

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

К. В. Власенко, А. І. Степанов, Л. П. Москаленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА
ГЕОМЕТРІЯ. НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

Навчальний посібник

Затверджено
на засіданні
вченої ради
протокол № від 2009

Краматорськ 2009

УДК 514.742+514.12

ББК 22.11

В 58

Рецензенти:

Скафа О. І., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики і методики викладання математики Донецького національного університету;

Труш Н. І., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики Слов'янського державного педагогічного університету.

Власенко, К. В.

В 58 Вища математика. Векторна алгебра й аналітична геометрія. Навчальний посібник до практичних занять та самостійної роботи / К. В. Власенко, А. І. Степанов, Л. П. Москаленко. – Краматорськ: ДДМА, 2009. – 80 с.

ISBN XXXXX

Навчальний посібник містить набори навчальних завдань для аудиторної й домашньої самостійної роботи над модулем «Векторна алгебра й аналітична геометрія» для студентів денної і заочної форм навчання. До кожної з тем модуля пропонується програма корекції знань студентів, що включають: опис можливих помилок студентів; рекомендації для виправлення помилок (посилання на теоретичний виклад питання; приклади правильного розв'язання аналогічних задач, вправ).

УДК 14.742+514.12

ББК 22.11

ISBN XXXXX

© К. В. Власенко, А. І. Степанов,
Л. П. Москаленко, 2009.

© ДДМА, 2009.

ЗМІСТ

Вступ	
1 Вправи для проведення практичних занять до модуля «Векторна алгебра й аналітична геометрія»	
1.1 Визначники. Розв’язування систем алгебраїчних рівнянь методом Крамера.....	
1.1.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи.....	
1.1.2 Індивідуальні тестові завдання.....	
1.2 Вектори, дії з ними. скалярний добуток.....	
1.2.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи.....	
1.2.2 Індивідуальні тестові завдання.....	
1.3 Векторний добуток. Мішаний добуток.....	
1.3.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи.....	
1.3.2 Індивідуальні тестові завдання.....	
1.4 Розв’язування задач аналітичної геометрії на площині. Пряма та площина у просторі.....	
1.4.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи.....	
1.4.2 Індивідуальні тестові завдання.....	
1.5 Криві II-го порядку. Побудова. Приведення кривих II-го порядку до канонічного вигляду.....	
1.5.1 Вправи для аудиторної і самостійної роботи.....	
1.5.2 Індивідуальні тестові завдання.....	
2 Математичні диктанти	
2.1 Векторна алгебра.....	
2.2 Аналітична геометрія.....	
3 Контрольні роботи до модуля «Векторна алгебра й аналітична геометрія»	
3.1 Контрольні роботи.....	
3.2 Підготовка до захисту контрольних робіт.....	
4 Словник питань	

ВСТУП

Самостійне навчання передбачає активне засвоєння знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника й додаткової літератури, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання. Даний навчальний посібник служить справі поглибленого самостійного опрацювання студентом курсу і самоперевірки своїх знань з модуля «Векторна алгебра й аналітична геометрія».

Навчальний посібник містить набори навчальних завдань для засвоєння модуля. Обсяги комплектів вправ (по 30 варіантів) дозволять застосовувати їх:

- 1) для проведення практичних занять (аудиторної самостійної роботи);
- 2) для формування комплектів розрахунково-графічних завдань за всіма темами розділів (індивідуальні тестові завдання);
- 3) для проведення математичних диктантів окремо до кожного з розділів «Векторна алгебра» та «Аналітична геометрія».
- 4) для формування комплектів контрольних робіт для студентів денної форми навчання й для студентів-заочників (контрольні роботи до модуля).

У посібнику до всіх контрольних (або самостійних) робіт пропонуються рекомендації для корекції знань студентів, що включають:

- опис можливих питань студентів, що виникають під час розв'язування задач;
- рекомендації для з'ясування питань (посилання на теоретичний виклад питання; посилання на приклади правильного розв'язання аналогічних задач, вправ).

Ці вправи й рекомендуються студентам для усунення помилок і закріплення навичок у розв'язуванні задач.

1 ВПРАВИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ДО МОДУЛЯ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

1.1 Визначники. Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Визначники 2-го і 3-го порядків. Властивості визначників. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Обчислення визначників. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.

1.1.1 Вправи для аудиторної самотійної роботи

1. Обчисліть визначники.

$$a) \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \quad б) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix} \quad в) \begin{vmatrix} 121 & 110 \\ 132 & 121 \end{vmatrix} \quad г) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$д) \begin{vmatrix} \log_4 5 & -\log_9 16 \\ \log_8 3 & \log_5 2 \end{vmatrix} \quad е) \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \quad ж) \begin{vmatrix} 1\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \quad з) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$i) \begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & -4 & -23 \end{vmatrix} \quad к) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 22 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix} \quad л) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & -8 & 34 & 16 \\ 10 & -8 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$м) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 27 & 20 \\ 2 & -11 & 10 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Доведіть рівність.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь за формулами Крамера.

$$a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 11. \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \quad в) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Відповіді

1. а) 66; б) -110; в) 121; г) 1; д) 5/3; е) 0,6; ж) 13/21; з) -5; і) -10; к) -15;
л) 11; м) 12. 3. а) $x_1 = -27, x_2 = 9, x_3 = -4$; б) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$;
в) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

1.1.2 Індивідуальні тестові завдання

1.1. Обчисліть визначники, використовуючи:

а) метод зведення до трикутного вигляду;

б) метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпця;

в) правило трикутників.

$$1.1.1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.2. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.3. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.4. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.5. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.6. \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.7. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.8. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.9. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.10.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.11.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.12.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.13.} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.14.} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.15.} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.16.} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.17.} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.18.} \begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.19.} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.20.} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.21.} \begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.22.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.23.} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.24.} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.25.} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.26.} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.27.} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.28.} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.29.} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.30.} \begin{vmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2. Знайдіть дійсні корені рівняння.

$$\mathbf{1.2.1.} \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 3 & 4-k & 7 \\ -1 & 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{1.2.2.} \begin{vmatrix} 2-k & 1 & 3 \\ 3 & 3-k & 6 \\ -2 & 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{1.2.3.} \begin{vmatrix} 1-k & 4 & 5 \\ 2 & 1-k & 3 \\ -4 & 3 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{1.2.4.} \begin{vmatrix} -1-k & 2 & 1 \\ 1 & 4-k & 5 \\ 3 & 2 & 5-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{1.2.5.} \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 2 \\ -2 & 3-k & 1 \\ 4 & 2 & 6-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{1.2.6.} \begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.7. \begin{vmatrix} 2-k & -1 & 1 \\ 5 & 1-k & 6 \\ -2 & 2 & -k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.8. \begin{vmatrix} -3-k & 3 & 0 \\ -1 & 3-k & 2 \\ 2 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.9. \begin{vmatrix} 4-k & -2 & 2 \\ -1 & 3-k & 2 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.10. \begin{vmatrix} -3-k & 4 & 1 \\ -3 & 1-k & -2 \\ 1 & -2 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.11. \begin{vmatrix} 1-k & 0 & 1 \\ 4 & -2-k & 2 \\ 3 & -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.12. \begin{vmatrix} -3-k & -1 & -4 \\ 1 & 2-k & 3 \\ -1 & 3 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.13. \begin{vmatrix} 2-k & 1 & 3 \\ -3 & 2-k & -1 \\ 0 & 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.14. \begin{vmatrix} 1-k & 3 & 4 \\ 0 & 2-k & 2 \\ 3 & -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.15. \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ -1 & -k & -1 \\ 3 & -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.16. \begin{vmatrix} -1-k & -2 & -3 \\ 3 & 2-k & 5 \\ 2 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.17. \begin{vmatrix} 1-k & -1 & 0 \\ -1 & 2-k & 1 \\ 5 & -2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.18. \begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.19. \begin{vmatrix} 3-k & -1 & 2 \\ -1 & 3-k & 2 \\ 2 & -2 & -k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.20. \begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.21. \begin{vmatrix} 2-k & 0 & 2 \\ -1 & 2-k & 1 \\ 3 & 1 & 4-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.22. \begin{vmatrix} -1-k & 2 & 1 \\ 3 & -4-k & -1 \\ 2 & -2 & -k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.23. \begin{vmatrix} 1-k & -3 & -2 \\ -1 & 3-k & 2 \\ -3 & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.24. \begin{vmatrix} -1-k & 2 & 1 \\ 1 & 4-k & 5 \\ 1 & -2 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.25. \begin{vmatrix} 2-k & 1 & 3 \\ 0 & 3-k & 3 \\ 3 & -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.26. \begin{vmatrix} -k & 2 & 2 \\ -2 & 4-k & 2 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.27. \begin{vmatrix} 2-k & 3 & 5 \\ -1 & 3-k & 2 \\ -1 & 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.28. \begin{vmatrix} -1-k & 3 & 2 \\ 4 & -k & 4 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.29. \begin{vmatrix} 1-k & 3 & 4 \\ -1 & 2-k & 1 \\ 3 & -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.30. \begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

1.3. Розв'яжіть систему за формулами Крамера.

$$1.3.1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.3.2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.3.3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.3.4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$1.3.5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.3.6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$1.3.7. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.3.8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$1.3.9. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.3.10. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.3.11. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$1.3.12. \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.3.13. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.3.14. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.3.15. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$1.3.16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.3.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_3 = -13, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.3.18. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.3.19. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.3.20. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$$

$$1.3.21. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.3.22. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$$

$$1.3.23. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$$

$$1.3.24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$1.3.25. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.3.26. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$$

$$1.3.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.3.28. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.3.29. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.3.30. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

1.2 Вектори, дії з ними. Скалярний добуток

Вектори, лінійні дії з векторами. Проекція вектора на вісь. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис і система координат. Вектори ПДСК (координати, довжина, напрямні косинуси). Означення скалярного добутку двох векторів, його властивості і координатна форма. Умова перпендикулярності двох векторів.

1.2.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи

1. Дано точки $M_1(-4; 5; -6)$, $M_2(5; -7; 2)$. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $|\overrightarrow{M_1M}| : |\overrightarrow{MM_2}| = 3:5$.

2. Знайдіть вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, якщо він утворює з осями Ox і Oy кути $\alpha = \frac{\pi}{4}$ та $\beta = \frac{\pi}{3}$ відповідно, і $|\vec{a}| = 6$.

3. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1 = -\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a} = \{2; -2; 3\}$ і $\vec{b} = \{3; 1; -1\}$?

4. Відомо, що вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + \beta\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} - 10\vec{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β .

5. Знайдіть подання вектора $\vec{a} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ у базисі $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

6. Доведіть, що вектори $\vec{a} = \{-2; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 1\}$ утворюють базис, і розкладають вектор $\vec{p} = \{-1; 1; 1\}$ за цим базисом.

7. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, обчисліть:

а) $(4\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

8. Дано вектори $\vec{a} = \{1; 4; -1\}$ і $\vec{b} = \{0; 3; -2\}$ Знайдіть:

а) скалярний добуток $(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$;

б) кут між векторами $2\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$;

в) проекцію вектора $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

9. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайдіть вектор \vec{x} , якщо $\vec{x} \cdot \vec{a} = 8$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 10$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 8$.

Відповіді

1. а) $\overrightarrow{M_1M_2} = \{9; -12; 8\}$; $\cos \alpha = \frac{9}{17}$, $\cos \beta = -\frac{12}{17}$, $\cos \gamma = \frac{8}{17}$;

б) $M(-5/8; 0,5; -3)$. 2. $\vec{a} = \{3\sqrt{2}; 3; \pm 3\}$. 3. ні. 4. $\alpha = -14$, $\beta = -1,5$.

5. $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. 6. $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. 7. а) 7; б) $2\sqrt{21}$. 8. а) 74; б) $\arccos \frac{3}{\sqrt{47}}$; в) $\frac{-10}{\sqrt{3}}$.

9. $\vec{x} = \{2; 2; 2\}$.

1.2.2 Індивідуальні тестові завдання

2.1. Дано точки M_1 та M_2 . Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) координати точки M , якщо $|\overrightarrow{M_1M}| : |\overrightarrow{MM_2}| = m : n$;

в) координати точки M_3 , якщо $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}$.

