Міністерство освіти і культури України
Донбаська Державна Машинобудівна Академія

Методичні вказівки

До самостійної роботи по розділу курсу
Вищої математики
"Визначники та елементи лінійної алгебри"
(для студентів всіх спеціальностей)
Конспект лекцій

Затверджено
На засіданні кафедри
Вищої математики
«___»________ 2001 г.
протокол №

Краматорськ, 2001

УДК 51

Методичні вказівки до самостійної роботи по розділу курсу вищої математики “Визначники та елементи лінійної алгебри” для студентів усіх спеціальностей /Укладач Паламарчук В.О., ДДМА, 2001 - 30 стор./

Вказівки містять в собі роз’яснення, вправи, задачі та індивідуальні домашні завдання по розділу вищої математики “Визначники та елементи лінійної алгебри”.

Укладач В. О. Паламарчук, доцент.

Відповідальний
за випуск А. М. Обухов, доцент

1. Визначники другого та третього порядку

Теорія визначників виникла при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими і пізніше почала використовуватись в деяких інших розділах математики.

Визначником третього порядку назвемо число, що визначається квадратною таблицею, складеною з дев'яти чисел a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.1)$$

і обчислюється таким чином

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.1a)$$

Числа a_{ij} – це елементи визначника, вони розташовані у трьох стовпцях.

Квадратні таблиці, складені з чотирьох чисел, та аналогічні виразу (1.1), називаються визначниками другого порядку. Вони обчислюються згідно правила

$$\begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{vmatrix} = в_{11}\, в_{22} - в_{12}\, в_{21}$$

Позначимо визначники другого порядку з виразу (1.1a)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Назвемо мінорами такі визначники другого порядку, що одержані з визначника третього порядку викреслюванням стовпця та рядка.

Індекси мінора M_{ij} співпадають з індексами елемента a_{ij}, що стоїть на перетині викреслених стовпця і рядка.

Визначник M_{11} є мінором елемента a_{11}, $M_{1,2}$ – мінором елемента $a_{1,2}$ і т.д.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} є мінор цього елемента, взятий зі знаком “+”, якщо сума номерів стовпця і рядка цього елемента парна, або зі знаком “–”, якщо ця сума непарна.

Таким чином, позначуючи алгебраїчні доповнення елементів a_{11}, a_{12}, a_{13} відповідно A_{11}, A_{12}, A_{13}, можна записати формулу (1.1а)

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (1.2)$$

Рівність (1.2) дає розкладання визначника третього порядку по елементам першого порядку. В загальному випадку визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка або стовпця з них алгебраїчними доповненнями. Крім рівності (1.2) справедливі рівності

$$\begin{aligned} D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ D &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ D &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \qquad (1.3) \\ D &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ D &= a_{13}A_{31} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

Сума попарних добутків елементів будь-якого рядка стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Вправа 1. Обчислити визначник другого порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2 \cdot 4 = -11$$

Вправа 2. Обчислити визначник третього порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\,(-2) - 2\,(-22) = 42$$

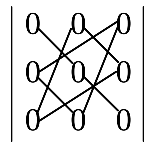
Для обчислення визначників третього порядку крім формул (1.1а), (1.3) можна використовувати інші штучні правила.

Наприклад, легко бачити, що

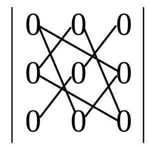
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{22}a_{13} - \tag{1.4}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} + a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{22}a_{33}$$

Перші три доданки цієї формули (зі знаком “+”) можна вибрати згідно мнемонічної схеми,



останні три (зі знаком “–”) – згідно схеми



Для кращого запам’ятовування формули (1.4) корисною є схема Сар’юса

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Властивості визначників

Нижче приведені властивості, справедливі для визначників будь-якого порядку.

2.1 Визначник не змінює свого значення, якщо замінити усі його рядки відповідними стовпцями

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дійсно, розкладаючи визначник, той що зліва, по елементам першого рідка, а той що справа – по елементам першого стовпця, ми одержимо однаковий результат.

2.2 Визначник змінює свій знак при перестановці двох стовпців, або двох рядків.

