МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

Составители :
В.Н. Астахов
Г.С. Буланов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Методические указания,
индивидуальные и тестовые задания
для студентов-заочников
инженерно-экономических специальностей**

Утверждено
на заседании метод совета
ДГМА

Протокол № от

Краматорск 2006

УДК 517

Высшая математика: Методические указания, индивидуальные и
тестовые задания для студентов-заочников инженерно-экономических
специальностей /Сост. В.Н. Астахов, Г.С. Буланов/ – Краматорск:
ДГМА, 2006. – 48 с.

Данные методические указания содержат в кратком виде основной теоретический материал по курсу высшей математики для студентов экономического направления. Приведены образцы решения контрольных заданий. Указаны тематика и примеры заданий для рейтингового тестирования модулей.

Составители: В.Н. Астахов, доц.,
Г.С. Буланов, доц.

Отв. за выпуск: Шевцов С.А.

Выбор варианта контрольных заданий

Комплект контрольных заданий, которые должен самостоятельно выполнить студент-заочник данной специальности, объявляет лектор на установочной сессии.

Выбор варианта каждого контрольного задания производится в соответствии с таблицей:

Две последние цифры в зачётке (студ. билете)	01	02	03	. . .	23	24	25
	26	27	28	. . .	48	49	50
	51	52	53	. . .	73	74	75
	76	77	78	. . .	98	99	100
Номер варианта	01	02	03	. . .	23	24	25

Например, если Ваш вариант 17, то Вам предстоит решать задания с номерами 1.17, 2.17 и т.д.

Методические рекомендации к контрольным заданиям

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. В помощь заочникам ДГМА организует чтение лекций и практические занятия.

Приступая к изучению курса высшей математики студент должен освоить из учебников [1] - § 5 – 11, гл. I, гл. III, гл. IV (аналитическая геометрия на плоскости), гл. II, гл. IV (аналитическая геометрия в пространстве); [2] - § 1 – 9, гл. II; § 2 – 24, гл.III; § 2 – 10, гл.V; [4] - главы I, II, III. В пособии [3] имеется большое число решенных задач, с которыми студенту рекомендуется познакомиться при изучении соответствующего материала.

Ниже мы приведем формулы и понятия, необходимые для решения основных видов задач контрольных заданий. Все приложения математики, связанные с постановкой и решением экономических задач по линейной алгебре и математическому анализу, также приведены в данных рекомендациях.

Основные формулы и понятия «Аналитической геометрии»

Длина отрезка находится по формуле

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\quad ,$$

где (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) - координаты данных точек.

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\quad ,$$

где $M(x_0, y_0, z_0)$ - точка на прямой, а m,n,p - координаты вектора $\bar{l}$.

Угол между прямыми находим как угол между направляющими векторами по формуле

$$\cos\left(\bar{l}_1,\bar{l}_2\right)=\frac{\bar{l}_1\cdot\bar{l}_2}{\left|\bar{l}_1\right|\left|\bar{l}_2\right|}$$

где $\bar{l}_1\cdot\bar{l}_2$ - скалярное произведение векторов;

$\left|\bar{l}_1\right|\left|\bar{l}_2\right|$ - произведение длин направляющих векторов.

Скалярное произведение векторов:

$\bar{a}=\left(a_x, a_y, a_z\right)\qquad \bar{b}=\left(b_x, b_y, b_z\right)$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$.

Формула длины вектора:

$\bar{a}=\left(a_x, a_y, a_z\right)\qquad \left|\bar{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью

$Ax+By+Cz+D=0$: $\qquad \sin\varphi=\dfrac{\bar{l}\cdot\bar{n}}{\left|\bar{l}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|}$,

где $\bar{l}=(m,n,p)$; $\quad \bar{n}=(A,B,C)$.

Уравнение плоскости через три точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов, выходящих из одной вершины:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Прямая на плоскости определена следующими параметрами:

а) двумя точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

б) точкой и вектором нормали -

$$M_0(x_0, y_0); \quad \overline{n} = (A, B); \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

в) точкой и направляющим вектором -

$$M_0(x_0, y_0); \quad \overline{l} = (m, n); \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n};$$

г) угловым коэффициентом k и точкой -

$$M_0(x_0, y_0); \quad y - y_0 = k(x - x_0).$$

д) отрезками, которые отсекает прямая от осей координат (a,b) -

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Все уравнения прямой приводятся к виду $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой на плоскости.

Условие параллельности двух прямых - $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых -

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

Основные формулы и понятия «Математического анализа»

При вычислении пределов часто используют следующие соотношения эквивалентностей:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \sim a_0x^n \quad - \text{ при } x\to\infty,$$

$$\sqrt[k]{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n} \sim \sqrt[k]{a_0x^n}$$ - при $x\to\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел и следствия из него

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ - второй замечательный предел и следствия из него

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)},$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \qquad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a, \qquad (1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина;

$\beta(x)$ - бесконечно большая величина.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0, если выполняется условие

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий, то x_0 называется точкой разрыва:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$- предел слева; $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$- предел справа.

Пример 1. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют.

$$y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x < 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Решение. На каждом промежутке изменения независимой переменной функция непрерывна. Разрыв может быть только в точках «стыка». Проверим условие непрерывности в точках $x = 0$, $x = 1$.

$x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} (3x + 1) = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x^2 + 1) = 1$,

$$f(x_0) = f(0) = (x^2 + 1)\Big|_{x=0} = 1.$$

В точке $x = 0$ выполняется условие непрерывности.

$x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x^2 + 1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} 0 = 0$,

$$f(x_0) = f(1) = 0.$$

Пределы слева и справа конечны, но не равны между собой. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва первого рода.

Функции нескольких переменных

При изучении этой темы рекомендуется проводить аналогию с уже известными соответствующими фактами дифференциального исчисления функций одной переменной. Вместе с тем необходимо представлять, какие особенности возникают в трактовке того или иного понятия при переходе от функции одной переменной к многофакторной зависимости.

Приведем примеры некоторых функций, встречающихся в экономических задачах:

1 Функция Кобба–Дугласа - $Z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, где Z – величина общественного продукта, x – затраты труда, y – объем производственных фондов.

2 Издержки производства данного изделия при данной технике производства есть функция материальных затрат **x** и расходов на оплату рабочей силы *y*: $Z = f(x, y)$.

3 Пусть предметами потребления будут два товара A и B, цены которых P_A и P_B соответственно. Если цены других товаров постоянны,

а доходы потребителей и структура потребностей не изменяются, то спрос и предложение каждого из товаров зависит от их цен:

а) $Z_A = f_1(P_A, P_B)$ — спрос на товар А;

б) $Z_B = f_2(P_A, P_B)$ — спрос на товар В;

в) $Z_C = f_3(P_A, P_B)$ — предложение товара А.

4 Функция затрат на приобретение товаров x и y $Z = f(x, y)$.

Понятие частной производной также находит применение в экономике, например, расчет эластичности (см. далее).

Основные математические модели в экономике

Непрерывное начисление процентов

Пусть начальный вклад в банк составил Q_H денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно P % годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через t лет. Размер вклада ежегодно увеличивается в $(1+\frac{P}{100})$ раз, то есть $Q_1 = Q_н\left(1+\frac{P}{100}\right)$, $Q_2 = Q_н\left(1+\frac{P}{100}\right)^2$, …

$Q_t = Q_н\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$.

Пусть процент начисляют n раз в году, тогда за $\frac{1}{n}$-ю часть года процент начисления составит $\frac{P}{n}$, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит:

$$Q_t = Q_н\left(1+\frac{P}{100\,n}\right)^{nt}.$$

Примечание. При $n\to\infty$ процент начисляется непрерывно, при n = 2 - каждое полугодие, n = 4 - ежеквартально, n = 365 - каждый день.

Тогда при непрерывном начислении процентов

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_н\left(1+\frac{P}{100\cdot n}\right)^{nt}\right] = Q_н e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Pnt}{100n}} = Q_н e^{\frac{Pt}{100}}.$$

Это есть экспоненциальный закон роста (при p>0) или убывания (при p<0). На практике в финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется очень редко. Оно эффективно при анализе серьёзных финансовых проблем, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

Производительность труда

Пусть U(t) - количество произведённой продукции U за время t. Необходимо найти производительность труда. В момент от t_0 до $t_0+\Delta t$ количество произведённой продукции изменится от $U_0 = U(t_0)$ до $U_0 + \Delta U$. Тогда средняя производительность труда за период Δt

$z_{ср} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ и $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$ - производительность труда в момент t_0 .

Примечания:

1 Скорость изменения производительности – $z'(t)$.

2 Логарифмическую производную $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ называют относительной скоростью изменения функции или темпом изменения функции. В частности, $(\ln z)' = \frac{z'}{z}$ – темп изменения производительности.