2.1.1. $M_1(-4; 5; -6)$,	$M_2(5; -7; 2)$,	$m : n = 2:5, \lambda = 3.$
2.1.2. $M_1(-2; 0; -4)$,	$M_2(-4; 1; -2)$,	$m : n = 3:1, \lambda = 2.$
2.1.3. $M_1(-5; 1; 4)$,	$M_2(1; 3; 1)$,	$m : n = 3:2, \lambda = 4.$
2.1.4. $M_1(5; -1; -4)$,	$M_2(11; 1; -1)$,	$m : n = 2:1, \lambda = -2.$
2.1.5. $M_1(-3; -1; 8)$,	$M_2(-7; -5; 6)$,	$m : n = 1:4, \lambda = -3.$
2.1.6. $M_1(15; -2; -14)$,	$M_2(11; 0; 10)$,	$m : n = 2:3, \lambda = 4.$
2.1.7. $M_1(-8; -12; 3)$,	$M_2(0; -3; 15)$,	$m : n = 1:5, \lambda = -2.$
2.1.8. $M_1(10; -5; -4)$,	$M_2(1; 7; 5)$,	$m : n = 3:5, \lambda = -3.$
2.1.9. $M_1(5; 2; -6)$,	$M_2(25; -10; 3)$,	$m : n = 4:5, \lambda = 3.$
2.1.10. $M_1(-3; -2; 16)$,	$M_2(9; 18; 7)$,	$m : n = 2:3, \lambda = -2.$
2.1.11. $M_1(-1; 8; 26)$,	$M_2(23; 0; 20)$,	$m : n = 3:2, \lambda = -4.$
2.1.12. $M_1(-7; 7; 15)$,	$M_2(-1; -1; -9)$,	$m : n = 2:7, \lambda = 2.$
2.1.13. $M_1(-4; 5; 22)$,	$M_2(4; -1; -2)$,	$m : n = 6:5, \lambda = 4.$
2.1.14. $M_1(1; -8; 12)$,	$M_2(25; -2; 4)$,	$m : n = 1:2, \lambda = -2.$
2.1.15. $M_1(4; 9; 14)$,	$M_2(-2; -15; 22)$,	$m : n = 1:3, \lambda = -3.$
2.1.16. $M_1(-5; 17; 21)$,	$M_2(4; 5; 1)$,	$m : n = 4:3, \lambda = -5.$

2.1.17. $M_1(2; 11; 33)$,	$M_2(22; -1; 24)$,	$m : n = 4:1, \lambda = 4.$
2.1.18. $M_1(-7; 4; 13)$,	$M_2(1; -5; 1)$,	$m : n = 5:3, \lambda = -6.$
2.1.19. $M_1(3; -8; 14)$,	$M_2(-9; 1; 6)$,	$m : n = 5:2, \lambda = 5.$
2.1.20. $M_1(-9; 3; 5)$,	$M_2(0; 15; 13)$,	$m : n = 4:7, \lambda = -1.$
2.1.21. $M_1(-1; 4; 12)$,	$M_2(3; 0; 10)$,	$m : n = 6:7, \lambda = -2.$
2.1.22. $M_1(2; 6; 4)$,	$M_2(6; 4; 8)$,	$m : n = 2:1, \lambda = -3.$
2.1.23. $M_1(-11; 16; 1)$,	$M_2(-5; 10; 4)$,	$m : n = 3:4, \lambda = 2.$
2.1.24. $M_1(-14; -3; 2)$,	$M_2(-8; 3; -1)$,	$m : n = 4:5, \lambda = -3.$
2.1.25. $M_1(2; 4; 7)$,	$M_2(4; 7; 1)$,	$m : n = 2:3, \lambda = 4.$
2.1.26. $M_1(-11; 18; 36)$,	$M_2(1; 14; 30)$,	$m : n = 4:5, \lambda = -2.$
2.1.27. $M_1(-4; -3; 0)$,	$M_2(2; 1; 12)$,	$m : n = 1:6, \lambda = -4.$
2.1.28. $M_1(9; 4; 16)$,	$M_2(49; 28; -2)$,	$m : n = 4:3, \lambda = 2.$
2.1.29. $M_1(0; 5; 21)$,	$M_2(18; 11; 12)$,	$m : n = 6:5, \lambda = 3.$
2.1.30. $M_1(-3; 5; 20)$,	$M_2(3; 14; 2)$,	$m : n = 1:4, \lambda = -5.$

2.2. Чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані на векторах \vec{a} і \vec{b} ?

2.2.1. $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$	$\vec{b} = \{3; 0; -1\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$
2.2.2. $\vec{a} = \{1; 0; 1\}$	$\vec{b} = \{-2; 3; 5\}$	$\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$
2.2.3. $\vec{a} = \{-2; 4; 1\}$	$\vec{b} = \{1; -2; 7\}$	$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$
2.2.4. $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$	$\vec{b} = \{2; -1; -1\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}$
2.2.5. $\vec{a} = \{3; 5; 4\}$	$\vec{b} = \{5; 9; 7\}$	$\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$
2.2.6. $\vec{a} = \{1; 4; -2\}$	$\vec{b} = \{1; 1; -1\}$	$\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$
2.2.7. $\vec{a} = \{1; -2; 5\}$	$\vec{b} = \{3; -1; 0\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$
2.2.8. $\vec{a} = \{3; 4; -1\}$	$\vec{b} = \{2; -1; 1\}$	$\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$

2.2.9. $\vec{a} = \{-2; -3; -2\}$	$\vec{b} = \{1; 0; 5\}$	$\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 9\vec{b}$	$\vec{c}_2 = -3\vec{b} - \vec{a}$
2.2.10. $\vec{a} = \{-1; 4; 2\}$	$\vec{b} = \{3; -2; 6\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$
2.2.11. $\vec{a} = \{5; 0; -1\}$	$\vec{b} = \{7; 2; 3\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{b} + 6\vec{a}$
2.2.12. $\vec{a} = \{0; 3; -2\}$	$\vec{b} = \{1; -2; 1\}$	$\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 5\vec{b} + 3\vec{a}$
2.2.13. $\vec{a} = \{-2; 7; -1\}$	$\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 2\vec{b} + 3\vec{a}$
2.2.14. $\vec{a} = \{3; 7; 0\}$	$\vec{b} = \{1; -3; 4\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$
2.2.15. $\vec{a} = \{3; 7; 0\}$	$\vec{b} = \{1; -3; 4\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} + 2\vec{a}$
2.2.16. $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$	$\vec{b} = \{3; 0; -4\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}$
2.2.17. $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$	$\vec{b} = \{-2; 3; -5\}$	$\vec{c}_1 = \vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 4\vec{b} - 3\vec{a}$
2.2.18. $\vec{a} = \{-3; 4; -1\}$	$\vec{b} = \{1; -2; 6\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$
2.2.19. $\vec{a} = \{1; 4; -3\}$	$\vec{b} = \{2; 1; -1\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 6\vec{a} - \vec{b}$
2.2.20. $\vec{a} = \{3; 5; 2\}$	$\vec{b} = \{5; 0; 7\}$	$\vec{c}_1 = -2\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$
2.2.21. $\vec{a} = \{0; 4; -3\}$	$\vec{b} = \{4; 1; -1\}$	$\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 5\vec{a} + 2\vec{b}$
2.2.22. $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$	$\vec{b} = \{3; -1; 1\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$
2.2.23. $\vec{a} = \{4; 4; -1\}$	$\vec{b} = \{2; -1; 3\}$	$\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 4\vec{a}$
2.2.24. $\vec{a} = \{2; 3; -2\}$	$\vec{b} = \{1; 0; 3\}$	$\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 7\vec{b}$	$\vec{c}_2 = -2\vec{b} - \vec{a}$
2.2.25. $\vec{a} = \{-1; 4; 3\}$	$\vec{b} = \{3; -2; 1\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 4\vec{a}$
2.2.26. $\vec{a} = \{3; 0; -1\}$	$\vec{b} = \{7; 2; 3\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c}_2 = 3\vec{b} + 2\vec{a}$
2.2.27. $\vec{a} = \{1; 3; -2\}$	$\vec{b} = \{1; -2; 2\}$	$\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 4\vec{b} + 3\vec{a}$
2.2.28. $\vec{a} = \{-2; 4; -1\}$	$\vec{b} = \{-3; 1; 2\}$	$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$	$\vec{c}_2 = 2\vec{b} + \vec{a}$
2.2.29. $\vec{a} = \{3; 3; 0\}$	$\vec{b} = \{1; -3; 1\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$
2.2.30. $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$	$\vec{b} = \{1; -3; 2\}$	$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{c}_2 = \vec{b} + 6\vec{a}$

2.3. Обчисліть:

- 2.3.1.** а) $(4\vec{a} + 7\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.2.** а) $(2\vec{a} + 5\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.3.** а) $(3\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- 2.3.4.** а) $(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 4\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.5.** а) $(4\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.3.6.** а) $(5\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.7.** а) $(2\vec{a} + 4\vec{b})(-3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.8.** а) $(3\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- 2.3.9.** а) $(4\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.10.** а) $(6\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|4\vec{a} - \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.3.11.** а) $(5\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.12.** а) $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.13.** а) $(5\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} + 4\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- 2.3.14.** а) $(4\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.15.** а) $(2\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.3.16.** а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.17.** а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.18.** а) $(3\vec{a} + 2\vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} + 3\vec{b}|$, ЯКЩО $|\vec{a}| = 6\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

- 2.3.19. а) $(-4\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.20. а) $(2\vec{a} - 5\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.3.21. а) $(\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.22. а) $(3\vec{a} + \vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.23. а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(-\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- 2.3.24. а) $(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.25. а) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.3.26. а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|3\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.27. а) $(2\vec{a} + \vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$; б) $|5\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.3.28. а) $(3\vec{a} + 5\vec{b})(-\vec{a} + \vec{b})$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- 2.3.29. а) $(\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 2.3.30. а) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

2.4. Знайдіть скалярний добуток $\vec{p}\vec{q}$, кут між векторами \vec{p} і \vec{q} та проекцію вектора \vec{p} на вектор \vec{q} , якщо:

- 2.4.1. $\vec{p} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-5; 1; 2\}$.
- 2.4.2. $\vec{p} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} = \{-2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4; 3\}$.
- 2.4.3. $\vec{p} = -2\vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -1; 3\}$.
- 2.4.4. $\vec{p} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{-4; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 1\}$.
- 2.4.5. $\vec{p} = \vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} = \{-4; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4; 5\}$.
- 2.4.6. $\vec{p} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{3; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; -2\}$.

- 2.4.7. $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\vec{a} = \{4; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 4\}$.
- 2.4.8. $\vec{p} = -3\vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 0; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 1; 2\}$.
- 2.4.9. $\vec{p} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -2\}$.
- 2.4.10. $\vec{p} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{0; -4; 4\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 3\}$.
- 2.4.11. $\vec{p} = -\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 4; 4\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$.
- 2.4.12. $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} = \{-5; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; 4; 3\}$.
- 2.4.13. $\vec{p} = -3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{0; -2; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 0\}$.
- 2.4.14. $\vec{p} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + 9\vec{b}$, $\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -4\}$.
- 2.4.15. $\vec{p} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} = \{-2; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 3\}$.
- 2.4.16. $\vec{p} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; 2\}$.
- 2.4.17. $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -2\}$.
- 2.4.18. $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 1; -3\}$.
- 2.4.19. $\vec{p} = -3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 2\}$.
- 2.4.20. $\vec{p} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; -4; 0\}$.
- 2.4.21. $\vec{p} = -\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{4; 1; -2\}$.
- 2.4.22. $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{-2; 4; 3\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 2\}$.
- 2.4.23. $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{0; -2; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 0\}$.
- 2.4.24. $\vec{p} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 4\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{2; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -3\}$.
- 2.4.25. $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a} = \{-2; 4; 0\}$, $\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.
- 2.4.26. $\vec{p} = -\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = -\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} = \{4; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$.
- 2.4.27. $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{2; 0; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -1; -2\}$.
- 2.4.28. $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{a} = \{-1; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$.
- 2.4.29. $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 4\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -4; 3\}$.
- 2.4.30. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = \{0; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; -1; 0\}$.

2.5. Знайдіть вектор \vec{x} , якщо:

- 2.5.1. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = 1$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 3\bar{k}) = 5$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}) = 2$.
- 2.5.2. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 2$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}) = 8$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k}) = 2$.
- 2.5.3. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) = 5$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}) = 11$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 5\bar{j} + 10\bar{k}) = 2$.
- 2.5.4. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}) = 10$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k}) = 14$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 6\bar{j} + 12\bar{k}) = 2$.
- 2.5.5. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}) = 17$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 4\bar{j} + 11\bar{k}) = 17$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 7\bar{j} + 14\bar{k}) = 2$.
- 2.5.6. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}) = 26$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 5\bar{j} + 13\bar{k}) = 20$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 8\bar{j} + 16\bar{k}) = 2$.
- 2.5.7. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}) = 37$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 6\bar{j} + 15\bar{k}) = 23$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 9\bar{j} + 18\bar{k}) = 2$.
- 2.5.8. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) = 5$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = -1$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 2$.
- 2.5.9. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}) = 17$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}) = -7$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 2$.
- 2.5.10. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}) = 26$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}) = -10$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}) = 2$.
- 2.5.11. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} - 5\bar{k}) = 37$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 6\bar{j} - 9\bar{k}) = -13$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}) = 2$.
- 2.5.12. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = 3$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 1$, $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + \bar{j} + 10\bar{k}) = -1$.
- 2.5.13. $\bar{x} \cdot (3\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) = 10$, $\bar{x} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) = 4$, $\bar{x} \cdot (5\bar{i} + \bar{j} + 12\bar{k}) = 0$.
- 2.5.14. $\bar{x} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 7$, $\bar{x} \cdot (3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}) = 7$, $\bar{x} \cdot (7\bar{i} + \bar{j} + 14\bar{k}) = 1$.
- 2.5.15. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) = 18$, $\bar{x} \cdot (4\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}) = 10$, $\bar{x} \cdot (9\bar{i} + \bar{j} + 16\bar{k}) = 2$.
- 2.5.16. $\bar{x} \cdot (3\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) = 11$, $\bar{x} \cdot (5\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}) = 13$, $\bar{x} \cdot (11\bar{i} + \bar{j} + 18\bar{k}) = 3$.
- 2.5.17. $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j}) = 10$, $\bar{x} \cdot (6\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}) = 16$, $\bar{x} \cdot (13\bar{i} + \bar{j} + 20\bar{k}) = 4$.
- 2.5.18. $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) = 6$, $\bar{x} \cdot (2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = 9$, $\bar{x} \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}) = -4$.
- 2.5.19. $\bar{x} \cdot (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 5$, $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = 11$, $\bar{x} \cdot (-5\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -5$.
- 2.5.20. $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) = 14$, $\bar{x} \cdot (4\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) = 14$, $\bar{x} \cdot (-7\bar{i} + \bar{j}) = -6$.
- 2.5.21. $\bar{x} \cdot (2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = 9$, $\bar{x} \cdot (5\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}) = 17$, $\bar{x} \cdot (9\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 7$.
- 2.5.22. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}) = 22$, $\bar{x} \cdot (6\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}) = 20$, $\bar{x} \cdot (11\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}) = 8$.
- 2.5.23. $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) = 13$, $\bar{x} \cdot (7\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k}) = 23$, $\bar{x} \cdot (13\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}) = 9$.
- 2.5.24. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) = -2$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 3$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}) = 0$.
- 2.5.25. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1$, $\bar{x} \cdot (2\bar{i} + \bar{j}) = 3$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) = -1$.
- 2.5.26. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} - \bar{k}) = 4$, $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = 5$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}) = -2$.
- 2.5.27. $\bar{x} \cdot (5\bar{i} - \bar{j}) = 7$, $\bar{x} \cdot (4\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 9$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}) = -3$.

