Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

Автори: В. М. Астахов,

Г. С. Буланов,

В. О. Паламарчук

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

для студентів денного і заочного відділень

До друку прим.
Перший проректор
________А. М. Фесенко

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 2 від 30.10.2008

Краматорськ 2009

КРАМАТОРСЬК

В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

для студентів денного і заочного відділень

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 2 від 30.10.2008

Краматорськ 2009

УДК 519.2
ББК 22.171
А 91

Рецензенти:

Бондарев Б. В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики Донецького національного університету;

Улітін Г. М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Донецького національного технічного університету.

Астахов, В. М.

А91 Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник / В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – 64 с.
ISBN

Посібник містить основні теоретичні положення та практичні вказівки з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, варіанти контрольних і тестових завдань, методичні рекомендації до їх виконання, а також перелік необхідної літератури.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей є математичною наукою, яка вивчає кількісні закономірності випадкових масових явищ. Теорія ймовірностей є також теоретичною основою математичної та прикладної статистики. В зв'язку з розвитком масових процесів у виробництві і в економіці, а також через необхідність більш тонкого аналізу результатів експерименту, математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач, імовірнісні і статистичні методи широко проникли в економічні, технічні та технологічні науки.

У даному посібнику наведено основні теоретичні матеріали та задачі для організації самостійної роботи студентів з основ теорії ймовірностей і математичної статистики. Кількість варіантів кожного виду задач дана з надлишком: 30 варіантів, а для контрольних робіт студентів-заочників потрібно 25 варіантів. Додаткові варіанти можна використовувати як демонстраційні на лекціях та практичних заняттях. Крім того, в академічних групах стаціонару може бути більше 25 студентів.

Об'єм необхідних знань міститься у типовій програмі курсу:

1 Випадкові події та їхні ймовірності:

а) простір елементарних подій; класифікація подій; статистичне, класичне та геометричне визначення ймовірності випадкової події;

б) основні теореми теорії ймовірностей: теорема додавання ймовірностей, умовна ймовірність, теореми множення ймовірностей; формула повної ймовірності, формула Бейеса;

в) формула Бернуллі для схеми повторних незалежних випробувань, локальна та інтегральна формули Лапласа, асимптотична формула Пуассона.

2 Випадкові величини:

а) випадкові величини і їх числові характеристики; математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення;

б) закони розподілу дискретних випадкових величин;

в) закони розподілу неперервних випадкових величин; диференціальна та інтегральна функції розподілу, їх властивості та ймовірнісний зміст;

г) нормальний закон розподілу, його числові характеристики; графіки і властивості диференціальної й інтегральної функцій розподілу;

д) закон великих чисел; нерівність Чебишева; теорема Чебишева.

3 Системи двох випадкових величин:

а) функція розподілу, її властивості; щільність розподілу, властивості; числові характеристики системи випадкових величин; кореляційний момент, коефіцієнт кореляції; найпростіші випадки нелінійної кореляції;

б) рівняння регресії, залежність між коефіцієнтами регресії.

4 Основи математичної статистики:

а) генеральна сукупність і вибірка, вибіркові числові характеристики; перевірка гіпотези про закон розподілу; критерій Пірсона;

б) інтервал надійності та ймовірність надійності; точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу; розподіл Стьюдента та χ^2;

в) випадкові процеси, класифікація; ланцюги Маркова, їх властивості; марковські процеси.

5 Статистичне дослідження закономірностей:

а) основні гіпотези регресійного аналізу; метод найменших квадратів; кореляційне відношення, його властивості, кореляційне відношення при лінійній і нелінійній регресіях;

б) перевірка гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції, побудова інтервалу надійності для коефіцієнта кореляції генеральної сукупності, область надійності для рівняння регресії;

в) перевірка гіпотези про лінійність моделі; критерій Фішера;

г) множинна кореляційна залежність; звідний коефіцієнт множинної кореляції;

д) стаціонарні випадкові процеси, числові характеристики за результатами досліду; кореляційна функція випадкового процесу.

Номер варіанта для контрольних робіт студентів заочної форми навчання визначається по двох останніх цифрах в номері залікової книжки (табл. 1).

Таблиця 1

Дві останні цифри залікової книжки	01	02	03	…	23	24	25
	26	27	28	...	48	49	50
	51	52	53	…	73	74	75
	76	77	78	…	98	99	00
Номер варіанта	1	2	3	…	23	24	25

1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Література: [1, гл. 1 §1–6, гл. 2 §1–5, гл. 3 §1–3, гл. 20 §1–6];
[3, гл. 1 §1–6, гл. 2 §1–3, гл. 3 §1–5, гл. 4 §1–3, гл. 5 §1–3];
[11, розд. 1, 2].

Подією назвемо усякий факт, який може відбутися або не відбутися у результаті проведеного досліду. Достовірною назвемо таку подію, яка обов'язково відбудеться за умови виконання сукупності умов досліду. Неможливою назвемо подію, яка при таких умовах завідомо не може відбутися. Випадкова подія може відбутися, а може не відбутися при одних і тих же умовах.

Добутком двох подій A і B є така подія C, що полягає у одночасному виконанні обох подій A і B. Події A і B несумісні, коли їхній добуток дорівнює нулю, тобто є неможливим. Сумою двох подій A і B є така подія C, що полягає у наставанні хоча б однієї з подій A і B. Дві події A і B є протилежними, коли їхній добуток є неможливою подією, а сума, – достовірною подією. Події A_1, $A_2 ... A_n$ утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні, а у сумі дають достовірну подію.

Для кількісної оцінки можливості появи випадкової події A вводять поняття ймовірності. Ймовірністю P даної події A назвемо відношення числа випадків m, які сприяють появі даної події, до загальної кількості n несумісних, рівно можливих і єдино можливих результатів випробувань, тобто:

$$p = \frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Приклад 1. До супермаркету надійшло 15 холодильників, 10 з них виготовлені донецьким заводом, а інші – дніпропетровським заводом. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання вибраних холодильників виявляться три, виготовлених донецьким заводом.

Розв'язання. Нехай A – подія: серед п'яти навмання вибраних холодильників виявиться три, виготовлених донецьким заводом. Скористуємось формулою (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число випадків, які сприяють появі даної події, n загальна кількість випадків.

Тут n – кількість способів вибрати 5 холодильників з 15

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11,$$

а m – кількість способів вибрати 2 холодильника з п'яти, виготовлених донецьким заводом і 3 холодильника з 10, виготовлених дніпропетровським заводом

$$m = m_1 m_2.$$

Тут m_1 – кількість способів вибрати 2 холодильника з п'яти:

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10,$$

m_2 – кількість способів вибрати 3 холодильника з 10:

$$m_2 = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

Таким чином, $m = 10 \cdot 40 = 400$. Тоді

$$P(A) = \frac{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{1200}{3003} \approx 0,4.$$

Ймовірність суми сумісних подій А і В дорівнює:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2}$$

Якщо P(AB) = 0, тобто події несумісні, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

Ймовірність події В, яка обчислена при умові, що відбулась подія А, називається умовною ймовірністю події В і позначається $P_A(B) = P(B / A)$.

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій А і В дорівнює:

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)P(A / B). \tag{1.4}$$

.

Якщо події незалежні, то:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.5}$$

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних костей цифра шість з'явиться хоча б на одній з них.

Розв’язання: Ймовірність, що випаде 6 в одному кидку кості дорівнює $\frac{1}{6}$. Ймовірність того, що не випаде 6 дорівнює $\frac{5}{6}$. Ймовірність того, що при киданні трьох гральних костей не випаде 6 ні одного разу, дорівнює $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Тоді ймовірність того, що хоча б один раз випаде 6 дорівнює: $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

До числа основних понять теорії ймовірностей, поруч з ймовірністю, належить відносна частота. Хоча, за зовнішнім виглядом, формули для обчислення ймовірності і відносної частоти однакові, самі поняття не є тотожними. Пояснимо це твердження «словесними формулами»:

$$p = \frac{m}{n}: \quad \text{ймовірність події} = \frac{\text{кількість сприятливих випадків}}{\text{загальна кількість випадків}},$$

$$p = \frac{m}{n}: \quad \text{відносна частота події} = \frac{\text{кількість появ події}}{\text{загальна кількість випробувань}}.$$

Різниця між ймовірністю і відносною частотою полягає в тім, що ймовірність обчислюють до експерименту, а відносна частота може бути обчислена лише після проведення досліду. Важливою властивістю відносної частоти є її стійкість, ця властивість є теоретичною основою математичної статистики. Перед вивченням теорем додавання і множення ймовірностей необхідно засвоїти поняття суми і добутку подій і різницю між залежними і незалежними подіями.

Приклад 3. В урні 5 білих і 7 чорних кульок. З неї почергово випадково виймають дві кулі двома способами:

а) навмання виймається куля, фіксується її колір і куля повертається в урну, після чого всі кулі в урні перемішуються.

б) вийнята куля в урну не повертається.

Яка ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі?

Розв’язання. У способі реєстрації а) можна уважати обидві спроби незалежними (при умові ретельного перемішування) і потрібна ймовірність дорівнює (1.5):

$$p = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}.$$

У способі реєстрації б) ймовірність білого кольору другої кулі залежить від кольору першої витягнутої кулі і результат розрахунку інший (теорема множення (1.4), умовна ймовірність):

$$p = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}.$$

Звичайно, у випадку б) можливий розрахунок ймовірності й комбінаторним способом:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}.$$

Ймовірність P(A) появи події A, яка може настати за умови однієї з незалежних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу, має вигляд:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i). \tag{1.6}$$

Це формула повної ймовірності.

Ймовірність $P(A/H_i)$ гіпотези H_i, після того, як уже відбулася подія A, обчислюється за формулою Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}. \tag{1.7}$$

Приклад 4. Ймовірність того, що при свердлуванні будуть знайдені ґрунтові води дорівнює 0,25. З ймовірністю 0,5 разом з ґрунтовими водами зустрічаються тверді породи. Якщо ґрунтових вод немає, то тверді породи зустрічаються з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що при свердлуванні будуть знайдені тверді породи.

Розв'язання. Нехай H_1 – подія, яка полягає у тому, що при свердлуванні будуть знайдені ґрунтові води; H_2 подія, яка полягає у тому, що при свердлуванні не будуть знайдені ґрунтові води.

Події H_1, H_2 – несумісні і утворюють повну групу подій.

Подія A – полягає у тому, що при свердлуванні будуть знайдені тверді породи. Ймовірність події A обчислимо за формулою повної ймовірності (1.6):

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A).$$

Враховуючи, що

$$P(H_1) = 0{,}25, \quad P(H_2) = 0{,}75, \quad P_{H_1}(A) = 0{,}5, \quad P_{H_2}(A) = 0{,}8,$$

знайдемо ймовірність події A:

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}125 + 0{,}6 = 0{,}725.$$

Приклад 5. Ймовірність того, що вироби задовольняють вимогам стандарту, дорівнює 0,95. Пропонується спрощена система контролю, яка пропускає з ймовірністю 0,98 вироби, що задовольняють стандарту, і з ймовірністю 0,05 вироби, які стандарту не задовольняють. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов цей контроль, задовольняє стандарту.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що виріб пройшов контроль; H_1 – подія, яка полягає в тому, що виріб задовольняє стандарту; H_2 – подія, яка полягає в тому, що виріб не задовольняє стандарту. Події H_1 і H_2 утворюють повну групу несумісних подій

Подія A уже відбулась, потрібно знайти ймовірність події H_1.

За умовами:

$$P(H_1) = 0{,}95,\ P(H_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05,$$

$$P_{H_1}(A) = 0{,}98, \quad P_{H_2}(A) = 0{,}05.$$

Ймовірність події A (знаменник формули Байеса (1.7)):

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}05 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 0{,}931 + 0{,}0025 = 0{,}933.$$

Тоді ймовірність того, що виріб, який пройшов контроль, задовольняє стандарту (1.7):

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}98}{0{,}9335} = 0{,}9973.$$

Якщо у кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A стала і дорівнює p, то ймовірність того, що у n випробуваннях подія A відбудеться m разів, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,..., \tag{1.8}$$

де q = 1 – p.

Якщо n велике, то формула Бернуллі потребує громіздких обчислень, тому користуються асимптотичною формулою Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t), \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}, \qquad t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.9}$$

Таблиця функції φ(t) наведена у додатку A (табл. A.1).

Якщо ж n – дуже велике число, а ймовірність появи події дуже мала, то удаються до асимптотичної формули Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (1.10)$$

Приклад 6. В упаковці є 10 % нестандартних деталей. Навмання відібрано 4 деталі. Знайти ймовірності того, що серед відібраних деталей немає нестандартних, одна, дві,три, чотири нестандартних.

Розв'язання. Ймовірність появи нестандартної деталі завжди дорівнює 0,1.

Знайдемо потрібні ймовірності за формулою Бернуллі (1.8):

1) серед відібраних деталей взагалі немає нестандартних:

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561;$$

2) серед відібраних деталей одна нестандартна:

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916;$$

3) серед відібраних деталей дві нестандартні:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486;$$

4) серед відібраних деталей три нестандартні:

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036;$$

5) серед відібраних деталей чотири нестандартні:

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001.$$

Приклад 7. Найти ймовірність того, що з $n = 100$ зернин зійде рівно $k = 80$, якщо їх схожість $p = 0{,}8$.

Розв'язання. За формулою (1.9):

$$t = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0, \quad \varphi(0) = 0{,}3989.$$

$$P_{100}(80) = \frac{0{,}3989}{4} = 0{,}0997.$$

Приклад 8. Книга має 1000 сторінок. Відомо, що у ній міститься 100 помилок. Яка ймовірність того, що на випадково відібраній сторінці немає помилок, одна помилка, дві помилки?

Середня кількість помилок на одну сторінку $a = \frac{100}{1000} = 0{,}1$.

Застосуємо формулу Пуассона (1.10).

1) на сторінці немає помилок:

$$P(0) = \frac{(0{,}1)^0}{0!} e^{-0{,}1} = 0{,}3679;$$

2) на сторінці одна помилка:

$$P(0) = \frac{(0{,}1)^1}{1!} e^{-0{,}1} = 0{,}03679;$$

3) на сторінці дві помилки:

$$P(0) = \frac{(0{,}1)^2}{2!} e^{-0{,}1} = 0{,}0018.$$

Ймовірність того, що у n випробуваннях подія відбудеться від k_1 до k_2 разів обчислюється за формулою (інтегральною формулою Лапласа).

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2), \qquad (1.11)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця функції Лапласа наведена у додатку А (табл. А.2).

Приклад 9. Ймовірність появи події за час випробувань $p = 0{,}8$. Зроблено сто випробувань. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 75 разів і не більше 90 разів.

Розв’язання. Скористаємося інтегральною формулою Лапласа (1.11).

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25; \qquad x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто Ф(-х) = Ф(х), отримаємо:

$$P_{100}(75{,}90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$

$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

2 ДИСКРЕТНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

Література: [3, гл. 6 §1–6, гл. 7 § 1–4, гл. 8 § 1–8];
[8 гл. 2 § 40–43]; [11, розд. 3, 4].

Дискретною називають випадкову величину, яка може приймати скінченну чи нескінченну множину значень з певними ймовірностями. Задають дискретні випадкові величини за допомогою закону розподілу, коли задають ймовірності їх можливих випадкових значень.

При вивченні даного розділу необхідно зрозуміти, що для задавання дискретної випадкової величини недостатньо перелічити її можливі значення, а треба ще вказати ймовірності, з якими ці значення набуваються.

До числа основних характеристик випадкових величин відносять математичне сподівання і дисперсію.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини є сума попарних добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірності.

$$m_x = M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i . \qquad (2.1)$$

Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 . \qquad (2.2)$$

Важливо зрозуміти їх визначення і зміст: математичне сподівання характеризує середню величину можливих значень випадкової величини, а дисперсія (середнє квадратичне відхилення) – розсіяння можливих значень навкруги математичного сподівання.