Порівняємо визначник (1.1) з іншим визначником в якому

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{23} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

переставлені перший та другий стовпці. Розкладаючи цей визначник по елементам другого стовпця та враховуючи, що при перестановці стовпців змінилися індекси елементів першого та другого стовпців, будемо мати

$$\overline{D} = a_{11}(-A_{11}) + a_{21}(-A_{21}) + A_{31}(A_{31}) = -D$$

2.3. Визначник, що має два однакових рядка, або стовпця, дорівнює нулю.

Справді, якщо поміняти місцями ці два рядка (стовпця), одержимо визначник протилежного знаку – D. З іншого боку, при перестановці визначники не змінив знак, бо рядки однакові. Тому $-D = D$. Звідси, очевидно $D = 0$.

2.4. Спільний множник елементів будь-якого стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника.

2.5. Визначник дорівнює нулю, якщо усі елементи будь-якого стовпця (рядка) є нульовими.

2.6. Визначник також дорівнює нулю, якщо усі елементи будь-якого стовпця (рядка) пропорційні відповідним елементам другого стовпця (рядка).

2.7. Якщо кожний елемент стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то такий визначник може бути зображений як сума двох визначників.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Властивості (2.4) та (2.7) дозволяють виконати такі перетворення визначника, які, не змінюючи його значення, дозволяють привести його до більш зручного для обчислення вигляду.

Вправа 3. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23171 & 11214 \\ 5906 & 7723 & 3737 \end{vmatrix}$$

Безпосереднє обчислення цього визначника досить утруднене. Тому використаємо властивості (2.4) та (2.7). Віднімемо від елементів першого рядка помножені на 2 елементи другого, а від елементів другого рядка помножені на 3 елементи третього.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5906 & 7723 & 3737 \end{vmatrix}$$

Розкладаючи цей визначник по елементам першого стовпця, який має лише один нерівний нулю елемент.

$$\Delta = 5906 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5906$$

3. Розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Розв’язком системи (3.1) назвемо таку трійку чисел (x, y, z), що перетворює кожне з рівнянь (3.1) у тотожність.

Впровадимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

а також допоміжні визначники

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} b_1 & & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Послідовно множачи рівняння системи (3.1) на алгебраїчні доповнення $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{33}$ відповідних елементів a_{11}, a_{21}, a_{31} першого стовпця визначника і складаючи їх, одержимо

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + \\ &+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) \end{aligned}$$

іншими словами,

$$\Delta \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \Delta x \tag{3.4}$$

Аналогічно, використовуючи алгебраїчні доповнення елементів другого та третього стовпців визначника Δ_1, знайдемо

$$\begin{aligned} \Delta \cdot y = \Delta y \\ \Delta \cdot x = \Delta x \end{aligned} \tag{3.5}$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то з рівнянь (3.4) (3.5) дістанемо єдине системи (3.1)

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \tag{3.6}$$

Таким чином, маємо правило Крамера: Якщо визначник системи не дорівнює нулю, то розв’язок системи (3.1) єдиний і визначається формулами (3.6), в яких $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ визначається формулами (3.2), (3.3).

Можна довести, якщо визначник системи $\Delta = 0$, то система (3.1), або несумісна, якщо хоча б один з визначників $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ не дорівнює нулю, або має нескінченно багато розв'язків, якщо усі три визначника $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ дорівнюють нулю.

Вправа 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

4. Однорідні системи рівнянь

Назвемо однорідною систему рівнянь, у якої вільні члени дорівнюють нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Припустимо, що визначник системи (4.1) відрізняється від нуля. Тоді, в відповідності з правилом Крамера, маємо єдиний розв’язок системи (4.1) $x = y = z = 0$.

Якщо визначник системи Δ дорівнює нулю, тоді лінійна однорідна система (4.1) має нескінченно багато розв’язків і серед них є такі, що не дорівнюють нулю.

Розглянемо розв’язок системи (4.1), вважаючи що її визначник дорівнює нулю, але серед його мінорів є такі, що відрізняються від нуля.

Для визначеності будемо вважати, що від нуля відрізняються мінор

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Цього завжди можна досягти, переставляючи рівняння та змінюючи нумерацію невідомих.