$$2.5.28. \quad \vec{x} \cdot (5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10, \quad \vec{x} \cdot (5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 15, \quad \vec{x} \cdot (\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}) = -4.$$

$$2.5.29. \quad \vec{x} \cdot (5\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) = -8, \quad \vec{x} \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 9, \quad \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = 2.$$

$$2.5.30. \quad \vec{x} \cdot (5\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}) = -11, \quad \vec{x} \cdot (-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = 15, \quad \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 3.$$

2.6. Доведіть, що вектори \vec{p} , \vec{q} і \vec{r} утворюють базис і розкладіть вектор \vec{x} за цим базисом:

$$2.6.1. \quad \vec{x} = \{-2; 11; 14\}, \quad \vec{p} = \{1; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{r} = \{-4; 1; 1\}.$$

$$2.6.2. \quad \vec{x} = \{2; -6; -3\}, \quad \vec{p} = \{2; 1; 8\}, \quad \vec{q} = \{2; -3; 1\}, \quad \vec{r} = \{1; -1; 2\}.$$

$$2.6.3. \quad \vec{x} = \{-12; 13; -4\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 4; 1\}, \quad \vec{r} = \{5; 1; -3\}.$$

$$2.6.4. \quad \vec{x} = \{11; 14; 12\}, \quad \vec{p} = \{2; 4; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 2; -1\}, \quad \vec{r} = \{4; 4; 5\}.$$

$$2.6.5. \quad \vec{x} = \{-3; -2; 2\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; 2; -3\}, \quad \vec{r} = \{-1; 1; 4\}.$$

$$2.6.6. \quad \vec{x} = \{-12; -2; -15\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; -1\}, \quad \vec{q} = \{-4; 3; 1\}, \quad \vec{r} = \{2; 4; 5\}.$$

$$2.6.7. \quad \vec{x} = \{-4; 13; 16\}, \quad \vec{p} = \{1; 3; 1\}, \quad \vec{q} = \{7; -1; 4\}, \quad \vec{r} = \{-1; 2; 3\}.$$

$$2.6.8. \quad \vec{x} = \{4; 5; -7\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; -1; 1\}, \quad \vec{r} = \{-1; 1; -3\}.$$

$$2.6.9. \quad \vec{x} = \{0; 0; 2\}, \quad \vec{p} = \{2; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{4; -3; -1\}, \quad \vec{r} = \{-6; 1; -1\}.$$

$$2.6.10. \quad \vec{x} = \{-1; 13; 10\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{3; -3; 1\}, \quad \vec{r} = \{-2; 4; 1\}.$$

$$2.6.11. \quad \vec{x} = \{-1; 9; 12\}, \quad \vec{p} = \{1; 3; 2\}, \quad \vec{q} = \{-2; -1; 3\}, \quad \vec{r} = \{3; 2; -1\}.$$

$$2.6.12. \quad \vec{x} = \{5; -6; 2\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{-4; 1; -2\}, \quad \vec{r} = \{2; -3; -1\}.$$

$$2.6.13. \quad \vec{x} = \{16; 2; 10\}, \quad \vec{p} = \{2; 1; 1\}, \quad \vec{q} = \{-6; 1; -1\}, \quad \vec{r} = \{8; -1; 4\}.$$

$$2.6.14. \quad \vec{x} = \{13; -3; 6\}, \quad \vec{p} = \{3; 1; 4\}, \quad \vec{q} = \{2; -2; -1\}, \quad \vec{r} = \{1; 1; 1\}.$$

$$2.6.15. \quad \vec{x} = \{13; 16; -1\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; 3; 1\}, \quad \vec{r} = \{-1; 1; 4\}.$$

$$2.6.16. \quad \vec{x} = \{11; 11; 27\}, \quad \vec{p} = \{1; 1; 5\}, \quad \vec{q} = \{5; 1; 1\}, \quad \vec{r} = \{-1; -5; -1\}.$$

$$2.6.17. \quad \vec{x} = \{-1; -1; 2\}, \quad \vec{p} = \{2; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{2; -3; 1\}, \quad \vec{r} = \{1; 2; 1\}.$$

$$2.6.18. \quad \vec{x} = \{1; 2; 6\}, \quad \vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; -3; -1\}, \quad \vec{r} = \{-4; 2; -1\}.$$

$$2.6.19. \quad \vec{x} = \{4; 11; 11\}, \quad \vec{p} = \{2; 3; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 4; -2\}, \quad \vec{r} = \{-1; -2; 4\}.$$

$$2.6.20. \quad \vec{x} = \{8; 6; -4\}, \quad \vec{p} = \{2; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{-1; -3; 1\}, \quad \vec{r} = \{1; -5; -7\}.$$

$$2.6.21. \quad \vec{x} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{p} = \{3; 1; 2\}, \quad \vec{q} = \{2; 1; 2\}, \quad \vec{r} = \{-1; 2; 5\}.$$

- 2.6.22. $\vec{x} = \{10; 8; -2\}$, $\vec{p} = \{1; 6; 3\}$, $\vec{q} = \{6; 3; 1\}$, $\vec{r} = \{3; -1; -6\}$.
- 2.6.23. $\vec{x} = \{-1; 7; 1\}$, $\vec{p} = \{2; 7; 1\}$, $\vec{q} = \{6; -1; 1\}$, $\vec{r} = \{3; -1; 1\}$.
- 2.6.24. $\vec{x} = \{-4; 6; 4\}$, $\vec{p} = \{2; 1; 3\}$, $\vec{q} = \{-3; 2; -1\}$, $\vec{r} = \{-3; 4; 2\}$.
- 2.6.25. $\vec{x} = \{1; 1; 1\}$, $\vec{p} = \{7; 2; -5\}$, $\vec{q} = \{-3; 5; -2\}$, $\vec{r} = \{-3; -6; 8\}$.
- 2.6.26. $\vec{x} = \{8; 9; 3\}$, $\vec{p} = \{-1; 4; 6\}$, $\vec{q} = \{4; 2; -1\}$, $\vec{r} = \{5; 3; -2\}$.
- 2.6.27. $\vec{x} = \{0; -9; -3\}$, $\vec{p} = \{3; -2; 6\}$, $\vec{q} = \{4; -3; 1\}$, $\vec{r} = \{5; 5; -1\}$.
- 2.6.28. $\vec{x} = \{-2; -4; 3\}$, $\vec{p} = \{1; 2; 4\}$, $\vec{q} = \{-4; -3; 1\}$, $\vec{r} = \{2; -1; 2\}$.
- 2.6.29. $\vec{x} = \{7; 8; 5\}$, $\vec{p} = \{2; 2; 3\}$, $\vec{q} = \{3; 4; -1\}$, $\vec{r} = \{-1; 1; 1\}$.
- 2.6.30. $\vec{x} = \{-6; 4; -3\}$, $\vec{p} = \{1; 3; 3\}$, $\vec{q} = \{-3; 1; -2\}$, $\vec{r} = \{-3; 3; -1\}$.

1.3 Векторний добуток. Мішаний добуток

Векторний добуток двох векторів, його алгебраїчні та геометричні властивості. Координатна форма. Мішаний добуток трьох векторів, його алгебраїчні та геометричні властивості. Координатна форма. Умова компланарності трьох векторів.

1.3.1 Вправи для аудиторної самотійної роботи

1. Обчисліть $\left| (2\vec{a} + 5\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \right|$, якщо $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$; $\vec{a}\vec{b} = \varphi = 150^\circ$

2. Дано вектори $\vec{a} = \{-2; 0; 1\}$ та $\vec{b} = \{-1; 4; 5\}$. Знайдіть:

а) $(2\vec{a} - 5\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ б) $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|$

3. Обчисліть площу грані $ABCD$ і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $A(2; 4; 5)$, $B(-4; 4; -4)$, $C(5; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$.

4. Відомо, що точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 3; 1)$, $C(3; 2; -4)$ та $D(a; 4; 0)$ належать одній площині. Знайдіть a .

Відповіді

1. 21. 2. а) $\{-36; 81; -72\}$; б) $2\sqrt{161}$. 3. $S_{ABC} = \frac{3}{2}\sqrt{377}$, $V_{ABCD} = 1$. 4. $a = -3$.

1.3.2 Індивідуальні тестові завдання

3.1. Знайдіть векторний добуток

- 3.1.1.** $(2\vec{a} + 4\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4; 3\}$.
- 3.1.2.** $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-5; 1; 2\}$.
- 3.1.3.** $(-2\vec{a} + 7\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-4; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 1\}$.
- 3.1.4.** $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -1; 3\}$.
- 3.1.5.** $(\vec{a} - 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; -2\}$.
- 3.1.6.** $(-\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$ якщо $\vec{a} = \{-4; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4; 5\}$.
- 3.1.7.** $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 6\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 0; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 1; 2\}$.
- 3.1.8.** $(-3\vec{a} + 7\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{4; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 4; 1\}$.
- 3.1.9.** $(-3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{0; -4; 4\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 3\}$.
- 3.1.10.** $(5\vec{a} - 4\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -2\}$.
- 3.1.11.** $(-\vec{a} + 4\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-5; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; 4; 3\}$.
- 3.1.12.** $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 4; 4\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$.
- 3.1.13.** $(-3\vec{a} - 4\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -4\}$.
- 3.1.14.** $(-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 9\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{0; -2; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 3; 0\}$.
- 3.1.15.** $(5\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; 2\}$.
- 3.1.16.** $(-\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-2; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 3\}$.
- 3.1.17.** $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 1; -3\}$.
- 3.1.18.** $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -2\}$.
- 3.1.19.** $(-3\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; -4; 0\}$.
- 3.1.20.** $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 2\}$.
- 3.1.21.** $(-\vec{a} - 2\vec{b}) \times (-\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-2; 4; 3\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 2\}$.
- 3.1.22.** $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{4; 1; -2\}$.
- 3.1.23.** $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{2; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$.
- 3.1.24.** $(-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{0; -2; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 0\}$.
- 3.1.25.** $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (5\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{4; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$.

- 3.1.26.** $(-\vec{a} - 2\vec{b}) \times (-\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-2; 4; 0\}$, $\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.
- 3.1.27.** $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{-1; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$.
- 3.1.28.** $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 4\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{2; 0; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -1; -2\}$.
- 3.1.29.** $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{0; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; -1; 0\}$.
- 3.1.30.** $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -4; 3\}$.

3.2. Обчисліть площу грані ABC і об'єм піраміди $ABCD$, вершини якої містяться в точках:

- 3.2.1.** $A(1; -2; 3)$, $B(2; 4; 7)$, $C(-3; -4; 0)$, $D(1; 0; 5)$.
- 3.2.2.** $A(-3; 5; 4)$, $B(0; 0; 8)$, $C(-1; 3; -2)$, $D(2; 6; 1)$.
- 3.2.3.** $A(0; -5; 4)$, $B(3; 5; 1)$, $C(-4; -4; 1)$, $D(3; 1; 6)$.
- 3.2.4.** $A(-2; 0; 2)$, $B(1; 0; 6)$, $C(-5; 4; -1)$, $D(0; 4; 2)$.
- 3.2.5.** $A(2; 1; 7)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(5; -4; 1)$, $D(2; 5; 1)$.
- 3.2.6.** $A(3; -3; 0)$, $B(4; 4; 2)$, $C(-5; -3; 0)$, $D(1; 1; 4)$.
- 3.2.7.** $A(-4; 6; 4)$, $B(3; 10; 8)$, $C(1; 4; -2)$, $D(-2; 3; 1)$.
- 3.2.8.** $A(0; -3; 5)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(2; -5; 2)$, $D(4; 3; 6)$.
- 3.2.9.** $A(-5; 0; 3)$, $B(2; 1; 5)$, $C(-4; 2; -1)$, $D(0; 0; 3)$.
- 3.2.10.** $A(2; 3; 5)$, $B(-1; -3; 4)$, $C(4; -3; 2)$, $D(1; 6; 1)$.
- 3.2.11.** $A(2; -2; 0)$, $B(5; 3; 2)$, $C(-3; -2; 0)$, $D(1; 2; 3)$.
- 3.2.12.** $A(-3; 5; 4)$, $B(2; 8; 7)$, $C(1; 3; -2)$, $D(-1; 4; 1)$.
- 3.2.13.** $A(0; -2; 4)$, $B(-2; -2; 1)$, $C(3; -3; 2)$, $D(3; 3; 4)$.
- 3.2.14.** $A(-3; 2; 3)$, $B(3; 1; -5)$, $C(4; -2; -1)$, $D(4; 0; 3)$.
- 3.2.15.** $A(-2; 3; -5)$, $B(1; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$, $D(1; -6; 1)$.
- 3.2.16.** $A(1; -3; 0)$, $B(4; 3; 1)$, $C(-4; -3; 0)$, $D(-1; -2; 3)$.
- 3.2.17.** $A(3; -5; 4)$, $B(3; -5; 4)$, $C(-1; 3; 2)$, $D(-1; -4; 1)$.
- 3.2.18.** $A(1; 0; 4)$, $B(2; -2; -1)$, $C(3; -1; 0)$, $D(3; 2; 5)$.
- 3.2.19.** $A(-4; 1; 3)$, $B(3; 2; -7)$, $C(2; -1; -1)$, $D(5; 1; 3)$.
- 3.2.20.** $A(-1; 5; -3)$, $B(0; 3; 2)$, $C(1; 3; 4)$, $D(2; -3; 1)$.
- 3.2.21.** $A(-1; 0; 0)$, $B(-4; 3; -1)$, $C(4; -4; 0)$, $D(1; -2; 4)$.