Средние и предельные издержки производства

Пусть x – количество выпускаемой продукции; y – издержки производства. Если Δx – прирост продукции, а Δy – приращение издержек производства, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Тогда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ – предельные издержки производства.

Аналогично можно дать понятие следующим экономическим показателям**:** предельная выручка**,** предельный доход и др**.** Предельные издержки приближённо характеризуют дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции**.**

Эластичность и её применение в экономике

Одним из важнейших применений дифференциального исчисления в экономике является введение с помощью производной понятия эластичности**.** Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит.

Эластичностью функции y = f(x) называется предел отношения относительных изменений переменных y и x :

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{f'(x)x}{f(x)} .$$

Эластичность спроса по цене

$$E_p(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

показывает относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Эластичность спроса по доходу

$$E_I(q) = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q} .$$

Частная эластичность. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Величины $E_x(z)$, $E_y(z)$, которые определяются формулами

$$E_x(z) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{z}, \qquad E_y(z) = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{z}$$

называются частными эластичностями функции $z = f(x, y)$ относительно переменных x и y. Частная эластичность $E_x(z)$ приблизительно означает процент роста (или снижения) функции z, если аргумент x увеличивается на 1%, а аргумент y остается постоянным.

Например, $E_{P_B}(z_A)$ – частная эластичность спроса на товар A относительно цены P_B, приблизительно означает процент роста (снижения) спроса на товар A, если цена товара B возрастает на 1%, а цена товара A остается неизменной.

Пример 2. Опытным путем установлены функции спроса S и предложения П:

$$S = \frac{P+8}{P+2}, \qquad П = P + 0.5 ,$$

где S и П–количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени; P– цена товара.

Найти:
а) равновесную цену, то есть цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются;
б) эластичность спроса и предложения для этой цены;
в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение. Выполним расчет по пунктам задания:

а) Равновесную цену найдем из уравнения $\frac{P+8}{P+2} = P + 0.5$, получим $P = 2$.

б) По формуле частной эластичноости находим

$$E_p(S) = \frac{6P}{(P+2)(P+8)}, \qquad E_p(П) = \frac{2P}{2P+1}.$$

Для равновесной цены $P = 2$ вычисляем частные эластичности спроса - $E_p(S)$=-0.3 и предложения - Ep(П)=0.8. Так как получено |Ep(S)|<1 и |Ep(П)| < 1, то спрос и предложение не эластичны относительно цены. Это означает что изменение цены не приведёт к резкому изменению спроса и предложения.
При увеличении цены P на 1% спрос уменьшается на 0,3%, а предложение увеличиться на 0.8%.
в) При увеличении цены P на 5% от равновесной спрос уменьшается на 1.5%, следовательно доход возрастает на 3.5%.

Коэффициент Джини

Рассмотрим зависимость y – процента доходов населения от процента x, имеющего эти доходы населения, т.е., функцию $y = f(x)$.
С помощью функции $f(x)$ (кривая Лоренца) можно оценить степень неравенства в распределении доходов населения.
При равномерном распределении доходов кривая $f(x)$ вырождается в биссектрису OA. Площадь сегмента OfA, отнесенная к площади треугольника OAB называется **коэффициентом Джини**. Этот коэффициент характеризует степень неравенства в распределении доходов населения:

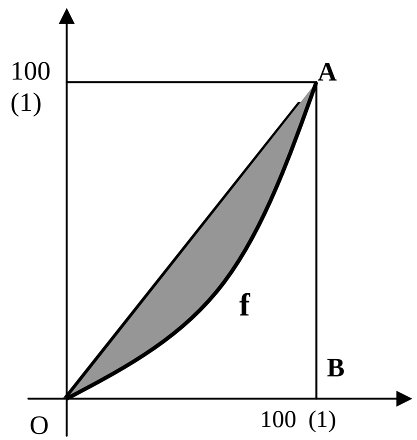

Рисунок 1

если коэффициент Джини не превышает 0.33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному;

если коэффициент Джини находится в пределах от 0.33 до 0.67, то распределение доходов считают неравномерным;

если коэффициент Джини более 0.67, то распределение доходов можно считать существенно неравномерным.

Объем выпускаемой продукции

Известно, что производительность труда в течение рабочего дня изменяется. Пусть изменение производительности труда определяется функцией $f(t)$, где t – отрезок времени, отсчитываемый от начала рабочего дня, а $f(t)$ – производительность труда в данный момент. Тогда величина

$$U = \int_0^T f(t)dt$$

есть объем выпускаемой продукции за время $[0, T]$.

Часто при решении практических задач приходится находить средние значения функции, например, средняя производительность труда, средние издержки производства, средняя мощность двигателя и т.д. В этих случаях используют теорему о среднем значении (интеграла).

Теорема о среднем. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое значение $c \in [a, b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = L \cdot$$

Число L называется средним значением функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Дисконтированный доход

При изучении экономической эффективности капитальных вложений встречаются задачи, связанные с определением начальной суммы по ее конечной величине, полученной через t лет при годовом проценте Р (процентная ставка). Такая задача называется дисконтированием. Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ при удельной норме процента, равной $i=\frac{P}{100}$. Процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход К за время Т вычисляется по формуле

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt.$$

Если базовое капиталовложение составляет N (усл. ед.) и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на m (усл. ед.), то

$$f(t)=N+mt.$$

Издержки производства

Закономерность, определяющая зависимость между издержками производства определенного товара и объемом производства, называется функцией издержек. Если через К обозначить суммарные издержки производства х единиц продукта, то функцию суммарных издержек можно записать в виде $K=f(x)$. Функция

$$\Pi=\frac{K}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

называется функцией средних или условных издержек.

Пусть $K=f(x)$ — переменные издержки производства. Средние издержки производства, если объем производства составляет от a до b единиц вычисляются по теореме о среднем (см. п. ”Объем выпускаемой продукции”).

Прогнозирование экономических показателей

Прежде чем рассматривать какие-либо методы прогнозирования необходимо выяснить, чего от них можно ожидать. Ввиду того, что прогнозы основываются на информации о поведении объекта в прошлом, они всегда будут иметь ошибку. Поэтому все математические подходы в прогнозировании основываются на идее минимизации этих ошибок. Так как ошибки могут быть как положительными, так и отрицательными, то обычная сумма этих ошибок не может служить удовлетворительным критерием их малости (их обычная сумма будет стремиться к нулю). Более адекватная мера качества прогноза – сумма квадратов ошибок. Любой прогноз характеризуется двумя основными показателями:

первый – значение прогнозируемого показателя на будущий момент времени;

второй – отклонение прогноза, которое характеризует разброс прогнозируемого значения вокруг реального.

Обычным методом прогнозирования будущего значения показателя является усреднение n его прошлых значений. Формально его можно определить формулой

$$U_t = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{t-n+1} d_i$$

В частности, при $n = 6$ ожидаемое значение спроса в следующем месяце равно среднему арифметическому спросов последних шести месяцев:

$$U_{t+1} = \frac{1}{6}\left(d_t + d_{t-1} + d_{t-2} + d_{t-3} + d_{t-4} + d_{t-5}\right)$$

Эта формула имеет ряд особенностей:

1 Для того, чтобы начать процесс прогнозирования необходимо иметь в запасе $n-1$ прошлых значений наблюдений.

2 Всем данным, входящим в процесс прогнозирования, присваивается одинаковый вес $\left(1/n\right)$, а остальным – нулевой вес. При этом более свежие данные имеют тот же вес, что и старые, вместе с тем понятно, что свежие данные имеют более важное значение и поэтому должны иметь больший вес.

Для устранения этого недостатка можно предложить процедуру усреднения с разными весами:

$$U_t = \frac{1}{2}d_t + \frac{1}{4}d_{t-1} + \frac{3}{16}d_{t-2} + \frac{1}{16}d_{t-3},$$

или

$$U_t = 0{,}4d_t + 0{,}3d_{t-1} + 0{,}2d_{t-2} + 0{,}1d_{t-3}.$$

Важным обстоятельством является лишь то, что сумма этих весов равна единице (необходимое условие того, чтобы соответствующие величины были средними значениями).

3 Чувствительность прогноза обратно пропорциональна n — числу точек, входящих в среднее. Отмеченные недостатки устраняются в схеме, если система весов экспоненциальна.

Можно рассматривать ряд весов, убывающих во времени по экспоненциальному закону. Определим этот ряд следующим образом:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + \ldots + \alpha(1-\alpha)^n + \ldots$$

Тогда прогноз U_t можно записать в виде

$$U_t = \alpha d_t + (1-\alpha)U_{t-1}.$$

Это и есть основное уравнение, определяющее простое экспоненциально взвешенное среднее (э.в.с.). Можно отметить ряд преимуществ экспоненциально взвешенного среднего перед предыдущими формулами прогнозирования:

1 Для построения прогноза по э.в.с. необходимо задать лишь начальную оценку прогноза.