Приклад 10. Закон розподілу випадкової величини має вигляд (табл. 2.1)

Таблиця 2.1

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне сподівання і дисперсію.

Розв’язання

1) Математичне сподівання:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5;$$

2) Дисперсія: знайдемо математичне сподівання квадрата випадкової величини, для чого побудуємо допоміжну таблицю 2.2.

Таблиця 2.2

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625 .$$

Знайдемо власне дисперсію:

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375 .$$

Приклад 11. Розглядаючи задачі 6.1–6.30 треба врахувати, що для трьох невідомих ймовірностей, ми маємо два рівняння:

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = M \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Нескінченну множину розв'язків цієї системи можна представити різними способами. При лінійній параметризації (ймовірності – лінійні функції параметру t) отримаємо графік з трьох прямих ліній (рис. 2.1).

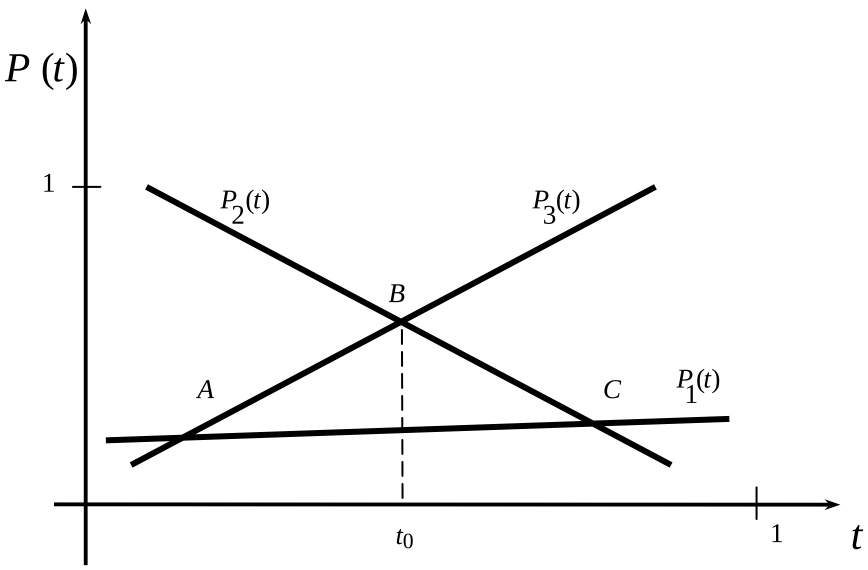

Рисунок 2.1

Для кожного t з області допустимих значень ми отримаємо трійку чисел p_1, p_2, p_3.

Область можливих значень параметру t визначається з умов:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}, \quad 0 \le p_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (2.3)$$

Рівномірним називається такий розподіл випадкової величини, коли всі її можливі значення рівноймовірні.

Мірою відхилення даного розподілу дискретної випадкової величини від рівномірного розподілу можна назвати число:

$$R = \max\{p_i\} - \min\{p_i\}, \tag{2.4}$$

яке при рівномірному розподілі дорівнює нулю, а при всіх інших розподілах невід'ємне і не перевершує одиницю. Причому, граничне значення – одиниця – досягається для самого «нерівномірного» розподілу: одне зі значень випадкової величини вірогідно, а всі інші – неможливі.

Побудований графік дозволяє легко знайти значення t, при якому величина R мінімальна (t_o на рис. 2.1), і отже, записати шуканий закон розподілу випадкової величини:

X	x_1	x_2	x_3
p	$p_1(t_o)$	$p_2(t_o)$	$p_3(t_o)$

Приклад 12. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі: ймовірність p_1 значення x_1, математичне сподівання M(X) і дисперсія D(X). Знайти закон розподілу випадкової величини.

$$p_1 = 0{,}2; \quad M(X) = 3{,}8; \quad D(X) = 0{,}16.$$

Розв'язання. Сума ймовірностей $p_1 + p_2$ дорівнює 1, тому

$$p_2 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Запишемо закон розподілу випадкової величини X.

X	x_1	x_2
p	0,2	0,8

Запишемо математичне сподівання і дисперсію через x_1 і x_2 відомі ймовірності.

$$M(X) = 0{,}2\,x_1 + 0{,}8\,x_2,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0{,}2\,x_1^2 + 0{,}8\,x_2^2 - 3{,}8^2 = 0{,}16.$$

Ці два рівняння утворюють систему, яка має два розв'язки:

$$x_1 = 3; \; x_2 = 4 \quad \text{і} \quad x_1 = 4{,}6; \; x_2 = 3{,}6.$$

За умовою $x_1 < x_2$, тому розв'язком буде пара:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 4.$$

Таким чином, маємо закон розподілу випадкової величини X:

X	3	4
p	0,2	0,8

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X назвемо ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше ніж x, тобто:

$$P(X < x) = F(x). \tag{2.5}$$

Властивості інтегральної функції розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) F(x) – неспадна функція. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$;

3) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

4) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Приклад 13. Побудувати інтегральну функцію розподілу для дискретної випадкової величини, знайденої у попередньому прикладі:

X	3	4
p	0,2	0,8

Розв’язання. Для $-\infty < x < 3$ маємо $F(x) = 0$ (зліва точки $x = 3$ значень немає); для $3 \le x < 4$ маємо $F(x) = 0{,}2$ (у цьому інтервалі є лише одне значення X з ймовірністю 0,2). Нарешті при $x \ge 4$ маємо $F(x) = 0{,}2 + 0{,}8 = 1$. Отже функція F(x) має такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ 0{,}2 & 3 \le x < 4; \\ 1, & x \ge 4. \end{cases} \tag{2.6}$$

3 НЕПЕРЕРВНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

Література: [2, гл. 6, § 1–3];
[3, гл. 10, § 1–3, гл. 11, § 1–6, гл. 12, §1–7, гл. 13, §1–6];
[11, розд 3, 4].

Неперервна випадкова величина має значення, які заповнюють скінчений або нескінченний проміжки числової вісі. Закон розподілу неперервної випадкової величини зручно задавати за допомогою функції щільності ймовірності, або диференціальної функції розподілу $f(x)$. Зв'язок між інтегральною і диференціальною функціями такий:

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{3.1}$$

Властивості функції $f(x)$:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx; \qquad f(x) \geq 0; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Числові характеристики неперервної випадкової величини::

математичне сподівання $$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{3.2}$$

дисперсія $$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \tag{3.3}$$

При вивченні неперервних випадкових величин необхідно звернути увагу на те, що інтегральна функція розподілу використовується для завдання як неперервної, так і дискретної випадкових величин. Диференціальна функція розподілу використовується лише для величин неперервних. Власне кажучи, випадкову величину будемо називати неперервною, якщо її інтегральна функція неперервно диференційована.

Розглядаючи закони розподілу випадкових неперервних величин, необхідно вивчити властивості функцій f(x) і F(x), їхній взаємозв'язок, імовірнісний зміст і числові характеристики.

Виконання завдань (9.1–9.30)–(12.1–12.30) пов'язано з побудовою графіків елементарних функцій, обчисленням інтегралів та дослідженням функцій на відрізку. Починаючи виконання цих завдань, необхідно попередньо вивчити [5, гл. 1, § 6–9], а також [3, гл. 10, § 1–3, гл. 11, § 1–6].

Приклад 14. Задана неперервна випадкова величина X своєю диференціальною функцією розподілу f(x):

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (3.4)$$

Треба: знайти коефіцієнт A, знайти інтегральну функцію розподілу, побудувати графіки обох функцій, знайти числові характеристики випадкової величини, знайти ймовірність того, що випадкова величина *x* попадає у інтервал $\left(\frac{\pi}{6};\ 2\right)$.

Розв'язок

1) Знайдемо коефіцієнт A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу:

– якщо $x < -\frac{\pi}{4}$: $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$

– якщо $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2};$$

– якщо $x > \frac{\pi}{4}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Таким чином

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{при} \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases};$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2}, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases};$$

2) Побудуємо графіки (рис. 3.1, 3.2)

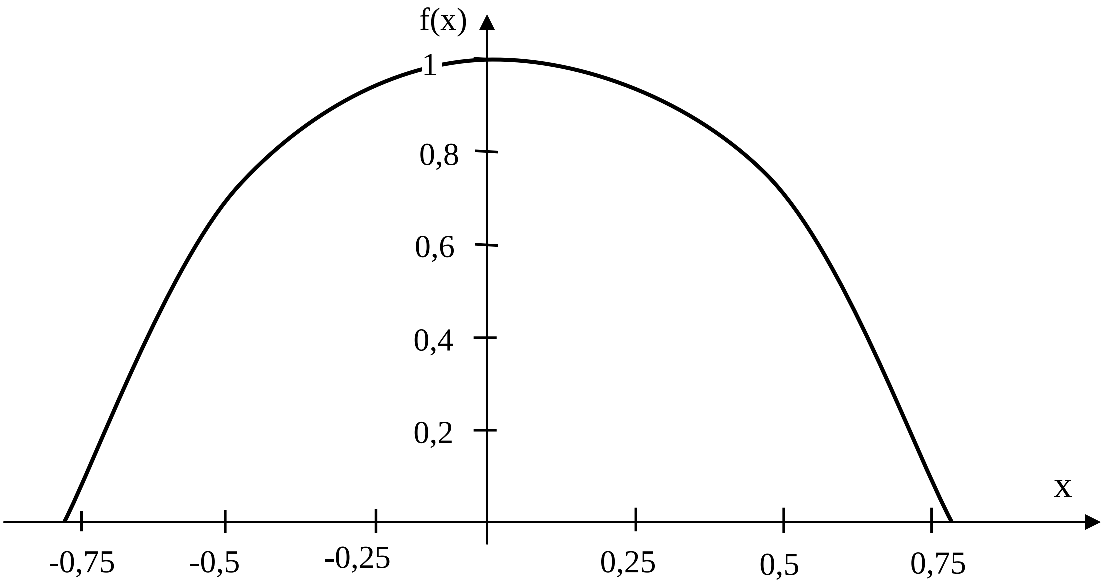

Рисунок 3.1 – Диференціальна функція розподілу.

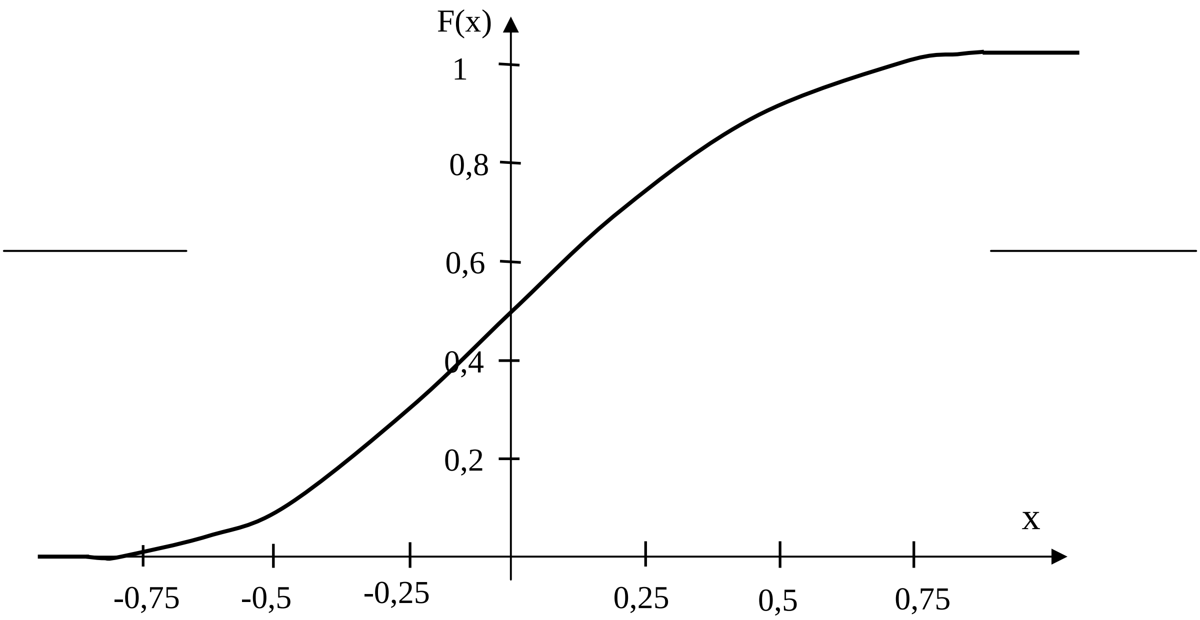

Рисунок 3.2 – Інтегральна функція розподілу.

3) Числові характеристики випадкової величини X :

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{2}dx = \frac{\cos 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx =$$

$$= \frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin 2xdx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{x\cos 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0{,}1163.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}1163 - 0 = 0{,}1163.$$

4) Ймовірність попадання випадкової величини у заданий інтервал $\left(\frac{\pi}{6};\ 2\right)$:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Цю ймовірність можна знайти іншим шляхом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

На практиці найчастіше використовується нормальний закон розподілу ймовірностей. Тому матеріал, що відноситься до нього, потрібно вивчити особливо старанно. Необхідно засвоїти, що завданням математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення нормальний розподіл визначається повністю (див., напр., [3, гл. 12, § 2–7], [4, гл. 5, задача 5.54–5.61]). Необхідно навчитися знаходити ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення, яке належить заданому інтервалу. Виконання завдання 13.1–13.30 пов'язано з розв'язанням цієї задачі.

Приклад 15. Яким може бути математичне сподівання неперервної випадкової величини, якщо вона визначена на інтервалі [2; 5] і її інтегральна функція розподілу на цьому інтервалі є квадратичною (поліном другого степеня).

Розв'язок. Враховуючи основні властивості інтегральної функції розподілу, запишемо її формулу в загальному вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ ax^2 + bx + c, & 2 \le x \le 5, \\ 1, & 5 < x. \end{cases}$$

З умов неперервності запишемо:

$$F(2) = 4a + 2b + c = 0;$$
$$F(5) = 25a + 5b + c = 1.$$

Один з коефіцієнтів, наприклад «a», приймемо за параметр, тоді:

$$b = \frac{1}{3} - 7a, \qquad c = 10a - \frac{2}{3},$$

$$F(x) = a(x^2 - 7x + 10) + \frac{x-2}{3}, \qquad x \in [2;5].$$

Для оцінки цього параметру врахуємо, що інтегральна функція розподілу будь-якої випадкової величини є неспадною.

$$f(x) = F'(x) = a(2x - 7) + \frac{1}{3} \ge 0, \qquad x \in [2;5].$$

Тому $|a| \le \frac{1}{9}$, (лінійна функція свої екстремальні значення набуває на кінцях інтервалу).

Виразимо тепер математичне сподівання через параметр «a»

$$M(X) = \int_2^5 xf(x)dx = \frac{9}{2}a + \frac{7}{2}.$$

Беручи до уваги область допустимих значень параметру «a», отримаємо інтервал можливих значень математичного сподівання:

$$3 \le M(X) \le 4.$$

Функція розподілу для екстремальних значень математичного сподівання показана на рисунку 3.3. На вісі абсцис відмічено інтервал можливих значень M(X). Не випадково трапилось, що він повністю належить інтервалу [2; 5], на якому розподілена випадкова величина. Математичне сподівання прогнозує середнє значення випадкової величини і тому не повинно виходити за область її допустимих значень.