- 3.2.22.** $A(2; -1; 4), B(2; 3; -5), C(-2; 2; 3), D(-2; -3; 1).$
- 3.2.23.** $A(1; 2; 5), B(2; -3; 1), C(4; -2; 0), D(3; 3; 6).$
- 3.2.24.** $A(-1; 2; 4), B(0; 2; -6), C(2; -3; -2), D(6; -1; 0).$
- 3.2.25.** $A(1; -5; -3), B(1; 3; 0), C(-1; 3; -4), D(3; -3; 2).$
- 3.2.26.** $A(-2; -4; 0), B(4; -3; -1), C(3; -2; 0), D(2; -1; 5).$
- 3.2.27.** $A(2; -3; 5), B(1; 3; -4), C(-1; 2; 4), D(-1; -5; 2).$
- 3.2.28.** $A(2; 2; 2), B(3; -3; 4), C(4; -5; 1), D(3; 2; 1).$
- 3.2.29.** $A(-2; 3; 5), B(1; 2; -4), C(3; -4; -2), D(3; -2; 5).$
- 3.2.30.** $A(2; -4; -4), B(2; 3; 1), C(-3; 4; -4), D(4; -2; 1).$

1.4 Розв'язування задач аналітичної геометрії на площині. Пряма та площина у просторі

Загальне рівняння прямої, неповні рівняння. Канонічне та параметричне рівняння прямої. Пряма, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях, пряма з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Загальне рівняння площини, неповні рівняння. Рівняння площини, яка проходить через три точки. Нормальне рівняння площини, відстань від точки до площини. Кут між двома площинами, умови паралельності й перпендикулярності двох площин. Загальне рівняння прямої у просторі, канонічні та параметричні рівняння. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки у просторі. Кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності двох прямих. Точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною, умови паралельності й перпендикулярності прямої і площини, умови належності прямої площині.

1.4.1 Вправи для аудиторної самостійної роботи

1. Побудуйте графіки прямих $y = 3x - 2$ та $x + 2y - 3 = 0$ і знайдіть точку їх перетину.

2. Площа трикутника ABC $S = 8$, дві його вершини – точки $A(0; -3), B(1; 2)$. Визначте координати вершини C , якщо вона лежить на прямій $y = 3$.

3. Нехай точки $A(0; -4), B(3; 2), C(-5; 1)$ - вершини трикутника.

Знайдіть:

- а) загальне рівняння сторони AB ;
- б) канонічне рівняння висоти AD ;
- в) параметричне рівняння медіани BM ;
- г) відстань від вершини B до AD .

4. Знайдіть проекцію точки $P(-7; 11)$ на пряму, що проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(-4; 0)$.

5. Покажіть, що прямі $5x - 12y + 13,5 = 0$ і $10x - 24y = 25$ паралельні і знайдіть відстань між ними.

6. Запишіть рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x - 3y + 5 = 0$ та $3x - y - 2 = 0$.

7. Задано рівняння прямої $3x + 2y + 7 = 0$. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2; 0)$, і:

- а) паралельна заданій прямій;
- б) перпендикулярна до заданої прямої.

8. У просторі задано точки $M_0(0; -2; 4)$, $M_1(1; 5; -5)$, $M_2(3; 0; -2)$, $M_3(-1; 3; 2)$. Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора M_1M_3

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$.

9. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -1; 6)$ паралельно до векторів $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$ та $\vec{b} = \{-1; -4; 3\}$.

10. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2; 3; -1)$ і $M_2(0; 2; 2)$ паралельно до вектора $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$.

11. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x + 3y - 6z = 24$ і координатними площинами.

12. Знайдіть напрямні косинуси нормального вектора площини $2x + 6y - 3z + 14 = 0$ і обчисліть відстань від початку координат до цієї площини.

13. Покажіть, що площини $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ та $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку; знайдіть координати точки перетину.

14. Доведіть, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, який сполучає точки $M_1(3; -2; 1)$ і $M_2(-2; 5; 2)$.

15. У паралелограмі задано три послідовні вершини $M_1(6; 2; -10)$, $M_2(9; -5; 6)$, $M_3(2; -8; 4)$. Складіть рівняння його діагоналей.

16. Запишіть у канонічному вигляді рівняння прямої

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 15 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

17. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{-1}$ і площини $x + 2y - 3z - 9 = 0$.

18. Визначте гострий кут між прямими

$$x = 11t - 1, y = -8t + 4, z = -7t + 5 \text{ і } \frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-8}.$$

19. Обчисліть кут між прямою $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ і площиною $6x - 9y - 6z + 10 = 0$.

20. Знайдіть проекцію точки $A(1; 2; 8)$ на пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.

21. Обчисліть відстань від точки $P(2; 3; -1)$ до прямої $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$.

22. Переконавшись, що прямі

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \text{ і } \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$$

паралельні, обчисліть відстань між ними.

Відповіді

1. (1; 1). **2.** (-2; 3) або (4,4; 3). **3.** а) $2x - y - 4 = 0$; б) $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{-8}$;

в) $x=3+11t$, $y=2+7t$; г) $30/\sqrt{65}$. **4.** $(-11; 4)$. **5.** 2. **6.** $2x+7y-7=0$, $4x-4y+3=0$.
Вказівка. Нехай $(x; y)$ - довільна точка, яка лежить на шуканій бісектрисі. Тоді $d_1 = d_2$, де d_1 та d_2 - відстані точки $(x; y)$ до заданих прямих.

7. а) $3x+2y+6=0$, б) $2x-3y+4=0$. **8.** а) $29x+20y+14z-59=0$;

б) $29x+20y+14z-16=0$; в) $2x+2y-7z+32=0$; г) $\frac{43}{\sqrt{1437}}$. **9.** $x+5y+7z=39$.

10. $3y+z=8$. **11.** 64. **12.** $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{6}{7}$, $\cos \gamma = -\frac{3}{7}$; $d=2$. **13.** $(1; -2; 2)$.

14. *Вказівка.* Достатньо показати, що відхилення точок M_1 і M_2 від площини протилежні знаком.

15. $\frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+10}{-7}$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+7}{9}$. **16.** $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-6}{10} = \frac{z}{7}$. **17.** $(5; 2; 0)$.

18. 60° . **19.** 90° . **20.** $(3; -1; 1)$. **21.** 6. **22.** 25.

1.4.2 Індивідуальні тестові завдання

4.1. Відомі координати точок M_0, M_1, M_2, M_3 . Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1 M_2 M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1 M_2 M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_3}$

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1 M_2 M_3$;

д) канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2 ;

е) параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_3 ;

є) кут між прямими $M_1 M_2$ і $M_2 M_3$.

4.1.1. $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(4; 6; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.

4.1.2. $M_0(0; 1; 1)$, $M_1(-13; 0; 6)$, $M_2(10; 1; -3)$, $M_3(-2; 1; 3)$.

4.1.3. $M_0(0; 4; 1)$, $M_1(6; -8; -2)$, $M_2(-4; 10; -1)$, $M_3(0; -2; -3)$.

- 4.1.4.** $M_0(0; 1; 2)$, $M_1(2; 0; 2)$, $M_2(8; -1; 7)$, $M_3(12; 1; 1)$.
- 4.1.5.** $M_0(0; 1; -2)$, $M_1(1; -12; 8)$, $M_2(0; 11; -10)$, $M_3(0; -1; 2)$.
- 4.1.6.** $M_0(1; -1; 0)$, $M_1(7; -5; -1)$, $M_2(-3; 13; 0)$, $M_3(1; 1; -2)$.
- 4.1.7.** $M_0(1; 3; 1)$, $M_1(0; -2; -1)$, $M_2(-3; -1; 6)$, $M_3(-5; -3; 0)$.
- 4.1.8.** $M_0(1; 2; 3)$, $M_1(14; 3; -2)$, $M_2(-9; 2; 7)$, $M_3(3; 2; 1)$.
- 4.1.9.** $M_0(-3; 1; -1)$, $M_1(-7; 0; 5)$, $M_2(11; 1; -5)$, $M_3(-1; -1; -1)$.
- 4.1.10.** $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(4; 6; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.
- 4.1.11.** $M_0(1; 0; -1)$, $M_1(-2; -1; 4)$, $M_2(11; 0; 5)$, $M_3(-1; 0; 1)$.
- 4.1.12.** $M_0(-2; 2; 3)$, $M_1(4; 6; 2)$, $M_2(-6; 12; 3)$, $M_3(-2; 0; 1)$.
- 4.1.13.** $M_0(1; 2; -1)$, $M_1(2; -1; -1)$, $M_2(5; 0; 4)$, $M_3(7; -2; -2)$.
- 4.1.14.** $M_0(2; 0; 0)$, $M_1(-4; 5; 1)$, $M_2(2; 0; -4)$, $M_3(-2; 0; -2)$.
- 4.1.15.** $M_0(3; -1; 2)$, $M_1(7; 5; 0)$, $M_2(-1; -5; 2)$, $M_3(1; -1; -2)$.
- 4.1.16.** $M_0(2; 1; 0)$, $M_1(3; 2; 0)$, $M_2(6; 3; 5)$, $M_3(8; 1; -1)$.
- 4.1.17.** $M_0(3; 5; 1)$, $M_1(-3; 9; 2)$, $M_2(7; -9; 1)$, $M_3(3; 3; 3)$.
- 4.1.18.** $M_0(-1; 1; 0)$, $M_1(0; 1; 1)$, $M_2(1; 6; 4)$, $M_3(-1; 0; 6)$.
- 4.1.19.** $M_0(4; -2; 6)$, $M_1(2; -4; 4)$, $M_2(4; -2; 1)$, $M_3(0; -2; 2)$.
- 4.1.20.** $M_0(-1; 3; 1)$, $M_1(5; -7; 0)$, $M_2(-5; 1; 1)$, $M_3(-1; -1; -1)$.
- 4.1.21.** $M_0(-1; 0; 3)$, $M_1(0; 1; 3)$, $M_2(3; 2; 8)$, $M_3(5; 0; 2)$.
- 4.1.22.** $M_0(2; 1; -3)$, $M_1(-1; -2; 2)$, $M_2(2; -1; -7)$, $M_3(0; -1; 1)$.
- 4.1.23.** $M_0(-2; 3; 2)$, $M_1(10; 7; 1)$, $M_2(-1; 0; 2)$, $M_3(-2; 1; 0)$.

4.1.24. $M_0(1; 0; 2), M_1(0; 1; 2), M_2(-1; 4; 12), M_3(1; 6; 0)$.

4.1.25. $M_0(3; 2; -2), M_1(-4; -9; 0), M_2(6; 9; -1), M_3(2; -3; 1)$.

4.1.26. $M_0(2; -1; 5), M_1(-1; 1; 3), M_2(3; 2; -6), M_3(1; 2; 0)$.

4.1.27. $M_0(2; 3; 1), M_1(1; 2; 1), M_2(-2; 1; -4), M_3(-4; 3; 2)$.

4.1.28. $M_0(0; -1; 1), M_1(-1; 4; 12), M_2(0; -5; 1), M_3(0; 1; -1)$.

4.1.29. $M_0(0; 8; -2), M_1(3; -4; -1), M_2(-2; 5; -1), M_3(0; 4; 6)$.

4.1.30. $M_0(0; -2; 1), M_1(13; -3; -4), M_2(-10; 2; 5), M_3(2; -2; 1)$.

4.2. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої заданою площиною і координатними площинами. Знайдіть напрямні косинуси нормального вектора площини та відстань від початку координат до площини. Побудуйте рисунок.