2 В э.в.с. значения весов убывают со временем, поэтому здесь нет точки, на которой веса обрываются.

3 Для вычисления э.в.с. требуются лишь два значения: прошлое значение среднего (U_{t-1}) и текущее значение (d_t).

Наиболее типичные значения, используемые в области экономического и промышленного прогнозирования, лежат в пределах от 0.05 до 0.3. На практике не рекомендуется брать значения ниже 0.05, как и выше 0.3.

В решении практических задач значение α находят исходя из минимума суммы квадратов ошибок. Основная причина зависимости меры разброса от суммы квадратов ошибок (а не просто от суммы ошибок) в том, что возведение в квадрат делает результат положительным. Для большинства прогнозов сумма ошибок стремится к нулю. Поэтому сумма ошибок не может служить удовлетворительной мерой разброса.

Решение типовых заданий

Пример 3. Известны данные спроса на продукцию в некоторые месяцы:

месяц	3	5	11
спрос	47	63	15

Оценить путем интерполирования методом Лагранжа спрос в промежуточные месяцы. Построить на одном чертеже графики вспомогательных полиномов, а на другом – интерполяционного полинома Лагранжа.

Решение. Введем обозначения

$$x_1 = 3,\quad x_2 = 5,\quad x_3 = 11,\qquad y_1 = 47,\quad y_2 = 63,\quad y_3 = 15$$

и вычислим вспомогательные полиномы

$$Q_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x-5)(x-11)}{(-2)(-8)} = \frac{x^2 - 16x + 55}{16},$$

$$Q_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x-3)(x-11)}{2\cdot(-6)} = -\frac{x^2 - 14x + 33}{12},$$

$$Q_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x-3)(x-5)}{8\cdot 6} = \frac{x^2 - 8x + 15}{48}.$$

Запишем и упростим полином Лагранжа:

$$L(x) = y_1Q_1(x) + y_2Q_2(x) + y_3Q_3(x) = 47\frac{x^2 - 16x + 55}{16} - 63\frac{x^2 - 14x + 33}{12} +$$

$$+15\frac{x^2 - 8x + 15}{48} = \frac{141(x^2 - 16x + 55) - 252(x^2 - 14x + 33) + 15(x^2 - 8x + 15)}{48} =$$

$$= \frac{141 - 252 + 15}{48}x^2 + \frac{-141\cdot 16 + 252\cdot 14 - 15\cdot 8}{48}x + \frac{141\cdot 55 - 252\cdot 33 + 15\cdot 15}{48} =$$

$$= \frac{-96}{48}x^2 + \frac{1152}{48}x + \frac{-336}{48} = -2x^2 + 24x - 7.$$

Проверка:

$$L(3) = -2\cdot 3^2 + 24\cdot 3 - 7 = -18 + 72 - 7 = 47,$$

$$L(5) = -2\cdot 5^2 + 24\cdot 5 - 7 = -50 + 120 - 7 = 63,$$

$$L(11) = -2\cdot 11^2 + 24\cdot 11 - 7 = -242 + 264 - 7 = 15.$$

Вычислим таблицы полиномов по месяцам

x	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$L(x)$
3	1	0	0	47
4	0.4375	0.5833	-0.0208	57
5	0	1	0	63
6	-0.3125	1.25	0.0625	65
7	-0.5	1.333	0.1667	63
8	-0.5625	1.25	0.3125	57
9	-0.5	1	0.5	47
10	-0.3125	0.5833	0.7209	33
11	0	0	1	15

Таким образом, в промежуточные месяцы получаем следующие оценки спроса на продукцию:

Месяц	4	6	7	8	9	10
Спрос	57	65	63	57	47	33

Построим графики полиномов, выбирая подходящий масштаб оси ординат.

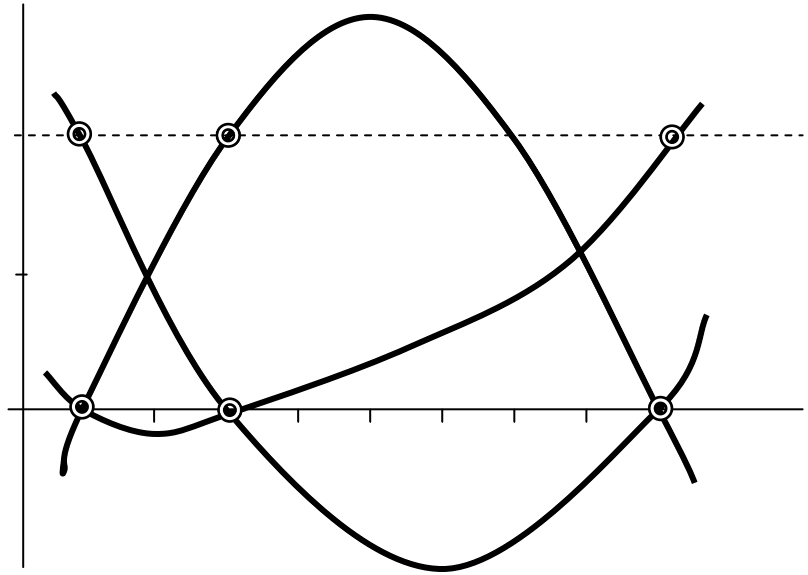

Рисунок 2. Вспомогательные полиномы

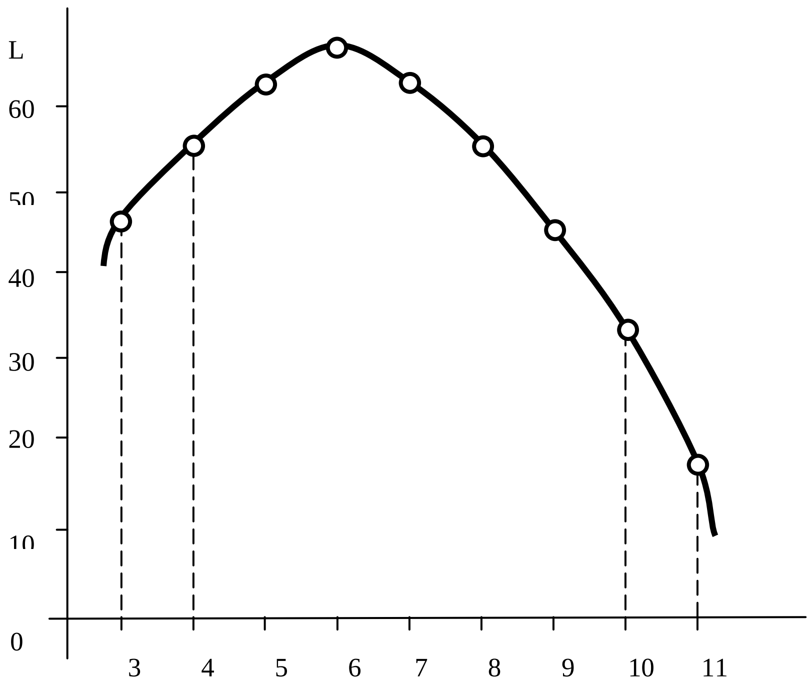

Рисунок 3. Интерполяционный полином

Пример 4. Капитал в 7 млн. грн. может быть размещен в банке под 40% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 250%. Издержки задаются квадратичной зависимостью $\frac{x^2}{20}$. Прибыль облагается налогом в p%. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, чем чистое размещение капитала в банке?

Решение. Весь капитал 7 (млн. грн.) разделим на части: x(млн) – в производство, (7 – x) – в банк под проценты. Тогда через год из банка можно взять:

$$(7-x)+\frac{(7-x)\cdot 40}{100}=1.4(7-x)\,.$$

Доход от производства через год составит:

$$x + x \cdot \frac{250}{100} = 3.5x.$$

Прибыль от вложения в производство:

$$3.5x - \frac{x^2}{20}.$$

Чистая прибыль окажется равной:

$$3.5x - \frac{x^2}{20} - (3.5x - \frac{x^2}{20})\frac{p}{100} = (3.5 - \frac{x^2}{20})(1 - i), \quad \text{где } i = \frac{p}{100}.$$

Через год общая сумма составит:

$$S(x) = 1{,}4 \cdot (7 - x) + (3.5x - \frac{x^2}{20})(1 - i).$$

Необходимо найти максимальное значение этой функции на отрезке [0; 7]. Необхо-димое условие экстремума $(S'(x) = 0)$ дает критическую точку $x_o = 35 - \frac{14}{1-i}$. Так как $x_o > 0$, то $i < 0.6$ или $p < 60\%$.

Достаточное условие экстремума $S''(x_o) < 0$ (так как $i < 1$).

Ответ: $p < 60\%$.