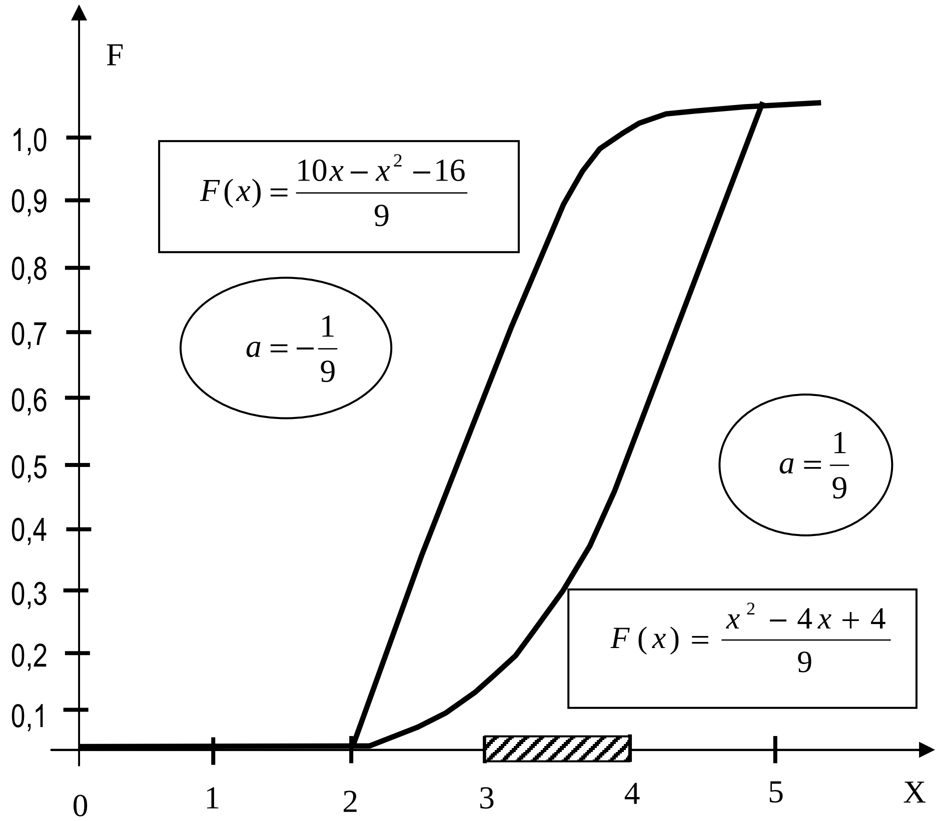

Рисунок 3.3 – Можливі межі інтегральної функції розподілу.

4 СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Література: [3, гл. 14, § 1–4, 7–18]; [4, гл. 6];
[5, гл. 20, § 23–25]; [11, розд. 4.7–4.10].

Вивчені нами у попередніх розділах випадкові величини є одновимірними, тобто значення їх визначається одним числом. Крім них трапляються випадкові величини, значення яких визначають двома, трьома, …n числами. Такі величини називають, відповідно, двовимірними, тривимірними, … n-вимірними.

Розглянемо двовимірну дискретну випадкову величину (X, Y). Кожна з величин X, Y, що її складають, є звичайною дискретною випадковою величиною. Тому двовимірну дискретну випадкову величину (X, Y) можна назвати системою двох випадкових величин.

Закон розподілу випадкової величини задають таблицею (табл. 4.1)

Таблиця 4.1

	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

У цій таблиці у клітинках з координатами (x_i, y_j) знаходяться ймовірності події $\{X = x_i, Y = y_j\}$. Вважаємо, що усі можливі комбінації подій утворюють повну групу.

Іншими словами, $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1. \tag{4.1}$$

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна знайти закони розподілу окремих її складових. Наприклад, за теоремою додавання несумісних подій

$$p(x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \dots + p(x_i, y_m) \tag{4.2}$$

отримали ймовірність того, що X прийме x_i. Таким чином отримаємо закон розподілу випадкової величини X (табл. 4.2)

Таблиця 4.2 – Закон розподілу X

X	x_1	…	x_i	…	x_n
p	$p(x_1)$	…	$p(x_i)$	…	$p(x_n)$

Таким же чином можна знайти закон розподілу випадкової величини Y (табл. 4.3)

Таблиця 4.3 – Закон розподілу Y

Y	y_1	…	y_j	…	y_m
p	$p(y_1)$	…	$p(y_i)$	…	$p(y_m)$

Розглянемо числові характеристики системи двох випадкових величин.

Вважаємо заданим закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y). Тоді можна обчислити математичні сподівання складових X та Y

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p(x_i, y_j); \quad M(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p(x_i, y_j). \qquad (4.3)$$

Кореляційним моментом μ_{xy} випадкових величин X та Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від відповідного математичного сподівання

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p(x_i, y_j). \qquad (4.4)$$

Приклад 16. Знайти закони розподілу випадкових величин X та Y, якщо система цих випадкових величин (X, Y) має такий закон розподілу:

	x_1	x_2
y_1	0,1	0,55
y_2	0,2	0,15

Розв’язання

Знайдемо:

$$p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$$

$$p(x_2) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) = 0{,}55 + 0{,}15 = 0{,}7.$$

Це означає, що закон розподілу складової X має вигляд

X	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Аналогічно

$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0{,}1 + 0{,}55 = 0{,}65;$$

$$p(y_2) = p(x_1, y_{21}) + p(x_2, y_2) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35.$$

Закон розподілу складової Y має вигляд:

Y	y_1	y_2
p	0,65	0,35

Найважливішою числовою характеристикою багатовимірних випадкових величин, крім математичного сподівання і дисперсії кожної компоненти, є кореляційний момент (4.4), який характеризує взаємозв'язок її одномірних складових. Якщо, наприклад, розглянути систему двох дискретних випадкових величин (табл. 4.4), то кореляційний момент (4.4) має вигляд

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}$$

і може набувати значення з інтервалу

$$[-\alpha; \alpha], \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{|x_2 - x_1||y_2 - y_1|}{4}.$$

При цьому крайні значення μ_{xy} відповідають найсильнішому взаємозв'язку складових X і Y, а середнє значення кореляційного моменту $(\mu_{xy} = 0)$ вказує на відсутність зв'язку між X і Y (тобто їхню незалежність).

Так, при $\mu_{xy} = \alpha$ закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) зображується у вигляді такої таблиці (табл. 4.5).

Таблиця 4.4

	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{12}
y_2	p_{21}	p_{22}

Таблиця 4.5

	x_1	x_2
y_1	$\frac{1}{2}$	0
y_2	0	$\frac{1}{2}$

З таблиці 4.5, зокрема, випливає, що, знаючи величину однієї компоненти, наприклад, $X = x_1$, ми можемо стверджувати, що $Y = y_1$. Такий взаємний зв'язок випадкових величин називається функціональним, і він є найсильнішим з усіх можливих тому, що елемент випадковості повністю зникає. З іншого боку, рівність $\mu_{xy} = 0$ в нашому випадку веде до пропорційності рядків і стовпців таблиці закону розподілу:

$$\frac{p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{p_{22}}.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини Y один і той же, як при $X = x_1$, так і при $X = x_2$, а також і при невідомому значенні X. Це і визначає незалежність випадкових величин X і Y. Частіше більш зручною числовою характеристикою, ніж кореляційний момент, для оцінки тісноти зв'язку є безрозмірний коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad |r_{xy}| \le 1. \tag{4.5}$$

В розглянутому прикладі коли $\mu_{xy} = \pm\alpha$, отримаємо $r_{xy} = \pm 1$. Зазначимо, що для більш складних систем випадкових величин (наприклад, з більшою кількістю можливих значень X, Y) зв'язок між компонентами не так легко оцінюється, але в будь-якому випадку зберігаються такі властивості:

а) якщо X і Y незалежні, то $r_{xy} = 0$;

б) якщо $Y = aX + b$ або $X = aY = b$, то $r_{xy} = \pm 1$.

5 МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Література: [3, гл. 15–19]; [10, гл. 1–3]; [11, розд. 6].

Метою математичної статистики є розробка методів обробки статистичних даних з метою отримання наукових і практичних висновків. Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей.

Групу об’єктів, поєднаних за якоюсь якісною чи кількісною ознакою, називають статистичною сукупністю. Розрізнюють генеральну і вибіркову сукупності. Вибірковою сукупністю або вибіркою називають сукупність випадково відібраних об’єктів. Генеральною сукупністю називають сукупність об’єктів, з якої виконується вибірка. Об’ємом сукупності називають кількість об’єктів, що до неї входить.

Вибіркова середня обчислюється за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{5.1}$$

де n – об'єм вибірки;

x_i – елементи вибірки.

Вибіркова дисперсія обчислюється за формулою:

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 . \tag{5.2}$$

Якщо вибірка складається з двох (або кількох) груп, то внутрішньогрупова дисперсія обчислюється за формулою:

$$D_{\text{вн. гр.}} = \frac{D_A \cdot n_A + D_B \cdot n_B}{n_A + n_B}, \tag{5.3}$$

де D_A, D_B – дисперсії груп A і B,

n_A, n_B – об’єми груп A і B.

Міжгрупова дисперсія:

$$D_{\text{між}} = \frac{\left(\overline{x}_A - \overline{x}\right)^2 \cdot n_A + \left(\overline{x}_B - \overline{x}\right)^2 \cdot n_B}{n_A + n_B} . \tag{5.4}$$

Вибіркова дисперсія дорівнює сумі внутрішньогрупової та міжгрупової дисперсій.

Розглянемо подальші дослідження вибірки на прикладах.

Приклад 17. Нехай на основі деяких вимірювань отримана вибірка:

2,01	3,89	2,95	1,54	3,42	2,48	2,95	3,42	2,95	3,89
2,48	2,01	4,83	3,42	2,48	3,42	3,42	2,48	3,89	2,48
2,01	4,36	1,54	2,95	2,95	3,42	2,95	2,95	3,89	3,42
2,95	2,48	3,42	2,48	3,42	2,95	2,95	3,89	3,89	2,01
3,42	2,48	2,48	2,95	3,42	2,95	2,48	4,83	2,95	3,42
2,48	2,48	1,54	2,48	2,95	2,95	3,42	3,42	4,36	2,95
2,01	3,42	2,95	3,42	3,42	2,95	2,95	2,95	3,42	3,42
2,48	4,36	3,89	3,42	3,42	3,42	1,54	2,95	2,48	2,48
2,95	2,48	2,95	2,95	3,89	2,95	3,42	2,95	1,54	2,48
2,48	2,48	2,95	3,42	2,95	3,42	2,01	2,01	2,48	2,95

а) Варіаційним рядом називається упорядковане розташування значень випадкової величини x_i і частот їх появи в вибірці n_i:

Розташувавши числа вибірки в порядку зростання і вказавши їх частоти, складемо варіаційний ряд (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Варіаційний ряд.

1,54	2,01	2,48	2,95	3,42	3,89	4,36	4,83
5	7	21	29	25	8	3	2

б) Обчислимо розмах вибірки $x_{max} – x_{min} = 4{,}83 – 1{,}54 = 3{,}29$.

Медіана – це варіанта, яка ділить вибірку на дві рівні за об’ємом частини. Зважаючи на те, що в даному прикладі об’єм вибірки – число парне, то $Me = (X_{50} + X_{51}) / 2 = (2{,}95 + 2{,}95) / 2 = 2{,}95$.

Мода – це варіанта ряду, що має найбільшу частоту (мод може бути декілька), в цьому прикладі $Mo = 2{,}95$.

в) Полігон частот – це ламана, що з’єднує точки з координатами (x_i, n_i). Полігон частот зображує один з можливих способів практичної побудови закону розподілу випадкової величини (рис. 5.1).

г) Для побудови гістограми потрібно вибрати на вісі OX основи прямокутників. У випадку варіаційного ряду з рівновіддаленими варіантами x_i, зручно розбивку $[\alpha_i : \beta_i]$ вибрати за таким правилом:

$$\alpha_i + \beta_i = 2\, x_i, \quad \alpha_{i+1} = \beta_i\,, \quad i = 1, \ldots, k..$$

При побудові гістограми інтервали, які відповідають малим частотам n_i, називають непоказними і об’єднують із сусідніми. Якщо сусідніх два, то вибирають той, у якого частота n_i вища. Рівень зображуваності, взагалі кажучи, величина інтуїтивна. Приймемо, що об’єднанню підлягають інтервали, у яких $n_i < 5$. Інколи навіть після об’єднання двох інтервалів утворюється непоказний інтервал, тоді процес об’єднання продовжується на наступний сусідній інтервал.

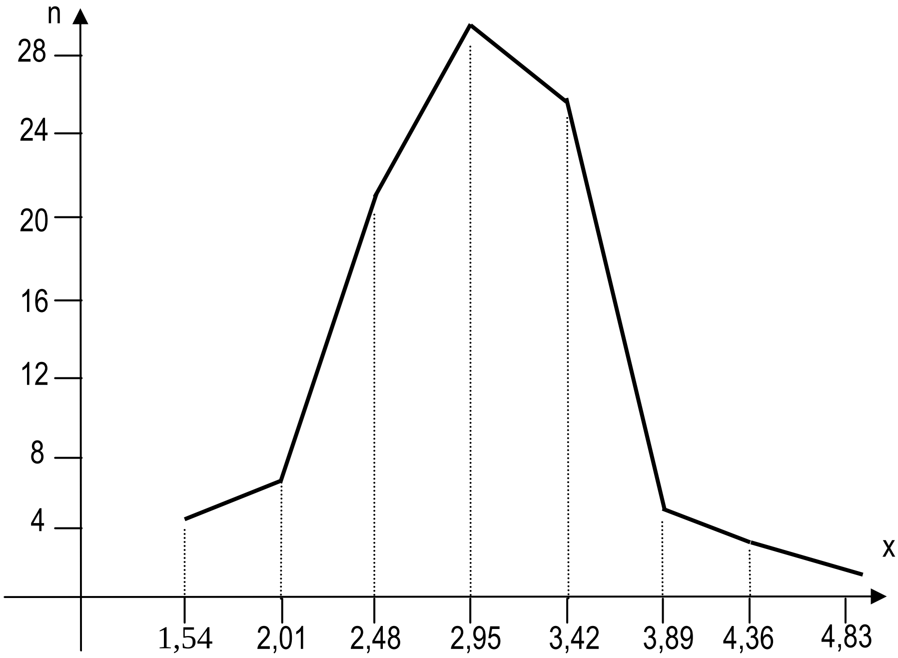

Рисунок 5.1 – Полігон частот

Об’єднання двох інтервалів описується співвідношеннями:

$$\underset{n_j}{[\alpha_j\,;\,\beta_j\,]} \cup \underset{n_{j+1}}{[\alpha_{j+1}\,;\,\beta_{j+1}\,]} \to \underset{n_j + n_{j+1}}{[\alpha_j\,;\,\beta_{j+1}\,]}.$$

Після об’єднання інтервалів виконується їх перенумерація, щоб індекс «і» приймав всі значення підряд без пропусків. В результаті зміни інтервалів варіаційний ряд дещо видозмінюється: частоти відносяться не до чисел, а до інтервалів – показують, скільки елементів з вибірки попадає в даний інтервал. Запишемо інтервальний варіаційний ряд в таблицю 5.2 (стовпці «і», «інтервал», «δ_i» – довжина інтервалу, $\delta_i = \beta_i - \alpha_i$).

Для обчислення висот прямокутників треба вибрати масштаб, це можна зробити таким чином. Прямокутник найбільшої висоти буде відповідати моді варіаційного ряду. Тому, для того щоб рисунок гістограми ефективно використовував площу рисунка висотою Н, масштабний множник μ повинен задовольняти співвідношенню:

$$S = H \cdot \delta = \mu \cdot n_M, \qquad \mu = \frac{H \cdot \delta}{n_M},$$

де δ і S – довжина основи і площа прямокутника, який відповідає моді варіаційного ряду,

n_M – частота моди (найбільша частота в варіаційному ряді).