4.2.1. $4x - 3y + 12z - 60 = 0$

4.2.2. $5x - 4y + 3z + 120 = 0$

4.2.3. $2x - 3y + z - 18 = 0$

4.2.4. $6x - 2y + 3z + 12 = 0$

4.2.5. $4x - 5y + 2z - 20 = 0$

4.2.6. $3x + 4y + 6z + 24 = 0$

4.2.7. $2x - 5y + 5z - 20 = 0$

4.2.8. $x - 3y + 4z + 12 = 0$

4.2.9. $2x - 3y + 10z - 30 = 0$

4.2.10. $5x - 3y + z + 15 = 0$

4.2.11. $4x - y + 6z - 12 = 0$

4.2.12. $7x + 2y - z + 14 = 0$

4.2.13. $3x - 2y + 8z - 24 = 0$

4.2.14. $3x + y - 7z + 21 = 0$

4.2.15. $x - 4y + 2z - 8 = 0$

4.2.16. $x - 5y - 3z + 15 = 0$

4.2.17. $6x - 2y - 3z - 18 = 0$

4.2.18. $5x + y - z + 10 = 0$

4.2.19. $9x - 15y + 5z - 45 = 0$

4.2.20. $6x + 6y - 7z + 42 = 0$

4.2.21. $9x - 4y + 12z - 36 = 0$

4.2.22. $6x + 5y - 10z + 30 = 0$

4.2.23. $11x - 4y + 11z - 44 = 0$

4.2.24. $4x + 7y - 14z + 28 = 0$

4.2.25. $12x - 9y + 4z - 36 = 0$

4.2.26. $2x + 9y - 3z - 18 = 0$

$$4.2.27. 13x - 2y + 13z - 26 = 0$$

$$4.2.28. 2x - 7y - 14z - 14 = 0$$

$$4.2.29. 6x - 4y + 3z - 24 = 0$$

$$4.2.30. x - 3y - 5z - 15 = 0$$

4.3. Складіть канонічне рівняння прямої.

$$4.3.1. \begin{cases} x - 4y + 4z - 10 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.16. \begin{cases} x + 6y + 2z - 2 = 0, \\ 3x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$4.3.2. \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + 3y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.17. \begin{cases} x - 7y + 2z - 14 = 0, \\ 2x + 4y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.3. \begin{cases} x + 4y + z + 10 = 0, \\ 2x - y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.18. \begin{cases} x - 4y - 4z + 10 = 0, \\ 2x - y + 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.4. \begin{cases} x + 5y + 2z - 20 = 0, \\ 4x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.19. \begin{cases} 3x - 4y + 2z - 15 = 0, \\ x + 2y - 2z - 10 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.5. \begin{cases} x - 6y + 3z - 12 = 0, \\ 3x + 2y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.20. \begin{cases} 5x - y + 2z - 20 = 0, \\ 2x + 2y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.6. \begin{cases} x - 2y + 3z + 5 = 0, \\ 5x + y - 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.21. \begin{cases} x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.7. \begin{cases} x + 3y + 2z + 6 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.22. \begin{cases} x - 8y + 2z + 6 = 0, \\ 2x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.8. \begin{cases} x - 6y + 2z - 14 = 0, \\ 4x - y - 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.23. \begin{cases} x - 2y + 4z + 10 = 0, \\ 5x + y - 3z - 16 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.9. \begin{cases} x - 3y + 3z - 7 = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.24. \begin{cases} x - 2y + 4z - 2 = 0, \\ 3x + 2y - z - 36 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.10. \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 15 = 0, \\ 2x + y - 3z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.25. \begin{cases} x - y + z - 5 = 0, \\ 3x - 2y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.11. \begin{cases} 3x - 2y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.26. \begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.12. \begin{cases} 4x - 2y + z - 10 = 0, \\ 2x + 3y - 2z - 12 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.27. \begin{cases} x + 3y + 2z - 13 = 0, \\ 2x + y + z - 16 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.13. \begin{cases} 3x + y + 4z + 6 = 0, \\ 4x - y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.28. \begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.14. \begin{cases} -2x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.29. \begin{cases} x - 3y + 6z - 11 = 0, \\ x + 2y - 2z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.15. \begin{cases} x - 5y + 3z - 11 = 0, \\ 2x + 3y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3.30. \begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

4.4. Знайдіть:

а) точку перетину прямої і площини;

б) кут між прямою і площиною;

в) точку, симетричну точці P відносно даної площини.

$$4.4.1. \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, x + 2y + 3z - 14 = 0, P(1; 3; -6).$$

$$4.4.2. \frac{x+12}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, x + 2y - 5z + 20 = 0, P(2; 7; -4).$$

$$4.4.3. \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, x - 3y + 7z - 24 = 0, P(0; 10; -2).$$

$$4.4.4. \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, 2x - y + 4z = 0, P(-4; 6; 6).$$

$$4.4.5. \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, 3x + y - 5z - 12 = 0, P(7; 2; -5).$$

$$4.4.6. \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, x + 3y - 5z + 9 = 0, P(5; 0; -6).$$

$$4.4.7. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, x - 2y + 5z + 17 = 0, P(-12; 4; 6).$$

$$4.4.8. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1}, x - 2y + 4z - 19 = 0, P(9; 0; -3).$$

$$4.4.9. \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}, 2x - y + 3z + 23 = 0, P(6; -3; 2).$$

$$4.4.10. \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, 2x - 3y - 5z - 7 = 0, P(15; 6; 0)$$

$$4.4.11. \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, 4x - 2y - z - 11 = 0, P(7; 1; -1).$$

- 4.4.12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$, $3x-2y-4z-8=0$, $P(-4; 0; 8)$.
- 4.4.13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$, $P(5; 2; -2)$.
- 4.4.14. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$, $5x-y+4z+3=0$, $P(9; 5; -3)$.
- 4.4.15. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$, $P(-2; -4; -6)$.
- 4.4.16. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$, $P(5; -2; 1)$.
- 4.4.17. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$, $P(0; 6; -8)$.
- 4.4.18. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$, $P(-5; 1; -3)$.
- 4.4.19. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$, $2x-5y+4z+24=0$, $P(2; 2; -4)$.
- 4.4.20. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$, $P(11; 4; -3)$.
- 4.4.21. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x-7y+3z+11=0$, $P(4; 12; -2)$.
- 4.4.22. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$, $P(0; 13; -16)$.
- 4.4.23. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$, $P(-1; 11; 5)$.
- 4.4.24. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$, $P(7; 0; -4)$.
- 4.4.25. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$, $P(-6; 4; -2)$.
- 4.4.26. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$, $P(11; 0; -1)$.
- 4.4.27. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$, $P(-6; -3; -2)$.
- 4.4.28. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$, $P(1; 3; 7)$.
- 4.4.29. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$, $P(2; 4; 8)$.

4.4.30. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$, $P(7; 5; -3)$.

1.5 Криві II-го порядку. Побудова.

Приведення кривих II-го порядку до канонічного вигляду

Коло, еліпс, гіпербола: означення, канонічні рівняння, ексцентриситет, директриси та їх геометричний зміст. Парабола: означення, канонічне рівняння, параметр та директриса параболи.

1.5.1 Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$.
2. Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відомо рівнянні асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ та відстань між директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$.
3. Знайдіть вершину та параметр p параболи $x = 4y^2 - 8y + 7$.
4. Визначте тип кривої $4x^2 - 32x - y^2 + 2y + 59 = 0$ та зробіть рисунок.
5. Обчисліть площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ та прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

Відповіді

1. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. 3. $p = \frac{1}{8}$, $(3; 1)$ – вершина параболи.
4. Гіпербола $(x - 4)^2 - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$. 5. 12.

1.5.2 Індивідуальні тестові завдання

5.1. Задано рівняння кривої другого порядку. Виконайте такі дії:

а) визначте за рівнянням вид кривої;

б) у випадку еліпса знайдіть величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот;

г) у випадку параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси;

д) побудуйте криву з поданням фокусів, директрис, асимптот (за наявності).

5.1.1. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$

5.1.2. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0.$

5.1.3. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0.$

5.1.4. $-16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$

5.1.5. $x^2 + 10y = 10.$

5.1.6. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0.$

5.1.7. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$

5.1.8. $y^2 - 4x = 4.$

5.1.9. $16x^2 - 36y^2 - 576 = 0.$

5.1.10. $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0.$

5.1.11. $x^2 - 4y^2 - 4 = 0.$

5.1.12. $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0.$

5.1.13. $9x^2 - 36y^2 + 324 = 0.$

5.1.14. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$

5.1.15. $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$

5.1.16. $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0.$

5.1.17. $y^2 + 8x = 16.$

5.1.18. $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0.$

5.1.19. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0.$

5.1.20. $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0.$

5.1.21. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0.$

5.1.22. $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0.$

5.1.23. $x^2 - 12y = 24.$

5.1.24. $36x^2 + 16y^2 - 576 = 0$

5.1.25. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.$

5.1.26. $5x^2 - 4y^2 + 20 = 0$

5.1.27. $9x^2 + 36y^2 - 324 = 0.$

5.1.28. $x^2 - 4y^2 + 4 = 0.$

5.1.29. $36x^2 + 25y^2 - 900 = 0.$

5.1.30. $25x^2 - 36y^2 + 900 = 0.$

5.2. Встановіть , яку лінію визначає рівняння, та побудуйте її графік.

5.2.1. $y = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

5.2.2. $y = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

5.2.3. $y = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

5.2.4. $y = -2 - \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

5.2.5. $x = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

5.2.6. $x = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{16 - y^2}$.

5.2.7. $x = 3 + \frac{7}{2}\sqrt{4 - y^2}$.

5.2.9. $y = -1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 + x^2}$.

5.2.11. $y = \frac{5}{6}\sqrt{37 + x^2 + 2x}$.

5.2.13. $y = \frac{4}{7}\sqrt{50 - 2x + x^2}$.

5.2.15. $y + 1 = \frac{4}{9}\sqrt{81 + x^2}$.

5.2.17. $x = \frac{7}{2}\sqrt{5 - 2y + y^2}$.

5.2.19. $x = \frac{7}{4}\sqrt{25 + 6y + y^2}$.

5.2.21. $x - 2 = -\frac{5}{7}\sqrt{49 + y^2}$.

5.2.23. $y = 1 - 3\sqrt{1 - x^2}$.

5.2.29. $x = -\frac{7}{9}\sqrt{80 - 2y - y^2}$.

5.2.8. $x = 3 - \frac{3}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

5.2.10. $y = 2 - \frac{3}{5}\sqrt{25 + x^2}$.

5.2.12. $y = -\frac{6}{5}\sqrt{29 + 4x + x^2}$.

5.2.14. $y = -\frac{4}{7}\sqrt{20 - 4x + x^2}$.

5.2.16. $y - 2 = -\frac{9}{5}\sqrt{25 + x^2}$.

5.2.18. $x = -\frac{3}{7}\sqrt{53 + 4y + y^2}$.

5.2.20. $x = \frac{8}{3}\sqrt{25 - 16y + y^2}$.

5.2.22. $x + 1 = -\frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}$.

5.2.24. $x + 3 = -2\sqrt{4 - y^2}$.

5.2.25. $y - 1 = \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

5.2.26. $y = -\frac{5}{3}\sqrt{24 - 2x - x^2}$.

5.2.27. $x - 2 = \frac{9}{7}\sqrt{49 + y^2}$.

5.2.28. $x + 1 = -\frac{7}{9}\sqrt{81 + y^2}$.

5.2.30. $y = \frac{2}{5}\sqrt{26 + 2x + x^2}$.

2 МАТЕМАТИЧНІ ДИКТАНТИ

2.1 Векторна алгебра

Варіант 1

1. Обґрунтувати, чи може вектор \vec{x} складати з координатними осями Ox , Oy і Oz кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$? Якщо так, навести приклад такого вектора.

2. Відомо, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. При якій умові для ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} справедлива рівність $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

4. Дано чотири точки: $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(6; 1; 19)$, $D(9; -5; 12)$.
Визначити:

- 1) одиничний вектор напрямку \vec{AB} ;
- 2) косинус кута між векторами \vec{AB} та \vec{AD} ;
- 3) чи лежать точки A, B, C, D в одній площині;
- 4) тип чотирикутника $ABCD$;
- 5) площу чотирикутника $ABCD$.

5. Дано чотири вектора:

$$\vec{a} = (3; 1; 2), \vec{b} = (-4; 3; -1), \vec{c} = (2; 3; 4), \vec{d} = (14; 14; 20).$$

Визначити:

- 1) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
- 2) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на сторонах;
- 3) розкласти вектор \vec{d} за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Відповіді

1. Може. Наприклад, вектор $\vec{x} = (c\sqrt{2}; c; -c)$, де $c \neq 0$. 2. 22. 3. Вектори \vec{a} і \vec{b} ортогональні. 4. 1) $\vec{AB}_0 = \frac{1}{\sqrt{94}}(-3; 6; 7)$; 2) $-\frac{84}{\sqrt{94} \cdot \sqrt{342}}$; 3) лежать; 4) паралелограм; 5) $\sqrt{116^2 + 100^2 + 36^2} = 4\sqrt{2762}$. 5. 1) Трійка векторів права; 2) $\frac{23}{6}$; розкладання $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{c}$.

Варіант 2

1. Обґрунтувати, чи може вектор \vec{x} складати з координатними осями Ox , Oy і Oz кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$? Якщо так, навести приклад такого вектора.

2. Відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$. $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

3. При якій умові для ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} справедлива нерівність $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$?

4. Дано чотири точки: $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$.

Визначити:

- 1) одиничний вектор напрямку \overrightarrow{AB} ;
- 2) косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AD} ;
- 3) чи лежать точки A, B, C, D в одній площині;
- 4) тип чотирикутника $ABCD$;
- 5) площу чотирикутника $ABCD$.

6. Дано чотири вектора: $\vec{a} = \{5; 7; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; 1; 3\}$, $\vec{c} = \{1; -4; 6\}$, $\vec{d} = \{14; 9; -1\}$.

Визначити:

- 1) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
- 2) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на сторонах;
- 3) розкласти вектор \vec{d} за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Відповіді

1. Не може. 2. 20. 3. Кут, утворений векторами \vec{a} і \vec{b} гострий.

4.1) $A\vec{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{22}}(-2; 3; -3)$; 2) $-\frac{15}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}}$ 3) лежать; 4) трапеція;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{27^2 + 6^2 + 24^2} = \frac{3}{2}\sqrt{149}$. 5. Трійка векторів права; 2) $\frac{215}{6}$; розкладання

$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2.2 Аналітична геометрія

Варіант 1

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1; 0; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{-5; 1; 0\}$.

2. Дано дві площини, рівняння яких $3x - 5y + lz = 3$ і $x + 3y + 2z = -5$. При якому значенні параметра l вони перпендикулярні?
3. Обчислити площу трикутника, що відокремлюється площиною $2x - 4x + 5z - 80 = 0$ від координатного кута yOz .
4. Знайти точку перетину площини $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ з віссю Oz .
5. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $A(0; -1; 1)$ паралельно осі Ox .
6. При якому значенні параметра a пряма $\frac{x-1}{a} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{3}$ паралельно площині $x - 3y + 5z = 0$?
7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = y + 4 = \frac{z+2}{2}$ та площини xOy .
8. Знайти відстань між площинами $x - 2y - 2z - 12 = 0$ та $x - y - 2z - 6 = 0$.
9. Які кути утворює нормаль до площини $y - z + 2 = 0$ з осями координат?