Пример 5. Кривая Лоренца задана уравнением $y = \frac{2}{2-x} - 1$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение.

$$K = \frac{S_{OAf}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{S_{\Delta OAB} - S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - 2S_{OfAB},$$

$$S_{OfAB} = \int_0^1 \left(\frac{2}{2-x} - 1\right)dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{2-x} - \int_0^1 dx = -2\ln|2-x|\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 =$$

$$= -2(\ln 1 - \ln 2) - 1 = 2\ln 2 - 1 \approx 2 \cdot 0.69 - 1 = 0.38.$$

$$K = 1 - 2 \cdot 0.38 = 1 - 0.76 = 0.24.$$

Так как $K < 0.33$, то распределение доходов населения данной страны близко к равномерному.

Пример 6. Дан динамический ряд. Первые 8 элементов – обучающая выборка, оставшиеся – экзаменующая. Составить прогноз по обучающей выборке и сравнить результаты с экзаменующей выборкой. Расчеты иллюстрировать графичеки.

n	1	2	3	4	5	6	7
u	18	16	15	15	14	13	12

n	8	9	10	11	12	13	14
u	11	12	14	13	15	16	17

Решение. Рассчитываем прогнозы показателей по формуле

$$\widehat{U}_{n+1} = (1-\alpha)U_n + \alpha\widehat{U}_n.$$

1) Рассчитываем прогноз для $\alpha = 0.1$:

$\widehat{U}_2 = 18$,

$\widehat{U}_3 = 0.9 \cdot 16 + 0.1 \cdot 18 = 16.2$,

$\widehat{U}_4 = 0.9 \cdot 15 + 0.1 \cdot 16.2 = 15.12$,

$\widehat{U}_5 = 0.9 \cdot 15 + 0.1 \cdot 15.12 = 15.012$,

$\widehat{U}_6 = 0.9 \cdot 14 + 0.1 \cdot 15.012 = 14.1$,

$\widehat{U}_7 = 0.9 \cdot 13 + 0.1 \cdot 14.1 = 13.11$,

$\widehat{U}_8 = 0.9 \cdot 12 + 0.1 \cdot 13.11 = 12.11$.

2) Рассчитываем прогноз для $\alpha = 0.2$:

$\widehat{U}_2 = 18$,

$\widehat{U}_3 = 0.8 \cdot 16 + 0.2 \cdot 18 = 16.4$,

$\widehat{U}_4 = 0.8 \cdot 15 + 0.2 \cdot 16.4 = 15.28$,

$\widehat{U}_5 = 0.8 \cdot 15 + 0.2 \cdot 15.28 = 15.1$,

$\widehat{U}_6 = 0.8 \cdot 14 + 0.2 \cdot 15.1 = 14.22$,

$\widehat{U}_7 = 0.8 \cdot 13 + 0.2 \cdot 14.22 = 13.244$,

$\widehat{U}_8 = 0.8 \cdot 12 + 0.2 \cdot 13.244 = 12.25$.

3) Рассчитываем прогноз для $\alpha = 0.3$:

$\widehat{U}_2 = 18$,

$\widehat{U}_3 = 0.7 \cdot 16 + 0.3 \cdot 18 = 16.6$,

$\widehat{U}_4 = 0.7 \cdot 15 + 0.3 \cdot 16.6 = 15.48$,

$\widehat{U}_5 = 0.7 \cdot 15 + 0.3 \cdot 15.48 = 15.14$,

$\widehat{U}_6 = 0.7 \cdot 14 + 0.3 \cdot 15.14 = 14.342$,

$\widehat{U}_7 = 0.7 \cdot 13 + 0.3 \cdot 14.342 = 13.4$,

$\widehat{U}_8 = 0.7 \cdot 12 + 0.3 \cdot 13.4 = 12.42$.

4) Рассчитываем прогноз для $\alpha = 0.4$:

$\widehat{U}_2 = 18$,

$\widehat{U}_3 = 0.6 \cdot 16 + 0.4 \cdot 18 = 16.8$,

$\widehat{U}_4 = 0.6 \cdot 15 + 0.4 \cdot 16.8 = 15.72$,

$\widehat{U}_5 = 0.6 \cdot 15 + 0.4 \cdot 15.72 = 15.28$,

$\widehat{U}_6 = 0.6 \cdot 14 + 0.4 \cdot 15.28 = 14.5$,

$\widehat{U}_7 = 0.6 \cdot 13 + 0.4 \cdot 14.5 = 13.6$,

$\widehat{U}_8 = 0.6 \cdot 12 + 0.4 \cdot 13.6 = 12.64$.

5) Рассчитываем прогноз для $\alpha = 0.5$:

$\widehat{U}_2 = 18$,

$\widehat{U}_3 = 0.5 \cdot 16 + 0.5 \cdot 18 = 17$,

$\widehat{U}_4 = 0.5 \cdot 15 + 0.5 \cdot 17 = 16$,

$\widehat{U}_5 = 0.5 \cdot 15 + 0.5 \cdot 16 = 15.5$,

$\widehat{U}_6 = 0.5 \cdot 14 + 0.5 \cdot 15.5 = 14.75$,

$\widehat{U}_7 = 0.5 \cdot 13 + 0.5 \cdot 14.75 = 13.875$,

$\widehat{U}_8 = 0.5 \cdot 12 + 0.5 \cdot 13.875 = 12.94$.

Полученные результаты записываем в таблицу:

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	D
u	18	16	15	15	14	13	12	11	
$\alpha = 0.1$		$\hat{U}$	16.2	15.12	15.01	14.1	13.11	12.11	1.026
		$U - \hat{U}$	-1.2	-0.12	2	-1.1	-1.11	-1.11	
$\alpha = 0.2$		$\hat{U}$	16.4	15.28	15.14	14.22	13.24	12.25	1.294
		$U - \hat{U}$	-1.4	-0.28	-1.14	-1.22	4	-1.25	
$\alpha = 0.3$		$\hat{U}$	16.6	15.48	15.14	14.34	13.14	12.42	1.64
		$U - \hat{U}$	-1.6	-0.48	-1.14	-1.34	-1.4	-1.42	
$\alpha = 0.4$		$\hat{U}$	16.8	15.72	15.28	15.4	13.6	12.64	2.148
		$U - \hat{U}$	-1.8	-0.72	-1.28	-1.5	-1.6	-1.64	
$\alpha = 0.5$		$\hat{U}$	17	16	15.5	14.75	13.87	12.94	2.928
		$U - \hat{U}$	-2	-1	-1.5	-1.75	5	-1.94	

Вычисляем дисперсию :

$$D = \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{8}(U_n - \hat{U}_n)^2$$

$D_1 = (1.44 + 0.0144 + 1.024 + 1.21 + 1.23 + 1.23) / 6 = 1.026$,

$D_2 = 1.294$, $D_3 = 1.64$, $D_4 = 2.148$, $D_5 = 2.928$.

Наименьшая дисперсия при $\alpha = 0.1$.

Произведём расчёт по экзаменующей выборке:

$\hat{U}_8 = 12.11$,

$\hat{U}_9 = 0.9 \cdot 11 + 0.1 \cdot 12.1 = 11.11$,

$\hat{U}_{10} = 0.9 \cdot 12 + 0.1 \cdot 11.11 = 11.9$,

$\hat{U}_{11} = 0.9 \cdot 14 + 0.1 \cdot 11.9 = 13.79$,

$\hat{U}_{12} = 0.9 \cdot 13 + 0.1 \cdot 13.79 = 13.079$,

$$\hat{U}_{13} = 0.9 \cdot 15 + 0.1 \cdot 13.79 = 14.8,$$

$$\hat{U}_{14} = 0.9 \cdot 16 + 0.1 \cdot 14.8 = 15.88.$$

Полученные результаты записываем в таблицу :

Таблица 3

n	U_n	$\hat{U}_n$	$U_n - \hat{U}_n$
8	11	12.11	-1.11
9	12	11.11	0.89
10	14	11.9	2.1
11	13	13.79	-0.79
12	15	13.079	1.921
13	16	14.8	1.2
14	17	15.88	1.22

Изобразим графически результаты прогнозирования :

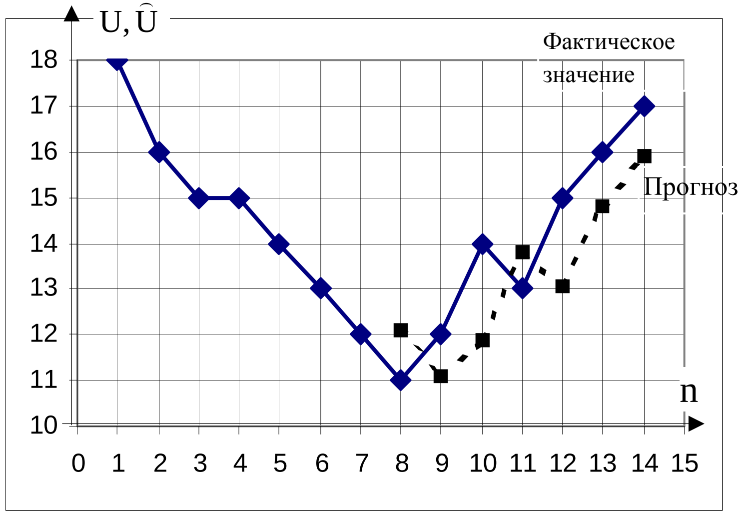

Рисунок 4

Вывод. При построении графика прогнозируемых и фактических значений экзаменующей и обучающей выборки заметим, что прогнозируемые значения почти совпадают с фактическими. Следовательно, можно применять метод прогнозирования, учитывая небольшую погрешность.

