\Delta\omega t} + c_{-k} e^{-ik\Delta\omega t}. \quad (1.30)$$

Обозначив $c_0 = \frac{a_0}{2}$, получим для функции $f(t)$, заданной на интервале $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$, ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Delta\omega t}. \quad (1.31)$$

Здесь величины c_k являются комплексными коэффициентами разложения функции $f(t)$ в ряд (1.31). Функции $e^{ik\Delta\omega t}$ называется комплексной гармоникой.

Если ряд (1) сходится к функции $f(t)$, то к той же функции сходится и ряд (1.31). Так как $2c_k = a_k - ib_k$, то величину $2|c_k| = A_k e^{-i\varphi_k}$ – комплексной амплитудой k -й гармоники, где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} \quad (1.32)$$

Формулу (5) иногда удобнее записывать в виде

$$F(ik\Delta\omega) = \frac{2c_k}{\Delta\omega} \pi \quad (1.33)$$

относительная комплексная амплитуда k -й гармоники.

Принимая во внимание формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье, найдем выражения для $F(ik\Delta\omega)$.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\Delta\omega t dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\Delta\omega t dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left[\frac{e^{ik\Delta\omega t} + e^{-ik\Delta\omega t}}{2} - i \frac{e^{ik\Delta\omega t} - e^{-ik\Delta\omega t}}{2i} \right] dt \end{aligned}$$

Из последнего равенства, получаем

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\Delta\omega t} dt; \quad (1.34)$$

учитывая равенство (1.33), получим

$$F(ik\Delta\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\Delta\omega t} dt \quad (10)$$

В формуле (1.31) суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям k . Однако после суммирования комплексных слагаемых останутся только вещественные величины, так как комплексные коэффициенты c_k и c_{-k} являются сопряженными.

1.6 Понятие о спектрах

Введем определение

Определение 4. Совокупность коэффициентов a_k и b_k ($k=1,2,\dots$) разложения периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье называются частными спектрами этой функции.

Из формул для нахождения этих коэффициентов видно, что $a_k = a_k(k\Delta\omega)$, $b_k = b_k(k\Delta\omega)$, где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ – частота первой гармоники. Следовательно, спектры являются функциями, зависящими от номера гармоники k как независимой переменной.

Принято величины $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$ ($k = 1,2,\dots$) называть соответственно амплитудным и фазовым частотными спектрами периодической функции $f(t)$ с периодом T .

Графически частотные спектры удобно изображать в виде отрезков длины A_k , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносится значения $\Delta\omega k$. Так как $k = 1,2,\dots$, то очевидно, что частотные спектры имеют дискретный (разрывный) характер. Расстояние между отдельными линиями спектра, в общем случае, равно $\Delta\omega$.

Заметим, что амплитудно-частотный спектр является четно-симметричной, а фазовый частотный спектр – нечетно-симметричной функцией частоты ω_k .

Заметим, что для четной функции $f(t)$: $A_k = |a_k|$, $\varphi_k = 0$; нечетной: $A_k = |b_k|$, $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Отметим, что между периодическими функциями и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодическая функция $f(t)$ полностью определяет ее частотные спектры и, наоборот, зная частотные спектры, можно указать, какой периодической функции она принадлежит. Благодаря этому соответствию в ряде задач техники оказывается удобным операции над периодическими процессами заменять операциями над частотными спектрами, характеризующими эти процессы. Спектры полностью информируют о том, какого рода колебания имеют место в данном процессе, какова его структура.

Предположим, например, что функция $f(t)$ характеризует собой ток, протекающий в электрической цепи, активное сопротивление которой равно 1 Ом. Найдем среднюю мощность, выделенную током в этой цепи за время $0 < t < T$, выразив ее через коэффициенты разложения $f(t)$ в ряд Фурье.

Так как $f^2(t)$ является мгновенной мощностью, выделяемой током в момент времени t , то средняя мощность будет

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

или

$$P_{cp} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (1.36)$$

Первая часть этого равенства дает представление о распределении составляющих средней мощности по гармоникам разложения $f(t)$ в интервале $(0;T)$ в ряд Фурье. Следовательно, средняя мощность тока, а в общем случае сигнала $f(t)$, равна сумме средних значений мощностей всех частотных компонент.

Совокупность значений A_k^2 ($k = 1, 2, \dots$) может быть названа **энергетическим спектром** периодического сигнала $f(t)$. График энергетического спектра также состоит из отдельных линий, длина которых зависит от номера k гармоник разложения в ряд Фурье. Из выражения (1.36) следует, что в образовании энергетического спектра участвуют лишь амплитуды A_k гармоник и не участвуют фазовые сдвиги φ_k .

1.7 Интеграл Фурье

В электротехнике, в автоматике и особенно в радиотехнике и в технике связи довольно часто встречаются электрические напряжения, токи, магнитные потоки и другие величины, изменяющиеся во время по непериодическому закону. В этих случаях для исследования процессов, протекающих в электро- и радиотехнических устройствах, прибегают к разложению таких функций в интеграл Фурье.

В этом разделе рассматриваются лишь те сведения по интегралу Фурье, которые необходимы инженеру электро- и радиотехнических специальностей на практике.

Известно, что если $f(t)$ кусочно-монотонная и T -периодическая функция на интервале $\left(\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ разложима в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1.37)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k \frac{2\pi}{T} \tau d\tau, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \sin k \frac{2\pi}{T} \tau d\tau$$

$(k = 1, 2, \dots)$

(1.38)

Предположим, что $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = I_0 < \infty$.

Найдем предел выражения, стоящего в правой части равенства (1.37), при $T \rightarrow \infty$.

Подставляя значения a_0, a_k, b_k (2) в правую часть равенства (1.37), получим

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k \frac{2\pi}{T} (t - \tau) d\tau \quad (1.39)$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(\tau)| d\tau, \quad \text{но} \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(\tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = I_0 < \infty,$$

тогда $\left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{I_0}{T}$

Следовательно, $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (1.39)

Пусть переменная величина ω принимает значения

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = 2 \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_3 = 3 \frac{2\pi}{T}, \quad \dots, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

при этом $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos k \frac{2\pi}{T} (t - \tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \omega_n (t - \tau) d\tau \right] \Delta\omega_n \end{aligned} \quad (1.40)$$

Полученное выражение (1.40) по своей структуре является интегральной суммой для функции

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau$$

Поэтому переходя в равенстве (1.40) к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \quad (1.41)$$

Формула (1.41) называется формулой Фурье, а двойной несобственный интеграл интегралом Фурье для функции $f(t)$.

Формулу (1.41) можно записать так:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (1.42)$$

$$\text{где } a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau; \quad (1.43)$$

$$\text{или } f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega \quad (1.44)$$

$$\text{где } A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (1.45)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (1.46)$$

Из формулы (1.44) следует, что функция $f(t)$ представляется интегралом Фурье в виде «суммы» гармоник (с амплитудами $A(\omega)$ и начальными фазами $\varphi(\omega)$), круговые частоты которых ω изменяются непрерывно в интервале $[0; \infty)$.

В связи с тем, что при расположении функции $f(t)$ в ряд Фурье с периодом T круговые частоты гармоник имеют дискретные значения

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = 2 \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_3 = 3 \frac{2\pi}{T}, \quad \dots, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

говорят о точечном спектре частот ряда Фурье и о непрерывном спектре частот интеграла Фурье.

Если для периодической функции амплитудный и фазовый спектры являются **линейными**, то для непериодической функции, представленной интегралом Фурье, они получаются сплошными.

В электро- и радиотехнической литературе интеграл Фурье в комплексной форме часто записывают так:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(i\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где комплексная величина

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (i^2 = -1) \quad (1.47)$$

$S(i\omega)$ - называется **спектральной плотностью** или спектральной характеристикой, а ее модуль $|S(i\omega)| = S(\omega)$ спектром функции (сигнала временной функции) $f(t)$.

При этом

$$|S(i\omega)| = S(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} = a(\omega) - ib(\omega), \quad (1.48)$$

где

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin\omega\tau d\tau;$$

Тогда модуль спектральной плотности $S(\omega)$ – функция четная, фаза спектральной плотности $\varphi(\omega)$ – нечетная функция частоты ω , можно вычислить по формулам

$$S(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)} \quad (1.49)$$

Пример 3. Найти спектральную плотность и модуль спектральной плотности прямоугольного импульса.

$$f(t) = \begin{cases} h, & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > t_0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем спектральную плотность.

$$\begin{aligned} S(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, = \int_0^{t_0} h e^{-i\omega\tau} d\tau = -\frac{h}{i\omega} e^{-i\omega\tau} \Big|_0^{t_0} \\ &= -\frac{h}{i\omega} (e^{-i\omega t_0} - 1) = -\frac{h}{i\omega} (\cos\omega t_0 - i\sin\omega t_0 - 1) \\ &= \frac{h}{\omega} [\sin\omega t_0 - i(1 - \cos\omega t_0)] \end{aligned}$$

Отсюда

$$S(\omega) = \frac{h}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} =$$

$$\frac{h}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega t_0 + 1 - 2 \cos \omega t_0 + \cos^2 \omega t_0} = \frac{h}{\omega} \sqrt{2(1 - \cos \omega t_0)} = \frac{2h}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

;

Найдем $\varphi(\omega)$

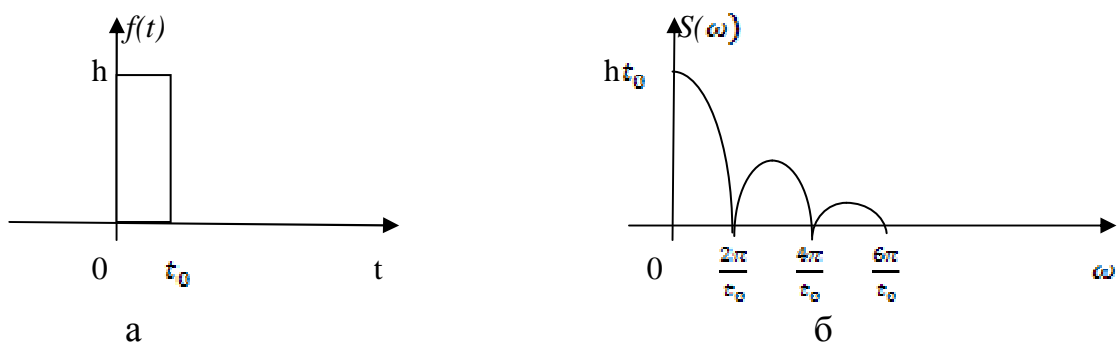
$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \omega t_0}{\sin \omega t_0} = -\operatorname{arctg} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega t_0}{2}}{2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \cos \frac{\omega t_0}{2}} = -\operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{\omega t_0}{2}$$

$$= -\frac{\omega t_0}{2};$$

Найдем при $\omega \rightarrow 0$

$$S(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2h}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_0}{2} \right| = \left\{ \sin \frac{\omega t_0}{2} \sim \frac{\omega t_0}{2} \right\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2h \omega t_0}{\omega 2} = h t_0.$$

Графики $f(t)$, $S(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ изобразим на рис. 3(а, б, в)



$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega t_0}{2}$$

в

Рисунок 3

Преобразование Фурье дает возможность получить удобное и наглядное представление процессов, протекающих в электро- и радиотехнических цепях при наличии в них электрических и магнитных величин, изменяющихся по времени не по периодическому закону.

2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление в настоящее время широко применяется в самых различных областях науки и техники. Особенно большую роль оно играет при исследовании переходных процессов в линейных физических системах электротехники, автоматики, радиомеханики, механики и других отраслей знаний.

Современный математический аппарат операционного исчисления позволяет решать задачи, описываемые системами линейных дифференциальных уравнений, разностными и дифференциально-разностными уравнениями, линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (определенный тип коэффициентов) и некоторыми типами интегральных уравнений. Такая большая универсальность метода объясняется его эффективностью – возможностью получить решение наиболее простыми и экономными путями и средствами.

2.1 Преобразования Лапласа. Его основные свойства. Изображения некоторых простейших функций

Определение 1. Оригиналом называется всякая функция $f(t)$ действительного переменного t , удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ – однозначная, кусочно-монотонная вместе со своими производными любого порядка при $t \geq 0$;
2. $|f(t)|$ растет не быстрее, чем некоторая показательная функция, что означает существования таких постоянных чисел M и p не зависящих от t , при которых

$$|f(t)| < Me^{p_0 t}. \text{ для } t \geq 0.$$

3. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$.

Класс функций-оригиналов будем называть классом D , так что $f(t) \in D$.

Определение 2. Изображением оригинала $f(t)$ будем называть функцию $F(p)$ комплексного $p = \alpha \pm i\omega$, определяемую интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2.1)$$

Интеграл Лапласа (1), называемый преобразованием Лапласа функции $f(t)$, несобственный. Он равномерно сходится, если $f(t) \in D$. Действительно, при этом имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-pt} dt &\leq M \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{p_0 t} dt = M \int_0^{\infty} e^{(p_0-p)t} dt = \\ &= e^{-t|p-p_0|} \frac{M}{|p-p_0|} e^{(p_0-p)t} \Big|_0^{\infty} \leq \frac{M}{|p-p_0|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

(при $p > p_0$, что обычно принимается как $\operatorname{Re} p > p_0$)

Функцию $F(p)$ называют изображением функции $f(t)$ по Лапласу.

Соответствие между изображением и оригиналом будем обозначать знаком \div и записывать

$$F(p) \div f(t) \quad \text{или} \quad f(t) \div F(p) \quad (2.3)$$

Замечание 1. Из определения интеграла Лапласа следует, что условие (2.3) налагаемое на оригинал, чисто формальное. Если говорят об изображении функции $f(t)$, не равной тождественно нулю при $t < 0$, то имеют в виду лишь изображение функции $f(t)e(t)$, где $e(t)$ – единичная функция

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Действительно, $\varphi = f(t)e(t)$ функция при $t < 0$ равна тождественно нулю, а при $t \geq 0$ совпадает с $f(t)$.

$$\varphi = f(t)e(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ f(t), & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Для обозначения соответствия между оригиналом и изображением употребляются, кроме принятого выше еще и другие символы: $\div, \Leftrightarrow, F(p) = L\{f(t)\}$

Отметим основные свойства изображений, которые используются при расчетах с помощью операционного исчисления.

Свойство 1. (Теорема единственности). Если два изображения $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы во всех точках, за исключением, быть может, точек

разрыва, то есть если $F(p) \div f(t)$ и $\Phi(p) \div \varphi(t)$ при этом $F(p) = \Phi(p)$, то $f(t) \equiv \varphi(t)$ во всех точках непрерывности.

Свойство 2. Если $F(p)$ изображение при $Re p > p_0$, то она разложима в степенной ряд и, следовательно, неограниченное число раз интегрируема и дифференцируема в области сходимости ряда.

Свойство 3. (Линейность изображения)

Если $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ и при этом $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$f(t) \div F(p) = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p), \quad (2.5)$$

Где C_1 и C_2 – const..

Свойство 4. (Предельное значение изображения) Всякое изображение $F(p)$ функции $f(t)$ при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Доказательство.

Используя (2) $|F(p)| \leq \frac{M}{|p-p_0|}$, при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |F(p)| = 0 \quad (2.6)$$

Замечание 3. Из свойства (2.4), в частности, следует, что если изображение $F(p)$ представлено рациональной дробью, то эта дробь – правильная.

Найдем изображение некоторых простейших функций ($e(t), e^{\mp at}, \operatorname{ch} at, \operatorname{sh} at, \sin \omega t, \cos \omega t, 1 - e^{\mp at}$).

Изображение единичной функции $e(t)$. Найдем

$$\int_0^{\infty} e(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad (p > 0).$$

Итак, $e(t) \div \frac{1}{p}$ (иногда пишут $1 \div \frac{1}{p}$)

Изображения показательных функций.

$$e^{\mp at} \div \int_0^{\infty} e^{\mp at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p \pm a)t} dt = -\frac{1}{p \pm a} e^{-(p \pm a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p \pm a};$$

т.е. $e^{\mp \alpha t} \div \frac{1}{p \pm \alpha}$

При $\alpha = i\omega$ получим

$$e^{-i\omega t} \div \frac{1}{p + i\omega}, \quad e^{i\omega t} \div \frac{1}{p - i\omega}.$$

Изображения гиперболических функций.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha t &= \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}, \\ \operatorname{sh} \alpha t &= \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Изображения тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Изображения функций $1 - e^{\mp \alpha t}$

$$1 - e^{\mp \alpha t} \div \frac{1}{p} - \frac{1}{p \pm \alpha} = \frac{\pm \alpha}{p(p \pm \alpha)}.$$

2.2 Изображения производных и интеграла от функции

Изображение производных от функции

Теорема 1. Если $f(t) \div F(p)$, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(p). \quad (2.7)$$

Доказательство.