Відповіді

1. $5x - y + 5 = 0$. 2. $l = 6$. 3. 160. 4. $(0; 0; -6)$. 5. $x = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{0}$. 6. $a = -9$.
7. $(-1; -5; 0)$. 8. 2. 9. Або $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$, або $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{4}$.

Варіант 2

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(0; 1; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{5; 0; -3\}$.
2. Запишіть рівняння будь-якої площини, що паралельна площині, заданої рівнянням $x + 2y + 3z + 4 = 0$.
3. Обчислити площу трикутника, що відокремлюють площиною $5x - 6x + 3z + 120 = 0$ від координатного кута xOy .
4. Знайти точку перетину площини $2x - 3y - 4z = 24$ з віссю Oy .
5. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $A(1; 2; 3)$ паралельно осі Oz .

6. За яких значеннях параметрів a і b пряма $\frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна площині $3x - 2y + bz + 1 = 0$?

7. Знайти точку перетину прямої $x+1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+7}{3}$ та площини xOz .

8. Знайти відстань між площинами $2x+2y - z+11=0$ и $3x+3y - 1,5z - 6=0$.

9. Які кути утворює нормаль до площини $2y+1=0$ з осями координат?

Відповіді

1. $5x-3y-3=0$. 2. $x+2y+3z+C=0, C \in R$. 3. 240. 4. $(0; -8; 0)$.

5. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = z-3$. 6. $a = -6, b = 1,5$. 7. $(-2; 0; -10)$. 8. 5.

9. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = \frac{\pi}{2}$.

3 КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ ДО МОДУЛЯ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

3.1 Контрольні роботи

Варіант 1

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3, \\ 3x + 2y - z = -2, \\ x + 2y - 2z = -3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-2, 4, 7\}, \vec{p} = \{0, 1, 2\}, \vec{q} = \{1, 0, 1\}, \vec{r} = \{-1, 2, 4\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b} = \{3, 0, -1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(1, -2, 3), B(0, -1, 2), C(3, -4, 5).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/6.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{2, 3, 1\}, \vec{b} = \{-1, 0, -1\}, \vec{c} = \{2, 2, 2\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-3, 4, -7), M_2(1, 5, -4), M_3(-5, -2, 0), M_0(-12, 7, -1)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(1, 0, -2), B(2, -1, 3), C(0, -3, 2).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x - 3y + 5 = 0, 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(5, 1, 0), C(0, 2, 3).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(0, -3, -2), \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Варіант 2

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x - 3y - z = 6, \\ -2x + 2y + 3z = 2, \\ -x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{6, 12, -1\}, \vec{p} = \{1, 3, 0\}, \vec{q} = \{2, -1, 1\}, \vec{r} = \{0, -1, 2\}.$$

2. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{1, 0, 1\}, \vec{b} = \{-2, 3, 5\}, \vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-3, -3, -6).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 2, 1\}, \vec{b} = \{-1, 1, -1\}, \vec{c} = \{3, 1, -1\}$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-4, 2, 6), A_2(2, -3, 0), A_3(-10, 5, 8), A_4(-5, 2, -4).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-1, 2, -3), M_2(4, -1, 0), M_3(2, 1, -2), M_0(1, -6, -5)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(-1, 3, 4), B(-1, 5, 0), C(2, 6, 1).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x - 3y + z - 1 = 0, \quad x + z - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(3, 3, 1), C(4, 1, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x - 3y + 2z + 2 = 0, \quad x + 3y + z + 14 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(2, -1, 1), \quad \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

Варіант 3

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x - y - z = -4, \\ -x + 4y + 3z = 7, \\ -3x + 3y + 2z = 9. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{1, -4, 4\}, \vec{p} = \{2, 1, -1\}, \vec{q} = \{0, 3, 2\}, \vec{r} = \{1, -1, 1\}$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{-2, 4, 1\}, \vec{b} = \{1, -2, 7\}, \vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \vec{AB} та \vec{AC} :

$$A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = \frac{1}{5}, |\vec{q}| = 1, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{1, 5, 2\}, \vec{b} = \{-1, 1, -1\}, \vec{c} = \{1, 1, 1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(7, 2, 4), A_2(7, -1, 2), A_3(3, 3, 1), A_4(-4, 2, 1).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-3, -1, 1), M_2(-9, 1, -2), M_3(3, -5, 4), M_0(-7, 0, -1)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} :

$$A(4, -2, 0), B(1, -1, 5), C(-2, 1, -3).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$4x - 5y + 3z - 1 = 0, \quad x - 4y - z + 9 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(3, 1, 3), C(1, 4, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x - 2y + z - 4 = 0, \quad 2x + 2y - z - 8 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad x-3y+7z-24=0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(1, 1, 1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Варіант 4

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = -7, \\ -x + y - z = -2, \\ 2x - 2y + z = 3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-9, 5, 5\}, \quad \vec{p} = \{4, 1, 1\}, \quad \vec{q} = \{2, 0, -3\}, \quad \vec{r} = \{-1, 2, 1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{1, 2, -3\}, \quad \vec{b} = \{2, -1, -1\}, \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(-1, 2, -3), \quad B(3, 4, -6), \quad C(1, 1, -1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 4, \quad |\vec{q}| = \frac{1}{2}, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 5\pi/6.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{1, -1, -3\}, \quad \vec{b} = \{3, 2, 1\}, \quad \vec{c} = \{2, 3, -4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(2, 1, 4), \quad A_2(-1, 5, -2), \quad A_3(-7, -3, 2), \quad A_4(-6, -3, 6).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, -1, 1), M_2(-2, 0, 3), M_3(2, 1, -1), M_0(-2, 4, 2).$

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(-8, 0, 7), B(-3, 2, 4), C(-1, 4, 5).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x - y + 2z + 15 = 0, \quad 5x + 9y - 3z - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(-1, -1, 6), C(2, 3, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x + y + z - 2 = 0, \quad x - y - 2z + 2 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, \quad 2x - y + 4z = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(1, 2, 3), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

Варіант 5

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4, \\ -3x + 4y - 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-5, -5, 5\}, \quad \vec{p} = \{-2, 0, 1\}, \quad \vec{q} = \{1, 3, -1\}, \quad \vec{r} = \{0, 4, 1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{3, 5, 4\}, \quad \vec{b} = \{5, 9, 7\}, \quad \vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(-4, -2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 3 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 3, 1\}, \quad \vec{b} = \{1, -2, 1\}, \quad \vec{c} = \{1, 1, 1\}$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-1, -5, 2), \quad A_2(-6, 0, -3), \quad A_3(3, 6, -3), \quad A_4(-10, 6, 7).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, 2, 0), M_2(1, -1, 2), M_3(0, 1, -1), M_0(2, -1, 4)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(7, -5, 1), \quad B(5, -1, -3), \quad C(3, 0, -4).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x + 2y - 4z + 17 = 0, \quad 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), \quad B(-13, 4, 6), \quad C(10, -9, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$2x + 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(1, 0, -1), \quad \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

Варіант 6

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4, \\ -3x + 4y - 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-5, -5, 5\}, \vec{p} = \{-2, 0, 1\}, \vec{q} = \{1, 3, -1\}, \vec{r} = \{0, 4, 1\}$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{3, 5, 4\}, \vec{b} = \{5, 9, 7\}, \vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(-4, -2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 3, 1\}, \vec{b} = \{1, -2, 1\}, \vec{c} = \{1, 1, 1\}$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-1, -5, 2), A_2(-6, 0, -3), A_3(3, 6, -3), A_4(-10, 6, 7).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, 2, 0), M_2(1, -1, 2), M_3(0, 1, -1), M_0(2, -1, 4)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(7, -5, 1), B(5, -1, -3), C(3, 0, -4).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x + 2y - 4z + 17 = 0, \quad 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(-13, 4, 6), C(10, -9, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$2x + 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(1, 0, -1), \quad \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

Варіант 7

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -3x + y - 2z = -6, \\ -x - 2y + 3z = -7, \\ 2x - y + z = 5. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{13, 2, 7\}, \quad \vec{p} = \{5, 1, 0\}, \quad \vec{q} = \{2, -1, 3\}, \quad \vec{r} = \{1, 0, -1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{1, 4, -2\}, \quad \vec{b} = \{1, 1, -1\}, \quad \vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(5, 3, -1), \quad B(5, 2, 0), \quad C(6, 4, -1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 3 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 1, -1\}, \quad \vec{b} = \{-2, -1, 0\}, \quad \vec{c} = \{5, 2, -1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(0, -1, -1), \quad A_2(-2, 3, 5), \quad A_3(1, -5, -9), \quad A_4(-1, -6, 3).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, 0, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(2, -2, 1), M_0(-5, -9, 1).$

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(-3, 5, -2), B(-4, 0, 3), C(-3, 2, 5).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(-5, -5, 6), C(-7, 6, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$3x + y - z - 6 = 0, \quad 3x - y + 2z = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 3y - 5z + 9 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(2, 1, 0), \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

Варіант 8

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -3x - y + z = 8, \\ -2x + 4y + 3z = 3, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-19, -1, 7\}, \quad \vec{p} = \{0, 1, 1\}, \quad \vec{q} = \{-2, 0, 1\}, \quad \vec{r} = \{3, 1, 0\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{1, -2, 5\}, \quad \vec{b} = \{3, -1, 0\}, \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), C(2, 3, 0).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 3, \quad |\vec{q}| = 2 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{4, 3, 1\}, \quad \vec{b} = \{1, -2, 1\}, \quad \vec{c} = \{2, 2, 2\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(5, 2, 0), \quad A_2(2, 5, 0), \quad A_3(1, 2, 4), \quad A_4(-1, 1, 1).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, 2, -3), M_2(1, 0, 1), M_3(-2, -1, 6), M_0(3, -2, -9)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(1, -1, 8), \quad B(-4, -3, 10), \quad C(-1, -1, 7).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3y - z = 0, \quad 2y + z = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), \quad B(-18, 1, 0), \quad C(15, -10, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x + 5y + 2z + 11 = 0, \quad x - y - z - 1 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad x - 2y + 5z + 17 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(-2, -3, 0), \quad \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

Варіант 9

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -5x - y + 2z = 2, \\ -3x + 4y + 3z = -3, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{3, -3, 4\}, \vec{p} = \{1, 0, 2\}, \vec{q} = \{0, 1, 1\}, \vec{r} = \{2, -1, 4\}$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{3, 4, -1\}, \vec{b} = \{2, -1, 1\}, \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(2, -4, 6), B(0, -2, 4), C(6, 8, 10).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{4, 3, 1\}, \vec{b} = \{6, 7, 4\}, \vec{c} = \{2, 0, -1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(2, -1, -2), A_2(1, 2, 1), A_3(5, 0, -6), A_4(-10, 9, -7).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(3, 10, -1), M_2(-2, 3, -5), M_3(-6, 0, -3), M_0(-6, 7, -10)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(-2, 0, -5), B(2, 7, -3), C(9, -2, 1).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$6x + 3y - 3z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(10, 0, -2), C(9, -2, 1).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$3x + 4y - 2z + 1 = 0, \quad 2x - 4y + 3z + 4 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}, \quad x-2y+4z-19=0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(-1, 0, -1), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

Варіант 10

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 1, \\ -x + 2y + z = 1, \\ x + 4y - 2z = 8. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{3, 3, -1\}, \quad \vec{p} = \{3, 1, 0\}, \quad \vec{q} = \{-1, 2, 1\}, \quad \vec{r} = \{-1, 0, 2\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{-2, -3, -2\}, \quad \vec{b} = \{1, 0, 5\}, \quad \vec{c}_1 = 3\vec{a} + 9\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = -\vec{a} - 3\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(0, 1, -2), \quad B(3, 1, 2), \quad C(4, 1, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}, \quad \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 1, \quad |\vec{q}| = 2, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/6.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 2, 1\}, \quad \vec{b} = \{1, -3, -7\}, \quad \vec{c} = \{1, 2, 3\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-2, 0, 4), \quad A_2(-1, 7, 1), \quad A_3(4, -8, -4), \quad A_4(1, -4, 6).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-1, 2, 4), M_2(-1, -2, -4), M_3(3, 0, -1), M_0(-2, 3, 5)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(1, 9, -4), B(5, 7, 1), C(3, 5, 0).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x + 2y + 2z = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, 0, z), B(-6, 5, 7), C(8, -4, 3).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$5x + y - 3z + 4 = 0, \quad x - y + 2z + 2 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x - y + 3z + 23 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(0, 2, 1), \quad \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Варіант 11

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -4, \\ 2x + 3y - z = 6, \\ x - 2y - 2z = -6. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-1, 7, -4\}, \quad \vec{p} = \{-1, 2, 1\}, \quad \vec{q} = \{2, 0, 3\}, \quad \vec{r} = \{1, 1, -1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{-1, 4, 2\}, \quad \vec{b} = \{3, -2, 6\}, \quad \vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(3, 3, -1), B(1, 5, -2), C(4, 1, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 7, \quad |\vec{q}| = 2, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 7, 2\}, \quad \vec{b} = \{-2, 0, -1\}, \quad \vec{c} = \{2, 2, 1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(14, 4, 5), \quad A_2(-5, -3, 2), \quad A_3(-2, -6, -3), \quad A_4(-2, 2, -1).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(0, -3, 1), M_2(-4, 1, 2), M_3(2, -1, 5), M_0(-3, 4, -5)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(-7, 0, 3), \quad B(1, -5, -4), \quad C(2, -3, 0).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$2x - y + 5z + 16 = 0, \quad x + 2y + 3z + 8 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), \quad B(3, 0, 3), \quad C(0, 2, 4).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$3x + 3y - 2z - 1 = 0, \quad 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, \quad 3x - 2y - 4z - 8 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(-1, 2, 0), \quad \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