Контрольные задания

Задания 1.1 - 1.13. Предприятие выпускает изделия трёх наименований (1, 2, 3), для производства которых используются три вида сырья (A, B, C). Данные о расходе сырья каждого вида на одну единицу продукции и количестве сырья каждого вида приведены в таблицах. Какое количество продукции каждого наименования необходимо выпустить, чтобы израсходовать полностью запасы сырья ?

1.1

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	4	3	4	34
B	4	2	3	26
C	3	2	3	24

1.2

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	4	3	2	47
B	2	4	2	44
C	4	2	4	58

1.3

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	2	3	4	50
B	2	4	3	50
C	2	3	2	38

1.4

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	4	3	2	29
B	3	4	3	29
C	2	4	3	26

1.5

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	4	4	4	56
B	3	4	2	36
C	3	2	2	32

1.6

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	2	3	3	25
B	3	4	3	30
C	3	3	2	23

1.7

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	2	2	4	40
В	2	3	2	40
С	4	3	4	62

1.8

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	2	2	2	44
В	2	4	4	74
С	4	2	3	66

1.9

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	4	2	4	46
В	2	3	3	32
С	3	4	2	39

1.10

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	2	3	2	32
В	3	4	2	43
С	3	2	3	33

1.11

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	2	3	4	47
В	4	4	2	46
С	3	3	3	45

1.12

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	2	2	3	37
В	3	4	2	55
С	4	3	4	61

1.13

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
А	4	3	2	47
В	4	4	4	60
С	4	3	3	51

Задания 1.14 - 1. 25. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Доказать её совместимость и решить методом Гаусса.

$$1.14 \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 52 \\ 3x + 4y + 4z = 73 \\ 2x + 2y + 3z = 46 \end{cases} \qquad 1.15 \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 32 \\ 2x + 4y + 3z = 34 \\ 4x + 3y + 4z = 34 \end{cases}$$

$$1.16\begin{cases}2x+3y+3z=34\\3x+4y+3z=45\\4x+4y+3z=50\end{cases}\qquad 1.17\begin{cases}4x+4y+2z=52\\2x+2y+3z=38\\3x+4y+3z=52\end{cases}$$

$$1.18\begin{cases}2x+3y+4z=32\\3x+3y+2z=30\\4x+4y+2z=38\end{cases}\qquad 1.19\begin{cases}4x+3y+4z=59\\2x+2y+3z=38\\2x+3y+4z=49\end{cases}$$

$$1.20\begin{cases}2x+4y+3z=44\\3x+2y+2z=30\\2x+4y+2z=36\end{cases}\qquad 1.21\begin{cases}4x+2y+3z=47\\3x+4y+2z=46\\3x+4y+4z=60\end{cases}$$

$$1.22\begin{cases}2x+4y+3z=36\\3x+2y+2z=28\\3x+2y+4z=36\end{cases}\qquad 1.23\begin{cases}3x+3y+2z=58\\3x+3y+4z=68\\3x+2y+3z=55\end{cases}$$

$$1.24\begin{cases}2x+4y+2z=38\\3x+2y+3z=45\\4x+4y+3z=57\end{cases}\qquad 1.25\begin{cases}4x+3y+4z=57\\3x+4y+2z=40\\3x+2y+3z=42\end{cases}$$

Задания 2.1 - 2. 25 Даны координаты вершин пирамиды ABCD.

Найти:

1) длину ребра AB;

2) угол между ребрами AB и AD;

3) угол между ребром АД и гранью ABC;

4) площадь грани ABC;

5) уравнение прямой AB;

6) уравнение плоскости ABC;

7) уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вар.	A	B	C	D
2.1	(4, 1, 4)	(-3, -1, -4)	(4, -5, 1)	(-6, 2, -6)
2.2	(-6, 1, -2)	(-8, 1, -3)	(-2, 3, -2)	(12, 2, 8)
2.3	(1, 3, 2)	(-2, 13, 4)	(4, -13, -3)	(6, -14, -2)
2.4	(6, 4, 2)	(10, -1, -3)	(12, -2, -3)	(-8, 8, -2)
2.5	(4, 4, 13)	(3, 4, 11)	(-1, -1, -7)	(-4, 8, 2)
2.6	(- 4, 2, -2)	(-6, 3, -2)	(-18, 4, 3)	(-16, 2, 2)
2.7	(1, 4, -8)	(2, -3, 4)	(2, -4, 6)	(-4, 2, 8)
2.8	(3, 1, -5)	(-1, -2, 9)	(4, 4, -13)	(4, 6, -14)
2.9	(-4, 6, -1)	(1, -8, 1)	(-2, 2, -1)	(-4, 4, -2)
2.10	(-1, 6, -4)	(-3, 0, 1)	(-3, -4, -1)	(2, 28, 8)
2.11	(3, 4, -2)	(-11, -2, -3)	(-5, 1, -3)	(-26, -6, -6)
2.12	(1, 1, 2)	(1, 3, -6)	(-1, 1, 2)	(2, -6, 12)
2.13	(-3, 2, -3)	(-2, 2, -1)	(4, -4, -1)	(-4, 2, -6)
2.14	(-4, 14, -4)	(4, -14, 2)	(-3, 12, -4)	(-2, -16, 8)
2.15	(0, 2, -1)	(6, -1, -1)	(-14, 4, 4)	(28, -6, -6)
2.16	(3, -4, -2)	(-1, -3, 4)	(-2, 1, -2)	(-4, 8, -16)
2.17	(3, 4, 11)	(3, -4, 5)	(1, -2, 5)	(4, 2, -6)
2.18	(-3, -2, 4)	(-7, 3, 1)	(-9, 3, 2)	(-6, 6, -2)
2.19	(-1, 6, 1)	(2, -4, -1)	(-3, 16, 4)	(4, -12, -4)
2.20	(-5, 4, 1)	(-9, 4, -1)	(3, 1, 2)	(22, -6, 4)
2.21	(7, 4, -1)	(-7, -4, -2)	(-9, -1, 2)	(10, 4, -4)
2.22	(-3, -3, -3)	(2, -3, 2)	(-4, -5, -3)	(8, 18, -4)
2.23	(4, -8, 1)	(-3, 2, -1)	(2, -2, 2)	(6, -28, -6)
2.24	(-3, 2, 14)	(2, -3, 6)	(2, -1, 2)	(8, 2, 4)
2.25	(3, -2, -2)	(4, -4, -4)	(-1, -3, -12)	(-6, 6, -8)

Задания 3.1 - 3.25. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

3.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}}$.

3.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{\frac{x+2}{x+4}}$.

3.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

3.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}2\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}}$.

3.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x-4}}$.

3.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}$.

3.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)^{\frac{x+4}{x}}$.

3.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+196x^2}-\sqrt{x+4x^2}}{2x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 5}\left(6x-x^2-4\right)^{\frac{1}{x^2-9x+20}}$.

3.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-8x+8}{x+1}\right)^{\frac{2}{x-1}}$.

3.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+3}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+x^2}}$;   б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{x^2+3x}{x+6}\right)^{\frac{3}{5+x}}$.

3.11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+4-x^2}{1-x^2}\right)^{x}$.

3.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2+2x^4}-\sqrt{12x}}{\sqrt[3]{3x^2+5x-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{-2}{x+1}}$.

3.13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+9x^3}-\sqrt{4x^2-3x}}{x\sqrt{x+7}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x-1}\right)^{3x}$.

3.14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$.

3.15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-8x+16\right)^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$.

3.16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-7x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{2x^2-4}\right)^{\frac{5-3x}{2+x}}$.

3.17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-8x^3}}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(x^2+9x+21\right)^{\frac{x+6}{x+4}}$.

3.18 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{6x^2-x}}{x-4\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{2(x+3)}}$.

3.19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x}{4-3x}\right)^{\frac{2x-1}{x^2+x}}$.

3.20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2-6\right)^2}{\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4+6x^3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-13}{x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x-8}}$.

3.21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+9x^2}-\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6-3x+x^2}{x^2-2x}\right)^{3x}$.