Тепер висота будь-якого прямокутника гістограми буде обчислюватись за формулою:

$$h_i = \mu \frac{n_i}{\delta_i}.$$

У даному прикладі, узявши висоту 70 мм, отримаємо (рис. 5.2).

$$\mu = \frac{70 \cdot 0.47}{29} = 1{,}13.$$

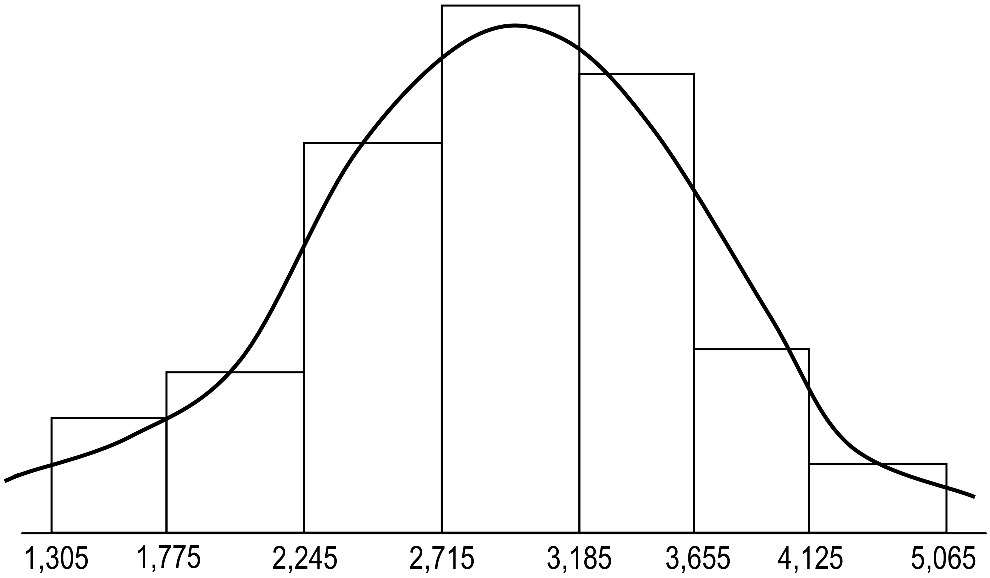

Рисунок 5.2 – Гістограма

Вісь OX розмітимо так, щоб і ширина рисунка використовувалась ефективно. Для цього крайні відмітки 1,305 і 5,065 розташуємо біля лівої і правої границь рисунка**.** Результати розрахунків занесемо в стовпець «h» таблиці 5.2.

д) Обчислимо характеристики вибірки:

$$n = 5 + 7 + 21 + 29 + 25 + 8 + 5 = 100,$$

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1{,}54 + 7 \cdot 2{,}01 + 21 \cdot 2{,}48 + 29 \cdot 2{,}95 + 25 \cdot 3{,}42}{100} +$$

$$+ \frac{8 \cdot 3{,}89 + 3 \cdot 4{,}36 + 2 \cdot 4{,}83}{100} = 2{,}988,$$

$$D = \frac{5 \cdot 1{,}54^2 + 7 \cdot 2{,}01^2 + 21 \cdot 2{,}48^2 + 29 \cdot 2{,}95^2 + 25 \cdot 3{,}42^2}{100} +$$

$$+ \frac{8 \cdot 3{,}89^2 + 3 \cdot 4{,}36^2 + 2 \cdot 4{,}83^2}{100} - 2{,}988^2 = 0{,}4624,$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{100}{99} \cdot 0{,}4624 = 0{,}4670,$$

$$s = \sqrt{0{,}4670} = 0{,}6833.$$

Таблиця 5.2

i	інтервал	n_i	δ_i	h_i	x	Ф	p_i	n'_i
1	1,305 1,775	5	0,47	10	–2,463 –1,775	–0,4931 –0,4620	0,0311	3,11
2	1,775 2,245	7	0,47	14	–1,775 –1,087	–0,4620 –0,3614	0,1006	10,06
3	2,245 2,715	21	0,47	42	–1,087 –0,400	–0,3614 –0,1554	0,2060	20,60
4	2,715 3,185	29	0,47	58	–0,400 0,288	–0,1554 0,1130	0,2684	26,84
5	3,185 3,655	25	0,47	50	0,288 0,976	0,1330 0,3355	0,2225	22,25
6	3,655 4,125	8	0,47	16	0,976 1,664	0,3355 0,4519	0,1164	11,64
7	4,125 5,065	5	0,94	5	1,664 3,040	0,4519 0,4988	0,0469	4,69

е) Виходячи з вигляду гістограми (близькі до центру рисунка прямокутники високі, а до периферії знижуються), висунемо гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності. В якості параметрів нормального закону приймемо:

$$a = \bar{x} = 2{,}988, \qquad \sigma = s = 0{,}6833.$$

Заповнимо стовпець «x» таблиці 5.2, в який заносять аргументи інтегралу ймовірностей:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt, \tag{5.5}$$

на «i»-ому інтервалі $x = \frac{r-a}{s}$, де «r» – число з стовпця «інтервал».

По стовпцю «x» таблиці 5.2 можна обчислити значення інтеграла ймовірностей, використовуючи Додаток А (табл. А.2). Треба мати на увазі, що, обчислюючи ймовірності $P = \Phi(x'') - \Phi(x')$, ми віднімаємо близькі між собою числа, а це, як відомо, приводить до значного зросту відносної похибки [9]. Тому значення функції Ф(x) треба отримувати з максимальною точністю. Аргумент «x» в Додатку А заданий з двома знаками після коми, отже, якщо в стовпці «x» таблиці 5.2 залишати три знаки після коми, то за допомогою лінійної інтерполяції можна знайти потрібні значення Ф(х) достатньо точно.

Приклад лінійної інтерполяції. Нехай треба знайти Ф(1,577). У Додатку А (табл. А.2) знаходимо Ф(1,57) = 0,4418, Ф(1,58) = 0,4429. Можна обчислити різницю 0,4429 – 0,4418 = 0,0011. Отже, на одну соту частину аргументу припадає 0,0011, а на одну тисячну 0,00011. Помножимо на однозначне число 7 $(7 \cdot 0{,}00011 = 0{,}00077)$ і округлимо до чотирьох знаків після коми – 0,0008. Отже

$$Ф(1{,}577) = 0{,}4418 + 0{,}0008 = 0{,}4426.$$

Заповнимо стовпець Ф(х) таблиці 5.2. Тепер можна обчислити теоретичні ймовірності попадання в інтервали:

$$P_i = Ф(x_i'') - Ф(x_i')$$

(від нижнього числа клітини стовпця Ф(х) віднімаємо верхнє число тієї ж клітини). Нарешті, останній стовпець таблиці 5.2 – теоретичні частоти:

$$n_i' = P_i \cdot n,$$

де n – об’єм вибірки.

Зауважимо, що, на відміну від фактичних, теоретичні частоти не округляються до цілого значення.

ж) По стовпцю «n_i'» на рисунок гістограми наносимо точки теоретичної кривої за правилом:

абсциса «і-ї» точки – це середина «і-го» інтервалу,

ордината «і-ї» точки = $\mu \cdot n_i' / \Delta_i$.

З’єднуємо точки плавною лінією (вершина кривої не зобов’язана співпадати з якою-небудь точкою), вона повинна бути симетричною відносно прямої $x = \bar{x}$.

з) Обчислимо суму Пірсона:

$$\chi^2_{\text{спост}} = \frac{(5-3{,}11)^2}{3{,}11} + \frac{(7-10{,}06)^2}{10{,}06} + \frac{(21-20{,}06)^2}{20{,}06} + \frac{(29-26{,}84)^2}{26{,}84} +$$

$$+ \frac{(25-22{,}25)^2}{22{,}25} + \frac{(8-11{,}64)^2}{11{,}64} + \frac{(5-4{,}69)^2}{4{,}69} = 3{,}759;$$

и) Для обчислення кількості ступенів вільності треба від числа інтервалів відняти кількість зв’язків, які накладає підсумовування. У випадку нормального закону зв’язків 3, це підсумовування при обчисленні $\bar{x}$, D, χ^2. В даному прикладі ступенів вільності 7 –3 = 4. Нехай в даному прикладі заданий рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Використовуючи табл. А.5, знайдемо критичне значення розподілу χ^2: $\chi^2_{крит} = 9{,}5$, отже $\chi^2_{спост} < \chi^2_{крит}$, тому немає підстав відкинути гіпотезу про нормальний розподіл.

к) Визначимо ймовірність P_{ab} попадання у інтервал [2,48; 3,65] двома способами – за відносною частотою і за теоретичною функцією розподілу.

За відносною частотою:

$$P_{ab} = \frac{0{,}5 \cdot 21 + 29 + 25}{100} = 0{,}645$$

(в чисельнику враховуємо частоти тих варіант варіаційного ряду, які належать інтервалу [a; b], для точок, які знаходяться на границі частота зменшується вдвічі).

За теоретичним розподілом*:*

$$P_{ab} = P\,(a \le X \le b) = \Phi\,(x'') - \Phi\,(x'),$$

$$x'' = \frac{3{,}65 - 2{,}988}{0{,}6833} = 0{,}969 \qquad x' = \frac{2{,}48 - 2{,}988}{0{,}6833} = -0{,}743,$$

$$P_{ab} = \Phi\,(0{,}969) - \Phi\,(-0{,}743) = 0{,}3338 + 0{,}2731 = 0{,}6069.$$

л) Знайдемо інтервали довіри для параметрів нормального розподілу; нехай їх треба обчислити з надійністю $\gamma = 0{,}95$. В табл. А.3 для $n = 100$ і $\gamma = 0{,}95$ знаходимо $t_\gamma = 1{,}984$ і обчислюємо відхилення:

$$\delta = \frac{1{,}984 \cdot 0{,}6833}{\sqrt{100}} = 0{,}136, \qquad a - \delta = 2{,}852, \qquad a + \delta = 3{,}124.$$

З надійністю $\gamma = 0{,}95$ отримаємо $2{,}852 < a < 3{,}124$.

Додаток А (табл. А.4) дозволяє знайти $q_\gamma = 0{,}143$. Тому з надійністю $\gamma = 0{,}95$ отримаємо інтервал довіри

$$\sigma\,(1\text{-}q) < \sigma < (1\text{+}q), \qquad 0{,}586 < \sigma < 0{,}781$$

Якщо задана двовимірна вибірка, то її дослідження виконують за схемою, наведеною у прикладі 18.

Приклад 18. Нехай заданий початковий масив (табл. 5.3)

Таблиця 5.3

x	57	25	51	29	43	32	61	18	45	21	36	61
y	47	56	37	59	52	51	49	74	40	66	65	27

Продовження таблиці 5.3

x	28	14	53	16	14	44	32	60
y	72	79	56	82	70	52	61	33

і задана надійність $\gamma = 0{,}999$. Підрахунок об’єму дає $n = 20$.

а) Знайдемо числові характеристики:

$$S_x = 57 + 25 + 51 + 29 + 43 + 32 + 61 + 18 + 45 + 21 + 36 + 61 + \\ + 28 + 14 + 53 + 16 + 14 + 44 + 32 + 60 = 740,$$

$$S_y = 47 + 56 + 37 + 59 + 52 + 51 + 49 + 74 + 40 + 66 + 65 + 27 + \\ + 72 + 79 + 56 + 82 + 70 + 52 + 61 + 33 = 1128,$$

$$S_{xx} = 57^2 + 25^2 + 51^2 + 29^2 + 43^2 + 32^2 + 61^2 + 18^2 + 45^2 + 21^2 + \\ 36^2 + 61^2 + 28^2 + 14^2 + 53^2 + 16^2 + 14^2 + 44^2 + 32^2 + 60^2 = 32518,$$

$$S_{yy} = 47^2 + 56^2 + 37^2 + 59^2 + 52^2 + 51^2 + 49^2 + 74^2 + 40^2 + 66^2 + \\ 65^2 + 27^2 + 72^2 + 79^2 + 56^2 + 82^2 + 70^2 + 52^2 + 61^2 + 33^2 = 1128,$$

$$S_{xy} = 57 \cdot 47 + 25 \cdot 56 + 51 \cdot 37 + 29 \cdot 59 + 43 \cdot 52 + 32 \cdot 51 + 61 \cdot 49 +$$

$$+ 18 \cdot 74 + 45 \cdot 40 + 21 \cdot 66 + 36 \cdot 65 + 61 \cdot 27 + 28 \cdot 72 + 14 \cdot 790 +$$

$$+ 53 \cdot 56 + 16 \cdot 82 + 14 \cdot 70 + 44 \cdot 52 + 32 \cdot 61 + 60 \cdot 33 = 37641$$

$$\overline{x} = S_x / n = 740 / 20 = 37{,}00, \qquad \overline{y} = S_y / n = 1128 / 20 = 56{,}40$$

$$D_x = S_{xx} / n - \left(\overline{x}\right)^2 = 32518 / 20 - 37{,}00^2 = 256{,}90,$$

$$D_y = S_{yy} / n - \left(\overline{y}\right)^2 = 67986 / 20 - 56{,}40^2 = 218{,}34.$$

б) знайдемо коефіцієнти рівняння лінійної регресії:

$$k = \frac{\frac{1}{n} \cdot S_{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{D_x} = \frac{37641/20 - 37{,}00 \cdot 56{,}40}{256{,}90} = -0{,}7970;$$

$$b = \overline{y} - k \cdot \overline{x} = 56{,}40 + 0{,}797 \cdot 37{,}00 = 85{,}89.$$

в) знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = k \cdot \sqrt{D_x / D_y} = -0{,}8645.$$

Можна оцінити тісноту лінійного зв’язку між факторами за шкалою

$$|r| < 0{,}6 \text{ – слабка},$$

$$0{,}6 \le |r| \le 0{,}9 \text{ – середня},$$

$$|r| > 0{,}9 \text{ – сильна}.$$

Тоді, застосовуючи отриманий результат, можна зробити висновок: між факторами «x» і «y» спостерігається лінійний зв’язок з середнім рівнем тісноти.

г) зробимо передбачення в заданих точках, вважаючи цими точками найменше, середнє і найбільше значення x.

$$y(x) = k \cdot x + b,$$

$$y(x_{min}) = y(14{,}00) = -0{,}7970 \cdot 14 + 85{,}89 = 74{,}73,$$

$$y(x) = y(37{,}00) = -0{,}7970 \cdot 37{,}00 + 85{,}89 = 56{,}40,$$

$$y(x_{max}) = y(82{,}00) = -0{,}7970 \cdot 82 + 85{,}89 = 20{,}54;$$

д) знайдемо інтервали довіри в заданих точках.

$$s_y = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_y} = \sqrt{\frac{20}{19} \cdot 218{,}34} = 15{,}16$$

Використовуючи таблицю А.3, знаходимо $t_\gamma = 3{,}883$. Тепер можна записати формулу для обчислення ширини інтервалу довіри для будь-якого «x» [10]

$$\delta(x) = \frac{t_y \cdot s_y}{\sqrt{n}} \sqrt{(x - \bar{x})^2 / D};$$

$$\frac{t_\gamma \cdot s_y}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}883 \cdot 15{,}16}{4{,}472} = 13{,}163;$$

$$\delta(14) = 13{,}163 \cdot \sqrt{1 + (14 - 37{,}00)^2 / 256{,}9} = 23{,}02;$$

$$\delta(37{,}00) = 13{,}16;$$

$$\delta(82) = 13{,}163 \cdot \sqrt{1 + (82 - 37{,}00)^2 / 256{,}9} = 39{,}23.$$

Отже, отримаємо інтервали довіри для передбачень «y» в заданих точках

$$y_x - \delta_x \leq y \leq y_x + \delta_x;$$

$x = 14$: $\quad 51{,}71 \leq y \leq 97{,}75,$

$x = 37{,}00$: $\quad 43{,}241 \leq y \leq 69{,}56,$

$x = 82$: $\quad -18{,}98 \leq y \leq 59{,}48.$

е) результати розрахунків і заданий числовий масив подамо на одному рисунку (рис. 5.3). Область довіри виявилась широкою тому, що задана дуже висока надійність $\gamma = 0{,}999$ (в загальному випадку всі точки не зобов'язані попадати в область довіри).