Предположим, что функция $f(t)$ дифференцируема при $t > 0$, причем производная $f'(t) \in D$. Найдем изображение функции $f'(t)$.

$$\begin{aligned}
f'(t) \div \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t)dt, \quad v = f(t) \end{array} \right\} = \\
&= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \\
&= pF(p) - f(0). \quad \text{что и требовалось доказать.}
\end{aligned}$$

Итак $f'(t) \div pF(p) - f(0)$.

Если предположить существование для $f(t)$ производных высших порядков и принадлежность их к классу оригиналов, то легко найти их изображения, зная изображение первой производной.

Действительно, обозначим $f'(t) = \varphi(t)$, тогда $f''(t) = \varphi'(t)$.
 Если $\varphi(t) \div \Phi(p)$, $f(t) \div F(p)$, то $\Phi(p) = pF(p) - f(0)$,
 $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$, то есть

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (2.8)$$

Подобно этому найдем изображение $f'''(t)$

$$\begin{aligned}
f'''(t) \div p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) &= \\
&= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

затем – изображение производной любого порядка:

$$f^{(k)}(t) \div p^k F(p) - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) \dots - pf^{(k-1)}(0) - f^{(k-1)}(0). \quad (2.10)$$

Особенно просто выглядят формулы, определяющие изображение производных при нулевых начальных условиях.

Если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ и $f(t) \div F(p)$, то

$$f^{(k)}(t) \div p^k F(p). \quad (2.11)$$

Изображение интеграла от функции.

Пусть $f(x) \in D$. Требуется найти изображение интеграла $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Очевидно, что

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' = f(t), \quad \varphi(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0.$$

Теорема 2. Если $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{1}{p} F(p). \quad (2.12)$$

Доказательство.

Пусть $\varphi(t) \div \Phi(p)$, $f(t) \div F(p)$. Так как $f(t) = \varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$ и $\varphi(0) = 0$ получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} F(p) \Rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{1}{p} F(p)$$

что и требовалось доказать.

2.3 Основные теоремы операционного исчисления

Отыскание изображений большинства функций непосредственно с помощью интеграла Лапласа весьма громоздко. Изложенные ниже теоремы существенно облегчают решение задачи нахождения большого числа разнообразных функций. Они позволяют также решать обратную задачу – отыскание оригинала по заданному изображению.

Теорема 3. (О дифференцировании изображений или об умножении оригинала на аргумент)

Если $f(t) \in D$ и $f(t) \div F(p)$, то

$$tf(t) \div -\frac{d}{dp} F(p). \quad (2.13)$$

Доказательство.

Прежде всего отметим, что $tf(t) \in D$. Далее

$$\begin{aligned} tf(t) \div \int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt} dt &= - \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{dp} (e^{-pt}) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (f(t)e^{-pt}) dt = - \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = - \frac{d}{dp} (F(p)). \end{aligned}$$

Следовательно $tf(t) \div -\frac{d}{dp} (F(p))$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как $tf(t) \div -\frac{d}{dp} (F(p))$, то

$$\begin{aligned}
t^2 f(t) &= t(tf(t)) \div -\frac{d}{dp} \left(-\frac{d}{dp} (F(p)) \right) = (-1)^2 \frac{d^2 F}{dp^2}, \\
t^3 f(t) &= t(t^2 f(t)) \div -\frac{d}{dp} \left((-1)^2 \frac{d^2 F}{dp^2} \right) = (-1)^3 \frac{d^3 F}{dp^3}, \\
&\dots\dots\dots \\
t^k f(t) &\div (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}; \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Следствие 2. Известно, что $e(t) \div \frac{1}{p}$ и $t^k f(t) \div (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}$. Поэтому

$$t^k \div \frac{k!}{p^{k+1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \tag{2.15}$$

Из (2.15), можно получить и такое соотношение

$$\frac{t^k}{k!} \div \frac{1}{p^{k+1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Пример 1. Найти изображение $t \sin \omega t$.

Решение. Известно, что $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Поэтому $t \sin \omega t \div (-1) \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)'_p = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Пример 2. Найти изображение $t \cos \omega t$.

Решение. Известно, что $\cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

. Поэтому $t \cos \omega t \div (-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)'_p = -\frac{\omega^2 - p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Пример 3. Найти изображение $t^k e^{\alpha t}$.

Решение. Известно, что $e^{\alpha t} \div \frac{1}{p - \alpha}$ и $t^k f(t) \div (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}$. Поэтому .

$$\begin{aligned}
t^k e^{\alpha t} &\div (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} ((p - \alpha)^{-1}) = (-1)^k (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(p - \alpha)^{k+1}} = \frac{k!}{(p - \alpha)^{k+1}} \\
\frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} &\div \frac{1}{(p - \alpha)^{k+1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Теорема 4. (Об интегрировании изображения или о делении оригинала на аргумент)

Если $f(t) \div F(p)$ и $\frac{f(t)}{t} \in D$, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p) dp. \quad (2.17)$$

Доказательство.

Обозначим $\frac{f(t)}{t} = \varphi(t)$ и $\varphi(t) \div \Phi(p)$.

Очевидно $f(t) = t\varphi(t)$, и по теореме 1

$$t\varphi(t) \div -\frac{d}{dp} \Phi(p).$$

По теореме единственности изображений $F(p) = -\frac{d}{dp} \Phi(p)$.

Поэтому $\Phi(p) = -\int_0^p F(p) dp + C$.

Производную постоянную C определим из условия $\Phi(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, а именно

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[C - \int_0^p F(p) dp \right] = C - \int_0^\infty F(p) dp = 0,$$

Находим $C = \int_0^\infty F(p) dp$.

Таким образом,

$$\Phi(p) = \int_0^\infty F(p) dp - \int_0^p F(p) dp = \int_p^\infty F(p) dp, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Пример 4. Найти изображение $sh \alpha t / t$.

Решение. Известно, что $sh \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$.

$$\text{Поэтому } sh \alpha t / t \div \int_0^\infty \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} dp = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right| \Bigg|_p^\infty = -\frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right| = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right|$$

$$\text{Итак } sh \alpha t / t \div \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right|.$$

Пример 5. Найти изображение $\int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\tau} d\tau$.

Решение. Известно, что $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Поэтому

$$\sin \omega t / t \div \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \arctg \frac{p}{\omega} \Bigg|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{\omega}.$$

$$\text{или } \sin \omega t / t \div \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}.$$

Учитывая, теорему об интегрировании оригинала, найдем

$$\int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\tau} d\tau \div \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$$

Теорема 4. (Теорема запаздывания)

Если $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \div e^{-pt_0} F(p). \quad (2.18)$$

Доказательство.

Так как $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то $f(t - t_0) \equiv 0$ для $t < t_0$.

Поэтому, производя замену переменной интегрирования по формуле $z = t - t_0$, получаем

$$\begin{aligned} f(t - t_0) \div \int_0^\infty f(t - t_0) e^{-pt} dt &= \int_0^\infty f(t - t_0) e^{-pt} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = t - t_0, \\ dz = dt \\ t_0 \leq t < \infty, \\ 0 \leq z < \infty \end{array} \right\} = \int_0^\infty f(z) e^{-p(t_0+z)} dz = e^{-pt_0} \int_0^\infty f(z) e^{-pz} dz = e^{-pt_0} F(p). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(t - t_0) \div e^{-pt_0} F(p)$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл запаздывания таков: функция $f(t)$ и $f(t - t_0)$ имеют одинаковые графики, но график $f(t - t_0)$ сдвинут на t_0 единиц вправо. (процесс для этой функции начинается на t_0 единиц позже, чем для $f(t)$, что показано на рис. 1(а, б))

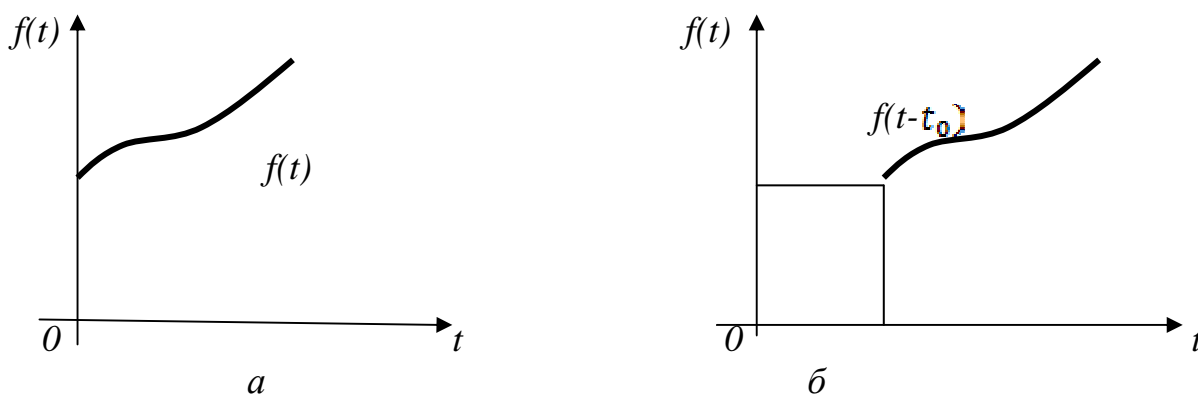


Рисунок 1

Пример 6. Найти изображение функции $f(t) = t - 1$.

Решение. Зная, что $t \div \frac{1}{p^2}$, $1 \div \frac{1}{p}$ и используя свойство линейности, находим: $t - 1 \div \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$.

При отыскании изображения $t - 1$ возможен и другой подход. Если считать, что задана функция $f_1(t) = t$, то $t - 1$ предстанет как $f_1(t - 1) = t$, то есть $f_1(t - 1) = t - 1$. Тогда изображение разности можно получить с помощью теоремы запаздывания $f_1(t) \div \frac{1}{p^2}$.

$$t - 1 \div e^{-p} \frac{1}{p^2}$$

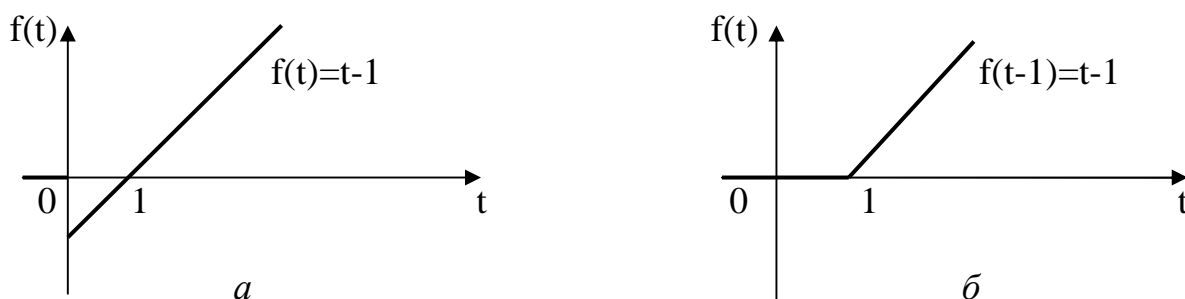


Рисунок 2.

Получилось два различных результата, что противоречит теореме единственности. Однако здесь нет никакого противоречия, ибо в рассматриваемых случаях были найдены изображения различных функций. (Рис. 2 а, б)

Теорема 6. (Теорема сдвига) Если $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$, и α – некоторое число, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \div F(p + \alpha) \tag{2.19}$$

Доказательство.

Очевидно, что $e^{-\alpha t} f(t) \in D$, поэтому

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} f(t) \div \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+\alpha)t} dt = \{p + \alpha = q\} = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-qt} dF(q) = F(p + \alpha) \end{aligned}$$

Таким образом $e^{-\alpha t} f(t) \div F(p + \alpha)$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Найти изображение $e^{-\alpha t} \sin \omega t$.

Решение. Известно, что $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Тогда, согласно результату теоремы 4, будем иметь $e^{-\alpha t} \sin \omega t \div \frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$.

Пример 8. Найдем изображение $e^{-\alpha t} \cos \omega t$.

Решение. Известно, что $\cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}$. Поэтому $e^{-\alpha t} \cos \omega t \div \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$.

Теорема 7. (Теорема умножения изображений или теорема о свертке)

Если $f_1(t) \in D$, $f_2(t) \in D$, $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$ то

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \div F_1(p) \cdot F_2(p) \quad (2.20)$$

Эту теорему принимаем без доказательств.

Замечание. Интеграл

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

называется сверткой функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и обозначается $f_1 * f_2$.

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

Пример 9. Применяя теорему умножения найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

Решение. Имеем

$$\frac{p}{(p^2 + 1)^2} = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \frac{p}{p^2 + 1} \div \cos t, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \div \sin t.$$

Поэтому, считая

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \div \cos t = f_1(t), \quad F_2(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \div \sin t = f_2(x).$$

Находим

$$F_1(p)F_2(p) \div f_1(t) * f_2(x) = \int_0^t \cos \tau \sin(t - \tau) d\tau = \\ = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(t - \tau - \tau) + \sin t] d\tau = \frac{1}{2} t \sin t.$$

2.4 Изображение периодической функции

Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом T_0 , то есть $f(t - T_0) = f(t)$, тогда ее можно представить в виде сходящегося ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT_0) \quad (2.21)$$

где

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Если $f(t) \in D$ и $f_0(t) \div F_0(p)$, то на основании теоремы запаздывания получаем:

$$f(t - T_0) \div e^{-pT_0} F_0(p), \\ f(t - 2T_0) \div e^{-2pT_0} F_0(p), \\ \dots \dots \dots \\ f(t - kT_0) \div e^{-kpT_0} F_0(p), \\ \dots \dots \dots$$

Поэтому, при достаточно больших p ($Re p > p_0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT_0) \div \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT_0} F_0(p) = F_0(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT_0} = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT_0}}$$

Окончательно,

$$f(t) \div \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT_0}}, \quad (2.23)$$

где $F_0(p)$ – изображение функции $f_0(t)$ на первом (начальном) периоде.

Пример 10. Найти изображение периодического сигнала изображенного на рисунке 3.

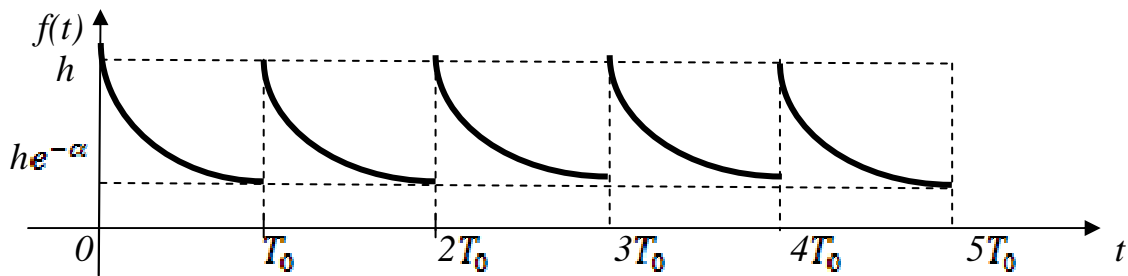


Рисунок 3

Решение.

$$f_0(t) = \begin{cases} h e^{-\alpha \frac{t}{T_0}}, & \text{при } 0 < t < T_0, \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_0 \end{cases}$$

Период $f(t)$ равен T_0 . Найдем

$$\begin{aligned} F_0(p) &= \int_0^{T_0} h e^{-\alpha \frac{t}{T_0}} e^{-pt} dt = h \int_0^{T_0} h e^{-(p + \frac{\alpha}{T_0})t} dt = \\ &= -\frac{h}{p + \frac{\alpha}{T_0}} e^{-(p + \frac{\alpha}{T_0})t} \Big|_0^{T_0} = \frac{h}{p + \frac{\alpha}{T_0}} [1 - e^{-(pT_0 + \alpha)}] \end{aligned}$$

или $F_0(p) = \frac{h}{p + \frac{\alpha}{T_0}} [1 - e^{-\alpha} \cdot e^{-pT_0}]$.

Итак $f(t) \div F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT_0}} = \frac{h}{p + \frac{\alpha}{T_0}} \cdot \frac{[1 - e^{-\alpha} \cdot e^{-pT_0}]}{1 - e^{-pT_0}}$.