3.22 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2+10x+7}{x-1}}$.

3.23 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x+8x^2}{\sqrt{x^2+x^4}-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x+3-x^2}{x-1}\right)^{\frac{4}{x-3}}$.

3.24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}}$.

3.25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2+x}{x^2}\right)^{\frac{3x+1}{x-2}}$.

Задание 4.1 – 4.25. Найти асимптоты для функции f(x) и сделать схема-тический чертеж.

4.1 $y=\frac{x^3-3x+10}{2x^2+4x+2}$. 4.2 $y=\frac{4-x}{2x^2-15x+22}$.

4.3 $y=\frac{6x^2-x^3-2x-9}{2x^2-4x+2}$. 4.4 $y=\frac{2x^2-15x+22}{4x^2-26x+30}$.

4.5 $y=\frac{x^3-13x^2+51x-51}{2x^2-12x+18}$. 4.6 $y=\frac{6x^2+39x+33}{4x^2+26x+30}$.

4.7 $y=\frac{x^3+x^2-5x+15}{2x^2-4x+2}$. 4.8 $y=\frac{30x-4x^2-38}{2x^2-15x+22}$.

4.9 $y=\frac{2x^2+12x+12}{2x^2+13x+15}$.

4.10 $y=\frac{9-26x+10x^2-x^3}{2x^2-12x+18}$.

4.11 $y=\frac{15-27x+9x^2-x^3}{2x^2-12x+18}$.

4.12 $y=\frac{4x-x^3-2x^2-4}{2x^2+8x+8}$.

4.13 $y=\frac{2x^2-3x-5}{4x^2-2x-12}$.

4.14 $y=\frac{6-7x-2x^2}{2x^2+7x}$.

4.15 $y=-\frac{2x^2+13x+14}{4x^2+22x+18}$.

4.16 $y=\frac{4x^2+18x+2}{2x^2+9x+4}$.

4.17 $y=\frac{x^3-6x^2+5x+12}{2x^2-8x+8}$.

4.18 $y=\frac{6x^2+15x+3}{4x^2+10x-6}$;

4.19 $y=-\frac{x+2}{2x^2+9x+4}$.

4.20 $y=\frac{x^3-10x^2+28x-12}{2x^2-8x+8}$.

4.21 $y=\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+5x-3}$.

4.22 $y=\frac{18+2x-4x^2}{2x^2-x-6}$.

4.23 $y=-\frac{x^3+5x^2+2}{2x^2+4x+2}$.

4.24 $y=\frac{12-x-2x^2}{2x^2+x-6}$.

4.25 $y=\frac{x^3-7x^2+4x+8}{2x^2-4x+2}$.

Задание 5.1 – 5.10**.** Для функции y = f(x) вычислить W.

5.1 $y=\ln(x^2+1)$, $w=y''+(y')^2$.

5.2 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{6x+1}}$, $w=\frac{y'}{y^4}$.

5.3 $y = 4\dfrac{\arcsin x}{x^3}$, $\qquad w = x^2 y' + 3xy$.

5.4 $y = x^2\left(4 - \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$, $\qquad w = y' - 2\dfrac{y}{x}$.

5.5 $y = x^2 \ln\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $\qquad w = xy' - 2y$.

5.6 $y = x(1 - 2\sqrt{x})^2$, $\qquad w = \dfrac{y - 2x\sqrt{y}}{y'}$.

5.7 $y = 2x\sqrt{3\sqrt{x} + 1}$, $\qquad w = \dfrac{5y^2 - 4x^2}{y \cdot y'}$.

5.8 $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 5}$, $\qquad w = \dfrac{5x^2 + 2y^2}{y \cdot y'}$.

5.9 $y = \dfrac{x}{\ln x}$, $\qquad w = x^2 y' + y(y - x)$.

5.10 $y = e^{4x}\sin x - x$, $\qquad w = y'' - 8y' + 17y$.

Задание 5.11 – 5.20**.** Вычислить производную y' в точке x_0, если:

5.11 $y = x\,\mathrm{tg}\,2x + \ln\sqrt{\cos 2x}$, $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

5.12 $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$, $\qquad x_0 = -1$.

5.13 $y = 25\arcsin\dfrac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$, $\qquad x_0 = -4$.

5.14 $y = \ln\dfrac{2x - 4}{x} + \dfrac{1}{x - 2}$, $\qquad x_0 = 3$.

5.15 $y = \sin\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$, $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.16 $y=\dfrac{e^{1-3x}}{9x-2}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

5.17 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}$, $x_0=3$.

5.18 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{x^2+4}$, $x_0=-2$.

5.19 $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$, $x_0=-4$.

5.20 $y=\arccos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x_0=\dfrac{5}{4}$.

Задание 5.21 – 5.25. Показать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению:

5.21 $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}$, $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

5.22 $y=-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$, $1+y^2+xyy'=0$.

5.23 $y=\ln(3+e^x)$, $y'=e^{x-y}$.

5.24 $y=\operatorname{tg}\ln 3x$, $(1+y^2)dx=xdy$.

5.25 $y=(x^2+1)e^{x^2}$, $y'-2xy=2xe^{x^2}$.

Задание 6.1 – 6.9. Капитал V млн. грн. может быть вложен в банк под m % годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения в производство ожидается в размере n % (в год). Издержки задаются квадратичной зависимостью $\dfrac{x^2}{a}$. Прибыль облагается налогом в p %. Определить, при каких p частичное размещение в производство выгоднее чистого размещения капитала в банке.

Вариант	V	m	n	A
6.1	1	20	140	5
6.2	21	40	180	40
6.3	9	8	80	40
6.4	7	5	110	20
6.5	2	68	140	25
6.6	6	17	80	50
6.7	3	30	100	16
6.8	2	20	200	4
6.9	2	20	100	10

Задание 6.10 – 6.15. Предприятие выпускает и реализует продукцию в объеме Q усл. ед.. Функции затрат $C(Q)$ и цены $P(Q)$ имеют вид:

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d, \qquad P(Q) = AQ + B.$$

Найти: а) максимальную прибыль предприятия; объем и цену, соответствующие максимальной прибыли;

б) средние и предельные затраты, соответствующие максимальной прибыли;

в) участки роста и убывания прибыли на отрезке [m, n];

г) наименьшее значение затрат на [m, n].

Вариант	a	b	c	d	A	B	m	n
6.10	0,8	-1,8	-6	120	-0,6	66	1	8
6.11	0,96	2,16	1,44	10	-0,72	44,64	2	5
6.12	0,5	1,125	-1,5	4,5	-1,125	25,5	1	6
6.13	0,4	-0,3	-6	15	-0,3	24	3	7
6.14	0,7	1,575	-2,1	25,2	-0,525	48,3	2	6
6.15	0,6	-0,45	-5,4	12,4	-1,35	30,6	1	6

Задание 6.16 – 6.20. Опытным путем установлены функции спроса q(p) и предложения S(p): $q(p) = \dfrac{ap+b}{cp+d}$, $S(p) = Ap + B$,

где p – цена товара;

q и S – количество товара, покупаемого и предлагаемого на продажу.

Найти:

а) равновесную цену;

б) эластичность спроса и предложения для этой цены;

в) изменение дохода при увеличении цены на m % от равновесной.

Сделать экономический анализ результатов.

Вариант	a	b	c	d	A	B	m
6.16	1	7	1	1	1	1	6
6.17	-1	7	0	1	1	1	3
6.18	3	5	0	1	2	7	2
6.19	2	3	1	2	2	1	4
6.20	2	18	1	3	1	4	5

Задание 6.21 – 6.25. Статистическим путем установлено, что объем продукции цеха $u(t)$ усл. ед. в течение рабочего дня описывается функцией

$$u(t) = \frac{a}{3}t^3 + bt^2 + ct + d,\ 1 \le t \le 8,$$ где t – время в часах.

Найти:

а) производительность труда, скорость и темп ее изменения через m часов после начала работы;

б) в какой момент времени производительность труда будет наибольшей. Результат пояснить аналитически и графически.

Сделать экономический анализ результатов.

Вариант	a	b	c	d	m
6.21	-10	30	160	400	5
6.22	-20	60	140	300	3
6.23	-40	140	150	200	4
6.24	-2	7	16	100	3,5
6.25	-8	28	102	300	2

Задание 7.1 – 7.25. Известны данные спроса на продукцию в некоторые месяцы:

Месяц	n_1	n_2	n_3
Спрос	A_1	A_2	A_3

Оценить путем интерполирования методом Лагранжа спрос в промежуточные месяцы. Построить на одном чертеже графики вспомогательных полиномов, а на другом – интерполяционного полинома Лагранжа.