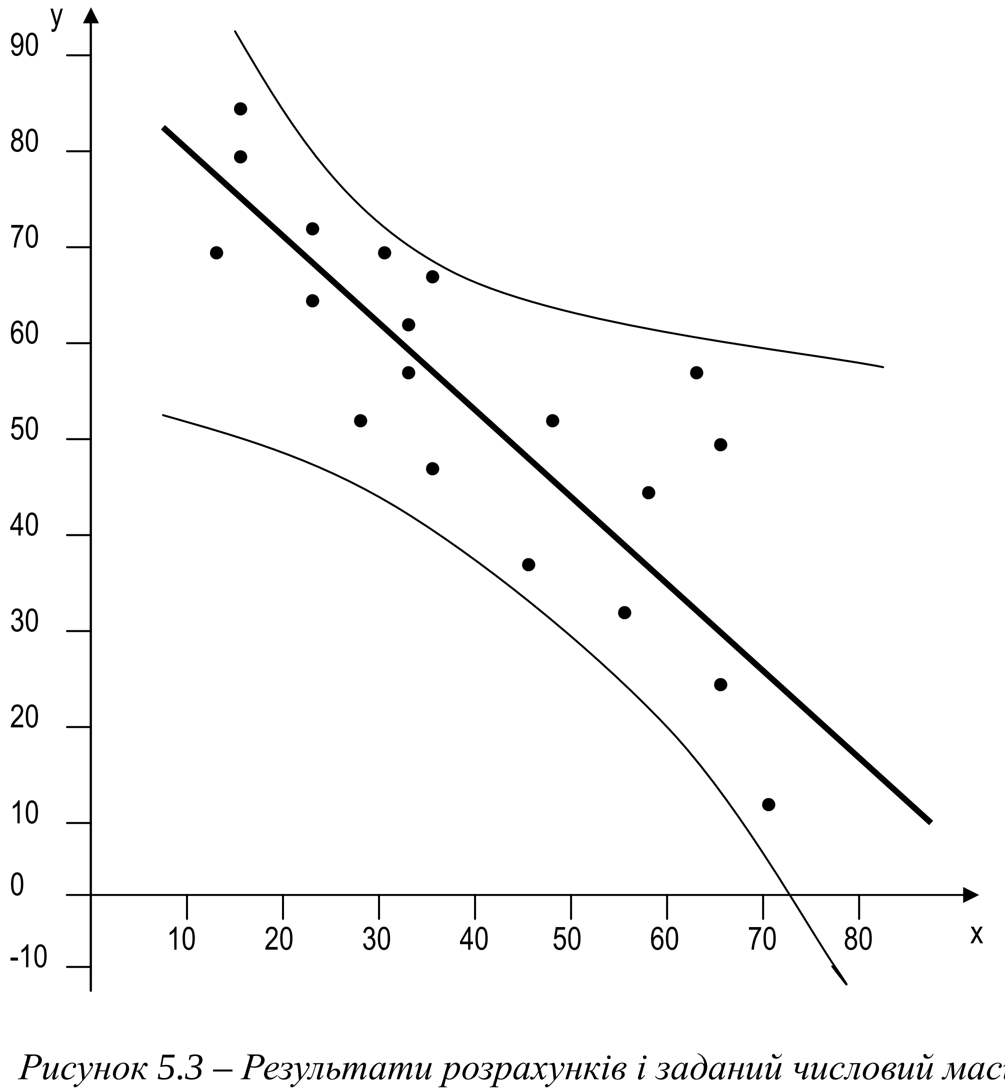

Рисунок 5.3 – Результати розрахунків і заданий числовий масив

6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Розв'язати задачу.

1.1. Серед 50 деталей 3 нестандартні. Навмання взяли 2 деталі. Знайти ймовірність того, що серед відібраних деталей одна стандартна, а інша нестандартна.

1.2. Є п’ять букв: р, е, г, й, о. Яка ймовірність того, що довільне розташування їх одна за іншою дає слово «герой»?

1.3. Серед 40 деталей 5 нестандартних. Взяті навмання 2 деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі будуть нестандартними.

1.4. На клумбі 20 червоних айстр, 10 синіх і 30 білих. Яка ймовірність того, що зірвана в темряві айстра буде червоною або синьою (тобто не біла)?

1.5. З 60 питань, які входять до екзаменаційних білетів, студент вивчив 50. Яка ймовірність того, що взятий навмання студентом білет, що містить два питання, буде складатися з вивчених ним питань?

1.6. Телефонна лінія, що з’єднує районний центр з селом має довжину 12 км. Під час грози сталося пошкодження цієї лінії. Знайти ймовірність того, що пошкодження сталося на перших трьох кілометрах від районного центру.

1.7. У складальника є 10 деталей, які мало відрізняються одна від іншої. З них 4 першого, по 2 другого, третього і четвертого різновидів. Яка ймовірність того, що з шести взятих одночасно деталей три будуть першого різновиду, дві – другого і одна – третього?

1.8. З урни, яка містить 6 занумерованих куль, навмання витягли одну за одною всі кулі, що там знаходились. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих куль будуть йти по черзі?

1.9. На кожній з шести однакових карток надрукована одна з таких букв: А, Т, М, Р, С, О. Картки перемішані. Знайти ймовірність того, що на чотирьох витягнутих по черзі і розкладених в один ряд картках можна буде прочитати слово «трос».

1.10. З 10 хлопчиків і 8 дівчаток потрібно виділити для участі в туристичному поході 5 осіб. Знайти ймовірність того, що будуть виділені 2 хлопчика і 3 дівчинки (на умовах випадкового відбору).

1.11. Бібліотека складається з десяти різних книг, причому п’ять коштують по 4 грн. кожна, три книги – по 1 грн. і дві книги – по 3 грн. Знайти ймовірність того, що взяті навмання дві книги коштують 5 грн.

1.12. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпилений на 125 кубиків однакового розміру, які потім ретельно змішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик буде мати пофарбованих граней: а) три; б) дві; в) одну.

1.13. В ящику 10 деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що в відібраних навмання 6 деталях опиниться не більше однієї нестандартної деталі.

1.14. З урни, що містить 5 куль з номерами 1, 2, ..., 5 витягли навмання 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі номери добутих куль непарні?

1.15. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, лише пам’ятаючи, що ці цифри різні і не нулі, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що він набрав потрібні цифри.

1.16. В майстерню для ремонту надійшло 10 годинників. Відомо, що 6 шт. з них мають потребу в загальній чистці механізму. Майстер бере перші, які трапляться, 5 годинників. Знайти ймовірність того, що два з них потребують загальної чистки механізму.

1.17. В коробці лежать 10 темних і 5 світлих краваток. Продавець навмання витяг 2 краватки. Знайти ймовірність того, що обидві краватки будуть темними.

1.18. До кінця дня в ятці залишилось 60 кавунів, з яких 50 стиглих. Покупець вибирає 2 кавуна. Яка ймовірність, що обидва кавуни стиглі?

1.19. Є два «секретних» цифрових замка, що відмикаються тільки при певному наборі цифр. Один замок має на вісі шість дисків, розділених на п’ять секторів кожний, другий – п’ять дисків, розділених на шість секторів. Який замок краще? Для якого замка ймовірність відімкнути його випадковим набором цифр менша?

1.20. З 30 деталей, серед яких 10 вищої якості, випадковим чином вибирають на зборку 20. Яка ймовірність того, що серед них опиниться 7 деталей вищої якості?

1.21. На однакових картках написані всі натуральні числа від 1 до 25 включно. Випадковим чином беруть дві картки. Знайти ймовірність того, що на цих картках будуть написані прості числа.

1.22. Чотири білети в театр розігруються випадковим чином серед п’яти юнаків і семи дівчат. Знайти ймовірність того, що білети отримають два юнака і дві дівчини.

1.23. На складі телеательє є п’ятнадцять кінескопів, до того ж десять з них виготовлені московським, а решта львівським заводами. Знайти ймовірність того, що серед п’яти навмання взятих кінескопів опиняться три кінескопи, виготовлені московським заводом.

1.24. Букви, які складають слово «ремонт», виписані кожна на окремій картці. Картки старанно перемішують, після чого виймають чотири по черзі. Яка ймовірність отримати при цьому слово «море»?

1.25. В студентській групі 18 юнаків і 12 дівчат. За списком випадковим чином вибирають делегацію з двох осіб. Визначити ймовірність того, що вибрані дівчина і юнак.

1.26. Упаковка містить 20 плиток, причому 3 мають дефекти. Контролер витягає навмання 4 плитки. Знайти ймовірність того, що упаковка буде прийнята контролером, якщо для цього потрібно, щоб він не знайшов ні одної бракованої плитки.

1.27. Склад отримав 20 контрольно-вимірних приладів, але тільки 12 з них відтаровані. Знайти ймовірність того, що з п'яти взятих приладів чотири відтаровані.

1.28. В фізкультурній групі 11 спортсменів, серед них 6 першорозрядників. Знайти ймовірність того, що серед 5 випадково вибраних спортсменів опиниться три першорозрядника.

1.29. Є 6 деталей першого ґатунку, 5 – другого ґатунку, 4 – третього ґатунку. Яка ймовірність того, що серед 3 випадково відібраних деталей опиняться деталі усіх ґатунків?

1.30. З десяти білетів виграють два. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти білетів опиниться один виграшний.

Завдання 2. Розв'язати задачу.

2.1. В електричний ланцюг послідовно ввімкнуті 3 елементи, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності відмови 1-го, 2-го і 3-го елементів відповідно дорівнюють 0,1, 0,15 і 0,2. Знайти ймовірність того, що струму в ланцюзі не буде.

2.2. В ящику 8 деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних деталей опиниться не більше однієї нестандартної деталі.

2.3. Пристрій містить два незалежно працюючих елемента. Ймовірність відмови елементів відповідно дорівнюють 0,05 і 0,08. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоча б один елемент.

2.4. Один з хлопчиків народився в березні, а другий – в квітні. Яка ймовірність того, що обидва вони народились в перші 10 днів місяця?

2.5. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність безперебійної роботи на протязі однієї години після наладки для 1-го верстата дорівнює 0,8, для 2-го – 0,9, для 3-го – 0,75. Знайти ймовірність того, що на протязі години тільки один верстат буде вимагати втручання робітника.

2.6. Ймовірності того, що кожен з трьох друзів прийде в умовлене місце, дорівнюють: 0,8, 0,4, 0,7. Визначити ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо для цього достатньо з'явитися двом з трьох друзів?

2.7. ВТК перевіряє деякі вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб нестандартний, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що нестандартним виявиться тільки четвертий за ліком перевірений виріб (на цьому перевірка закінчується).

2.8. По лінії зв'язку, що має чотири приймально-передавальних пункти, передається повідомлення. Ймовірності того, що повідомлення буде спотворене на першому, другому, третьому і четвертому пунктах відповідно дорівнюють 0,1, 0,15, 0,2 і 0,25. Яка ймовірність отримання неспотвореного повідомлення?

2.9. Для сигналізації про пожежу установлені два незалежно працюючих датчики. Ймовірності того, що при пожежі датчик спрацює, для першого і другого відповідно дорівнюють 0,9 і 0,95. Визначити ймовірність того, що при пожежі спрацює хоча б один датчик.

2.10. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому прийдеться набирати номер не більше трьох разів.

2.11. Робітник обслуговує чотири верстати, кожен з яких може вийти з ладу на протязі зміни з ймовірністю 0,02. Визначити ймовірність того, що з ладу вийдуть не більше 2 верстатів?

2.12. В партії з десяти деталей вісім стандартних. Визначити ймовірність того, що серед двох навмання вибраних з партії деталей є хоча б одна стандартна.

2.13. В двох ящиках знаходяться деталі: в першому – 10, з них 3 стандартні, в другому – 15, з них 6 стандартні. З кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі виявляться стандартними.

2.14. В студії телебачення 3 телевізійні камери. Для кожної камери ймовірність того, що вона ввімкнена в поточний момент, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в поточний момент ввімкнена хоча б одна камера.

2.15. Підприємство виготовляє 95 % виробів стандартних, причому з них 86 % – першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб, виготовлений на цьому підприємстві, виявиться виробом першого ґатунку.

2.16. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб нестандартний, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що нестандартним виявиться тільки четвертий з п'яти перевірених виробів.

2.17. В ящику лежать 15 плавких запобіжників, які відрізняються лише силою струму, на який вони розраховані. З них 7 розраховані на 10А, 5 – на 8А і 3 – на 5А. Навмання беруть два запобіжники, знайти ймовірність того, що вони розраховані на максимальний струм.

2.18. Лабораторія отримала два прилади, причому ймовірність того, що прибор полагоджений, складає для першого приладу 0,75, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при перевірці хоча б один прилад виявиться полагодженим.

2.19. Є три деталі, причому ймовірність того, що деталь придатна, для першої складає 0,8, для другої – 0,75, для третьої – 0,6. Найти ймовірність того, що при перевірці тільки дві деталі виявляться придатними.

2.20. Ймовірність того, що прилад на протязі гарантійного терміну не буде вимагати ремонту для першого приладу складає 0,75, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що на протязі гарантійного терміну тільки один з приладів не буде вимагати ремонту.

2.21. Ймовірність того, що прилад на протязі гарантійного терміну не буде вимагати ремонту складає: для першого приладу 0,7, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що на протязі гарантійного терміну тільки два прилади не будуть вимагати ремонту.

2.22. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює лише один сигналізатор.

2.23. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Ймовірність того, що навмання вибраний виріб буде мати вищий ґатунок, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки 2 вироби мають вищий ґатунок.

2.24. Студент шукає потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому, третьому довіднику, відповідно дорівнює 0,6, 0,7, 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься тільки в двох довідниках.

2.25. Потрібний складальнику тип деталі знаходиться в кожному з чотирьох ящиків з ймовірностями 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Знайти ймовірність того, що потрібний тип деталі міститься не менше ніж в двох ящиках.

2.26. Три дослідники незалежно один від одного виконують вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник зробить помилку при зчитуванні показань приладу, дорівнює 0,1. Для другого і третього дослідників ця ймовірність відповідно дорівнює 0,15 і 0,2. Знайти ймовірність того, що при одному вимірюванні хоча б один з дослідників зробить помилку.

2.27. Фірма купила 3 комп'ютери, причому ймовірності того, що комп'ютери справні, відповідно дорівнюють 0,8, 0,9, 0,95. Знайти ймовірність того, що при перевірці хоча б два комп'ютери будуть справними.

2.28. З 25 питань студент знає 15. Йому ставлять 3 питання. Яка ймовірність того, що студент знає не менше двох питань?

2.29. Є два сигналізатори на випадок аварії. Ймовірність спрацьовування кожного дорівнює 0,9. Знайти ймовірність, що при аварії спрацює один з сигналізаторів, якщо другий з них вмикається тільки тоді, коли перший сигналізатор не спрацював.

2.30. Деталь обробляється трьома автоматами, які працюють незалежно один від одного Ймовірності браку для кожного з автоматів дорівнюють 0,95, 0,95, 0,9. Деталь вважається 2-го ґатунку, якщо брак допущений тільки одним з автоматів. Знайти ймовірність того, що виготовлена деталь 2-го ґатунку.

Завдання 3. Розв'язати задачу.