Варіант 14

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -6, \\ x - 2y - 2z = -1, \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{5, 15, 0\}, \vec{p} = \{1, 0, 5\}, \vec{q} = \{-1, 3, 2\}, \vec{r} = \{0, -1, 1\}$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{-2, 7, -1\}, \vec{b} = \{-3, 5, 2\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(6, 2, -3), B(6, 3, -2), C(7, 3, -3).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 7, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{7, 3, 4\}, \vec{b} = \{-1, -2, -1\}, \vec{c} = \{4, 2, 4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 1, 2), A_2(-1, 1, 3), A_3(2, -2, 4), A_4(-1, 0, -2).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-3, 5, 6), M_2(2, 1, -4), M_3(0, -3, -1), M_0(3, 6, 68)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(-3, 7, 2), B(2, 1, -4), C(4, 5, 3).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x - 2y - 2z - 16 = 0, x + y - 3z - 7 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(3, 5, 1), C(4, 5, 3).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$6x - 7y - 4z - 2 = 0, \quad x + 7y - z - 5 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x + 2y - z - 2 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(2, -2, -3), \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$$

Варіант 15

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -3x + y + z = 8, \\ 2x - 2y + 3z = -2, \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{2, -1, 11\}, \quad \vec{p} = \{1, 1, 0\}, \quad \vec{q} = \{0, 1, -2\}, \quad \vec{r} = \{1, 0, 3\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{3, 7, 0\}, \quad \vec{b} = \{1, -3, 4\}, \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(0, 0, 4), \quad B(-3, -6, 1), \quad C(-5, -10, -1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 3, \quad |\vec{q}| = 4, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{2, 3, 2\}, \quad \vec{b} = \{4, 7, 5\}, \quad \vec{c} = \{2, 0, -1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(2, 3, 1), \quad A_2(4, 1, -2), \quad A_3(6, 3, 7), \quad A_4(7, 5, -3).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(2, -4, -3), M_2(5, -6, 0), M_3(-1, 3, -3), M_0(2, -10, 8)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(0, -2, 8), B(4, 3, 2), C(1, 4, 3).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$8x - y - 3z - 1 = 0, \quad x - y + 3z - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(-2, 8, 10), C(6, 11, -2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$8x - y - 3z - 1 = 0, \quad x + y + z + 10 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, \quad 5x - 2y + 4z + 10 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(-1, 0, 1), \quad \frac{x+0,5}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$$

Варіант 16

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x + 3y + z = 8, \\ -x + 4y - z = 6, \\ 2x + 3y + 3z = 9. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{11, 5, -3\}, \quad \vec{p} = \{1, 0, 2\}, \quad \vec{q} = \{-1, 0, 1\}, \quad \vec{r} = \{2, 5, -3\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{-1, 2, -1\}, \quad \vec{b} = \{2, -7, 1\}, \quad \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(2, -8, -1), B(4, -6, 0), C(-2, -5, -1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{5, 3, 4\}, \vec{b} = \{-1, 0, -1\}, \vec{c} = \{4, 2, 4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 1, -1), A_2(2, 3, 1), A_3(3, 2, 1), A_4(5, 9, -8).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 1, 2), M_3(1, 1, 4), M_0(-3, 2, 7)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(1, -1, 5), B(0, 7, 8), C(-1, 3, 8).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 2x - y + 2z + 5 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(-2, -4, 6), C(7, 2, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$6x - 5y - 4z + 8 = 0, \quad 6x + 5y + 3z + 4 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \quad x + 3y + 5z - 42 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої:

$$M(0, 3, 2), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

Варіант 17

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2, \\ 2x - 3y - z = 1, \\ 2x + y - 5z = -3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{8, 0, 5\}, \vec{p} = \{2, 0, 1\}, \vec{q} = \{1, 1, 0\}, \vec{r} = \{4, 1, 2\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{7, 9, -2\}, \vec{b} = \{5, 4, 3\}, \vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(3, -6, 9), B(0, -3, 6), C(9, -12, 15).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/6.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 10, 5\}, \vec{b} = \{-2, -2, -3\}, \vec{c} = \{2, 4, 3\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 5, -7), A_2(-3, 6, 3), A_3(-2, 7, 3), A_4(-4, 8, -12).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(1, 3, 6), M_2(2, 2, 1), M_3(-1, 0, 1), M_0(5, -4, 5)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(-10, 0, 9), B(12, 4, 11), C(8, 5, 15).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x + 2y - 3z - 1 = 0, \quad x + y + z - 7 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(2, 2, 4), C(0, 4, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x + 5y - z - 5 = 0, \quad 2x - 5y + 2z + 5 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, \quad 7x + y + 4z - 47 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(1, 0, 1), \quad 4x + 6y + 4z - 25 = 0.$$

Варіант 18

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -2x - y - 2z = -2, \\ x + 2y + 2z = 1, \\ -x + 3y + z = -2. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{3, 1, 8\}, \quad \vec{p} = \{0, 1, 3\}, \quad \vec{q} = \{1, 2, -1\}, \quad \vec{r} = \{2, 0, -1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{5, 0, -2\}, \quad \vec{b} = \{6, 4, 3\}, \quad \vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 6\vec{b} - 10\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(0, 2, -4), \quad B(8, 2, 2), \quad C(6, 2, 4).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 1, \quad |\vec{q}| = 2 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{-2, -4, -3\}, \quad \vec{b} = \{4, 3, 1\}, \quad \vec{c} = \{6, 7, 4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-3, 4, -7), A_2(1, 5, -4), A_3(-5, -2, 0), A_4(2, 5, 4).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-4, 2, 6), M_2(2, -3, 0), M_3(-10, 5, 8), M_0(-12, 1, 8)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(3, -3, -6), B(1, 9, -5), C(6, 6, -4).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x - 3y - 2z - 8 = 0, \quad x + y - z + 3 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(0, -4, 1), C(1, -3, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$2x - 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad 2x + 3y + 7z - 52 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(-1, 0, -1), \quad 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$$

Варіант 19

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -4, \\ -3x + 2y + z = -1, \\ x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{8, 1, 2\}, \quad \vec{p} = \{1, 2, -1\}, \quad \vec{q} = \{3, 0, 2\}, \quad \vec{r} = \{-1, 1, 1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{8, 3, -1\}, \quad \vec{b} = \{4, 1, 3\}, \quad \vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 2\vec{b} - 4\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, 1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 1/2, |\vec{q}| = 2 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 1, -1\}, \vec{b} = \{1, 0, -1\}, \vec{c} = \{8, 3, -2\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(-1, 2, -3), A_2(4, -1, 0), A_3(2, 1, -2), A_4(3, 4, 5).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(7, 2, 4), M_2(7, -1, -2), M_3(-5, -2, -1), M_0(10, 1, 8)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(2, 1, 7), B(9, 0, 2), C(9, 2, 3).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$3x - 2y + 3z + 23 = 0, \quad y + z + 5 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(0, 5, -9), C(-1, 0, 5).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$5x + y + 2z + 4 = 0, \quad x - y - 3z + 2 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad 3x + 4y + 7z - 16 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(0, 2, 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$$

Варіант 20

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1, \\ -x + 4y + 3z = 3, \\ x - y - 3z = -6. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-9, -8, -3\}, \vec{p} = \{1, 4, 1\}, \vec{q} = \{-3, 2, 0\}, \vec{r} = \{1, -1, 2\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{3, -1, 6\}, \vec{b} = \{5, 7, 10\}, \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(-4, 3, 0), B(0, 1, 3), C(-2, 4, -2).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{4, 2, 2\}, \vec{b} = \{-3, -3, -3\}, \vec{c} = \{2, 1, 2\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(4, -1, 3), A_2(-2, 2, 0), A_3(0, -5, 1), A_4(3, 2, -6).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(2, 1, 4), M_2(3, 5, -2), M_3(-7, -3, 2), M_0(-3, 1, 8)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(-7, 1, -4), B(8, 11, -3), C(9, 9, -1).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x + y + 3z - 7 = 0, \quad x + z - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(-2, 4, -6), C(8, 5, 1).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$4x + y + z + 2 = 0, \quad 2x - y - 3z - 8 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x - 5y + 4z + 24 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(2, 1, 0), \quad y + z + 2 = 0.$$

Варіант 21

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 6, \\ x + y - 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-5, 9, -13\}, \quad \vec{p} = \{0, 1, -2\}, \quad \vec{q} = \{3, -1, 1\}, \quad \vec{r} = \{4, 1, 0\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{1, -2, 4\}, \quad \vec{b} = \{7, 3, 5\}, \quad \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(1, -1, 0), \quad B(-2, -1, 4), \quad C(8, -1, -1).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}, \quad \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 4, \quad |\vec{q}| = 1 \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/6.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{4, 1, 2\}, \quad \vec{b} = \{9, 2, 5\}, \quad \vec{c} = \{1, 1, -1\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, -1, 1), A_2(-2, 0, 3), A_3(2, 1, -1), A_4(2, -2, -4).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-1, -5, 2), M_2(-6, 0, 3), M_3(3, 6, -3), M_0(10, -8, -7)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(1, 0, -6), B(-7, 2, 1), C(-9, 6, 1).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x - 2y + 2z + 17 = 0, \quad x - 2y - 1 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(7, 3, -4), C(1, 5, 7).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$2x + y - 3z - 2 = 0, \quad 2x - y + z + 6 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, \quad x - 2y - 3z + 18 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(-1, 2, 0), \quad 4x - 5y - z - 7 = 0.$$

Варіант 22

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 11, \\ 2x + 4y - z = -1, \\ x - 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{-15, 5, 6\}, \quad \vec{p} = \{0, 5, 1\}, \quad \vec{q} = \{3, 2, -1\}, \quad \vec{r} = \{-1, 1, 0\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{3, 7, 0\}, \vec{b} = \{4, 6, -1\}, \vec{c}_1 = 3\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{c}_2 = 5\vec{a} - 7\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} :

$$A(7, 0, 2), B(7, 1, 3), C(8, -1, 2).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = 1/2, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{5, 3, 4\}, \vec{b} = \{4, 3, 3\}, \vec{c} = \{9, 5, 8\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 2, 0), A_2(1, -1, 2), A_3(0, 1, -1), A_4(-3, 0, 1).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(0, -1, -1), M_2(-2, 3, -5), M_3(1, -5, -9), M_0(-4, -13, 6)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} :

$$A(-3, 1, 0), B(6, 3, 3), C(9, 4, -2).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$x + 2y - 1 = 0, \quad x + y + 6 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(0, y, 0), B(0, -2, 4), C(-4, 0, 4).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x + y - 2z - 2 = 0, \quad x - y + z + 2 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad x + 7y + 3z + 11 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(2, -1, 1), \quad x - y + 2z - 2 = 0.$$

Варіант 23

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} -2x + 3y + z = -1, \\ x - 2y - z = -1, \\ -3x - y + 2z = -6. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{8, 9, 4\}, \vec{p} = \{1, 0, 1\}, \vec{q} = \{0, -2, 1\}, \vec{r} = \{1, 3, 0\}$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \vec{a} = \{2, -1, 4\}, \vec{b} = \{3, -7, -6\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(2, 3, 2), B(-1, -3, -1), C(-3, -7, -3).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{q} - \vec{p}, |\vec{p}| = 2,5, |\vec{q}| = 2, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 4, 2\}, \vec{b} = \{1, 1, 0\}, \vec{c} = \{8, 11, 6\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 0, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(2, -2, 1), A_4(2, 1, 0).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(5, 2, 0), M_2(2, 5, 0), M_3(1, 2, 4), M_0(-3, -6, -8)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(-4, -2, 5), B(3, -3, -7), C(9, 3, -7).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$2x - z + 5 = 0, 2x + 3y - 7 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(x, 0, 0), B(0, 1, 3), C(2, 0, 4).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x + 5y - z + 11 = 0, \quad x - y + 2z - 1 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, \quad 3x + 7y - 5z - 11 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(1, 1, 1), \quad x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

Варіант 24

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 4y - z = 4, \\ -3x - 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{23, -14, -30\}, \quad \vec{p} = \{2, 1, 0\}, \quad \vec{q} = \{1, -1, 0\}, \quad \vec{r} = \{-3, 2, 5\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{5, -1, -2\}, \quad \vec{b} = \{6, 0, 7\}, \quad \vec{c}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 4\vec{b} - 6\vec{a}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(2, 2, 7), \quad B(0, 0, 6), \quad C(-2, 5, 7).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 3, \quad |\vec{q}| = 1, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{4, -1, -6\}, \quad \vec{b} = \{1, -3, -7\}, \quad \vec{c} = \{2, -1, -4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(1, 2, -3), A_2(1, 0, 1), A_3(-2, -1, 6), A_4(0, -5, -4).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(2, -1, -2), M_2(1, 2, 1), M_3(5, 0, -6), M_0(14, -3, 7)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(0, -8, 10), B(-5, 5, 7), C(-8, 0, 4).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$5x + 3y + z - 18 = 0, \quad 2y + z - 9 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(x, 0, 0), B(4, 0, 5), C(5, 4, 2).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$x - y + z - 2 = 0, \quad x - 2y - z + 4 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, \quad 4x + y - 6z - 5 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(1, 2, 3), \quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$$

Варіант 25

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -9, \\ -x + 4y - z = -9, \\ -5x - 3y + 2z = 10. \end{cases}$$

2. Знайти розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = \{3, 1, 3\}, \quad \vec{p} = \{2, 1, 0\}, \quad \vec{q} = \{1, 0, 1\}, \quad \vec{r} = \{4, 2, 1\}.$$

3. Перевірити чи колінеарні вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами

$$\vec{a} \text{ та } \vec{b}: \quad \vec{a} = \{-9, 5, 3\}, \quad \vec{b} = \{2, 1, 0\}, \quad \vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}.$$

4. Знайти косинус кута між векторами \overline{AB} та \overline{AC} :

$$A(-1, 2, -3), B(0, 1, -2), C(-3, 4, -5).$$

5. Обчислити площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 5, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 2\pi/3.$$

6. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a} = \{3, 1, 0\}, \vec{b} = \{-5, -4, -5\}, \vec{c} = \{4, 2, 4\}.$$

7. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

$$A_1(3, 10, -1), A_2(-2, 3, -5), A_3(-6, 0, -3), A_4(1, -1, 2).$$

8. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3 : $M_1(-2, 0, -4), M_2(-1, 7, 1), M_3(4, -8, -4), M_0(-6, 5, 5)$.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} :

$$A(1, -5, -2), B(6, -2, 1), C(2, -2, -2).$$

10. Знайти кут між площинами:

$$4x + 3z - 2 = 0, \quad x + 2y + 2z + 5 = 0.$$

11. Знайти координати точки A , рівновіддаленої від точок B та C :

$$A(x, 0, 0), B(8, 1, -7), C(10, -2, 1).$$

12. Скласти канонічне рівняння прямої:

$$6x - 7y - z - 2 = 0, \quad x + 7y - 4z - 5 = 0.$$

13. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, \quad 5x + 9y + 4z - 25 = 0.$$

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно площини:

$$M(0, -3, -2), \quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$$

3.2 Підготовка до захисту контрольних робіт

1. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Крамера.