7.1	Месяц	2	6	11
	Спрос	186	250	150
7.2	Месяц	1	7	9
	Спрос	200	248	232
7.3	Месяц	3	7	12
	Спрос	182	230	155
7.4	Месяц	1	7	10
	Спрос	234	186	270
7.5	Месяц	3	7	11
	Спрос	266	330	266
7.6	Месяц	1	5	10
	Спрос	122	170	95
7.7	Месяц	1	6	10
	Спрос	474	334	366
7.8	Месяц	3	6	12
	Спрос	286	250	394
7.9	Месяц	2	6	11
	Спрос	202	170	220
7.10	Месяц	2	6	10
	Спрос	181	189	165
7.11	Месяц	3	7	11
	Спрос	346	346	474
7.12	Месяц	2	5	10
	Спрос	226	199	194
7.13	Месяц	3	6	11
	Спрос	197	170	245

7.14	Месяц	3	7	12
	Спрос	218	218	83
7.15	Месяц	3	5	11
	Спрос	178	202	178
7.16	Месяц	1	5	9
	Спрос	242	178	178
7.17	Месяц	3	6	11
	Спрос	197	170	245
7.18	Месяц	3	6	12
	Спрос	257	230	338
7.19	Месяц	2	5	10
	Спрос	154	181	186
7.20	Месяц	1	7	10
	Спрос	338	230	257
7.21	Месяц	2	6	11
	Спрос	286	254	394
7.22	Месяц	3	5	11
	Спрос	242	218	242
7.23	Месяц	2	6	11
	Спрос	185	209	194
7.24	Месяц	2	6	10
	Спрос	226	194	194
7.25	Месяц	2	7	10
	Спрос	178	248	242

Задание 8.1 — 8.12**.** Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что

$$F\left(x; y; z; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\right) = 0.$$

8.1 $\quad z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$; $\quad F = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}$.

8.2 $\quad z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $\quad F = x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

8.3 $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8.4 $z = e^{xy}$; $F = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$.

8.5 $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$; $F = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8.6 $z = \dfrac{x}{y}$; $F = x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8.7 $z = x^y$; $F = y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

8.8 $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $F = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8.9 $z = \sin(x + ay)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8.10 $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $F = (x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8.11 $z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8.12 $z = \dfrac{y^2}{3x} + \cos xy$; $F = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

Задание 8.13 – 8.25. Дана функция $z = f(x, y)$.

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$

8.13 $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

8.14 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

8.15 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

8.16 $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

8.17 $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

8.18 $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$.

8.19 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

8.20 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2 - 4xy$.

8.21 $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

8.22 $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 12y + 6x + 6xy$.

8.23 $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

8.24 $z = xy(6 - x - y)$.

8.25 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

Задание 9.1–9.25. Прогнозирование экономических показателей

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	27	26	28	28	26	24	24	22	24	26	25
k	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a	27	28	30	29	27	27	28	26	25	25	24
k	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
a	23	22	21	22	24	23	25	26	27	29	27
k	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
a	28	26	25	24	22	20	21	23	25	26	25

Из заданного динамического ряда выбрать фрагмент, содержащий 14 последовательных элементов. Расположение фрагмента соответствует варианту следующим образом:

1-й вариант – с 1-го члена динамического ряда (14 подряд);

2-й вариант – со 2-го члена динамического ряда (14 подряд) и т.д.

25-й вариант – с 25-го члена динамического ряда.

Элементы выбранного фрагмента являются условием Вашего задания (динамическим рядом). Построить формулу прогноза, используя первые восемь элементов Вашего динамического ряда (см. Пример 6), произвести расчет по экзаменующей выборке (последние шесть значений Вашего динамического ряда) и изобразить графически полученный результат.

Задание 10.1– 10.25. Найти неопределенные интегралы. В п. **а** результат проверить дифференцированием.

	а)	б)	в)
10.1	$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{x^3+8}$;	$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
10.2	$\int e^x \ln(1+3e^x)dx$;	$\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$;	$\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$;
10.3	$\int x\cdot 3^x\,dx$;	$\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$;
10.4	$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;	$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;
10.5	$\int x^2e^{3x}dx$;	$\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$;	$\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$;
10.6	$\int x\arcsin\frac{1}{x}\,dx$;	$\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$;	$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$;
10.7	$\int x\ln(x^2+1)dx$;	$\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$;	$\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$;
10.8	$\int x\sin x\cos x dx$;	$\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$;	$\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$;

	а)	б)	в)
10.9	$\int x^2 \sin 4x dx$;	$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 2x^2 - 3} dx$;	$\int \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;
10.10	$\int x \ln^2 x dx$;	$\int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$;	$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$;
10.11	$\int x^3 \ln x dx$;	$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$;	$\int \operatorname{tg}^3 2x dx$;
10.12	$\int x \cos 5x dx$;	$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$;	$\int \cos^3 x \sin^2 x dx$;
10.13	$\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$;	$\int \frac{x + 5}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx$.	$\int \sin^2 2x dx$;
10.14	$\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$;	$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$	$\int \sin^5 x \cos^2 x dx$;
10.15	$\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;	$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$;	$\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$;
10.16	$\int \sqrt{x} \ln x dx$;	$\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$;	$\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$;
10.17	$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;	$\int \frac{2x^2 - 3x + 12}{x^3 + x^2 - 6x} dx$.	$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$;
10.18	$\int \arcsin \frac{x}{2} dx$;	$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 36x - 72}$.	$\int \frac{dx}{3 - 5\cos x}$;
10.19	$\int x^2 \ln x dx$;	$\int \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;
10.20	$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$;	$\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$;	$\int \cos 4x \cos 7x dx$;
10.21	$\int x \cos 2x dx$;	$\int \frac{x^3 + 6}{x^2 + 5x - 6} dx$;	$\int \frac{x + \sqrt{1 + x}}{\sqrt[3]{1 + x}} dx$;

	а)	б)	в)
10.22	$\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;	$\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$;	$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;
10.23	$\int x^4 \ln xdx$;	$\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$;	$\int \frac{1-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$;
10.24	$\int xe^{-x/2}dx$;	$\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$;	$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$;
10.25	$\int \sqrt[3]{x}\ln xdx$;	$\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$;

Задание 11.1 – 11.8. По данным исследований распределения доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = f(x)$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини. Сделать чертеж и анализ полученного результата.

11.1 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}$.

11.2 $f(x) = \frac{x^2}{x+1-x^2}$.

11.3 $f(x) = x\left(1-\sqrt{1-x}\right)$.

11.4 $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

11.5 $f(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$.

11.6 $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.

11.7 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

11.8 $f(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x$.

Задание 11.9 – 11.15. Определить дисконтированный доход К за Т лет при процентной ставке Р, если первоначальные капиталовложения составили N тыс.грн. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на m тыс.грн. Найти $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$.

Вариант	T	P, %	N, тыс.грн.	m, тыс.грн.
11.9	3	7	10	0.7
11.10	4	6	12	1
11.11	5	8	16	1.2

Вариант	T	P, %	N, тыс.грн.	m, тыс.грн.
11.12	4	9	14	1
11.13	3	6	10	0.8
11.14	6	8	8	0.5
11.15	5	5	14	1.5

Задание 11.16 – 11.20. В течение рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t)=at^2+bt+c$. Найти:

1) объем выпускаемой продукции за время [0,T];

2) среднее значение производительности за время [0,T] и моменты t_0 и t_1, в которые достигаются среднее и максимальное значения производительности.

Результат пояснить графически.

Вариант	T	*a*	*b*	*c*
11.16	6	-2	12	14
11.17	4	-3	18	48
11.18	3	-1	5	6
11.19	5	-2	10	28
11.20	7	-1	4	21

Задание 11.21 – 11.25**.** Найти среднее значение издержек $K=ax^2+bx+c$, если объем продукции x меняется от m до n единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Результат пояснить графически.

Вариант	a	b	c	m	n
11.21	3	4	1	0	3
11.22	2	5	2	1	4
11.23	1/2	2	3/2	0	5

Вариант	a	b	c	m	n
11.24	2	11	5	1	3
11.25	1	13/3	4/3	2	4

Задание 12.1–12.25. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условия

12.1	$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$,	$y(0) = 0$.
12.2	$y' = e^{\frac{-y}{x}} + \dfrac{y}{x}$,	$y(1) = 0$.
12.3	$(1 + y^2)dx = xy\,dy$,	$y(2) = 1$.
12.4	$y' = (2y - 1)\,\mathrm{ctg}\,x$,	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.
12.5	$xy' + y - e^x = 0$,	$y(1) = e$.
12.6	$y' - y = e^x$,	$y(0) = 1$.
12.7	$y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$,	$y(1) = 2$.
12.8	$xy' + y = \ln x + 1$,	$y(1) = 0$.
12.9	$x^2 y' = 2xy + 3$,	$y(1) = -1$.
12.10	$y'x - y - x = 0$,	$y(1) = 1$.
12.11	$y' - y = \dfrac{e^x}{x}$,	$y(1) = e$.
12.12	$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$,	$y(1) = 0;$.
12.13	$y' - 2xy = xe^{x^2}$,	$y(0) = 1$.
12.14	$y' = 3x^2 y + x^2$,	$y(0) = \dfrac{4}{3}$.