3.1. При транспортуванні та вантажно-розвантажувальних роботах 6 % цегли, що надходить, виявляється битою. Яка ймовірність того, що з партії в 10 000 цеглин битими опиняться не більше 700 штук.

3.2. При масовому виробництві інтегральних схем ймовірність появи браку дорівнює 0,005. Визначити ймовірність того, що в партії з 600 виробів бракованими будуть: а) не більше ніж три вироби, б) рівно чотири вироби.

3.3. Гравець накидає кільця на кілочок, ймовірність удачі при цьому дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що з шести кілець на кілочок попадуть хоча б два.

3.4. В місті N в середньому за один рік народжується 12 300 дітей. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Визначити ймовірність того, що в цьому місті за рік хлопчиків народиться менше ніж дівчаток.

3.5. Металеві труби, кожна довжиною вісім метрів, мають середню концентрацію мікродефектів в 0,375 мікродефектів на один погонний метр. Визначити ймовірність того, що: а) ця труба буде бракованою, якщо за технічними умовами допускається не більше п'яти мікродефектів на кожну трубу; б) ця труба має рівно чотири мікродефекти.

3.6. Будівельна організація має п'ять бульдозерів, для кожного з них ймовірність безвідмовної роботи на протязі деякого часу Т дорівнює 0,9. Визначити такі ймовірності: а) жоден з п'яти бульдозерів не буде вимагати ремонту за час Т; б) два бульдозери будуть мати потребу в проведенні ремонту.

3.7. На диспетчерський пункт в середньому надходить три замовлення на таксі в хвилину. Визначити ймовірність того, що за дві хвилини надійдуть: а) не більше п'яти викликів; б) рівно п'ять.

3.8. В механічному цеху працюють 120 токарів. Ймовірність того, що кожному токарю в поточний момент часу буде потрібен різець даного типу, дорівнює 0,2. Скільки різців даного типу повинна мати інструментальна комора, щоб забезпечити з ймовірністю 0,95 потребу в них.

3.9. Читальний зал інституту розрахований на 300 студентів, кожен з яких з ймовірністю, яка дорівнює 0,2, бере англо-український словник. Скільки таких словників повинно бути у читальному залі, щоб з ймовірністю 0,85 можна було забезпечити усіх бажаючих?

3.10. Станок-автомат виробляє 70 % всіх виробів першим ґатунком, а ті, що залишились – другим. Потрібно з'ясувати, що є більш ймовірним – отримати два вироби першого ґатунку з п'яти навмання вибраних, або п'ять першого ґатунку з десяти.

3.11. До технічного водогону підключені 160 підприємств, кожне з яких з ймовірністю 0,7 в поточний момент часу виконує відбір води з магістралі. Визначити ймовірність того, що в цей момент відбір води виконують не менше 80 і не більше 120 підприємств.

3.12. Відвальний щит бульдозера захоплює смугу ґрунту завширшки 5 метрів. Середня концентрація великих каменів на одному квадратному метрі площі дорівнює 0,05 каменя. До скидання ґрунту бульдозер кожен раз проходить 20 метрів. Яка ймовірність захвату: а) не більше 4 каменів, б) рівно 6 каменів?

3.13. Трос складається з 200 окремих стальних жил (дротів). Ймовірність того, що одна жила не задовольняє технічним умовам, дорівнює 0,015. Трос бракується, коли в ньому більше чотирьох дефектних жил. Визначити ймовірність появи браку.

3.14. На протязі години комутатор отримує в середньому шістдесят викликів. Телефоністка вийшла на дві хвилини. Яка ймовірність, що за цей час: а) не надійде ні одного виклику, б) надійде не більше двох викликів?

3.15. В камері Вільсона в середньому реєструється 15 елементарних частинок на годину. Визначити ймовірність того, що на протязі двадцяти хвилин буде зареєстровано: а) дві частинки; б) більше двох елементарних частинок.

3.16. В телевізійній студії знаходяться чотири телевізійні камери. Ймовірність того, що одна камера в поточний момент часу ввімкнена, дорівнює 0,6. Визначити ймовірність того, що в поточний момент ввімкнені: а) рівно дві камери; б) хоча б одна камера.

3.17. За деякий проміжок часу середня кількість помилкових з'єднань, що припадають на одного телефонного абонента, дорівнює 5. Яка ймовірність того, що за цей час для даного абонента кількість помилкових з'єднань буде більшим ніж два?

3.18. В магазин надійшло 150 телевізорів. Ймовірність того, що кожен окремий телевізор вимагає регулювання перед продажем, дорівнює 0,4. Визначити ймовірність того, що не менше 50 і не більше 80 телевізорів будуть вимагати додаткового регулювання.

3.19. Ймовірність того, що після одного навчального року підручник буде мати потребу в новій обкладинці, дорівнює 0,25. Визначити ймовірність того, що не менше 800 і не більше 1100 підручників треба буде оправити заново, якщо фонд навчальної бібліотеки складає 4000 книг.

3.20. Зразок радіоактивної речовини в середньому за 10 секунд випромінює чотири заряджені частинки. Визначити ймовірність того, що за одну секунду зразок випроменить: а) хоча б одну частинку; б) рівно одну частинку.

3.21. Протягом години комутатор отримує в середньому 60 викликів. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не буде ні одного виклику; б) буде не більше одного виклику.

3.22. Студент здає екзамен автоматичному екзаменатору. На кожне питання відповідь має вигляд «так» чи «ні». Яка ймовірність здати екзамен навмання, якщо для цього потрібно дати правильні відповіді не менше ніж на сім питань з десяти?

3.23. Керамічні труби довжиною 6 метрів мають випадковий розподіл мікродефектів, середня концентрація яких дорівнює 0,1 мікродефектів на один погонний метр труби. Визначити ймовірність того, що дана труба має: а) не більше 5 мікродефектів, б) рівно 6 мікродефектів.

3.24. Стінові блоки площею в шість квадратних метрів мають випадковий розподіл мікротріщин з середньою концентрацією 0,1 мікротріщин на один квадратній метр. Визначити ймовірність того, що даний блок: а) не має ні одної тріщини; б) має не більше чотирьох мікротріщин.

3.25. В середньому на 1 кв. м поверхні штучного супутника попадає за час його роботи на орбіті 400 мікрометеоритів. Визначити ймовірність попадання більше п’яти мікрометеоритів у скло ілюмінатора, якщо його площа дорівнює 100 кв. см.

3.26. Робітник обслуговує 5 верстатів, кожен з яких може вийти з ладу на протязі зміни з ймовірністю 0,01. Знайти ймовірність того, що принаймні чотири верстати пропрацюють всю зміну.

3.27. Ймовірність вийти з ладу за деякий час Т для одного конденсатора дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 100 конденсаторів на протязі часу Т з ладу вийдуть: а) рівно 16 конденсаторів; б) від 4 до 19 конденсаторів.

3.28. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 100 деталей 55 виявляться відполірованими, якщо в загальній масі деталей є порівну відполірованих і невідполірованих. Яка ймовірність того, що кількість відполірованих деталей буде не менша 45 і не більша 50?

3.29. При масовому виробництві діодів ймовірність браку при формовці дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що з 400 навмання взятих діодів 50 будуть бракованими? Знайти ймовірність того, що бракованих буде від 25 до 55 діодів.

3.30. В сім'ї 4 дітей. Вважаючи ймовірність народження хлопчика і дівчинки однаковою, знайти ймовірність того, що в цій сім'ї 3 хлопчика і 1 дівчинка.

Завдання 4. Розв'язати задачу.

4.1. ВТК проводить контроль виготовлених приладів. Прилади мають приховані дефекти з ймовірністю, що дорівнює 0,15. Під час перевірки наявність дефекту виявляється з ймовірністю 0,9. Крім того, з ймовірністю 0,05 справний прилад може бути помилково визнаний дефектним. При виявленні дефекту прилади бракуються. Визначити ймовірність того, що забракований прилад має дефект.

4.2. На деякому заводі перший верстат виробляє 40 % усієї продукції, а другий – 60 %. В середньому 9 з 1000 деталей, які виробляються першим верстатом, виявляються бракованими, у другого – одна бракована деталь з 250. Випадково відібрана з усієї денної продукції деталь. Вона виявилась за результатами перевірки бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті?

4.3. На інструментальний склад надійшли десять нових інструментів. Кожній з трьох змін видають випадковим чином два інструменти, які після закінчення роботи повертають знову на склад. Визначити ймовірність того, що третя зміна отримає обидва нові інструменти.

4.4. В ящику лежать 20 тенісних м'ячів, з них 12 нових і 8 вже використовуваних. З ящика навмання дістають для гри два м'ячі і після гри повертають у ящик. Після цього виймають два м'ячі для наступної гри. Визначити ймовірність того, що обидва ці м'ячі виявляться новими.

4.5. На станцію очистки стічних вод 30 % стоку надходить з першого підприємства, 40 % – з другого і залишок – з третього. Ймовірність появи в стічних водах солей важких металів для першого, другого і третього підприємств відповідно дорівнює 0,01, 0,02 і 0,04. Визначити ймовірність появи солей важких металів у всьому стоці.

4.6. На деякій фабриці 30 % продукції виготовляє перша машина, 25 % – друга, а решту продукції – третя. Перша машина дає 1 % браку, друга – 2 % і третя – 3 %. Випадково вибрана одиниця продукції виявилась бракованою. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на першій машині.

4.7. На складі знаходяться електролампи, виготовлені двома заводами. Серед них 70 % виготовлені першим заводом, а решта – другим. Відомо, що з кожних 100 лампочок, виготовлених першим заводом, 90 відповідають стандарту, а з 100 ламп виготовлених другим, 80 відповідають стандарту. Визначити ймовірність того, що взята навмання лампочка буде відповідати вимогам стандарту.

4.8. На конвеєр надходять однотипні вироби, виготовлені двома робітниками. При цьому перший робітник постачає 60 %, а другий – 40 % загальної кількості виробів. Ймовірність того, що виріб, виготовлений першим робітником, виявиться нестандартним, дорівнює 0,005, а другим робітником – 0,01. Взятий навмання з конвеєра виріб виявився нестандартним. Визначити ймовірність того, що він виготовлений першим робітником.

4.9. На складання надходять однотипні деталі з трьох підприємств, причому перше постачає 50 %, друге – 30 % і третє – 20 % усієї кількості. Ймовірності появи браку для першого, другого і третього підприємств відповідно дорівнюють 0,05, 0,1 і 0,15. Вибірковий контроль виявив браковану деталь. Яка ймовірність того, що брак відбувається з вини другого підприємства?

4.10. Є десять однакових урн, в дев’яти з яких знаходяться по дві білих і дві чорних кулі, а в одній – п’ять білих куль і одна чорна. З урни, взятої навмання, витягли білу кулю. Яка ймовірність того, що кулю витягли з урни, яка містить п’ять білих куль?

4.11. На склад надійшло сім нових інструментів. Перша зміна отримала три інструменти і, після закінчення роботи, повернула їх на склад. Друга зміна отримала два інструменти і також потім повернула їх на склад. Третя зміна отримала два інструменти. Яка ймовірність того, що всі вони нові, якщо видача інструментів випадкова?

4.12. Ймовірність того, що вироби деякого виробництва відповідають стандарту, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система контролю, яка пропускає з ймовірністю 0,98 вироби, які відповідають стандарту, і з ймовірністю 0,05 вироби, які не відповідають стандарту. Яка ймовірність того, що виріб, який пройшов такий контроль, відповідає стандарту?

4.13. В цеху три типи автоматичних верстатів виробляють одні й ті ж деталі. Продуктивність їхня однакова, але якість роботи різна: верстати першого типу виробляють 90 % продукції відмінної якості, другого – 85 % і третього – 80 %. Всі виготовлені за зміну деталі надходять на склад в одну ємкість. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде мати відмінну якість, якщо верстатів першого типу є 10 штук, другого – 6 і третього – 4.

4.14. Об’єкт будують три бригади монтажників. Ймовірності того, що дана бригада допустить порушення технології при монтажі одного блоку, дорівнюють відповідно 0,01, 0,015 і 0,02. Перша бригада виконала 50 %

усього об’єму робіт, друга – 30 %, третя – 20 %. Яка ймовірність того, що вибраний випадковим чином блок змонтований з порушенням технології?

4.15. На деякій фабриці 30 % всієї продукції виробляється першою машиною, 25 % – другою, а решта продукції – третьою. Перша машина дає 1 % браку, друга – 1,5 % і третя – 2 %. Визначити ймовірність того, що випадково вибрана одиниця продукції виявиться бракованою.

4.16. 40 % всіх приладів, які випускає завод, збирають з високоякісних деталей, а решта – з деталей звичайної якості. Ймовірність безвідмовної роботи за час T приладу, зібраного з деталей звичайної якості, дорівнює 0,7, а з високоякісних – 0,95. Прилад випробували на протязі часу T і він працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що прилад був зібраний з високоякісних деталей.

4.17. В партії з 600 радіоламп 200 виготовлені на першому заводі, 250 – на другому і решта – на третьому. Ймовірність того, що лампа, яка виготовлена на першому заводі, виявиться стандартною, дорівнює 0,97, на другому заводі – 0,91 і на третьому – 0,95. Навмання узята лампа виявилась стандартною. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі.

4.18. У лікарню в середньому надходить 50 % хворих з хворобою A, 30 % – з хворобою B і 20 % – з хворобою C. Ймовірності повного видужання після хвороб A, B і C відповідно дорівнюють 0,7, 0,8 і 0,9. Визначити ймовірність того, що хворий, який опинився в лікарні, буде виписаний здоровим.

4.19. На двох верстатах виробляється однакова продукція. Продуктивність першого верстата вдвічі більша за продуктивність другого. Ймовірність появи браку на першому верстаті 0,1, на другому – 0,15. Виготовлені за зміну деталі складаються в контейнер. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний з контейнера виріб не виявиться бракованим.

4.20. Деякі вироби перевіряються на стандартність двома контролерами, причому перший перевіряє 60 %, а другий – 40 % всієї продукції. Ймовірність того, що стандартний виріб буде признаний стандартним при перевірці першим контролером, дорівнює 0,95, другим контролером – 0,9. (Якість контролю залежить від кваліфікації контролера). Визначити ймовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним.

4.21. Є дві партії однотипних виробів з 12 і 10 штук, причому в кожній партії є по одному бракованому. Виріб, який взяли навмання з першої партії, переклали в другу, після чого вибрали навмання один виріб з другої партії. Визначити ймовірність того, що другий раз не буде витягнутий бракований виріб.

4.22. Перевірка агрегатів машини при технічному обслуговуванні дозволяє визначити несправність з ймовірністю 0,8. Ймовірність помилкового виявлення «несправності» дорівнює 0,01. Несправні машини складають

20 % всіх машин, що надходять на техобслуговування. Визначити ймовірність того, що машина справна, якщо вона була визнана несправною.

4.23. Ймовірність того, що при бурінні свердловини будуть знайдені ґрунтові води, дорівнює 0,3. Ґрунтові води супроводжуються твердими породами з ймовірністю 0,6. Там, де ґрунтових вод немає, тверді породи зустрічаються з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що при бурінні будуть знайдені тверді породи.

4.24. В цеху перший, другий і третій верстати виготовляють відповідно 25 %, 35 % і 40 % всіх болтів, що виробляються. Брак при їх виготовленні складає відповідно 5 %, 4 % і 2 %. Випадково взятий зі складу болт виявився дефектним. Визначити ймовірність того, що він виготовлений на другому станку.

4.25. Є два набори деталей. Ймовірність того, що деталь першого набору є стандартною, дорівнює 0,8, а другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що випадкова деталь з навмання взятого набору нестандартна.