[6], Глава VI, § 1-2.

2. Знаходження розкладання будь-якого вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

[1], Глава 1, § 1.1 -1.6. ; [6], Глава VII, § 1.

3. Перевірка на колінеарність будь-яких векторів \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудованих за векторами \vec{a} та \vec{b} .

[1], Глава 1, § 1.1 -1.6. ; [6], Глава VII, § 1 - 2.

4. Знаходження косинуса кута між будь-якими векторами \vec{AB} та \vec{AC} .

[1], Глава 2, § 2.1 -2.2. ; [6], Глава VII, § 2.

5. Обчислення площі паралелограму, побудованого за будь-якими векторами \vec{a} та \vec{b} .

[1], Глава 2, § 2.3 -2.4. ; [6], Глава VII, § 4.

6. Перевірка на компланарність векторів будь-яких $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

[1], Глава 2, § 2.6. ; [6], Глава VII, § 4.

7. Обчислення об'єму тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоти, яка опущена з будь-якої вершини на грань.

[1], Глава 2, § 2.7. ; [6],

8. Знаходження відстані від будь-якої точки до площини, яка проходить через три задані точки.

[2], § 5.3.

9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} .

[2], § 5.2.

10. Знаходження кута між площинами

[2], § 6.6. , § 7.1 – 7.4.

11. Знаходження координати будь-якої точки A , рівновіддаленої від точок B та C .

[1], Глава 1, § 1.1, 1.7. ; [6], Глава I, § 1, Глава VII, § 1.

12. Скласти канонічне рівняння прямої.

[2], § 3.1 – 3.4. , § 6.1 – 6.4. ; [6], Глава II, § 3, Глава VII, § 1.

13. Знайти точку перетину прямої та площини.

[2], § 7.1 – 7.3.

14. Знайти точку M' , симетричну до точки M відносно прямої або площини.

[2], § 7.1 – 7.3.

15. Побудова кривих другого порядку.

[2], § 4.1 – 4.4. ; [6], Глава II, § 3.

Література

1. **Гриньов, Б. В., Кириченко І.К.** Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 164 с.

2. **Гриньов, Б. В., Кириченко І.К.** Аналітична геометрія: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 340 с.

3. **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. Пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век; Мир и Образование, 2002. – 1 ч.

4. **Зими́на, О.В.** Высшая математика. Решебник / О. В. Зими́на. - М.: Физмат лит., 2003. – 356 с.

5. **Каплан, И.А.** Практические занятия по высшей математике. Часть I. / И. А. Каплан. - Харьков, 1971. – 412 с.

6. **Мышкис, А.Д.** Лекции по высшей математике / Под ред. Н.В. Воскресенской. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 640 с.

7. **Овчинников, П.П.** Вища математика: Підручник: у 2 ч. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – 2-е вид. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.

4 СЛОВНИК ПИТАНЬ (табл.4.1)

Таблиця 4.1

№№ питань	Питання	Каплан, И. А. Практические занятия по высшей математике. Часть I. - Харьков, 1971.	Данко, П. Е. Вища математика у вправах та задачах, Ч.1 Навч.посібник для ВНЗ.-М.: "Вища школа", 1974.	Зими́на, О. В. Высшая математика. Решебник.- М.:Физмат лит., 2003.
1	2	3	4	5
1.	Як обчислити визначник за правилом «трикутника»?	Ч. I, задача 15.3, формула (15.2)		
2.	Як обчислити мінор визначника?		Гл. 1, § 5.2	
3.	Як обчислити алгебраїчне доповнення відповідного елемента визначника n-го порядку?	Ч. I, п.15.7		
4.	Як розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера?	Ч. I, задача 15.5, 15.9, 15.10, 15.13, 15.16, 15.18, 15.21	Гл. 1, § 5.1, 5.2, №219, 220, 221	Гл. 2, задача 1
5.	Який визначник дорівнює 0?	Ч. I, п.15.2	Гл. 1, § 5.2	
6.	Як обчислити визначник n-го порядку?		Гл. 1, § 5, №217, Гл. 4, § 1, №383	

1	2	3	4	5
7.	Як довести перпендикулярність векторів?	Ч. I, формула (16.23)	Гл. 2, § 3.1, №257	
8.	Як довести, що вектори колінеарні?	Ч. I, п.16.18:влас-ті векторного добутку	Гл. 2, § 3.2	Гл. 1, задача 2
9.	Як довести, що вектори компланарні?	Ч. I, п.16.20	Гл. 2, § 3.3, №265	Гл. 1, задача 1
10.	Як обчислити добуток числа на вектор?		Гл. 2, § 2	
11.	Як обчислити різницю векторів?	Ч. I, задача 16.7	Гл. 2, § 2	
12.	Як обчислити суму векторів?	Ч. I, задача 16.7	Гл. 2, § 2	
13.	Як розкласти вектор за ортами?	Ч. I, формула (16.10)	Гл. 2, § 2	Гл. 1, задача 1
14.	Як визначити довжину(модуль) вектора?	Ч. I, задача 16.23(2), формули (16.4), (16.7)	Гл. 2, § 2, №243	
15.	Як визначити напрямлюючі косинуси вектора?	Ч. I, задача 16.23(3), формула (16.13)	Гл. 2, § 2, №243	
16.	Як обчислити скалярний добуток векторів?	Ч. I, задача 16.15, формули (16.18), (16.20)	Гл. 2, § 3.1, №256	Гл. 1, задача 3

1	2	3	4	5
17.	Як обчислити векторний добуток векторів?	Ч. I, задача 16.23(1), формула (16.25), (16.28)	Гл. 2, § 3.2, №260	Гл. 1, задача 4
18.	Як обчислити мішаний добуток векторів?	Ч. I, формула (16.31)	Гл. 2, § 3.3, №264	Гл. 1, задача 5
19.	Як обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах?	Ч. I, п.16.19	Гл. 2, § 3.3	
20.	Як обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах?	Ч. I, задача 16.20	Гл. 2, § 3.2, №261, №263	Гл. 1, задача 4
21.	Як знайти площу трикутника з вершинами в заданих точках?	Ч. I, задача 16.24	Гл. 1, § 1.2, №15	
22.	Як обчислити об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах?	Ч. I, задача 16.27, 16.28	Гл. 2, § 3.3, №266	Гл. 1, задача 6
23.	Як визначити кут між векторами?	Ч. I, задача 16.17	Гл. 2, § 3.1, №259	Гл. 1, задача 3
24.	Як визначити кут між векторами через векторний добуток?	Ч. I, п.16.18	Гл. 2, § 3.2	Гл. 1, задача 3
25.	Як знайти відстань між двома точками?	Ч. I, задача 1.12	Гл. 1, § 1.2, №10, Гл. 2, § 1	

1	2	3	4	5
26.	Як обчислити координати середини відрізка?	Ч. I, задача 2.1	Гл. 1, § 1.2, Гл. 2, § 1	
27.	Як знайти координати точки, яка ділить відрізок у заданному співвідношенні?	Ч. I, задача 2.11, 2.12	Гл. 1, § 1.1, №2, Гл. 2, § 1, №231	
28.	Як знайти точку симетричну даній?	Ч. I, задача 1.3	Гл. 3, § 1.2, №321, №322	Гл. 1, задача 13
29.	Як знайти полярні координати точки?	Ч. I, задача 7.5	Гл. 1, § 1.3, №27	
30.	Як скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно вектору?		Гл. 3, § 1.2, №325	
31.	Який вид має рівняння прямої в загальному вигляді?	Ч. I, п.3.2	Гл. 1, § 2.1	
32.	Який вид має рівняння прямої у відрізках?	Ч. I, п.3.3, задача 3.2(2)	Гл. 1, § 2.3	
33.	Який вид має параметричне рівняння прямої?		Гл. 3, § 1.2(5)	Гл. 1, задача 11, 13
34.	Який вид має канонічне рівняння прямої?		Гл. 3, § 1.2(4)	Гл. 1, задача 10

1	2	3	4	5
35.	Який вид має нормальне рівняння прямої?	Ч. I, п.3.4, задача 3.2(3)	Гл. 1, § 2.4	
36.	Який вид має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?	Ч. I, п.3.1, задача 3.2(1)	Гл. 1, § 2.2	
37.	Як визначити кут між прямими?	Ч. I, задача 4.14, 4.16	Гл. 1, § 2.5, №78	
38.	Як визначити кут між прямими, якщо вони задані канонічними рівняннями?	Ч. I, задача 18.11	Гл. 3, § 1.2(6)	
39.	Який вид має рівняння прямої, яка проходить через дві точки?	Ч. I, п.4.2, задача 4.1, 4.2	Гл. 1, § 2.5, Гл.3, § 1.2(3)	
40.	Який вид має рівняння пучка прямих?	Ч. I, задача 6.13, 6.14	Гл. 1, § 2.6, №96	
41.	Як скласти рівняння бісектриси кутів між двома прямими?	Ч. I, задача 6.1	Гл. 1, § 2.6, №92	
42.	Який вид має рівняння прямої в полярних координатах?	Ч. I, задача 7.11		
43.	Який вид має загальне рівняння площини?	Ч. I, п.17.1	Гл. 3, § 1.1(2)	
44.	Який вид має рівняння площини у відрізках?	Ч. I, п.17.4, задача 17.12	Гл. 3, § 1.1(3)	

1	2	3	4	5
45.	Який вид має нормальне рівняння площини?	Ч. I, п.17.2, задача 17.14	Гл. 3, § 1.1(1)	
46.	Який вид має рівняння площини, що проходить через три точки?	Ч. I, п.17.11, задача 17.35	Гл. 3, § 1.1(8)	
47.	Як визначити кут між площинами?	Ч. I, задача 17.30	Гл. 3, § 1.1(4)	Гл. 1, задача 9
48.	Як скласти рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору?		Гл. 3, § 1.1(6), №288	Гл. 1, задача 8
49.	Як скласти канонічне рівняння лінії перетину двох площин?	Ч. I, задача 18.2		Гл. 1, задача 10
50.	Як знайти точку перетину прямої з площиною?	Ч. I, задача 19.10		Гл. 1, задача 11
51.	Як довести, що прямі паралельні?	Ч. I, задача 4.7	Гл. 3, § 1.2(6)	
52.	Як довести, що прямі перпендикулярні?	Ч. I, задача 4.9	Гл. 3, § 1.2 (6)	
53.	Як довести паралельність прямої і площини?		Гл. 3, § 1.2(9)	
54.	Як обчислити кут між прямою і площиною?	Ч. I, задача 19.1	Гл. 3, § 1.2(8)	

1	2	3	4	5
55.	Як обчислити відстань від заданої точки до прямої?	Ч. I, задача 5.1, 5.2	Гл. 1, § 2.6, №84	
56.	Як знайти пряму, що належить пучку прямих та проходить через дану точку?		Гл. 1, § 2.6, №96	
57.	Як звести рівняння площини до нормального вигляду?	Ч. I, задача 17.14	Гл. 3, § 1.1, №286	
58.	Як визначити відстань від точки до площини?	Ч. I, задача 17.19	Гл. 3, § 1.1(5)	Гл. 1, задача 7
59.	Як знайти направляючі косинуси прямої?	Ч. I, задача 19.5	Гл. 3, § 1.2 (4)	
60.	Як довести компланарність двох прямих, які задані в канонічному вигляді?		Гл. 3, § 1.2(7)	
61.	Як звести до канонічного виду рівняння прямої?	Ч. I, задача 18.2	Гл. 3, § 1.2, №316	
62.	Який вид має рівняння еліпса?	Ч. I, задача 10.11	Гл. 1, § 3.2	
63.	Як скласти рівняння еліпса, якщо дані координати його точок?		Гл. 1, § 3.2, №141	
64.	Як знайти ексцентриситет еліпсу?	Ч. I, задача 10.12	Гл. 1, § 3.2	

1	2	3	4	5
65.	Як скласти канонічне рівняння гіперболи?	Ч. I, задача 11.1, 11.2, 11.3	Гл. 1, § 3.3	
66.	Як знайти асимптоти гіперболи?	Ч. I, задача 11.4	Гл. 1, § 3.3	
67.	Як скласти канонічне рівняння параболи?	Ч. I, задача 11.13, 11.14	Гл. 1, § 4.2, №181	

Навчальне видання

**ВЛАСЕНКО Катерина Володимирівна,
СТЕПАНОВ Аркадій Іванович,
МОСКАЛЕНКО Леонід Пилипович**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ. НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Редактор Ініціали Прізвище
Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №
Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.