12.15 $y'-\dfrac{y}{x}=1+x$, $y(1)=1$.

12.16 $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1)=1$.

12.17 $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1)=e$.

12.18 $xy'-2y+x^2=0$, $y(1)=0;$.

12.19 $y'+y=\dfrac{1}{e^x}$, $y(0)=2;$.

12.20 $xy'+y=3$, $y(2)=4;$.

12.21 $xy'+y=x+1$, $y(2)=6;$.

12.22 $x^2y'+y^2-2xy=0$, , $y(2)=4;$.

12.23 $y'\cos x=(y+1)\sin x$, $y(0)=0$.

12.24 $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3};$.

12.25 $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$, , $y(1)=1$.

Задание 13.1–13.25. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=(ax+b)e^{kx}.$$

Вариант	p	q	a	b	k
1	3	2	-24	-38	2
2	1	-2	-2	1	-1
3	0	-4	-6	-4	-1
4	-1	-6	4	-1	-1
5	4	4	-2	-2	-1
6	2	1	9	33	2

7	0	-1	6	-1	2
8	-1	-2	-4	-3	-2
Вариант	p	q	a	b	k
9	-2	-3	6	-1	2
10	3	2	12	7	2
11	0	-1	6	11	2
12	-2	1	-4	12	-1
13	-3	2	-12	28	-1
14	-4	3	8	-30	-1
15	1	-2	-4	2	-1
16	-1	-2	-4	1	-2
17	-3	2	-12	10	-1
18	-4	4	9	3	-1
19	-5	6	24	10	-1
20	0	-4	3	-7	-1
21	-2	-3	6	5	2
22	-4	3	8	-22	-1
23	-5	6	24	-26	-1
24	-6	9	-16	8	-1
25	-1	-6	8	2	-1

Типовые тестовые задания для рейтинговой оценки модулей

1 Решить уравнение: а) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$, б) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix} = 0$.

2 Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$.

3 Найти собственные числа матрицы:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

4 Найти обратную матрицу и сделать проверку: $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$.

5 Найти координаты вектора $\overline{AB}$: A(-9; 8; -15), B(-7; 12; -19).

6 Найти длину вектора $\overline{BA}$: A(-3; -2; -5), B(3; 2; -9).

7 Найти длину отрезка AB и вычислить координаты его середины:

A(12; -2), B(7; 6).

8 Вычислить скалярное произведение векторов: $\overline{a} = \{-4;3;5\}$,

$\overline{b} = \{2;-3;-2\}$.

9 Найти уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$A(-6;1)$, $B(-3;-1)$.

10 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;0)$ параллельно вектору

$\overline{a} = \{-4;-8\}$.

11 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{a} = \{-2;3\}$.

12 Построить график:

а) $3y+5x+15=0$, б) $x+y^2-2=0$, в) $y-x^2+3=0$,

г) $\frac{x}{2}-\frac{y}{6}=1$, д) $\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$, е) $x^2+4x+y^2=0$.

13 Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4+9n^5+2n}{8n^5-11n^3}$, б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(5x+5)}{4x+4}$,

в) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{\operatorname{tg}(2x+8)}{5x+20}$, г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{6x}$,

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{e^{-9x}-1}$, е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{-7x}$.

14 Найти производную функции:

а) $y=x\ln 4x$, б) $y=(3x-8)\sin 4x$, в) $y=(7-3x)e^{-2x}$,

г) $y=\frac{2x+3}{5-3x}$, д) $y=\frac{3x+7}{x^2}$, е) $y=\frac{x^3}{9-2x}$.

15 Найти частные производные функции: $z=7x^5y^6+2x^2-3y+\pi^3$.

16 Найти градиент скалярного поля: $u=-\frac{6x^4}{y}+4y^4-\frac{3}{x^5}$.

17 Решить уравнение $y'=0$ для функции:

а) $y=-x^3+48x-6x^2+7$, б) $y=-18x+6x^2+2x^3$.

18 Найти уравнение касательной к линии в заданной точке:

$y=-4x+x^2-8$, $x_0=-2$.

19 Найти уравнение нормали к линии в заданной точке:

$$y = 9 - 5x - x^2, \qquad x_0 = 1.$$

20 Найти экстремумы функции $y = 5 + 21x^2 - 2x^3$.

21 Найти интервалы возрастания функции $y = 8 + 27x^2 - 2x^3$.

22 Найти интервалы убывания функции $y = 10 + 9x^2 + 2x^3$.

23 Найти точки перегиба графика функции $y = 7x^2 + x + \frac{5}{3}x^3$.

24 Найти интервалы выпуклости графика функции

$$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{10}{3}x^3.$$

25 Найти интервалы вогнутости графика функции

$$y = \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{8}{3}x^3.$$

26 Найти интеграл:

а) $\int \frac{7dx}{x^2}$, б) $\int_{-3}^{-1} \frac{6dx}{x^3}$, в) $\int_{2}^{4} \frac{12dx}{x^2}$, г) $\int \left(2 - 6e^{-7x}\right)dx$,

д) $\int \left(6 - 5\sin\frac{x}{3}\right)dx$, е) $\int \left(6 + 4\cos\frac{11x}{5}\right)dx$, ж) $\int \frac{dx}{3 - 2x}$.

27 Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dy \int_{-1}^{y-1} f(x, y)dx$.

28 Вычислить: $\iint_D (3y + 2)ds$, D: $0 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$.

29 Вычислить среднее значение функции $y = 4x - 2 + 4x^3$ на интервале $[0;2]$.

30 Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$y = 4x - x^2, \quad y = -x .$$

31 Построить график области и расставить пределы в повторном интеграле:

$$x = 4y - y^2 - 1, \qquad x = 3 - y .$$

32 Найти площадь фигуры с помощью двойного интеграла, изобразить фигуру в системе координат:

а) $x - 2y = 0$, $\quad x - y + 4 = 0$, $\quad x = -2$, $\quad x = 0$;

б) $x + y - 1 = 0$, $\quad y - 2x + 10 = 0$, $\quad y = -2$, $\quad y = 0$.

33 Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x^2 y' = 4y^3$, б) $(x+3)y' = 6y$, в) $y'' + 6y' + 9y = 4$,

г) $y'' - 36y = 8$, д) $y'' - 2y' - 3y = 6$, е) $y'' - 6y' = 6e^{2x}$.

34 Решить задачу Коши:

а) $y' = 6x - 3$, $\quad y(-1) = -3$; б) $y' = 8e^{-x}$, $\quad y(0) = 1$;

в) $y' = -10\sin 2x$, $\quad y(0) = 4$; г) $y(-1) = 1$.

35 Найти знаменатель геометрической прогрессии. Вычислить сумму ряда, если он сходится:

а) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots$, б) $-1 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9} + \ldots$, в) $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \ldots$

36 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4 - 12n - n^3}{8n + 6n^4 + 9}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5n - 3n^3}{12 + 3n^4 - 9n}$.

37 Найти формулу и начертить график $y = S_3(x)$ - частичной суммы ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2-5n+5\right)x^{n-1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-n^2+4}{2}x^{n-1}$.

38 Найти сумму ряда с точностью $\varepsilon = 0{,}04$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+4}$.

39 Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3}$.

40 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^n$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n3^n}$.

Приведенные задания определяют тематику и уровень сложности тестирования студентов по модулям курса высшей математики.

Литература

1 Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1976. – 272 с.

2 Пискунов А.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. – М.: Наука, 1970 – 1985. - Т.1. – 436 с.

3 Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я. Кожевников. – М.: Высш. школа, 2002.- ч. I, II.- с. 312 – 278.

4 Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, 2002. – 471 с.

5 Двайт Г. В. Таблиці інтегралів і інші математичні формули.- М.: Наука, 1977р. – 224 с.

7 Запорожец П. И. Руководство к решению задач по математическому анализу.-М.: Высш. школа, - 1966г.-372 с.

8 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. І. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова.- К.: Либідь, 1994.-280 с.

9 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди.- К.: Либідь, 1994.- 352 с.

10 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння.-К.: Либідь, 1994.- 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Вища математика. Методичні вказівки, індивідуальні і тестові завдання для студентів-заочників інженерно-економічних спеціальностей.

(Высшая математика. Методические указания, индивидуальные и тестовые задания для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей.)

Укладачі: Астахов Віктор Миколайович,
Буланов Геннадій Станиславович.

Редактор Н.О. Хахіна.

Підп. до друку Формат 60x84 1/16.

Папір офсетний. Ризограф. друк.

Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 2,3

Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник «Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.03