2.5 Изображение кусочно-аналитического сигнала

Кусочно-аналитическим сигналом мы будем называть функцию $f(t)$, определенную следующим образом:

1. При $t < \tau, f(t) = 0, (\tau_1 \geq 0)$.
2. На отрезке $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$.
3. При $t > \tau_{m+1}, f(t) = 0$.

Здесь $k = 1, 2, 3, \dots$, функция $f_k(t)$ аналитическая на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Заметим, что определенная таким образом кусочно-аналитическая функция всем условиям изображения. Для отыскания изображения запишем функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \sum_{j=1}^m [e(t - \tau_j) - e(t - \tau_{j+1})] f_j(t) \quad (2.24)$$

Нетрудно убедиться в справедливости этого равенства; в самом деле, на каждом отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ оси $0t$ отличен от нуля только один член суммы, стоящий в правой части равенства (1), а именно тот, для которого $j = k$: поскольку $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$, $e(t - \tau_k) = 1$, $e(t - \tau_{k+1}) = 0$, и соответствующий член суммы обращается в $f_k(t)$

$$[e(t - \tau_k) - e(t - \tau_{k+1})]f_k(t) \equiv f_k(t)$$

Если $j < k$, то $t > \tau_{j+1} > \tau_j$; поэтому $e(t - \tau_j) = 1$ и $e(t - \tau_{j+1}) = 1$ и соответствующий член суммы (1) обращается в нуль. Наконец, если $j > k$, то $t < \tau_j < \tau_{j+1}$, поэтому $e(t - \tau_j) = 0$ и $e(t - \tau_{j+1}) = 0$ и соответствующий член суммы тоже равен нулю. Таким образом, на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ имеем $f(t) = f_k(t)$.

Пример 11. График функции $f(t)$ задан на рисунке 4. Он составлен из отрезков двух прямых и дуг синусоиды.

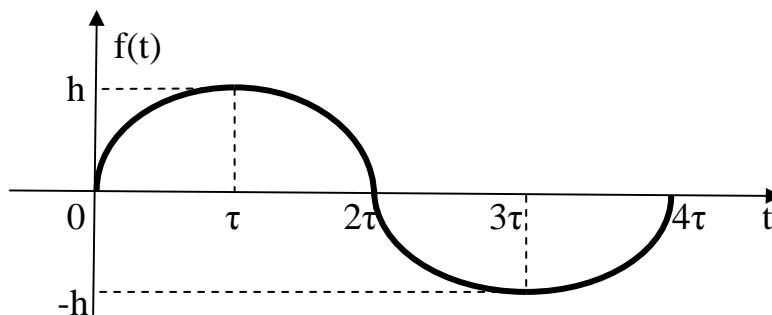


Рисунок 4

$$f(t) = \frac{h}{\tau}t, \quad \text{при } 0 \leq t < \tau;$$

$$f(t) = h \sin \frac{\pi t}{2\tau}, \quad \text{при } \tau \leq t < 3\tau;$$

$$f(t) = \frac{h}{\tau}(t - 4\tau), \quad \text{при } 3\tau \leq t \leq 4\tau;$$

$$f(t) \equiv 0, \quad \text{при } t > 4\tau;$$

Имеем по формуле (1)

$$f(t) = [e(t) - e(t - \tau)]\frac{h}{\tau}t + [e(t - \tau) - e(t - 3\tau)]h \sin \frac{\pi t}{2\tau} + [e(t - 3\tau) - e(t - 4\tau)]\frac{h}{\tau}(t - 4\tau) \quad (2.25)$$

Перепишем $f(t)$ в новом виде, учитывая следующие очевидные преобразования

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{h}{\tau}t = h + \frac{h}{\tau}(t - \tau), \\
 2. \quad & h \sin \frac{\pi t}{2\tau} = h \sin \frac{\pi}{2\tau} [(t - \tau) + \tau] = h \sin \left[\frac{\pi}{2\tau}(t - \tau) + \frac{\pi}{2} \right] = \\
 & = h \cos \frac{\pi(t - \tau)}{2\tau}, \\
 3. \quad & h \sin \frac{\pi t}{2\tau} = -h \cos \frac{\pi}{2\tau}(t - 3\tau), \\
 4. \quad & \frac{h}{\tau}(t - 4\tau) = -h + \frac{h}{\tau}(t - 3\tau).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Внося эти выражения в предыдущую запись $f(t)$ так, чтобы при каждой единичной функции стояла множителем функция того же аргумента, и собирая затем члены, содержащие множители единичные функции одного и того же аргумента, приводим $f(t)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & e(t) \frac{h}{\tau}t - he(t - \tau) \left[1 + \frac{1}{\tau}(t - \tau) - \cos \frac{\pi(t - \tau)}{2\tau} \right] - he(t - 3\tau) \cdot \\
 & \left\{ 1 - \frac{t - 3\tau}{\tau} - \cos \frac{\pi}{2\tau}(t - 3\tau) \right\} - he(t - 4\tau) \frac{(t - 4\tau)}{\tau}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Такая запись $f(t)$, в которой при каждой единичной функции стоит множителем функция того же аргумента t , позволяет немедленно, используя теорему запаздывания, найти изображение функции

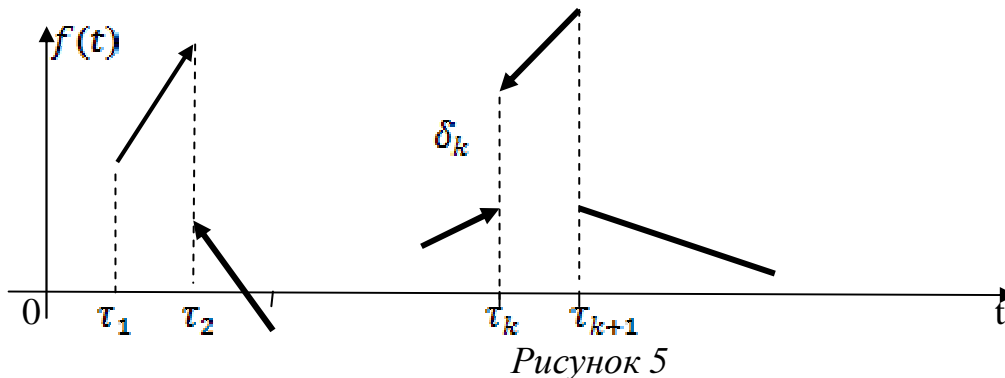
$$\begin{aligned}
 f(p) \div & \frac{h}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2} - he^{-\tau p} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{\tau p^2} - \frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}} \right] - \\
 & - he^{-3\tau p} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{\tau p^2} - \frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}} \right] - he^{-4\tau p} \frac{1}{\pi p^2},
 \end{aligned}$$

или окончательно

$$f(p) = \frac{h}{\pi p^2} [1 - e^{-\tau p} + e^{-3\tau p} - e^{-4\tau p}] - \frac{h}{p} [e^{-\tau p} + e^{-3\tau p}] + \frac{hp}{p^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}} (e^{-\tau p} + e^{-3\tau p})$$

2.6 Изображение полигональной функции

Полигональной функцией мы будем называть кусочно-аналитическую функцию, для которой все ее «элементы» – функции $f_k(t)$ – линейные функции: $f(t) = a_k t + b_k$; таким образом, график полигональной функции составлен из отрезков прямых (рис. 5)



Для скачков функции $f(t)$ в узлах-«стыках» введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= (a_k \tau_k + b_k) - (a_{k-1} \tau_k + b_{k-1}) = \delta_k, \\ \Delta f'_k &= a_k - a_{k-1} = \alpha_k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

(при этом $\delta_1 = a_1 \tau_1 + b_1$, $\alpha_1 = a_1$ поскольку при $t < \tau$, $f(t) \equiv 0$).

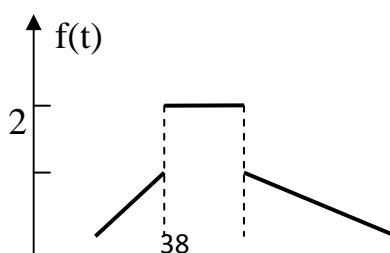
Поэтому изображения полигональной функции с учетом (2.28) запишется следующим образом:

$$\bar{F}(p) = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{\delta_k}{p} + \frac{\alpha_k}{p^2} \right\} e^{-\tau_k p} \quad (2.29)$$

График полигональной функции состоит из m отрезков прямых; для скачка в точке $t = \tau_{m+1}$, поэтому следует положить $\delta_{m+1} = -(a_m \tau_{m+1} + b_m)$; $\alpha_{m+1} = -a_m$.

Пример 12. Найти изображение полигональной функции, график которой задан на рисунке 6.

Решение. В данном случае нет необходимости записывать уравнение прямых, отрезки которых образуют заданный график.



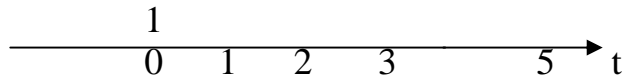


Рисунок 6

В данном случае нет необходимости записывать уравнение прямых, отрезки которых образуют заданный график. Непосредственно по рисунку 2 определяем δ_k и α_k в точке

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1, & \delta_1 &= 0, & \alpha_1 &= 1; \\ \tau_2 &= 2, & \delta_2 &= 1, & \alpha_2 &= -1; \\ \tau_3 &= 3, & \delta_3 &= -1, & \alpha_3 &= -1/2; \\ \tau_4 &= 5, & \delta_4 &= 0, & \alpha_4 &= 1/2 \end{aligned}$$

По формуле (2.29) имеем

$$F(p) = \frac{1}{p} [e^{-2p} - e^{-3p}] + \frac{1}{p^2} [e^{-p} - e^{-2p} - \frac{1}{2}e^{-3p} + \frac{1}{2}e^{-5p}] \quad (2.30)$$

Частным случаем полигональной функции является ступенчатая функция, график которой образован из конечного числа отрезков прямых, параллельных оси Ot . Для ступенчатой функции, сохраняя обозначения, принятые для полигональных функций, имеем все $\alpha_k \equiv 0$. Поэтому формула (2.29) приводится к виду

$$F(p) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\delta_k}{p} e^{-\tau_k p}, \quad (2.31)$$

Причем следует помнить, что число ступенек не $(m+1)$, а m и $\delta_{m+1} = -h_m$, где h_m – ордината последней ступеньки.

Пример 13. Найти изображение полигональной функции, график которой задан на рисунке 7.

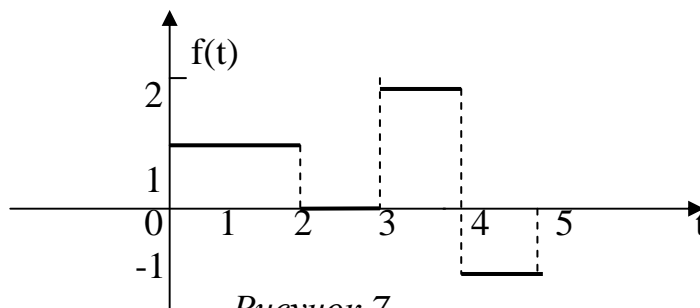


Рисунок 7

Имеем по рисунку 7: в точке

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 0, & \delta_1 &= 1 \\ \tau_2 &= 2, & \delta_2 &= -1 \\ \tau_3 &= 3, & \delta_3 &= 2 \\ \tau_4 &= 4, & \delta_4 &= -3 \\ \tau_5 &= 5, & \delta_5 &= 5\end{aligned}$$

По формуле (2.31) изображение данной ступенчатой функции записываем в виде

$$F(p) = \frac{1}{p} [1 - e^{-2p} + 2e^{-3p} - 3e^{-4p} + e^{-5p}] \quad (2.32)$$

2.7 Отыскание изображений при помощи рядов

Пусть функция $f(t)$ располагается в степенной ряд на всей оси $0t$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in (-\infty; \infty), \quad (2.33)$$

Тогда функция, совпадающая с $f(t)$ при $t \geq 0$ и равна нулю при $t < 0$, является оригиналом и ее изображение может быть найдено как сумма ряда

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad (2.34)$$

члены, которого являются изображениями соответствующих членов ряда (1).

Пример 14. Найти изображение функции Бесселя первого рода с нулевым индексом $J_0(t)$, разложение которого имеет вид

$$J_0(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Решение. Используя выше приведенное утверждение, находим изображение $J_0(p)$ – функцию $\bar{J}_0(p)$:

$$J_0(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{p^{2n}}$$

Нетрудно убедиться, что в правой части стоит разложение по степеням $\frac{1}{p}$ функции $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, действительно

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{p^{2n}}$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти изображения следующих функций Бесселя:

a) $J_0(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \div \bar{J}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})}$

b) $I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n (n!)^2}$ – функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента с нулевым индексом $\bar{I}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}$

2.8 Методы отыскания оригинала по известному изображению. Теоремы разложения.

Теорема 7. Пусть изображение $F(p)$ разлагается в ряд по отрицательным степеням p , т.е.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}.$$

Тогда оригиналом для функции $F(p)$ служит функция $f(t)$, определяется при $t > 0$, сходящимся на всей числовой оси ot рядом

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

Теорема 8. Пусть требуется найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

где $P(p)$ и $Q(p)$ – многочлены относительно p степени соответственно m и n , ($m < n$).

Допустим корни знаменателя $Q(p)$ – простые p_k , $k=1,2,\dots,n$. Тогда оригинал $f(t)$ находим по формуле

$$F(p) \div f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.35)$$

где $Q'(p_k)$ – значение производной знаменателя при $p=p_k$.

Пример 15. Найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(p^4 - 1)}$$

Решение. Знаменатель изображения имеет простые корни $p_1 = 0$;

$$p_{2,3} = \pm 1; p_{4,5} = \pm i; \text{ числитель } P(p) = p^2 + p + 1, Q'(p) = 5p^4 - 1$$

$$\text{Тогда } A_1 = \frac{P(0)}{Q'(0)} = -1; A_2 = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{3}{4}; A_3 = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{1}{4}; A_4 = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{i}{4};$$

$$A_5 = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = -\frac{i}{4}$$

Отсюда по формуле (2.34) находим

$$f(t) = -1 + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{i}{4}(e^{it} - e^{-it}) = -1 + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

Теорема 9. Пусть $F(p)$ – однозначная функция комплексного переменного p , имеющая на плоскости p лишь конечное или счетное множество изолированных особых точек (полюсов или существенных особенностей) и кроме того выполнены следующие условия.

1. $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$
2. Функция $F(p)$ абсолютно интегрируется вдоль всякой прямой $Re(p) = \sigma$ иными словами

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |F(p)| |dp| < \infty$$

При выполнении этих условий оригинал $F(p)$ может быть найден по формуле

$$F(p) \div f(t) = \sum \text{Res}\{e^{pt} F(p)\} \quad (2.36)$$

где суммирование в правой части распространяется на все особые точки функции $F(p)$, а вычет в полюсе $p=p_k$ кратности m , определяется по формуле

$$\text{Res}_{p=p_k} \{e^{pt} F(p)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [(p-p_k)^m F(p) e^{pt}] \quad (2.37)$$

Пример 16. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Применяем для отыскания оригинала третью теорему разложения. Найденное изображение имеет два полюса 2-го порядка $p = \pm i$. Найдем $\text{Res}\{e^{pt} F(p)\}$, используя (2.36)

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=i} \left\{ e^{pt} \frac{1}{(p^2+1)^2} \right\} &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow i} \frac{d}{dp} \left[(p-i)^2 \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2} \right] = \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^2} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow i} \left[\frac{t e^{pt}}{(p+i)^2} - \frac{2 e^{pt}}{(p+i)^3} \right] = -\frac{t e^{ti}}{4} + \frac{e^{ti}}{4i} \end{aligned}$$

Вычет в полюсе $p = -i$ находим как комплексное число сопряженное с вычетом в полюсе $p = i$.

$$\text{Res}_{p=-i} \left\{ e^{pt} \frac{1}{(p^2+1)^2} \right\} = -\frac{t e^{-ti}}{4} - \frac{e^{-ti}}{4i}$$

Поэтому оригиналом для $\frac{1}{(p^2+1)^2}$ служит функция

$$f(t) = -\frac{t}{4} (e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{4} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{4} \right) = -\frac{t}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

Замечание. Пусть заданное изображение может быть записано в виде

$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

причем для функций $F_1(p)$ и $F_2(p)$ оригиналы известны

$$F_1(p) \div f_1(t), \quad F_2(p) \div f_2(t)$$

В этом случае оригинал $F(p)$ может быть найден по теореме свертывания оригиналов

$$F(p) \div f(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \quad (2.38)$$

Примеры для самостоятельной работы.