В цьому випадку перші два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z, \end{cases}$$

а третє рівняння тотожно задовольняється.

Згідно з правилом Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Або, використовуючи властивість визначників (2.4), маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z, \qquad y = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z \qquad (4.2)$$

Розв'язок однорідної системи (4.1) у випадку, коли в ній лише одне незалежне рівняння, здійснюється таким чином. Два з трьох невідомих (наприклад x, y) залишаються довільними, а трете (Z) тотожно визначається з того єдиного рівняння, до якого зводиться система.

Вправа 5. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Отже, ця система має єдиний нульовий розв'язок

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Вправа 6. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Мінор цього визначника $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$ відрізняється від нуля. Отже, третє рівняння цієї системи є висновком двох перших. Розв'язуючи ці рівняння по формулам (4.2), дістаємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{3}{4}z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1}{4}z$$

Впроваджуючи $z = 4k$ (k - довільне число), маємо $x = -3k \quad y = k$

Вправа 7. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Усі мінори визначника Δ теж дорівнюють нулю. Система зводиться до одного рівняння, наприклад:

$$x + y - z = 0$$

Звідси розв'язком системи є $y = z - x,\ x, z$ можуть примати будь-які значення.

5. Системи лінійних рівнянь з багатьма невідомими

Розглянемо систему ***n*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (5.1)$$

Найпростішим методом розв'язання системи (5.1) – метод виключення, або як ще його називають, метод Гауса. Нехай, для визначеності, $a_{11} \neq 0$ (назвемо a_{11} головним елементом). Поділимо усі члени першого рівняння на a_{11}.

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{b_{11}}, \qquad (5.2)$$

$$\text{або} \quad x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$

Розглянемо довільне ***i*** – те рівняння системи (5.1)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i$$

Щоб виключити x_1 з цього рівняння (5.2) на a_{i1}, після чого віднімемо результат з рівняння (5.3)

Маємо

$$a_{i2}^{(1)}x_2 + \cdots a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}$$

Де

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ii} - a_{i1}\alpha_1 j, \quad b_i^{(1)} - b_i = b_1\alpha_i$$

Таким чином, дістаємо скорочену систему

$$\begin{gathered} a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{gathered} \qquad (5.4)$$

Якщо головний елемент цієї системи $a_{22}^{(1)} \neq 0$, у такий же спосіб можна виключити невідоме x_2, далі x_3 і т.д. Ця частина обчислень має назву прямого ходу метода Гауса. Для визначення невідомих $x_1, x_2, \cdots x_n$ розглянемо приведені рівняння

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= \beta_1 \\ x_2 + \cdots \alpha_{2n}^{(1)}x_n &= \beta_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \beta_n^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Звідси послідовно визначимо невідомі (зворотний хід)

$$\begin{aligned} & x_n = \beta_n^{(n-1)} \\ & x_{n-1} = \beta_n^{(n-2)} - \alpha_{n-1,n}^{(n-2)}x_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_1 - \beta_1 - \alpha_{1n}x_n - \alpha_{1n-1}x_{n-1} - \cdots \alpha_{12}x_2 \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Зауважимо, що зворотний хід (5.6) виконується без ділення.

Якщо протягом прямого ходу один з головних коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння системи (5.1) потрібно поміняти місцями належним чином.

Вправа 8. Розв'язати систему

$x_1+3x_2-2x_3=1$ з першого рівняння

$x+4x_2+x_3=-7$ $x_1=1-3x_2+2x_3$

$3x_1+10x_2-4x_3=-3$

Виключимо x_1 з другого та третього рівнянь

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1 \\ x_1+4x_2+x_3=-7 \\ x_1+\frac{10}{3}x_2-\frac{4}{3}x_3=-1 \end{cases}$$

Дістанемо скорочену систему (5.4)

$$\begin{cases} -x_2-3x_3=8 \\ -\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3=2 \end{cases}$$