4.26. По лінії зв'язку передаються два сигнали: А і В відповідно з ймовірностями 0,84 і 0,16. Через перешкоди 1/6 частина сигналів А спотворюється і приймається як В-сигнали, а 1/8 частина переданих В-сигналів приймається як А-сигнали. Знайти ймовірність того, що на пункті прийому з'явиться А-сигнал.

4.27. Два автомати виробляють деталі, які надходять на спільний конвеєр. Ймовірність отримання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,06, а на другому – 0,3. Продуктивність першого автомата вдвоє більша ніж продуктивність другого. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь є нестандартною.

4.28. Прилад може працювати в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається в 80 % всіх випадків роботи приладу, ненормальний – в 20 %. Ймовірність виходу з ладу приладу за час Т в нормальному режимі дорівнює 0,1, в ненормальному – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу за час Т.

4.29. Пасажир може звернутися для купівлі квитка в одну з двох кас. Ймовірність звернення в кожну касу залежить від їх розташування і дорівнює відповідно 0,7 і 0,3. Ймовірність того, що до моменту появи пасажира білети будуть розпродані, дорівнює для першої каси 0,8, для другої – 0,4. Знайти ймовірність того, що, вибравши навмання касу, пасажир придбає квиток.

4.30. В двох ящиках знаходяться радіолампи. В першому ящику міститься 12 ламп, з них одна нестандартна; в другому 10 ламп, з них 2 нестандартні. З першого ящику навмання взята лампа і перекладена у другий. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута з другого ящика лампа буде нестандартною.

Завдання 5. У схемі повторних випробувань точне значення ймовірності можна отримати за формулою Бернуллі**.** При заданих «n» і «m» для вказаних значень $p_i = \frac{A_i}{1000}$**,** (i = 1**,** 2, 3, 4**,** 5) обчислити $P_n(m)$ по трьох формулах: Бернуллі**,** Лапласа і Пуассона**.** Для кожного значення p_i знайти відносну похибку формул Лапласа і Пуассона. Побудувати на одному рисунку графіки відносних похибок цих формул як функцій p. Показати області переважного використання формул Лапласа і Пуассона. (Числові параметри варіантів наведено у таблиці 6.1.)

Таблиця 6.1

Варіант	n	m	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_1	x_2	x_3	M	D
1	12	1	207	233	250	270	306	-3	-2	2	-1	4,0
2	12	1	203	240	254	272	304	-2	1	2	0	2,8
3	12	1	202	231	259	274	300	-1	0	5	1	7,0
4	12	1	209	238	255	278	308	0	1	4	2	2,8
5	12	1	200	236	253	277	301	1	2	6	3	4,0
6	12	2	257	282	299	320	356	2	5	6	4	2,8
7	12	2	253	289	303	322	354	3	4	9	5	7,0
8	12	2	252	280	308	324	350	4	5	8	6	2,8
9	12	2	259	287	304	328	358	-4	-3	1	-2	4,0
10	12	2	250	285	302	327	351	-3	0	1	-1	2,8
11	13	1	177	203	220	240	277	-2	-1	4	0	7,0
12	13	1	173	210	224	242	275	-1	0	3	1	2,8
13	13	1	172	201	229	244	271	0	1	5	2	4,0
14	13	1	179	208	225	248	279	1	4	5	3	2,8
15	13	1	170	206	223	247	272	2	3	8	4	7,0
16	13	2	246	272	289	309	346	3	4	7	5	2,8
17	13	2	242	279	293	311	344	4	5	9	6	4,0
18	13	2	241	270	298	314	340	-4	-1	0	-2	2,8
19	13	2	248	277	294	318	348	-3	-2	3	-1	7,0
20	13	2	239	275	292	317	341	-2	-1	2	0	2,8
21	14	1	147	173	190	210	247	-1	0	4	1	4,0
22	14	1	143	180	194	212	245	0	3	4	2	2,8
23	14	1	142	171	199	214	241	1	2	7	3	7,0
24	14	1	149	178	195	218	249	2	3	6	4	2,8
25	14	1	140	176	193	217	242	3	4	8	5	4,0
26	14	2	246	272	289	309	346	4	7	8	6	2,8
27	14	2	242	279	293	311	344	-4	-3	2	-2	7,0
28	14	2	241	270	298	314	340	-3	-2	1	-1	2,8
29	14	2	248	277	294	318	348	-2	-1	3	0	4,0
30	14	2	239	275	292	317	341	-1	2	3	1	2,8

Завдання 6. Випадкова величина може набувати значень x_1, x_2, x_3 з ймовірностями p_1, p_2, p_3 (див. табл. 6.1). При заданих значеннях випадкової величини і її математичного сподівання M ймовірності p_i визначаються неоднозначно. Виконати такі дослідження:

а) Визначити області можливих значень для кожної з ймовірностей

$$p_1,\ p_2,\ p_3.$$

б) Знайти в параметричному вигляді

$$p_1 = p_1(t), \quad p_2 = p_2(t), \quad p_3 = p_3(t)$$

взаємозв'язок між ймовірностями (параметр t вибрати так, щоб функції $p_i(t)$ були лінійними). Побудувати графіки цих функцій на одному рисунку.

в) Використовуючи графіки пункту б), знайти закон розподілу випадкової величини X, що найменше відрізняється від рівномірного, тобто такий розподіл, при якому величина $R = \max p_i - \min p_i$ набуває найменших значень.

г) Знайти область можливих значень D(X).

Завдання 7. Випадкова величина X може набувати значень x_1, x_2, x_3 з математичним сподіванням M і дисперсією D (див. табл. 6.1). Знайти закон розподілу X.

Завдання 8. Випадкова величина X розподілена за законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ C_1 x + C_0, & a < x < b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \qquad (6.1)$$

з математичним сподіванням M_1 (табл. 6.2). Виконати такі завдання:

а) визначити коефіцієнти C_1, C_0 і побудувати графік функції щільності ймовірності (функції $f(x)$);

б) знайти інтегральну функцію розподілу (функцію $F(x)$) і побудувати її графік;

в) знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

Завдання 9. Виконати такі завдання для випадкової величини X, розподіленої за законом (6.1) (табл. 6.2):

а) знайти діапазон можливих значень математичного сподівання M;

б) побудувати графіки $f(x)$ при $M = M_{min}$ і $M = M_{max}$ (на одному рисунку);

в) знайти залежність D = D(M), побудувати її графік;

г) знайти діапазон можливих значень дисперсії D;

д) знайти діапазон можливих значень $P\{c \le X \le d\}$.

Завдання 10. Випадкова величина X розподілена за законом (6.1). Відома ймовірність p – попадання X в інтервал [c; d] (див. табл. 6.2). Знайти закон розподілу X і обчислити її числові характеристики.

Завдання 11. Виконати такі завдання (див. табл. 6.2):

а) обчислити числові характеристики випадкової величини X;

Таблиця 6.2

Варіант	a	b	c	d	P	M_1	M_2	D	u_1	u_2
1	-5	1	0	2	17/72	-3	3/2	3/20	1/10	1/2
2	-4	4	3	6	1/6	1	4	1	1/14	1/4
3	-3	2	0	3	13/25	-1	3/4	27/80	1/6	1/2
4	-2	4	2	5	4/9	2	4	3/4	1/8	1/2
5	-1	7	5	9	1/8	2	8	3/5	1/12	1/4
6	0	5	2	8	18/25	3	6	4	1/4	1/6
7	-6	0	-4	2	7/9	-4	-5/2	27/20	1/4	1/4
8	-5	3	2	4	1/6	0	7/2	1/60	1/14	1/2
9	-4	1	0	2	7/25	-2	1/2	3/20	1/8	1/2
10	-3	3	1	4	4/9	1	3	1	1/8	1/2
11	-2	6	5	8	1/6	1	29/4	27/80	1/14	1/4
12	-1	4	3	6	7/25	2	4	3/4	1/8	1/4
13	0	6	3	7	5/8	2	4	3/5	1/6	1/2
14	-6	2	-2	4	3/8	-1	0	4	1/8	1/4
15	-5	0	-3	3	18/25	-3	3/2	27/20	1/4	1/6
16	-4	2	1	3	17/72	0	3/2	1/60	1/10	1/2
17	-3	5	4	6	1/6	0	11/2	3/20	1/14	1/2
18	-2	3	2	5	7/25	1	3	1	1/8	1/4
19	-1	5	3	6	4/9	1	15/4	27/80	1/8	1/2
20	0	8	6	9	1/8	5	8	3/4	1/12	1/2
21	-6	-1	-3	1	13/25	-4	0	3/5	1/6	1/4
22	-5	1	-2	4	5/8	-1	2	4	1/6	1/6
23	-4	4	0	6	3/8	-1	3/2	27/20	1/8	1/4
24	-3	2	1	3	7/25	0	5/2	1/60	1/8	1/2
25	-2	4	3	5	17/72	0	7/2	3/20	1/10	1/2
26	-1	7	5	8	1/8	4	7	1	1/12	1/2
27	0	5	4	7	7/25	2	25/4	27/80	1/8	1/4
28	-6	0	-1	2	17/72	-2	0	3/4	1/10	1/4
29	-5	3	0	4	1/4	-2	1	3/5	1/10	1/2
30	-4	1	-3	3	22/25	-1	-1	4	1/2	1/4

б) знайти інтегральну функцію розподілу (функцію F(x)) і побудувати її графік, якщо випадкова величина X розподілена за законом

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ u_1, & a\le x\le b; \\ 0, & b\le x\le c; \\ u_2, & c\le x\le d; \\ 0, & d<x. \end{cases}$$

Завдання 12. Неперервна випадкова величина X розподілена за законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ c_2x^2 + c_1x + c_0, & c \le x \le d, \\ 0, & x > d. \end{cases}$$

з математичним сподіванням M_2 і дисперсією D (див. табл. 6.2).

Виконати такі завдання:

а) визначити коефіцієнти c_0, c_1, c_2 і побудувати графік щільності ймовірності (функції f(x));

б) на одному рисунку побудувати графіки f(x) і функції щільності рівномірного розподілу на тому ж інтервалі [c; d];

в) знайти найбільше і найменше значення f(x), дати їм імовірнісну інтерпретацію;

г) знайти найбільше відхилення f(x) від рівномірного розподілу на тому ж інтервалі.

Завдання 13. Обчислити ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами $a = M_2$, $\sigma = \sqrt{D}$ в інтервал [c; d] (див. табл. 6.2).

Завдання 14. Двовимірна випадкова величина розподілена за законом (табл. 4.4) з відомими x_i, y_j, p_{ij}. (табл. 6.3)

Обчислити її числові характеристики:

а) математичне сподівання і дисперсії компонентів випадкової величини M[X], M[Y], D[X], D[Y];

б) кореляційний момент μ_{xy} і коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Завдання 15. Двовимірна випадкова величина розподілена за законом (табл. 4.4), з відомими значеннями x_i, y_j і числовими характеристиками M[X], M[Y], μ_{xy} (кореляційний момент) (див. табл. 6.3). Знайти інші параметри закону розподілу (тобто ймовірності p_{ij}).

Завдання 16. Двовимірна випадкова величина розподілена за законом (табл. 4.4) з відомими значеннями x_i, y_j і числовими характеристиками M[X], M[Y], μ_{xy} (див. табл. 6.3). Знайти інші параметри закону розподілу, тобто ймовірності, якщо X та Y незалежні.

Таблиця 6.3

Варіант	x_1	x_2	y_1	y_2	p_{11}	p_{12}	p_{22}	M[X]	M[Y]	μ_{xy}
1	-2	-1	1	3	0,29	0,41	0,06	-1,2	1,6	-0,2
2	1	4	-1	1	0,20	0,30	0,41	2,9	0,0	-0,7
3	-1	0	0	3	0,05	0,59	0,06	-0,4	1,0	-0,4
4	1	3	2	3	0,58	0,25	0,11	2,6	2,1	-0,1
5	0	4	0	1	0,69	0,10	0,08	3,1	0,2	-0,1
6	-1	0	0	1	0,37	0,22	0,15	-0,3	0,4	0,1
7	0	1	0	3	0,37	0,08	0,30	0,5	1,6	-0,4
8	1	3	1	2	0,13	0,36	0,07	1,8	1,5	0,0
9	-1	3	0	4	0,15	0,69	0,10	0,5	0,6	0,3
10	2	5	-1	3	0,08	0,59	0,23	3,2	0,3	-0,3
11	-1	0	1	2	0,20	0,49	0,23	-0,1	1,3	-0,0
12	2	6	0	3	0,27	0,15	0,15	4,3	1,7	-0,6
13	-1	3	2	3	0,12	0,19	0,25	0,9	2,6	0,3
14	0	2	0	2	0,33	0,16	0,32	1,0	1,0	-0,1
15	-1	0	0	3	0,11	0,68	0,06	-0,8	0,6	0,1
16	2	5	1	4	0,43	0,10	0,33	3,9	2,4	0,2
17	-1	2	1	3	0,23	0,33	0,22	1,1	1,8	-0,6
18	0	1	2	5	0,21	0,50	0,11	0,7	2,8	-0,3
19	0	2	2	4	0,06	0,09	0,55	1,1	3,7	0,1
20	0	3	0	1	0,11	0,06	0,42	2,4	0,8	0,1
21	2	4	0	1	0,26	0,21	0,47	2,8	0,5	-0,3
22	0	4	2	5	0,13	0,27	0,47	0,9	3,8	-0,6
23	-1	2	-1	3	0,13	0,36	0,26	0,0	1,0	-0,9
24	0	3	1	5	0,43	0,40	0,10	1,2	1,6	0,5
25	0	1	0	1	0,09	0,10	0,46	0,5	0,8	-0,0
26	2	4	-1	1	0,26	0,14	0,38	3,3	0,2	0,2
27	1	5	1	4	0,42	0,18	0,15	2,7	2,2	-1,2
28	-1	3	0	3	0,41	0,08	0,42	0,7	1,5	-1,7
29	1	5	1	5	0,11	0,26	0,09	3,8	3,5	1,1
30	-1	2	-1	1	0,40	0,30	0,14	1,2	-0,3	-0,3

Завдання 17. Двовимірна випадкова величина розподілена за законом (табл. 4.4) із заданими значеннями x_i, y_j і числовими характеристиками M[X], M[Y] (див. табл. 6.3). Знайти область можливих значень кореляційного моменту μ_{xy}.

Для розв'язання наступних трьох завдань студенту потрібно згідно зі своїм варіантом з таблиці 6.4 вибрати так званий *набір*.

Таблиця 6.4

Варіант	1	2	3	4	5	6
набір	3 4 5 6 8	1 2 3 6 8	2 3 5 7 8	2 3 4 6 8	1 2 5 6 8	1 4 5 6 7

Продовження таблиці 6.4

Варіант	7	8	9	10	11	12
набір	1 3 5 6 8	3 5 6 7 8	1 2 3 4 7	1 3 4 7 8	1 3 4 6 7	2 3 6 7 8

Продовження таблиці 6.4

Варіант	13	14	15	16	17	18
набір	2 3 4 5 6	1 4 5 7 8	1 2 3 4 5	2 5 6 7 8	1 2 4 5 8	1 2 4 6 7

Продовження таблиці 6.4

Варіант	19	20	21	22	23	24
набір	1 4 5 6 8	1 3 5 7 8	1 2 4 5 7	2 3 4 5 7	1 2 5 6 7	3 4 5 7 8

Продовження таблиці 6.4

Варіант	25	26	27	28	29	30
набір	2 3 4 5 8	1 2 3 4 6	1 2 4 6 8	1 3 4 5 7	1 4 6 7 8	1 3 4 6 8

Завдання 18. З групи А таблиці 6.5 вибрати числа, які записані в клітинах з номерами з *набору* (див. табл. 6.4) для даного варіанта. Порожня клітина означає відсутність числа. Виписані таким чином числа назвемо вибіркою А. Аналогічно за допомогою рядка В вибираємо вибірку В. Позначимо $C = A \cup B$ (об'єднана вибірка). Виконати такі завдання:

а) знайти вибіркові середні і дисперсії для А і В;

б) обчислити внутрішньо- і міжгрупові дисперсії;

в) визначити середню дисперсію вибірки С за обчисленими числовими характеристиками А і В;

г) обчислити виправлену вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для «С».