1. Применяя первую теорему разложения, найти оригиналы следующих изображений

a) $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p^2}}$. Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!(2n)!}$

b) $F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$. Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$

c) $F(p) = p \ln \left(1 + \frac{1}{p^2} \right)$ Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(n+1)(2n)!}$

2. Применяя вторую и третью теорему, найти оригиналы

a) $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$
 Ответ: $f(t) = \frac{1}{5} (\cos t + 2 \sin t) - \frac{1}{5} e^{-t} (\cos t + 3 \sin t)$.

b) $F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+4)^2}$. Ответ: $f(t) = \frac{1}{16} (\cos 2t + 5t \sin t - 1)$.

c) $F(p) = \frac{p^2+p+1}{(p-1)^2(p^2+1)}$. Ответ: $f(t) = \frac{3t^2-1}{4} e^t + \frac{1}{4} (\cos t + \sin t)$

2.9 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить задачу Коши

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t), \quad (2.39)$$

при начальных условиях:

$$\text{при } t = 0, \quad x = x_0, \quad x' = x'_0, \quad x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}, \quad (2.40)$$

Для отыскания самого решения $X(t)$ остается по найденному изображению $\bar{X}(p)$ (2.44) найти оригинал. Заметим, что такой метод отыскания решения уравнения (2.39) при заданных начальных условиях (2.46), позволяет сразу найти нужное частное решение данного уравнения.

Рассмотренный метод решения уравнения (2.39) не лишает нас возможности найти и общее решение уравнения (2.39), достаточно в (2.45) положить $X_0^{(k)} = C_{k+1}$, т.е. считать начальное значение и его производных произвольными постоянными.

2.10 Решение дифференциальных уравнений с кусочно-монотонной правой частью

Пример 17. Найти решение уравнений.

$$y'' + 2y' + y = f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } 0 < t < 2; \\ 3, & \text{при } t > 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Пусть

$$y(t) \div \bar{y}(p),$$

$$y'(t) \div p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y};$$

$$y''(t) \div p^2\bar{y} - p\bar{y}(0) - y(0) = p^2\bar{y};$$

$$f(t) = \sigma(t) + 2\sigma(t-2) \div \frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-2p}.$$

Запишем изображение дифференциального уравнения

$$p^2\bar{y} + 2p\bar{y} + \bar{y} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-2p};$$

$$(p^2 + 2p + 1)\bar{y} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-2p}, \text{отсюда}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{p(p+1)^2} + \frac{2}{p(p+1)^2}e^{-2p}.$$

Найдем разложение дроби $\frac{1}{p(p+1)^2}$ на сумму простейших

$$\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p+1)^2} + \frac{A_3}{p+1} = \frac{A_1(p+1)^2 + A_2p + A_3p(p+1)}{p(p+1)^2},$$

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = -1$$

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \right) + 2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \right) e^{-2p}.$$

Найдем по известному изображению оригинал, то есть искомое решение данного дифференциального уравнения

$$y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t} + 2(1 - (t-1)e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)})\sigma(t-2),$$

$$\text{при } t > 2, \quad y(t) = 3 - [(1 + 2e^2)t + 1]e^{-1}.$$

Примеры для самостоятельной работы.

Найти частные решения дифференциальных уравнений

$$1. \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + y = f(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0;$$

$$2. \quad \dot{y} + y = f(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0;$$

$$3. \quad \ddot{y} + y = f(t), \quad y(0) = y_0.$$

Значение функции $f(t)$ (их графики или аналитические выражения) взять из раздела 3 №1, 2.

Задачи управления

Пример 18. Найти величину параметра при котором решение дифференциального уравнения $y' + ky = f(t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$, где

$$f(t) = \begin{cases} h, & \text{при } 0 < t < T, \\ 0, & \text{при } t > T, \end{cases}$$

при $t \geq T$ будет $y \equiv 0$.

Решение. Используя единичную функцию Хевисайда и теорему запаздывания, найдем $f(t) = h[\sigma(t) - \sigma(t - T)]$.

Пусть

$$y(t) \div \bar{y}(p),$$

$$y'(t) \div p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - y_0$$

$$f(t) \div \frac{h}{p}(1 - e^{-Tp})$$

Запишем изображение данного дифференциального уравнения

$$p\bar{y}(p) - y_0 + k\bar{y} = \frac{h}{p}(1 - e^{-Tp}),$$

$$(p + k)\bar{y} = y_0 + \frac{h}{p}(1 - e^{-Tp}).$$

Изображение искомого решения

$$\bar{y} = \frac{y_0}{p + k} + \frac{h}{p(p + k)}(1 - e^{-Tp}).$$

Учитывая, что $\frac{h}{p(p+k)} = \frac{h}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+k} \right)$, перепишем

$$\bar{y} = \frac{y_0}{p + k} + \frac{h}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + k} \right) (1 - e^{-Tp})$$

Запишем оригинал по изображению

$$y(t) = y_0 e^{-kt} + \frac{h}{p}(1 - e^{-kt}) - \frac{h}{p}(1 - e^{-k(t-T)})\sigma(t - T). \quad (2.47)$$

При $t \geq T \Rightarrow y(t) \equiv 0$. Используя (2.44) найдем

$$y_0 e^{-kt} + \frac{h}{p} - \frac{h}{p} e^{-kt} - \frac{h}{p} + \frac{h}{p} e^{-k(t-T)} \equiv 0,$$

$$e^{-kt} \left[y_0 - \frac{h}{p}(1 - e^{-kT}) \right] \equiv 0,$$

Так как $e^{-kt} \neq 0$, то

$$y_0 - \frac{h}{p}(1 - e^{-kT}) \equiv 0. \quad (2.48)$$

Из этого равенства найдем h : $h = -\frac{ky_0}{e^{-kT}-1}$.

Пример 19. Найти величину продолжительности импульса T при котором решение дифференциального уравнения $y' + ky = f(t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$, где

$$f(t) = \begin{cases} h, & \text{при } 0 < t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T; \end{cases}$$

при $t \geq T$, будет $y(t) = 0$.

Используя результат примера 18, (2.45) найдем T .

$$y_0 k = h(1 - e^{-kT}) \Rightarrow \frac{k}{h} y_0 - 1 = -e^{-kT} \Rightarrow e^{-kT} = 1 - \frac{k}{h} y_0,$$

отсюда $T = \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{h} y_0 \right)$ – продолжительности импульса.

Задача имеет смысл (решение), если выполняется условие $y_0 > \frac{h}{k}$.

2.11 Нахождение периодических решений линейных дифференциальных уравнений с периодической правой частью

На конкретных примерах покажем, как находить периодических решений линейных дифференциальных уравнений с периодической правой частью.

Пусть поведение некоторого элемента системы можно описать дифференциальным уравнением в виде

$$\dot{y} + \alpha y = f(t). \quad (2.49)$$

Здесь $f(t)$ – входной сигнал (известная функция времени), $y(t)$ – выходной сигнал искомой величины, α – заданное число.

Известно, что входной сигнал представляет собой периодическую функцию периода T , требуется построить периодическое решение выходного сигнала с тем же периодом T .

Пример 20. Пусть входной сигнал представляет собой периодическую функцию $f(t)$ с периодом T (изображенную на рисунке 8).

Требуется построить выходной сигнал с тем же периодом.

Решение. Найдем изображение периодического сигнала.

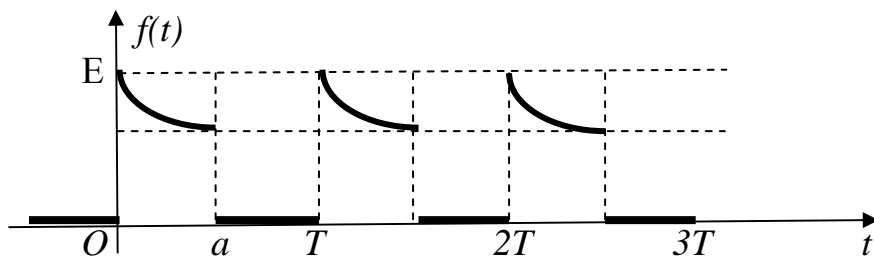


Рисунок 8

$$\tau = T.$$

$$f_0(t) = \begin{cases} Ee^{-\frac{t}{T}}, & \text{при } 0 < t \leq a, \\ 0, & \text{при } t > a. \end{cases}$$

$$f_0(t) = E \left[e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t) - e^{-\frac{a}{T}} e^{-\frac{t-a}{T}} \sigma(t-a) \right]$$

Тогда изображение $f_0(t) \div F_0(t)$,

$$F_0(t) = E \left[\frac{1}{p + \frac{1}{T}} - \frac{e^{-\frac{a}{T}}}{p + \frac{1}{T}} e^{-ap} \right] = \frac{E}{p + \frac{1}{T}} \left[1 - e^{-a(p + \frac{1}{T})} \right];$$

и

$$F(p) = \frac{E}{p + \frac{1}{T}} \cdot \frac{1 - e^{-a(p + \frac{1}{T})}}{1 - e^{-Tp}}$$

При каком значении параметров a, T, E, α решение дифференциального уравнения $\dot{y} + \alpha y = e(t)$, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = y_0$, будет периодическим с периодом T ?

Пусть $y \div \bar{y}(p)$, тогда $\dot{y} \div \bar{y}(p) - y_0$, $e(t) \div F(p)$.

Запишем изображение дифференциального уравнения

$$p\bar{y} - y_0 + \alpha\bar{y} = F(p),$$

$$(p + \alpha)\bar{y} = F(p) + y_0,$$

$$\bar{y} = \frac{y_0}{p + \alpha} + \frac{F(p)}{p + \alpha}.$$

Или

$$\bar{y} = \frac{y_0}{p + \alpha} + \frac{E}{\left(p + \frac{1}{T}\right)(p + \alpha)} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha\left(p + \frac{1}{T}\right)}}{1 - e^{-Tp}}$$

Перепишем $\bar{y}(p)$ в виде:

$$\bar{y}_0(p) = \left[\frac{y_0}{p + \alpha} (1 - e^{-Tp}) + \frac{E \left(1 - e^{-\alpha\left(p + \frac{1}{T}\right)}\right)}{\left(p + \frac{1}{T}\right)(p + \alpha)} \right]$$

Найдем оригинал изображения $\bar{y}_0(p)$.

На интервале $0 < t < a$,

$$y_0(t) = \left[y_0 e^{-\alpha t} + \frac{ET}{\alpha T - 1} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\alpha t} \right) \right] \sigma(t),$$

На интервале $a \leq t \leq T$,

$$y_0(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{ET}{\alpha T - 1} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\alpha t} \right) - \frac{ET}{\alpha T - 1} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\alpha t} e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} \right).$$

Для $t > T$, $y_0(t > T) \equiv 0$ отсюда

$$y_0 \left(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t-T)} \right) + \frac{ET}{\alpha T - 1} e^{-\alpha t} \left(e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1 \right) \equiv 0,$$

$$\text{или } \left\{ y_0 [1 - e^{\alpha t}] + \frac{ET}{\alpha T - 1} \left(e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1 \right) \right\} e^{-\alpha t} \equiv 0.$$

Следует равенство

$$y_0 [e^{\alpha t} - 1] = \frac{ET}{\alpha T - 1} \left(e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1 \right).$$

Если $y_0(0) = \frac{ET}{\alpha T - 1} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1}{e^{\alpha T} - 1}$, то решение дифференциального уравнения будет периодической функцией, период $t=T$.

Они имеют вид при $0 < t < a$,

$$y_0 = \frac{ET}{\alpha T - 1} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1} e^{-\alpha t} + \frac{ET}{\alpha T - 1} e^{-\frac{t}{T}};$$

при $a \leq t \leq T$

$$y_0 = \frac{ET}{\alpha T - 1} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1}{e^{\alpha T} - 1} e^{-\alpha(t-T)}.$$

Окончательно

$$y_0(t) = \begin{cases} \frac{ET}{\alpha T - 1} \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1} e^{\alpha t} + e^{-\frac{t}{T}} \right], & \text{при } 0 < t < a, \\ \frac{ET}{\alpha T - 1} \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{T}(\alpha T - 1)} - 1}{e^{\alpha T} - 1} e^{-\alpha(t-T)} \right], & \text{при } a \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Построим входной и выходной сигналы $E(t)$, $y(t)$ на одном периоде

$$a = 1, \quad T = 2, \quad \alpha = 1.$$

$$y_0(t) = \begin{cases} 2Ee^{-\frac{1}{2}t} - 1,8Ee^{-1}, & \text{при } 0 < t < 1, \\ 0,55Ee^{-(t-1)}, & \text{при } 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{при } t > 2. \end{cases}$$

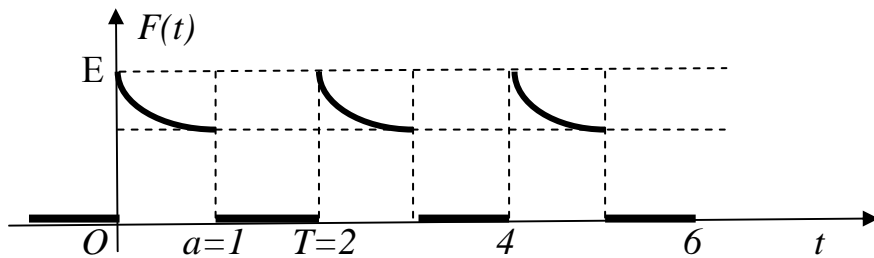
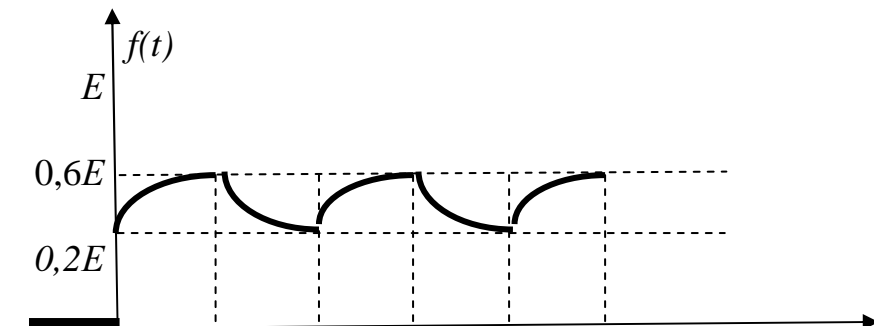


Рисунок 9



$O \quad a=1 \quad T=2$

t

Рисунок 10

Примеры для самостоятельной работы.

1. В контуре (рис.1) подключена периодическая э.д.с. с периодом T :

$$E_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ E_0(t), & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

При каком начальном условии в контуре возникает периодический ток, вызываемый действиями э.д.с.?

2. В контуре (рис.1) подключена периодическая э.д.с. с периодом T :

$$E_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ E_0(t), & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

При каком максимальном значении $E_0(t)$ в контуре возникает периодический ток, вызываемый действием заданных э.д.с.?

Известно, что $f(t)|_{t=0} = I_0$.

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = E(t)$$

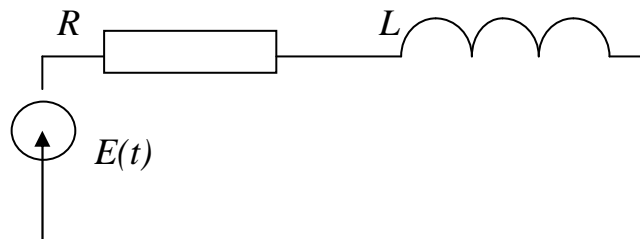


Рисунок 11

3. В контуре (RC) (рисунок 2) подается $U_{\text{вх.}}(t)$ входное напряжение, при этом оно периодическое с периодом T . При каком начальном условии в контуре на выходе возникает периодическое напряжение $U_{\text{вых.}}(t)$ с периодом T , вызванное действием заданного выходного напряжения.

$$U_{1x.0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ U_{1x.0}(t), & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

4. В контуре (RC) (рисунок 2) подается $U_{1x.0}(t)$ входное напряжение, при этом оно периодическое с периодом T . При каком соотношении параметров контура τ входного напряжения на выходе возникает периодическое напряжение $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ с периодом T , вызванное действием входного напряжения.

$$U_{1x.0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ U_{1x.0}(t), & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

$$RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} + U_{\text{ВЫХ}} = U_{1x.0}(t)$$

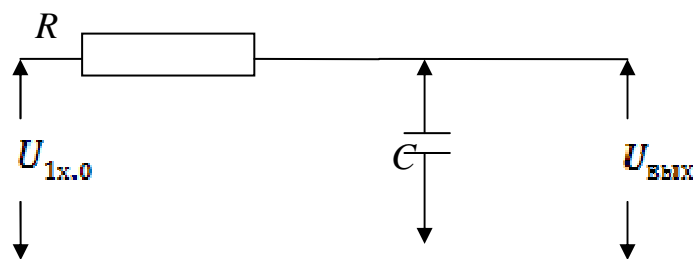


Рисунок 12

Примечание: значение э.д.с. и $U_{1x.0}$ необходимо взять из результатов решения задач для самостоятельных упражнений

Типовой расчет задачи

В контуре RC, изображенном на рисунке 1, подается периодическое входное напряжение $U_{\text{ВХ}}(t)$ с периодом t . При каком наибольшем амплитудном значении входного напряжения на выходе возникает периодическое напряжение $U_{\text{ВЫХ}}(t)$, с периодом T , если известно, что $U_{\text{ВЫХ}}(0) = U_0$.