з першого рівня

$$x_2=-3x_3-8$$

Виключимо x_2 з третього рівняння

$$\begin{cases} +x_2+3x_3=-8 \\ x_2+2x_3=-6 \end{cases}$$

Звідси $x_3=-2$

Виконуючи зворотній хід

$$x_2=-3x_3-8=-2$$
$$x_1=1-3x_2+2x_3=3$$

Вправа 9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

З першого рівняння

$$x_1 = 5 - 2x_2 + 4x_3$$

Виключимо x_1 з другого та третього рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_1 + \frac{8}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Віднімаючи друге та третє рівняння від першого, дістанемо скорочену систему.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 - \frac{9}{2}x_3 = 4 \\ \frac{2}{5}x_2 - \frac{18}{9}x_3 = \frac{22}{5} \end{cases}$$

Поділимо усі члени другого рівня на $\frac{1}{2}$

$$x_2 - 9x_3 = 8$$

Звідси

$$x_2 = 8 + 9x_3$$

Поділимо усі члени третього рівняння на $\frac{2}{5}$

$$x_2 - 9x_3 = 11$$

Скорочена система має вигляд

$$\begin{cases} x_2 - 9x_3 = 8 \\ x_2 - 9x_3 = 11 \end{cases}$$

Виключаючи x_2, дістанемо $0 \neq -3$. Тому система не має розв'язка.

При розв'язанні деяких задач, що належить до теорії обробки металом тиском, яка, в свою чергу є похідною від механіки деформованого твердого тіла, виникає необхідність розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь дуже високого порядку (десятки і сотні тисяч). Зокрема така необхідність виникає при використанні одного з найбільш ефективних методів – метода скінчених елементів (МСЕ).

Ці системи є симетричними, додатно означеними, розрідженими і мають стрічкову структуру.

Останнє означає, що невелика кількість елементів визначника даної системи відрізняється від нуля й при цьому ті елементи, що відрізняється від нуля, розміщені навколо головної діагоналі визначника так, що нагадують стрічку. В основі методів розв'язання таких систем лежить розглянутий вище метод Гауса. Особливості таких методів та їх специфіку можна вивчити по книзі (3).

6. Задачі для контрольних завдань

1. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix} a+c & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 686 & 126 \end{vmatrix}$

2. Розв'язати рівняння

а) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 4\sin & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

3. Розв'язати нерівність

а) $\begin{vmatrix} x^2-7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} < -1$; б) $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 5$

4. Розв'язати системи рівнянь, використовуючи правило Крамера

а) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$

5. Розв'язати однорідні системи рівнянь

а) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+2y+9z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x+4y+z=0 \\ x-6y+z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$

6. Розв'язати системи рівнянь, використовуючи правило Крамера

а) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-4x_3=-6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=5 \\ 6x_1+5x_2+3x_3=1 \end{cases}$

7. Розв'язати систему рівнянь будь-яким методом при усіх можливих значеннях параметру ***t***

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = t \\ tx + 5y - 18z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$

8. Визначити при яких значеннях a, b система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

а) має єдиний розв'язок;

б) не має розв'язків;

в) має нескінченну кількість розв'язків.

7. Індивідуальні домашні завдання (ІДЗ)

ІДЗ 1. Для поданого визначника Δ знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{i2}, a_{3j}. Обчислити визначник Δ

1.1
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$i = 2,\ j = 2$

1.2
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$i = 4,\ j = 4$

1.3
$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$i = 1,\ j = 2$

1.4

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=4$

1.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=1$

1.6

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=1$

1.7

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

1.8

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=4$

1.9

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=3$

1.10

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=2$

1.11

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=3$

1.12

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & -7 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & -3 \\ 7 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=1$

1.13

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=3$

1.14

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=4$

1.15

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=3$

1.16

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=2$

1.17

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

1.18

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 & -5 \\ 18 & 7 & 8 & 2 \\ -5 & 5 & -7 & -3 \\ -2 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=4$

1.19

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

$i=1,\ j=3$

1.20

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=3$

1.21

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=4$

1.22

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

1.23

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=1$

1.24

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=2$

1.25

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=2,\ j=4$

1.26

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=4,\ j=2$

1.27

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=3,\ j=2$

ІДЗ 2. Розв’язати систему: а) за допомогою формули Крамера;
б) за допомогою метода Гауса.