Таблиця 6.5

Набір	1	2	3	4	5	6	7	8
Група А		-2,4	3,7		0,8	5,8	-1,1	-3,1
Група В	-2,9	8,3	1,8	-3,7	4,2		-0,5	6,1

Завдання 19. З рядків таблиці 6.6 згідно зі своїм набором (див. табл. 6.4) скласти вибірку, тобто початковий числовий масив. Інші потрібні дані наведені у табл. 6.7.

Пояснення. Числа набору вказують, які рядки відносяться до даного варіанта. Так, для варіанта 8 в початковий числовий масив з таблиці 6.6 треба включити елементи рядків 3, 5, 6, 7, 8; тобто отримаємо набір з 26 + 21 + 24 + 25 + 23 = 119 елементів. Для спрощення запису в таблиці 6.6 дев'ятьма буквами: A, B, C, D, E, F, G, H, K позначені числа, що утворюють арифметичну прогресію. Два перших члени цієї прогресії вказані в таблиці 6.7. Наприклад, для варіанта 3 з таблиці 6.7 виписуємо A = 1,0, B = 1,4. Отже, крок прогресії 0,4 і наступні букви позначають числа C = 1,8, D = 2,2 і т. д.

Виконати такі завдання:

а) скласти варіаційний ряд;

б) знайти розмах, медіану і моду вибірки;

в) побудувати полігон частот;

г) побудувати гістограму вибірки. Основи прямокутників гістограми вибрати так, щоб точки, які відповідають числам «А», «В» і т. д. опинились на серединах основ. Інтервали, частота яких виявиться меншою 5, об'єднати з більш показними сусідніми інтервалами;

д) обчислити вибіркове середнє, дисперсію; виправлену дисперсію і середнє квадратичне відхилення;

е) обчислити теоретичні частоти для нормального закону, крайні інтервали брати напівнескінченними (сума всіх частот при цьому буде дорівнювати об'єму вибірки);

ж) накласти теоретичну криву на гістограму;

з) обчислити суму Пірсона;

и) визначити кількість ступенів вільності, з рівнем значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл;

к) визначити ймовірність попадання в інтервал [a; b] двома способами – за відносною частотою і за теоретичною функцією розподілу;

л) знайти інтервали довіри для числових параметрів «а» і «σ» нормально розподіленої генеральної сукупності.

Таблиця 6.6

Набір	Елементи вибірки	шт.
1	F E E F C E D E B E F D G D H C G B E B C C D D	24
2	B D E D G K G F D E D C H E D C G E K C	20
3	C E F F C D F G G D G C E K E H D E E F D D C G K A	26
4	E F D E D E K F E F A G E C E G G D D B D F H E G H	26
5	E F G F H E B G E G E K F B E B D G E F K	21
6	B D F F F F H D C E D A G K D E D B E F F K D G	24
7	D F H F D C D H G G E H B K E G D B B A D E G D E	25
8	H E H E E F H G E D D C K A E D B F D C D G C	23

Таблиця 6.7

Варіант	A	B	a	b	γ	α
1	2	3	4	5	6	7
1	0,6	1,5	3,3	4,8	0,999	0,025
2	0,8	1,2	1,2	1,7	0,999	0,025
3	1,0	1,4	1,4	1,9	0,95	0,05
4	2,8	3,6	3,6	4,9	0,99	0,05
5	0,5	1,0	1,5	2,2	0,99	0,05
6	0,5	1,0	1,0	1,7	0,999	0,05
7	1,2	1,6	2,4	2,9	0,999	0,01
8	1,9	2,7	3,5	4,8	0,999	0,05
9	0,5	1,2	1,2	2,3	0,99	0,01
10	1,7	2,3	2,9	3,8	0,95	0,05
11	1,1	1,9	2,7	4,0	0,95	0,01
12	2,1	3,0	3,9	5,4	0,99	0,02
13	1,2	1,9	3,3	4,4	0,999	0,01
14	0,7	1,2	2,2	2,9	0,99	0,05
15	0,9	1,4	1,9	2,6	0,999	0,01
16	2,9	3,6	4,3	5,4	0,95	0,025
17	2,6	3,2	4,4	5,3	0,999	0,01
18	1,2	2,1	3,9	5,4	0,99	0,05
19	1,9	2,6	4,0	5,1	0,99	0,05
20	1,7	2,6	4,4	5,9	0,99	0,025
21	1,7	2,2	3,2	3,9	0,95	0,05
22	1,5	2,2	2,9	4,0	0,99	0,05
23	1,0	1,9	2,8	4,3	0,99	0,01
24	0,7	1,2	1,7	2,4	0,95	0,05
25	0,7	1,3	1,3	2,2	0,999	0,01

Продовження таблиці 6.7

1	2	3	4	5	6	7
26	1,8	2,4	3,6	4,5	0,99	0,01
27	1,7	2,3	2,9	3,8	0,95	0,01
28	1,6	2,4	4,0	5,3	0,999	0,025
29	2,9	3,3	3,7	4,2	0,99	0,05
30	0,7	1,1	1,1	1,6	0,999	0,05

Завдання 20 (таблиця 6.8). Для заданої двовимірної вибірки виконати такі завдання:

а) обчислити числові характеристики S_x, S_y, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, $\overline{x}$, $\overline{y}$, D_x, D_y;

б) обчислити коефіцієнти рівняння лінійної регресії;

в) обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції, оцінити тісноту лінійного зв'язку між факторами

г) для X_{min}, X, X_{max} знайти передбачення «y»;

д) для X_{min}, X, X_{max} знайти інтервали довіри лінії регресії з надійністю γ;

е) побудувати на одному рисунку кореляційне поле, лінію регресії і область довіри.

В таблиці 6.8 число «k» дорівнює остачі від ділення номера варіанта на 5, а число «n» приймає значення з набору для цього варіанта (табл. 6.4). Отже, в початковий числовий масив треба включити пари чисел «x» і «y», які записані в стовпці «k» в тих клітинах (відокремлених товстими горизонтальними лініями), номер «n» яких належить набору даного варіанта.

Таблиця 6.8

k →	0		1		2		3		4	
n ↓	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	35	30	58	13	83	28	65	15	75	28
	31	38	29	32	86	29	86	39	77	34
	1	73	2	54	80	25	76	28	99	63
	36	28	29	34	90	34	86	37	96	58
2	6	63	31	31	61	14	86	37	65	18
	43	25	37	25	75	24	81	32	95	58
	27	42	21	39	76	23	63	15	65	21
	3	69	55	11	70	19	96	44	62	16
3	1	70	0	61	86	33	99	50	92	53
	6	63	49	23	92	38	84	37	77	33
	33	34	56	20	98	41	77	27	78	35
	46	47	26	34	79	23	62	19	96	55

Продовження таблиці 6.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	10	58	38	26	78	25	76	27	82	40
	49	16	14	40	65	18	78	29	71	23
	45	24	33	31	71	17	87	40	82	38
	46	21	21	36	64	16	72	24	75	28
5	17	52	40	27	63	16	92	46	85	40
	4	71	7	52	96	45	80	31	64	17
	17	50	4	53	66	17	85	36	92	51
	34	32	24	38	91	36	91	48	60	16
6	2	76	57	17	74	22	61	19	66	24
	4	70	43	24	95	43	60	18	96	61
	39	28	51	17	85	29	92	42	91	54
	4	70	7	49	85	31	89	43	68	24
7	9	61	55	22	70	20	66	23	88	49
	16	54	45	25	61	12	71	26	64	21
	35	28	46	21	82	26	64	18	88	45
	9	65	35	26	83	26	74	24	87	45
8	3	73	34	30	93	39	68	20	96	59
	18	52	28	31	86	29	87	42	81	33
	45	15	17	40	86	29	75	27	65	20
	3	74	16	38	88	38	73	25	69	25

ЛІТЕРАТУРА

1. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1982. – 224 с.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1979. – 400 с.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М: . Высш. шк., 1979. – 479 с.
4. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей. / Е. С Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1969. – 432 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для втузов. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-пресс, 2001. – Т 2. – 544 с. – ISBN 5-89602-013-9.
6. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов. / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 543 с. – ISBN 5-238-00141-X.
7. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – М. : Статистика, 1970.– 368 с.
8. Венецкий, И. Г., Теория вероятностей и математическая статистика / И. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – М. : Статистика. 1975. – 346 с.
9. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 668 с.
10. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Финансы и статистика, 1986. – Том 1. – 432 с.
11. Бугір, М. К. Теорія ймовірності та математична статистика : посібник для студентів економічних спеціальностей вузів / М. К. Бугір. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998. – 176 с. – ISBN 966-562-175-0/.

ДОДАТОК А.
ТАБЛИЦІ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця А.1 – Значення функції $\varphi(x)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1899	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця А.2. – Таблиця значень функції Ф(х)

X	Ф(X)
0,00	0,0000
0,01	0,0040
0,02	0,0080
0,03	0,0120
0,04	0,0160
0,05	0,0199
0,06	0,0239
0,07	0,0279
0,08	0,0319
0,09	0,0359
0,10	0,0398
0,11	0,0438
0,12	0,0478
0,13	0,0517
0,14	0,0557
0,15	0,0596
0,16	0,0636
0,17	0,0675
0,18	0,0714
0,19	0,0754
0,20	0,0793
0,21	0,0832
0,22	0,0871
0,23	0,0910
0,24	0,0948
0,25	0,0987
0,26	0,1026
0,27	0,1064
0,28	0,1103
0,29	0,1141
0,30	0,1179
0,31	0,1217
0,32	0,1255
0,33	0,1293
0,34	0,1331
0,35	0,1368
0,36	0,1406
0,37	0,1443
0,38	0,1480
0,39	0,1517
0,40	0,1554

X	Ф(X)
0,41	0,1591
0,42	0,1627
0,430,	0,16664
0,44	0,1700
0,45	0,1736
0,46	0,1772
0,47	0,1808
0,48	0,1844
0,49	0,1879
0,50	0,1915
0,51	0,1950
0,52	0,1985
0,53	0,2019
0,54	0,2054
0,55	0,2088
0,56	0,2122
0,57	0,2157
0,58	0,2190
0,59	0,2224
0,60	0,2257
0,61	0,2291
0,62	0,2324
0,63	0,2356
0,64	0,2389
0,65	0,2421
0,66	0,2454
0,67	0,2486
0,68	0,2517
0,69	0,2549
0,70	0,2580
0,71	0,2611
0,72	0,2642
0,73	0,2673
0,74	0,2703
0,75	0,2734
0,76	0,2764
0,77	0,2793
0,78	0,2823
079	0,2852
0,80	0,2881
0,81	0,2910

X	Ф(X)
0,82	0,2939
0,83	0,2967
0,84	0,2995
0,85	0,3023
0,86	0,3051
0,87	0,3079
0,88	0,3106
0,89	0,3133
0,90	0,3159
0,91	0,3186
0,92	0,3212
0,93	0,3238
0,94	0,3264
0,95	0,3289
0,96	0,3315
0,97	0,3340
0,98	0,3365
0,99	0,3389
1,00	0,3414
1,01	0,3438
1,02	0,3461
1,03	0,3485
1,04	0,3508
1,05	0,3531
1,06	0,3554
1,07	0,357
1,08	0,3599
1,09	0,3622
1,10	0,3634
1,11	0,3665
1,12	0,3687
1,13	0,3708
1,14	0,3729
1,15	0,3749
1,16	0,3770
1,17	0,3790
1,18	0,3810
1,19	0,3830
1,20	0,3849
1,21	0,3869
1,22	0,3888

X	Ф(X)
1,23	0,3907
1,24	0,3925
1,25	0,3944
1,26	0,3962
1,27	0,3980
1,28	0,3997
1,29	0,4015
1,30	0,4032
1,31	0,4049
1,35	0,4115
1,36	0,4131
1,37	0,4147
1,38	0,4162
1,39	0,4177
1,40	0,4193
1,41	0,4207
1,42	0,4222
1,43	0,4236
1,44	0,4251
1,45	0,4265
1,46	0,4279
1,47	0,4292
1,48	0,4306
1,49	0,4319
1,50	0,4332
1,51	0,4345
1,52	0,4347
1,53	0,4370
1,54	0,4382
1,55	0,4394
1,56	0,4406
1,57	0,4418
1,58	0,4429
1,59	0,4441
1,60	0,4452
1,61	0,4463
1,62	0,4474
1,63	0,4485
1,64	0,4495
1,65	0,4505
1,66	0,4515
1,67	0,4525

Продовження таблиці А.2

X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)
1,68	0,4535	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,69	0,4545	1,93	0,4732	2,34	0,4903	2,80	0,4974
1,70	0,4554	1,94	0,4738	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,71	0,4564	1,95	0,4744	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,72	0,4573	1,96	0,4750	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,73	0,4582	1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,74	0,4591	1,98	0,4761	2,44	0,4926	2,90	0,4981
1,75	0,4599	1,99	0,4767	2,46	0,4930	2,92	0,4982
1,76	0,4608	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,77	0,4616	2,02	0,4783	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,78	0,4625	2,04	0,4793	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,79	0,4633	2,06	0,4803	2,54	0,4944	3,00	0,4986
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,20	0,4993
1,81	0,4648	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,40	0,4996
1,82	0,4656	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,60	0,4998
1,83	0,4664	2,14	0,4838	2,62	0,4956	3,80	0,4999
1,84	0,4671	2,16	0,4846	2,64	0,4958	4,00	0,4999
1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,66	0,4961	4,25	0,4999
1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,68	0,4963	4,50	0,4999
1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,70	0,4965	5,00	0,4999
1,88	0,4699	2,24	0,4874	2,72	0,4967	∞	0,5
1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,74	0,4969		
1,90	0,4713	2,28	0,4887	2,76	0,4971		
1,91	0,4719	2,30	0,4893				

Таблиця А.3. – Таблиця значень функції $t_\gamma = t(\gamma, n)$,

n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92

n \ γ	0,95	0,99	0,999
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Таблиця А.4 – Таблиця значень функції $q_\gamma = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця А.5 – Критичні точки розподілу χ^2

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α			Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α		
	0,01	0,025	0,05		0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8	16	32,0	28,8	26,3
2	9,2	7,4	6,0	17	33,4	30,2	27,6
3	11,3	9,3	7,8	18	34,8	31,5	28,9
4	13,3	11,1	9,5	19	36,2	32,9	30,1
5	15,1	12,8	11,1	20	37,6	34,2	31,4
6	16,8	14,4	12,6	21	38,9	35,5	32,7
7	18,5	16,0	14,1	22	40,3	36,8	33,9
8	20,1	17,5	15,5	23	41,6	38,1	35,2
9	21,7	19,0	16,9	24	43,0	39,4	36,4
10	23,2	20,5	18,3	25	44,3	40,6	37,7
11	24,7	21,9	19,7	26	45,6	41,9	38,9
12	26,2	23,3	21,0	27	47,0	43,2	40,1
13	27,7	24,7	22,4	28	48,3	44,5	41,3
14	29,1	26,1	23,7	29	49,6	45,7	42,6
15	30,6	27,5	25,0	30	50,9	47,0	43,8

Навчальне видання

АСТАХОВ Віктор Миколайович,

БУЛАНОВ Геннадій Станіславович,

ПАЛАМАРЧУК Віктор Олександрович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

для студентів денного і заочного відділень

Редактор Я. О. Бершацька

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

251/2008. Підп. до друку . Формат 60 х 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .
Тираж прим. Зам. № .

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.