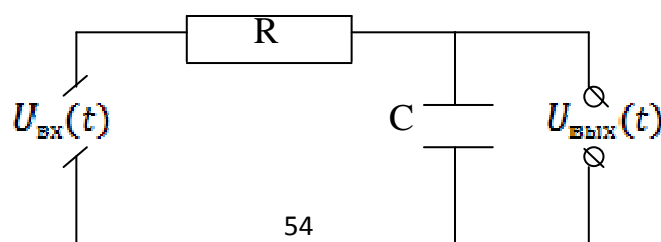


Рисунок 13

Решение. Известно, что дифференциальное уравнение контура RC

$$RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} + U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{ВХ}}(t), \quad U_{\text{ВЫХ}}(0) = U_0, \quad (2.50)$$

график $U_{\text{ВХ}}(t)$ представлен на рисунке

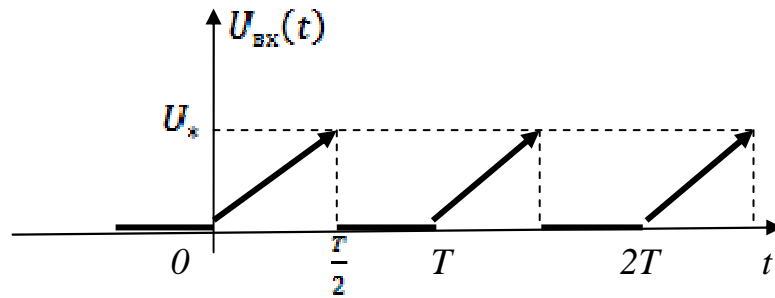


Рисунок 14

Требуется определить при каком значении U_* решение уравнения (2.47), удовлетворяющее начальному условию будет периодическим с периодом T .

Перепишем дифференциальное уравнение (2.47), разделив правую и левую части уравнения на RC.

$$\frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} + \alpha U_{\text{ВЫХ}} = \alpha U_{\text{ВХ}}, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{RC}. \quad (2.51)$$

Пусть $U_{\text{ВЫХ}} \div \bar{U}_{\text{ВЫХ}}(p)$

$$\frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} \div p \bar{U}_{\text{ВЫХ}}(p) - U_0, \quad (2.52)$$

Тогда

$$U_{\text{ВХ}} \div \frac{2U_*}{T} \cdot \frac{1}{p^2} \left(\frac{1 - e^{-\frac{T}{2}p}}{1 - e^{-Tp}} \right) - \frac{U_*}{p} \cdot \frac{e^{-\frac{T}{2}p}}{1 - e^{-Tp}}$$

Подставляя изображение $U_{\text{ВЫХ}}$, $\frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt}$ и $U_{\text{ВХ}}$ в дифференциальное уравнение (2.48) получим «изображающее» уравнение относительно $\bar{U}_{\text{ВЫХ}}(p)$.

$$(p + \alpha) \bar{U}_{\text{ВЫХ}}(p) = U_0 + \frac{2U_*}{T} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{2}p}}{1 - e^{-Tp}} - \frac{U_*}{p} \cdot \frac{e^{-\frac{T}{2}p}}{1 - e^{-Tp}}. \quad (2.53)$$

Из этого равенства найдем изображение искомого решения

$$\bar{U}_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{\bar{U}_0 \text{ВЫХ}(p)}{1 - e^{-Tp}}, \quad (2.54)$$

где

$$\bar{U}_0 \text{ВЫХ}(p) = \frac{U_0}{p+\alpha} (1 - e^{-Tp}) + \frac{2U_*\alpha}{T} \cdot \frac{1}{p^2(p+\alpha)} \left(1 - e^{-\frac{T}{2}p}\right) - \frac{U_*\alpha}{p(p+\alpha)} e^{-\frac{T}{2}p}, \quad (2.55)$$

изображение искомого решения на одном периоде T .

Найдем оригинал изображения (2.52).

Предварительно, найдем разложение дробей на сумму простейших

$$\frac{1}{p^2(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha^2(p+\alpha)}; \quad \frac{\alpha}{p(p+\alpha)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.56)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{U}_* \text{ВЫХ}(p) = & \frac{U_0}{p+\alpha} (1 - e^{-Tp}) + \frac{2U_*}{T} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{p+\alpha} \right) \left(1 - e^{-\frac{T}{2}p}\right) - \\ & - U_* \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} \right) e^{-\frac{T}{2}p}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

На интервалах:

$$0 \leq t < \frac{T}{2}, \quad U_0 \text{ВЫХ}(t) = U_0 e^{-\alpha t} + \frac{2U_*}{T} \left[t - \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha t}) \right], \quad (2.58)$$

$$\frac{T}{2} \leq t < T, \quad U_0 \text{ВЫХ}(t) = U_0 e^{-\alpha t} + U_* \frac{2 - (2 - T\alpha)s^{\frac{\alpha T}{2}}}{T\alpha} e^{-\alpha t}, \quad (2.59)$$

$$t > T, \quad U_0 \text{ВЫХ}(t) \equiv 0,$$

Отсюда

$$U_* = U_0 \frac{(e^{\alpha T} - 1)T\alpha}{2 + (T\alpha - 2)s^{\frac{\alpha T}{2}}}. \quad (2.60)$$

При U_* , удовлетворяющем равенству (2.58) выходное напряжение будет периодической функцией периода T , при этом аналитическое выражение $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ на одном периоде имеет вид:

$$U_0 \text{ВЫХ}(t) = \begin{cases} U_0 e^{-\alpha t} + \frac{2U_* (e^{\alpha t} - 1)}{2 + (T\alpha - 2)s^{\frac{\alpha T}{2}}} [at - (1 - e^{-\alpha t})], & 0 \leq t < \frac{T}{2}; \\ U_0 e^{-\alpha(t-T)}, & \frac{T}{2} \leq t < T; \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (2.61)$$

Построим графики входного и выходного сигнала

$$\alpha T = 2; \quad \alpha = 0,5; \quad T = 4; \quad U_0 = 1.$$

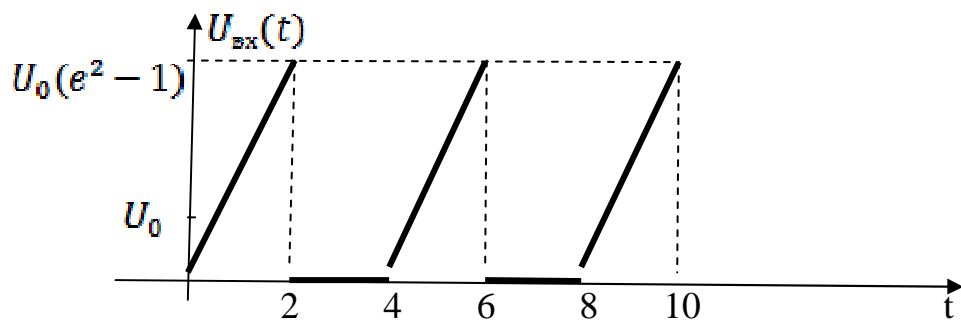


Рисунок 15

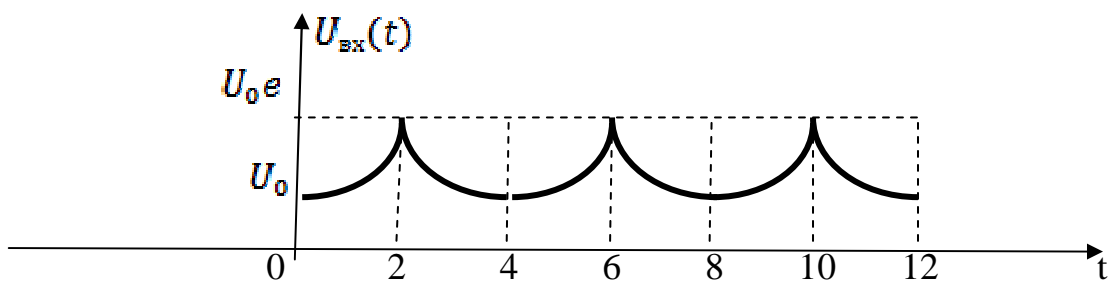


Рисунок 16

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ И КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(t)$ с $\omega = 2\pi$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$1.1 \quad f(t) = \begin{cases} 1-t, & -\pi \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.2 \quad f(t) = \begin{cases} 5t-1, & -\pi \leq t < 0, \\ 3t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.3 \quad f(t) = \begin{cases} t-1, & -\pi \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.4 \quad f(t) = \begin{cases} 2-t, & -\pi \leq t < 0, \\ t+1, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.5 \quad f(t) = \begin{cases} 1-t, & -\pi \leq t < 0, \\ 1+2t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.6 \quad f(t) = \begin{cases} 2, & -\pi \leq t < 0, \\ t+2, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.7 \quad f(t) = \begin{cases} 2-t, & -\pi \leq t < 0, \\ 2t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.8 \quad f(t) = \begin{cases} 3t+1, & -\pi \leq t < 0, \\ 1+t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.9 \quad f(t) = \begin{cases} -t+1, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.10 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ t+1, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.11 \quad f(t) = \begin{cases} 5+t, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.12 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ t+1, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.13 \quad f(t) = \begin{cases} t-1, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.14 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ 3t+1, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.15 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ 1+2t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.16 \quad f(t) = \begin{cases} t+2, & -\pi \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.17 \quad f(t) = \begin{cases} 7-3t, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.18 \quad f(t) = \begin{cases} 5-t, & -\pi \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.19 \quad f(t) = \begin{cases} -t+1, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.20 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ 5+t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.21 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ t+4, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.22 \quad f(t) = \begin{cases} 2t-1, & -\pi \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.23 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ t+1, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.24 \quad f(t) = \begin{cases} 3-t, & -\pi \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

$$1.25 \quad f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0, \\ t-2, & 0 \leq t < \pi; \end{cases}$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, заданную на отрезке $[0; l]$, доопределив ее четным и нечетным образом:

$$2.1 \quad f(t) = -t^2 - 2, \quad l = 1.$$

$$1.2 \quad f(t) = -t^2 + 1, \quad l = 1.$$

$$2.2 \quad f(t) = -t^2, \quad l = 1.$$

$$2.4 \quad f(t) = t^2 - 4, \quad l = 1.$$

$$2.5 \quad f(t) = t^2 - 1, \quad l = 2.$$

$$2.6 \quad f(t) = -t^2, \quad l = 1.$$

$$2.7 \quad f(t) = t^2 - 1, \quad l = 1.$$

$$2.8 \quad f(t) = t^2, \quad l = 2.$$

$$2.9 \quad f(t) = t^2 + 1, \quad l = 3.$$

$$2.10 \quad f(t) = t^2 + 3, \quad l = 1.$$

$$2.11 \quad f(t) = 2^t, \quad l = 3.$$

$$2.12 \quad f(t) = t^2 - 1, \quad l = 2.$$

$$2.13 \quad f(t) = t^2 + 3, \quad l = 2.$$

$$2.14 \quad f(t) = t^2 + 1, \quad l = 1.$$

$$2.15 \quad f(t) = t^2 + 2, \quad l = 1.$$

$$2.16 \quad f(t) = -t^2 + 1, \quad l = 2.$$

$$2.17 \quad f(t) = e^{-t}, \quad l = 2.$$

$$2.18 \quad f(t) = \operatorname{sh} t, \quad l = 3.$$

$$2.19 \quad f(t) = \operatorname{ch} \frac{t}{3}, \quad l = 1.$$

$$2.20 \quad f(t) = \operatorname{sh} \frac{t}{2}, \quad l = 2.$$

$$2.21 \quad f(t) = 2^{t-1}, \quad l = 4.$$

$$2.22 \quad f(t) = \operatorname{ch} 3t, \quad l = 3.$$

$$2.23 \quad f(t) = e^{-2t+1}, \quad l = 1.$$

$$2.24 \quad f(t) = \operatorname{sh} 2t, \quad l = 2.$$

$$2.25 \quad f(t) = t^2, \quad l = 3.$$

3. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(t)$ с периодом $\omega = 2l$:

$$3.1 \quad f(t) = 5 - |t|, \quad -5 < t < 5, \quad l = 5.$$

$$3.2 \quad f(t) = -t, \quad -2 < t < 2, \quad l = 2.$$

$$3.3 \quad f(t) = |t| + 3, \quad -2 < t < 2, \quad l = 2$$

$$3.4 \quad f(t) = t, \quad -3 < t < 3, \quad l = 3.$$

$$3.5 \quad f(t) = 3 - |t|, \quad -4 < t < 4, \quad l = 4.$$

$$3.6 \quad f(t) = -t, \quad -1 < t < 1, \quad l = 1.$$

- 3.7 $f(t) = 3 + |t|, -3 < t < 3, l = 3.$ 3.8 $f(t) = t, -2 < t < 2, l = 2.$
 3.9 $f(t) = 1 + |t|, -1 < t < 1, l = 1.$ 3.10 $f(t) = |t|, -1 < t < 1, l = 1.$
 3.11 $f(t) = |t| - 2, -1 < t < 1, l = 1.$ 3.12 $f(t) = t, -1 < t < 1, l = 1.$
 3.13 $f(t) = |t| + 4, -2 < t < 2, l = 2.$ 3.14 $f(t) = |t|, -3 < t < 3, l = 3.$
 3.15 $f(t) = |t| + 1, -4 < t < 4, l = 4.$ 3.16 $f(t) = -t, -5 < t < 5, l = 5.$
 3.17 $f(t) = |t| + 2, -2 < t < 2, l = 2$ 3.18 $f(t) = t, -4 < t < 4, l = 4.$
 3.19 $f(t) = |t| - 4, -1 < t < 1, l = 1.$ 3.20 $f(t) = |t|, -2 < t < 2, l = 2.$
 3.21 $f(t) = |t| - 3, -2 < t < 2, l = 2.$ 3.22 $f(t) = t, -5 < t < 5, l = 5.$
 3.23 $f(t) = 1 - |t|, -1 < t < 1, l = 1.$ 3.24 $f(t) = |t|, -4 < t < 4, l = 4.$
 3.25 $f(t) = 2 - |t|, -2 < t < 2, l = 2.$

4.1-4.25. Найти изображения функций, заданных графиками (Рис.1-25)

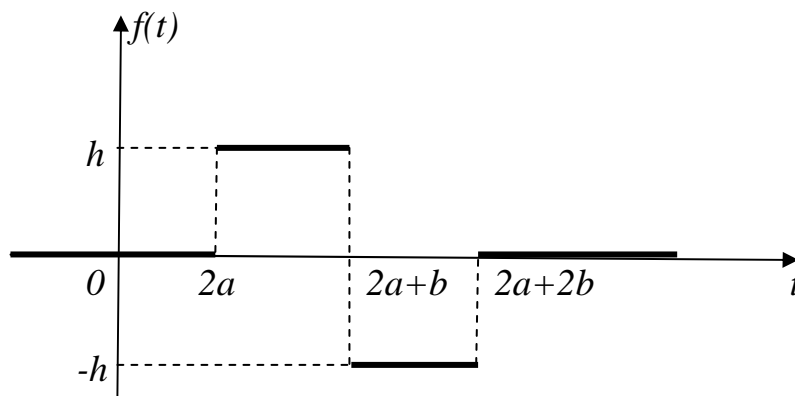
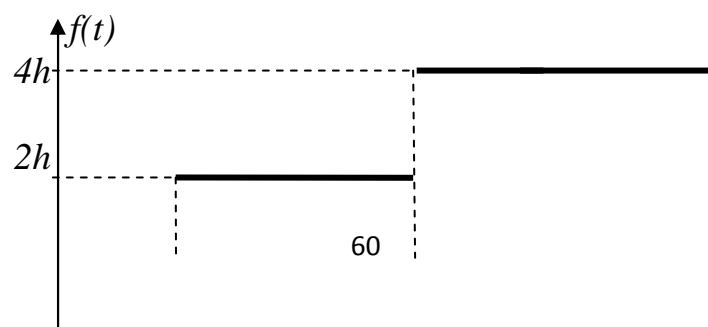