2.1

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -9 \\ 8x + 3y + 5z = -13 \\ 2x + 5y - z = -5 \end{cases}$$

2.2

$$\begin{cases} x + 4y - 5z = 8 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

2.3

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 12y - 2z = -1 \\ 4x + 9y - 2z = 2 \end{cases}$$

2.4

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 18 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ 3x + 5y - 7z = 12 \end{cases}$$

2.5

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - 5y + 4z = 2 \\ 2x - 5y + 11z = 3 \end{cases}$$

2.6

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \\ 5x + 6y - 7z = 0 \end{cases}$$

2.7

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -6 \end{cases}$$

2.8

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5z = 2 \\ x + y + 4z = 5 \\ 6x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

2.9

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

2.10

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

2.11

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

2.12

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

2.13

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.14

$$\begin{cases} 7x + 4y - z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -10 \end{cases}$$

2.15

$$\begin{cases} x + 4y - z = -9 \\ 4x - y + 5z = -2 \\ 3y - 7z = -6 \end{cases}$$

2.16

$$\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 3x + 2y + 5z = -14 \\ x - 3y + 4z = -19 \end{cases}$$

2.17

$$\begin{cases} x + 5y - 6z = -15 \\ 3x + y + 4z = 13 \\ 2x - 5y + z = 9 \end{cases}$$

2.18

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

2.19

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 12 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

2.20

$$\begin{cases} 4x + y + 4z = 19 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

2.21

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

2.22

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + y + z = 11 \\ 4x + y + 4z = 22 \end{cases}$$

2.23

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -9 \\ x + 5y + z = 20 \\ 3x + 4y + 2z = 15 \end{cases}$$

2.24

$$\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8 \\ 3x + y + z = -4 \\ x - 4y - 2z = -9 \end{cases}$$

2.25

$$\begin{cases} 3x - y + z = -11 \\ 5x + y + 2z = 8 \\ x + 5y + 4z = 16 \end{cases}$$

2.26

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

ІДЗ 3. Розв’язати однорідні системи лінійних рівнянь

3.1

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 9z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

3.2

$$\begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ x + 6y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 6y + 5z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

3.3

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$$

3.4

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

3.5

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3.6

$$\begin{cases} 5x-3y+4z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+7y-3z=0 \\ 3x-5y+z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \end{cases}$$

3.7

$$\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 2x-4y+z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x+5y-4z=0 \\ x+y-z=0 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$$

3.8

$$\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x-6y+z=0 \\ 4x+5y=0 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$$

3.9

$$\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ 5x+4y-6z=0 \\ 3x+2y-5z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x+y-3z=0 \\ x+5y+z=0 \\ 4x-7y+2z=0 \end{cases}$$

3.10

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-3y+4z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases}$$

3.11

$$\begin{cases} x-3y-4z=0 \\ 5x-8y-2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 2x-4y+z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \end{cases}$$

3.12

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 4x-y-2z=0 \end{cases}$$

3.13

$$\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+5z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$$

3.14

$$\begin{cases} 4x-y+10z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-2y+5z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$$

3.15

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y+z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 5x+2y-3z=0 \end{cases}$$

3.16

$$\begin{cases} 2x+5y+z=0 \\ 4x+6y+3z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y-4z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

3.17

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x \quad\quad + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + 4z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 7x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

3.18

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 5x + y - 4z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

3.19

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y - 2z = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

3.20

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

3.21

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

3.22

$$\begin{cases} 2x-3y-7z=0 \\ 3x+2y-6z=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 6x+5y-4z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases}$$

3.23

$$\begin{cases} x-5y+2z=0 \\ 3x+4y-z=0 \\ 4x-y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases}$$

3.24

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z=0 \\ 4x-2y+5z=0 \\ 3x+2y \qquad =0 \end{cases}$$

3.25

$$\begin{cases} 7x-2y-z=0 \\ 4x-3y-5z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x+3y-z=0 \\ x+y+5z=0 \end{cases}$$

3.26

$$\begin{cases} x-8y+7z=0 \\ 3x+5y-4z=0 \\ 4x-3y+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x+3y+4z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$