Рисунок 1



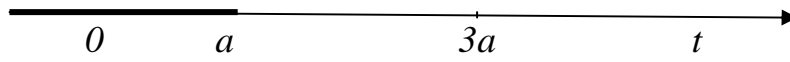


Рисунок 2

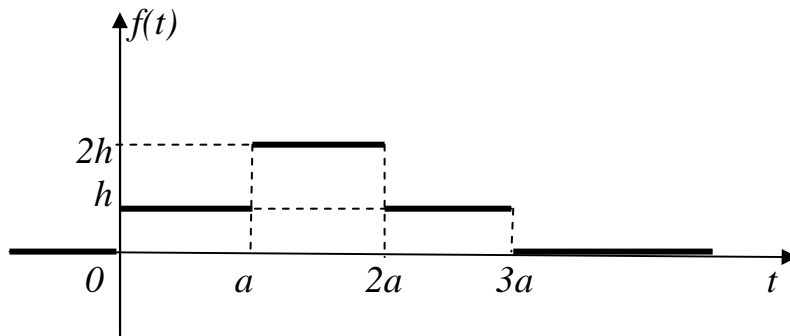


Рисунок 3

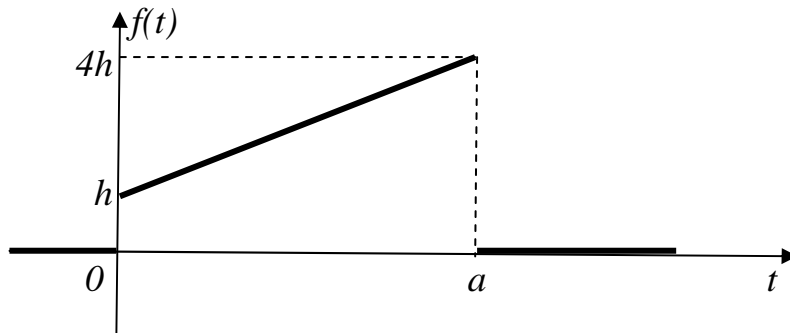


Рисунок 4

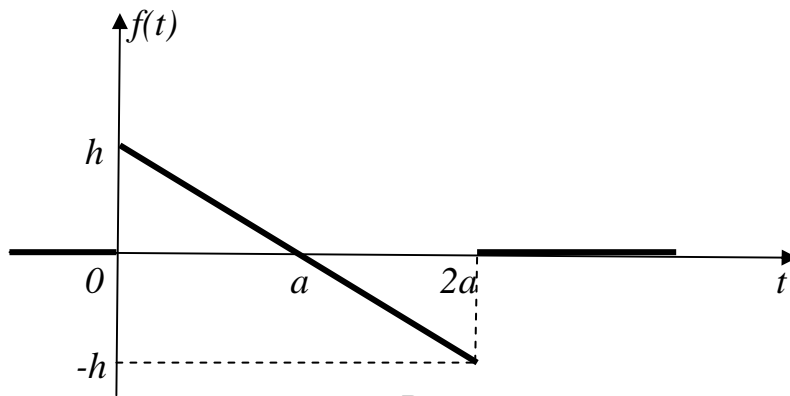
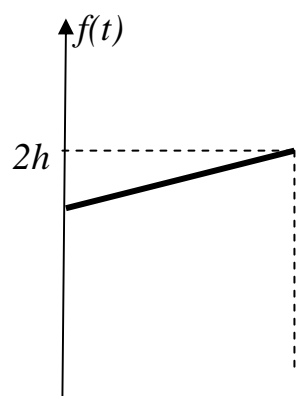


Рисунок 5



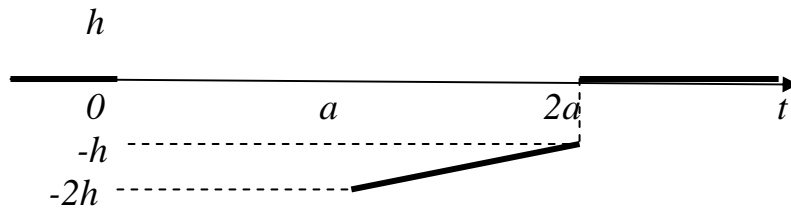


Рисунок 6

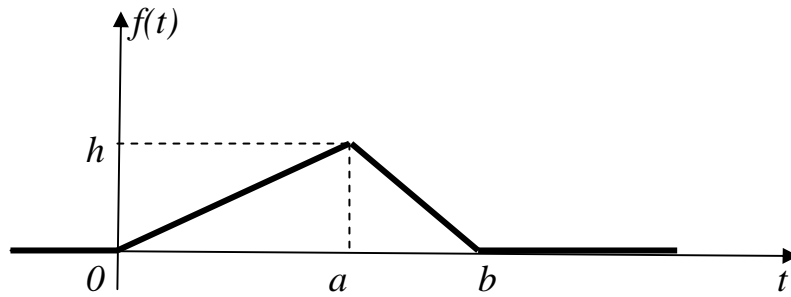


Рисунок 7

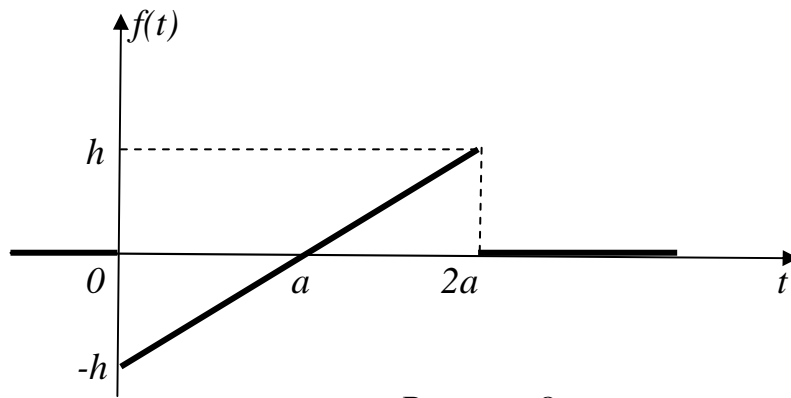


Рисунок 8

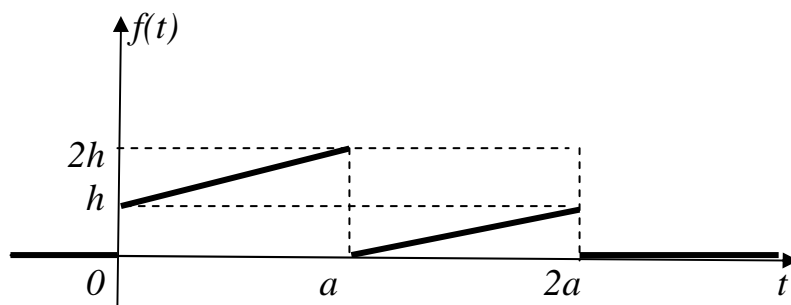
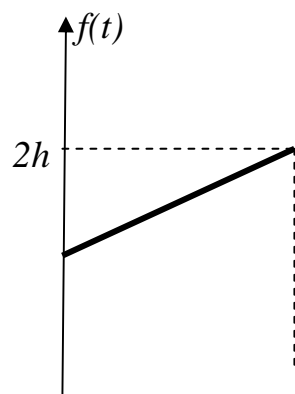


Рисунок 9



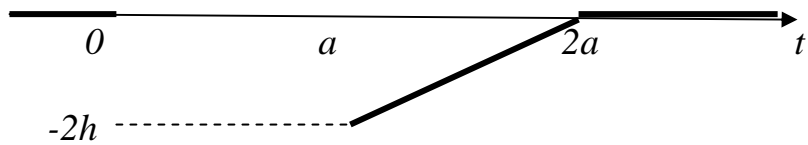


Рисунок 10

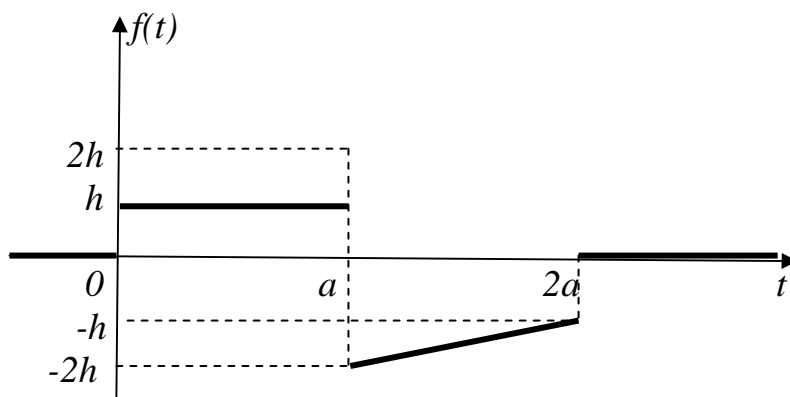


Рисунок 11

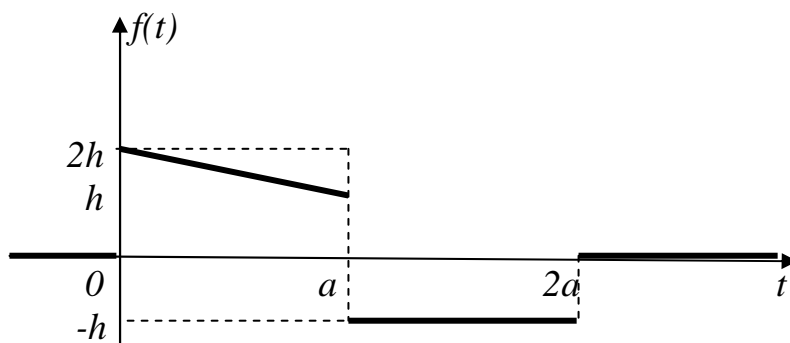


Рисунок 12

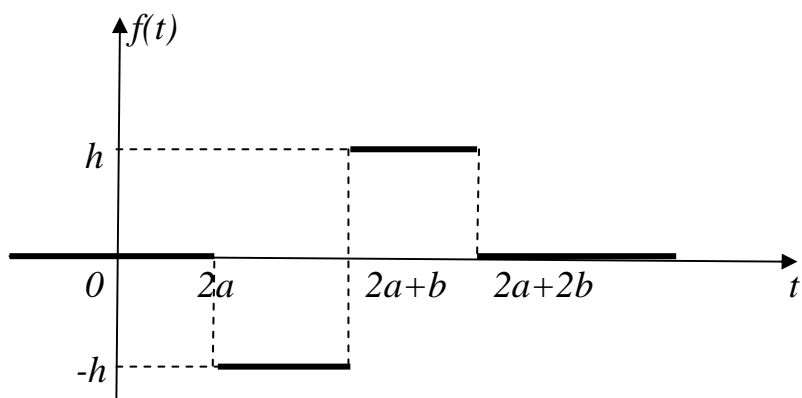
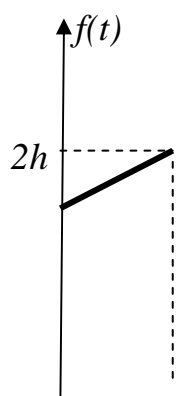


Рисунок 13



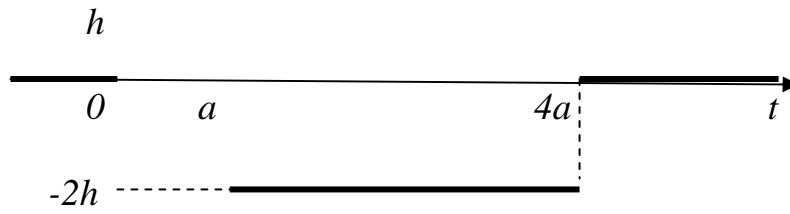


Рисунок 14

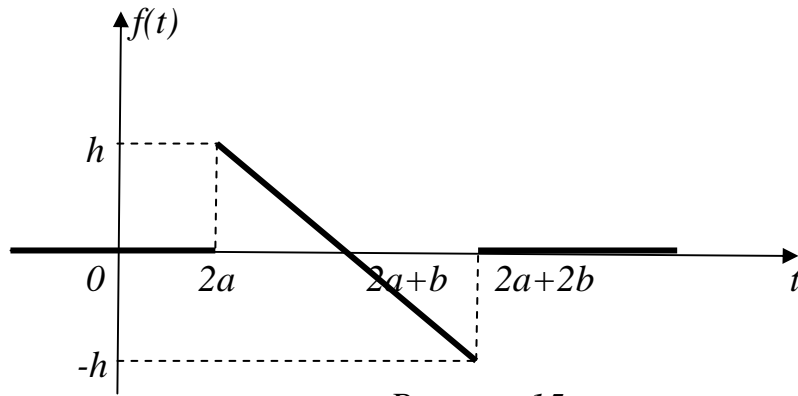


Рисунок 15

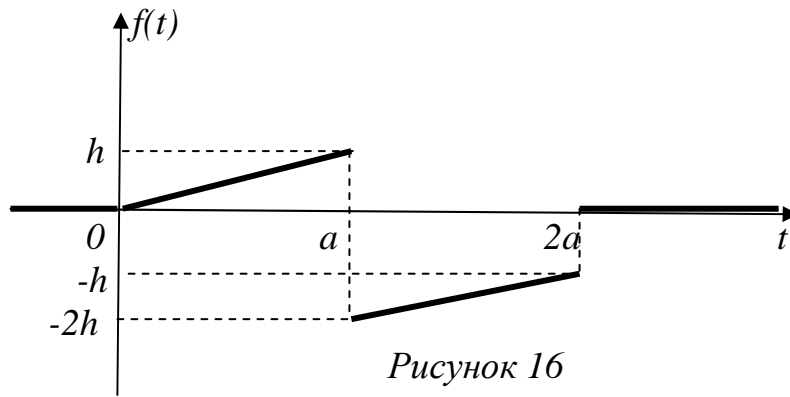


Рисунок 16

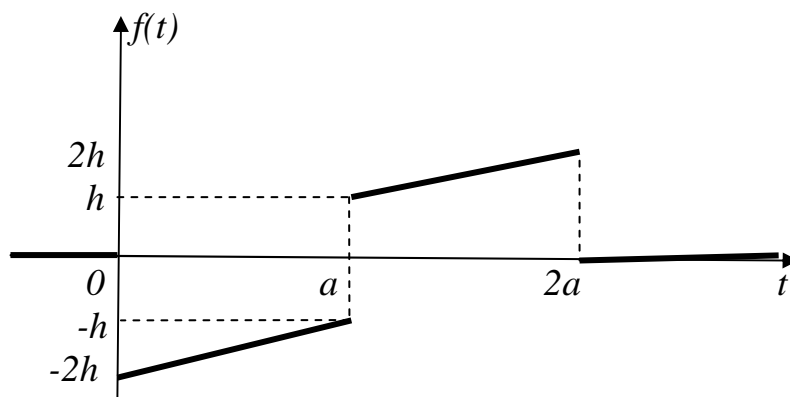
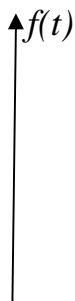


Рисунок 17



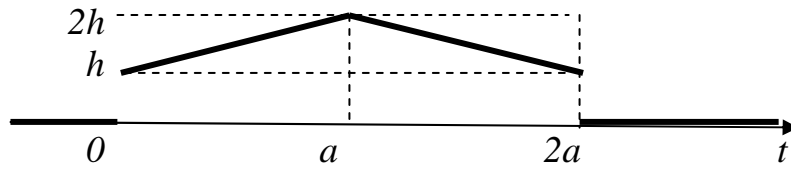


Рисунок 18

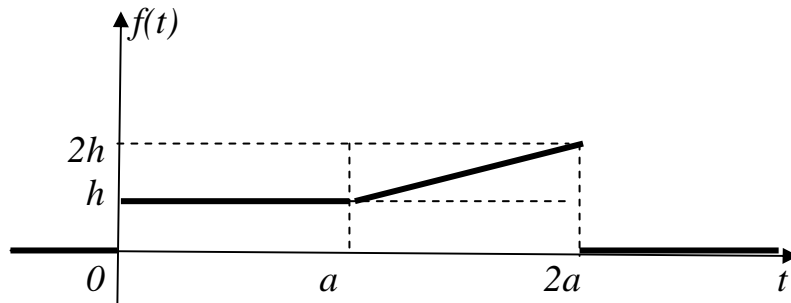


Рисунок 19

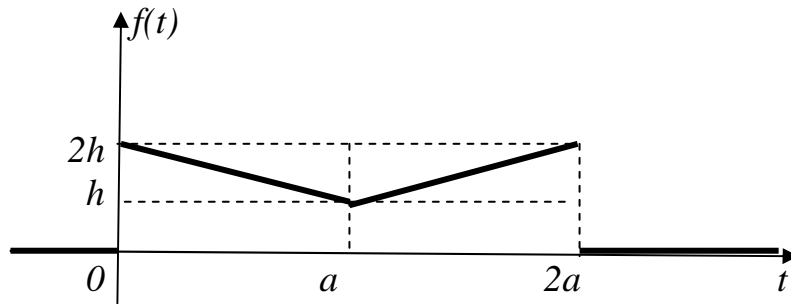


Рисунок 20

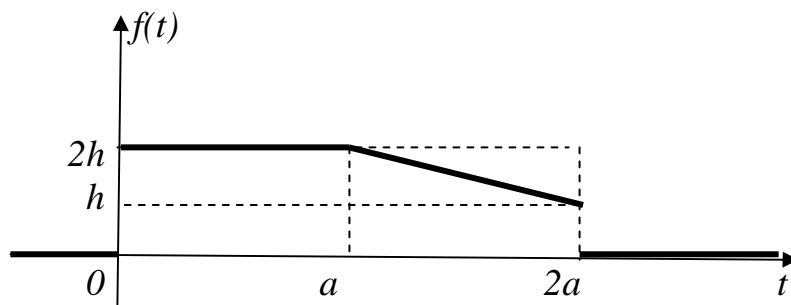
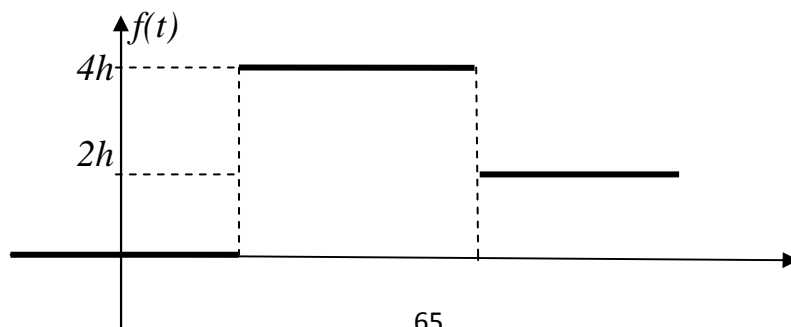


Рисунок 21



0 a 3a t

Рисунок 22

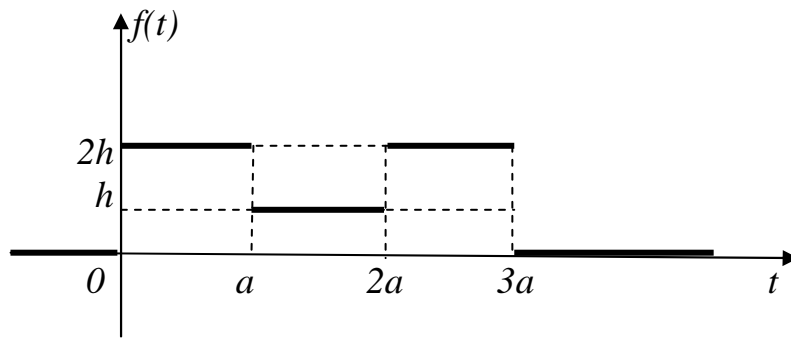


Рисунок 23

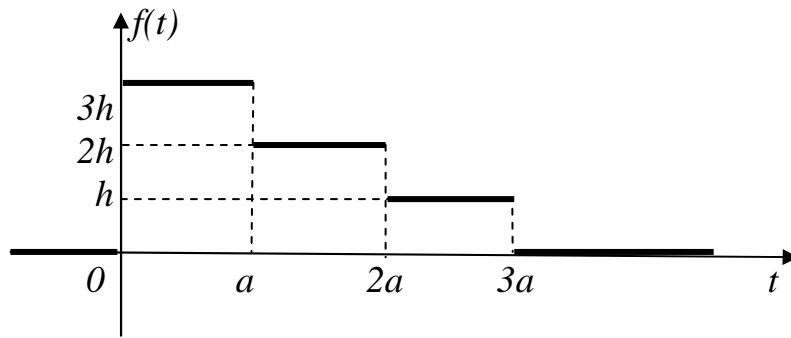


Рисунок 24

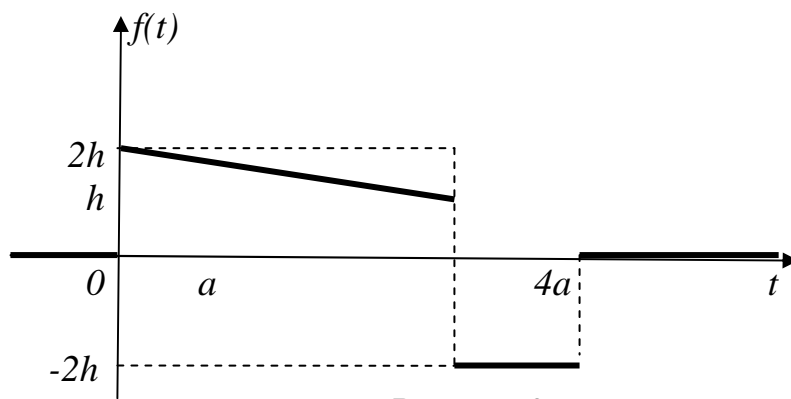
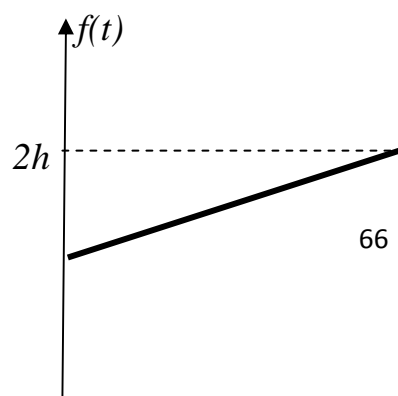


Рисунок 25



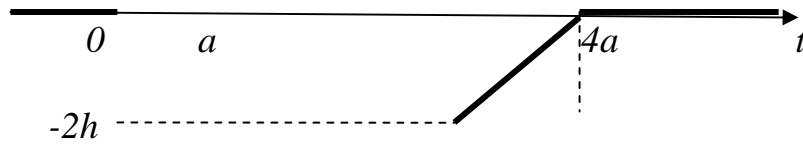


Рисунок 26

5. Найти изображение периодического сигнала

5.1

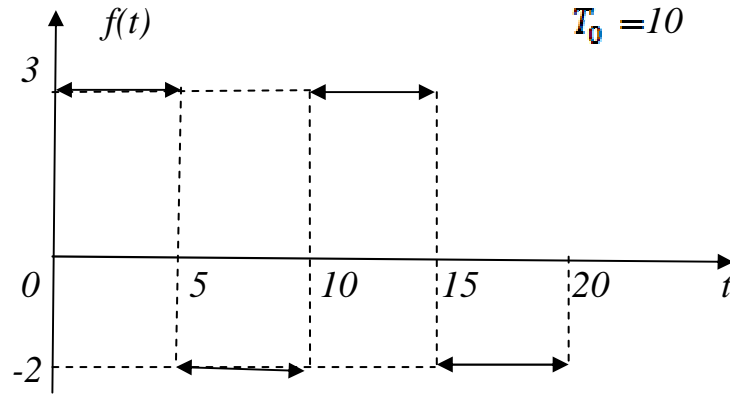


Рисунок 27

5.2

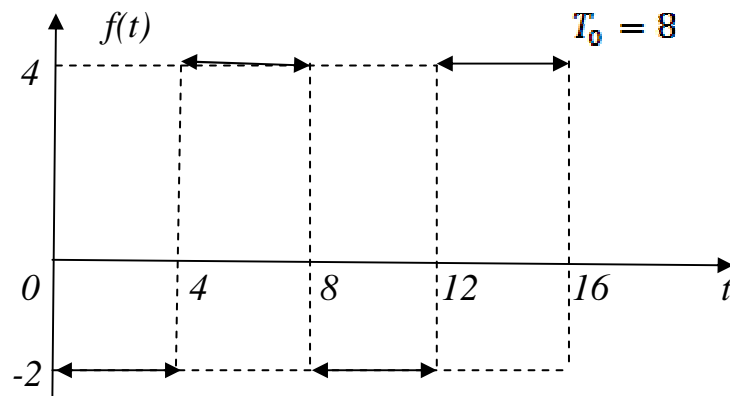


Рисунок 28

5.3

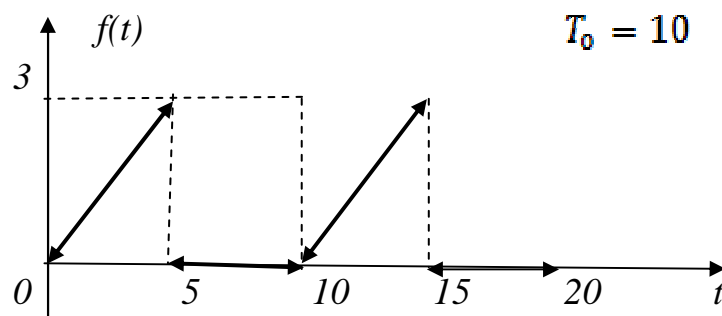
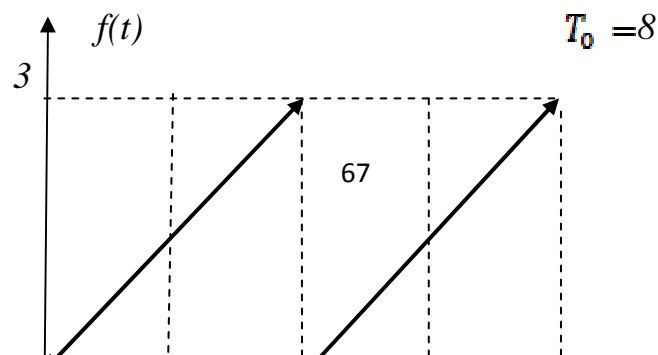


Рисунок 29

5.4





-3

Рисунок 30

5.5

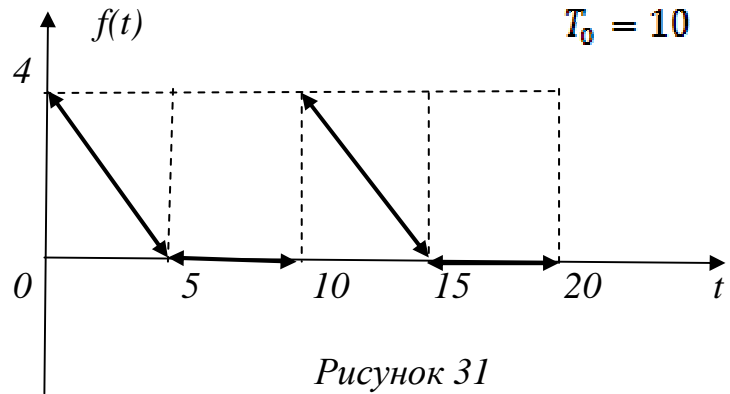


Рисунок 31

5.6

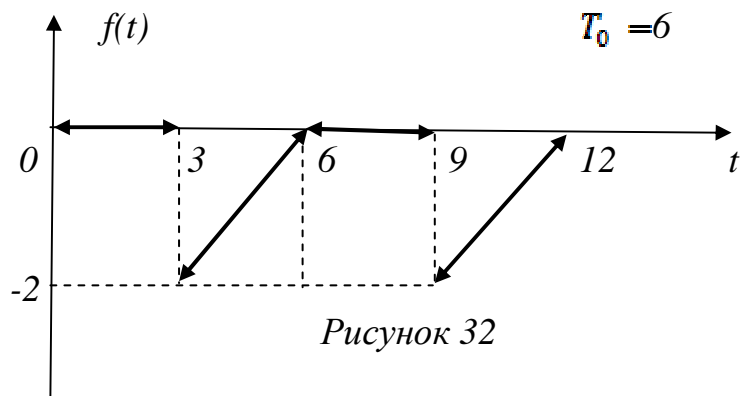


Рисунок 32

5.7

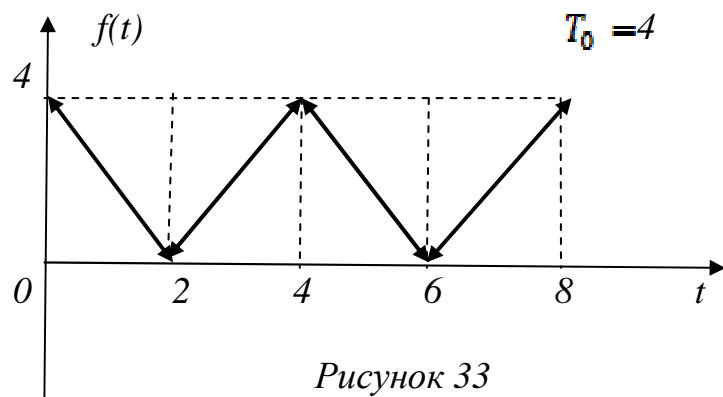
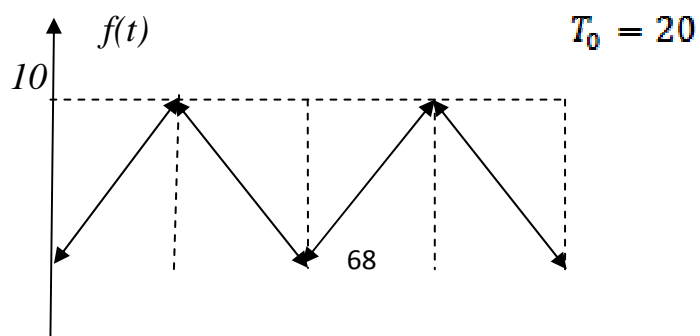


Рисунок 33

5.8



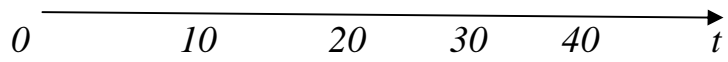


Рисунок 34

5.9

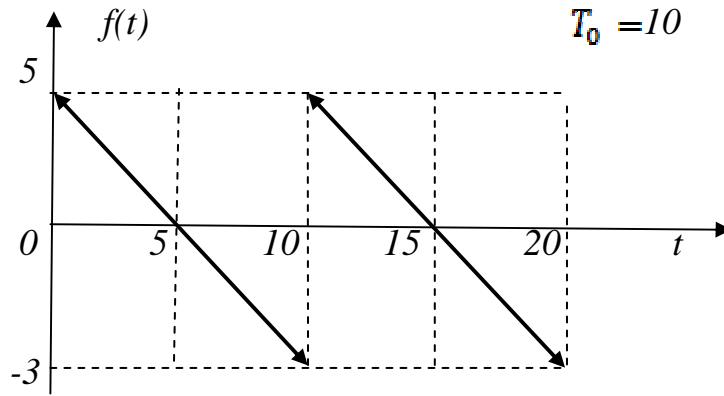


Рисунок 35

5.10

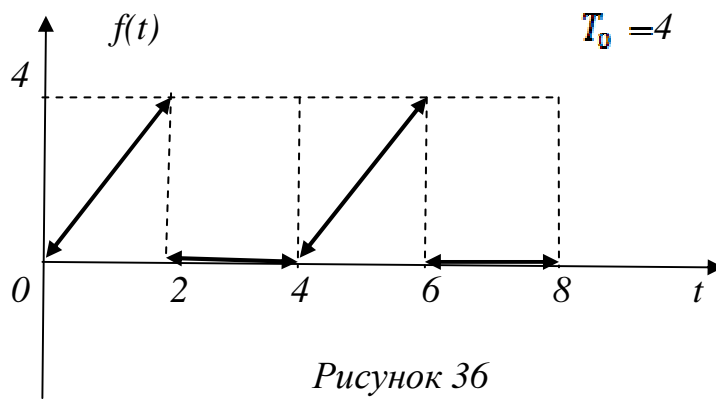


Рисунок 36

5.11

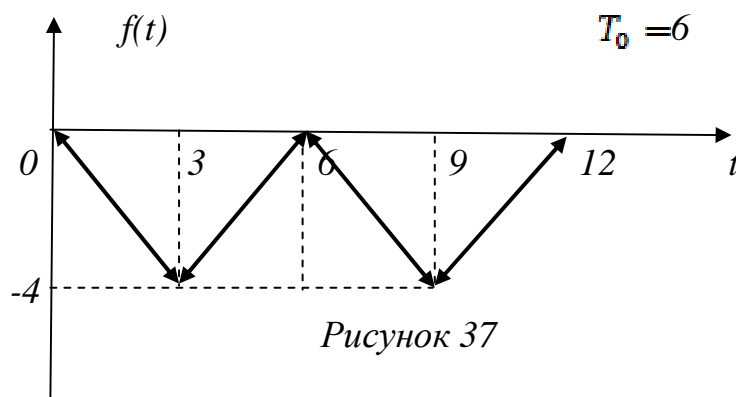
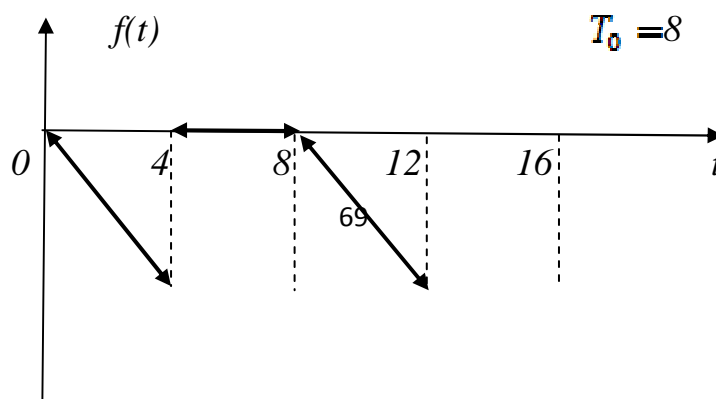


Рисунок 37

5.12



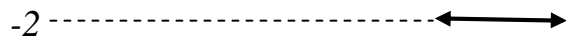


Рисунок 38

5.13

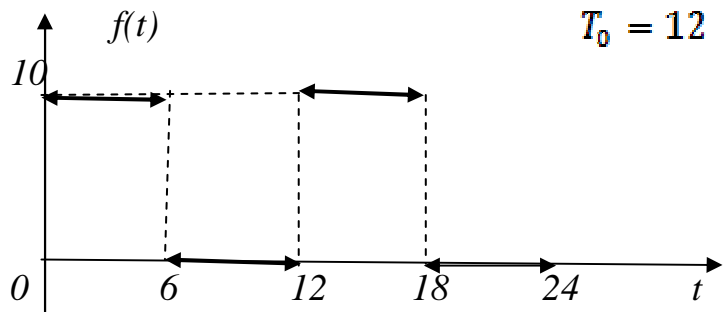


Рисунок 39

5.14

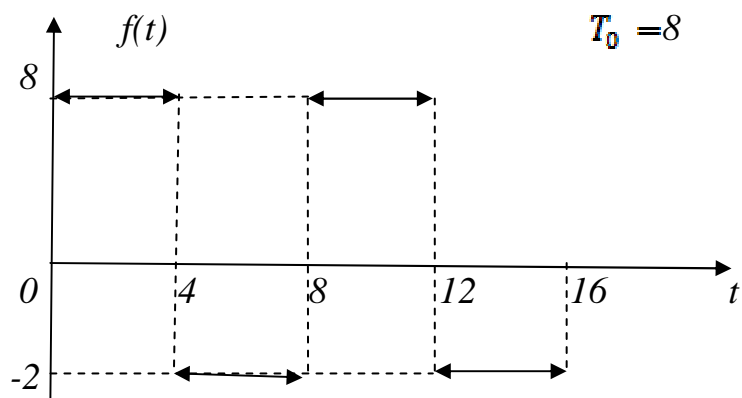


Рисунок 40

5.15

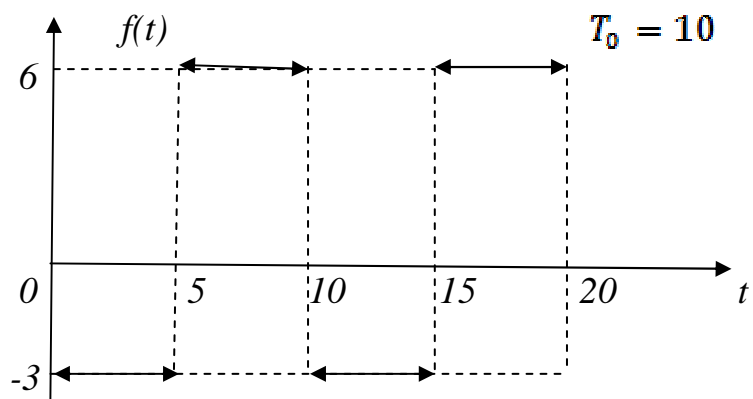
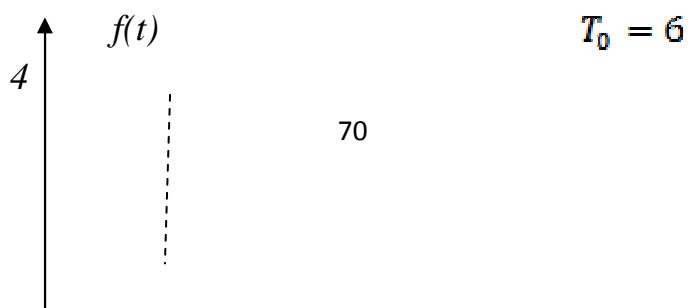


Рисунок 41

5.16



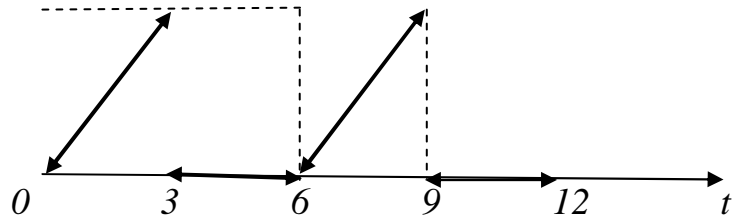


Рисунок 42

5.17

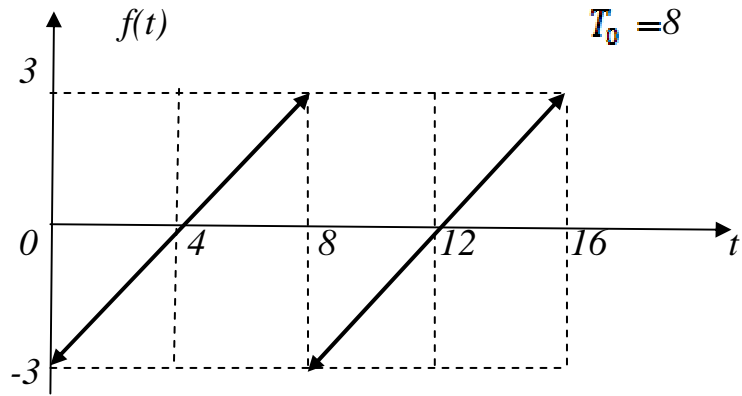


Рисунок 43

5.18

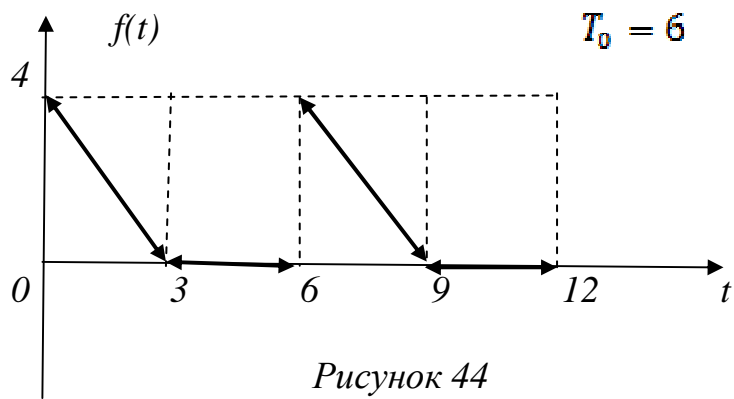


Рисунок 44

5.19

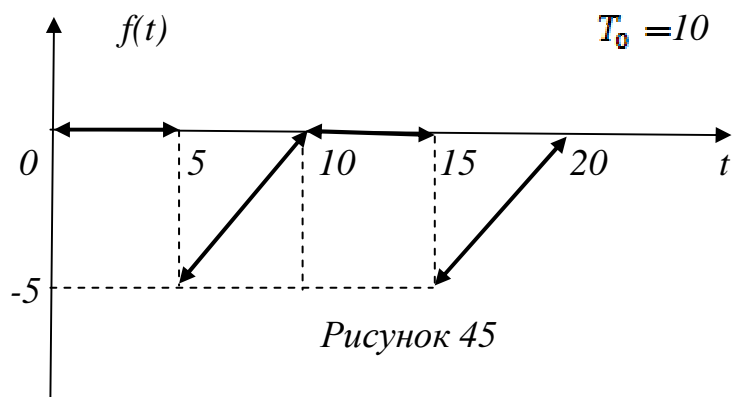
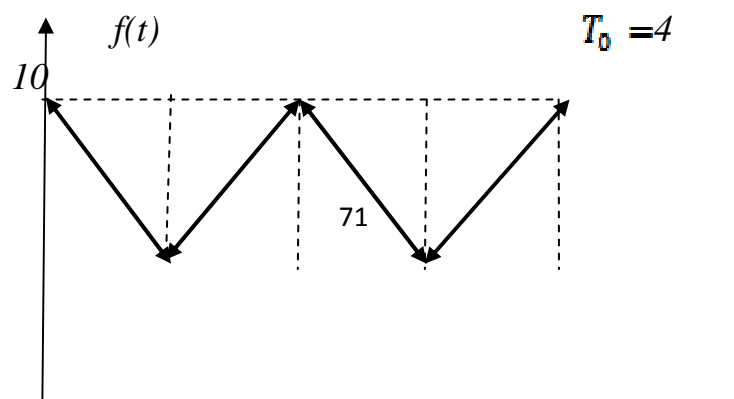


Рисунок 45

5.20



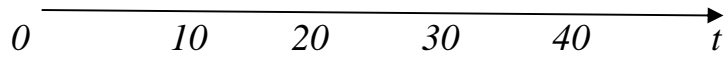


Рисунок 46

5.21

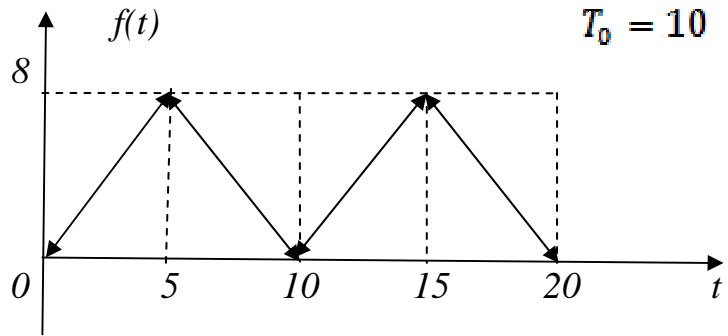


Рисунок 47

5.22

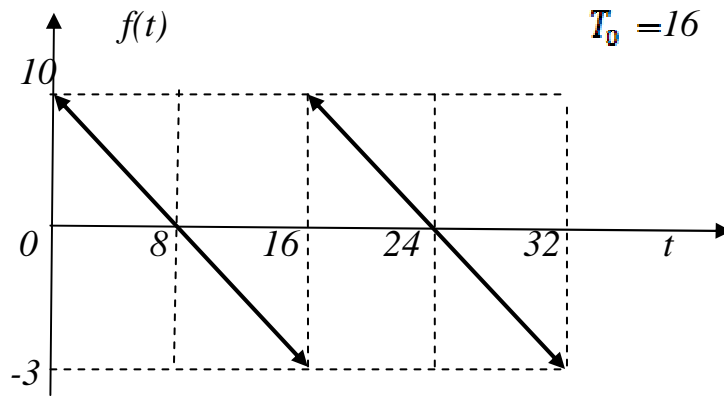


Рисунок 48

5.23

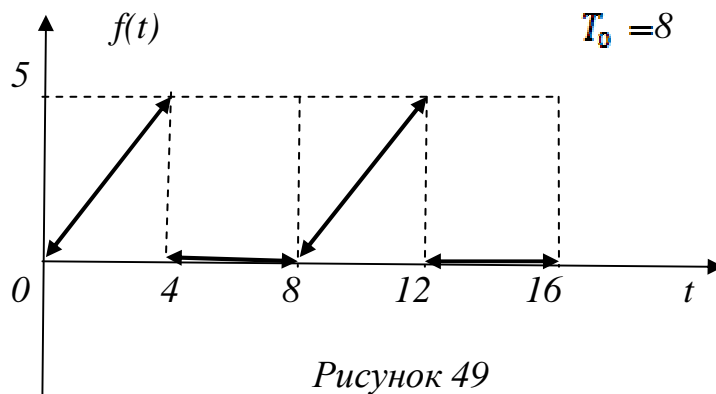
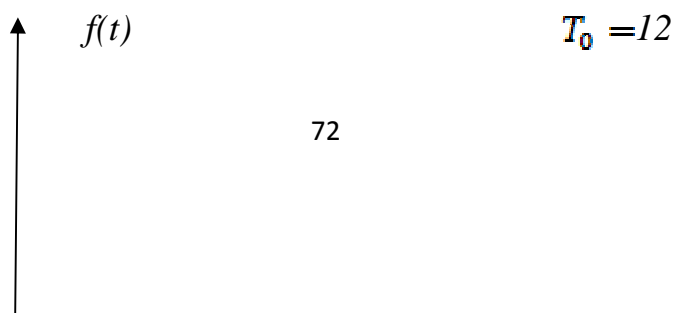


Рисунок 49

5.24



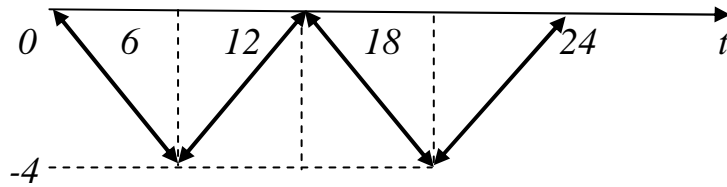


Рисунок 50

5.25

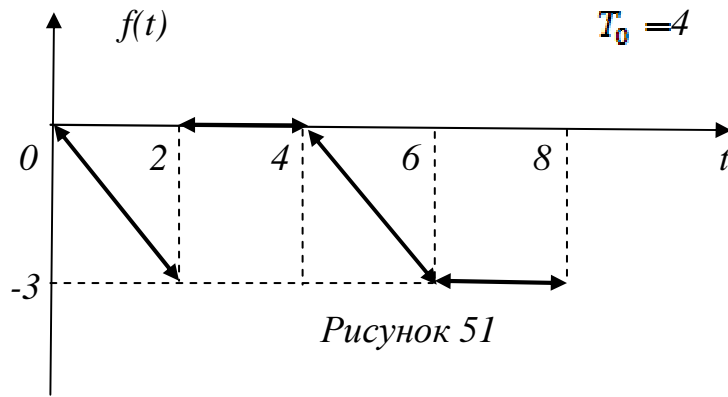


Рисунок 51

5.26

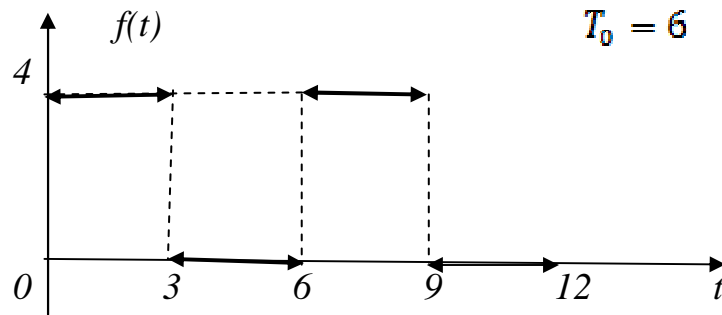


Рисунок 52

6. Задание расчетно-графической работы

1. Провести спектральный анализ изображенного периодического сигнала (изображение периодического сигнала дано в № 5).
2. Найти изображение периодического сигнала.
3. Найти периодическое решение дифференциального уравнения $y' + \alpha y = f(t)$ с периодической правой частью периода T_0 .

Навчальне видання

**Методичні вказівки
до основ математичних методів теорії автоматичного
керування**

з дисципліни «Теорія автоматичного керування»

для студентів факультету автоматизації

усіх форм навчання

(Російською мовою)

Укладачі: Обухов Анатолій Миколайович
 Левандовська Ірина Володимирівна

Редактор Ініціали Прізвище
Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.

