Министерство образования и науки Украины

Донбасская государственная машиностроительная академия

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельной работе

для студентов экономических специальностей

всех форм обучения

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № от
2009

Краматорск 2009

УДК 517

Высшая математика : методические указания к самостоятельной работе для студентов экономических специальностей всех форм обучения. / сост. : О. Г. Ровенская, Н. В. Белых, Е. В. Горбач. – Краматорск : ДГМА, 2009. – 100 с.

(Данные методические указания содержат в кратком виде основной теоретический материал по курсу высшей математики для студентов экономического направления. Указана тематика, приведены образцы решения контрольных и тестовых заданий)

Составители: О. Г. Ровенская, ассист.,
Н. В. Белых, ассист.,
Е. В. Горбач, ассист.

Отв. за выпуск В. Н. Астахов, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В связи с перестройкой высшей школы, связанной с присоединением Украины к Болонской декларации с ее основными подходами к формированию европейского высшего образования, особую актуальность приобретают курсы, которые позволяют рассмотреть взаимосвязь изучаемых наук, взаимное использование их понятий и методов. Математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчёта, но также методом точного исследования и средством предельно чёткой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с её развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Современная высшая школа, основывающаяся на кредитно-модульной системе, требует от преподавателей и студентов больше внимания уделять самостоятельной работе последних, вводит новые, тестовые формы контроля. Это в свою очередь требует соответствующих рекомендаций.

Настоящее пособие предоставляет студентам экономических специальностей всех форм обучения возможность подготовится к сдаче тестирования по всем разделам курса высшей математики, а студентам заочной формы обучения даёт возможность выполнить контрольные работы, которые являются обязательной частью отчётности при изучении курса высшей математики.

В каждой теме коротко рассматриваются основные теоретические понятия, определения, формулы, а также решение практических заданий. Уделяется большое внимание простейшим приложениям высшей математики в экономике.

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Литература: [3, ч I, гл. IV, § 1; 4, гл. 1, 1.4]

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}).$$

Пример 1. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - (-3) \cdot 6 = 0 + 18 = 18.$$

б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - (-\cos\alpha) \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

в) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2 + x + 1 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(x^2+x+1) - x^3\cdot 1 = x^3-1-x^3 = -1.$$

Пример 2. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(3\cdot 6-(-7)(-1)) - 5\cdot(1\cdot 6-(-7)\cdot 0) + 4\cdot(1\cdot(-1)-3\cdot 0) =$$

$$-2\cdot(18-7) - 5\cdot(6-0) + 4\cdot(-1-0) = -2\cdot 11 - 5\cdot 6 + 4\cdot(-1) = -22-30-4 = -56.$$

б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(6\cdot 8-(-2)\cdot 1) + (0\cdot 8 - 2\cdot(-2)) + 3\cdot(0\cdot 1 - 2\cdot 6) = 50+4-36 = 18.$$

Пример 3.

а) Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ -4 & x-2 \end{vmatrix} = 0$.

Решение

Раскроем определитель: $3\cdot(x-2)-(-4)\cdot(x+1)=0$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: $7x-2=0$. Решая уравнение, получаем: $x=\dfrac{2}{7}$

б) Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$

Решение

Раскроем определитель: $x \cdot (x-4) - (-3) \cdot 1 = 0.$ Получили уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 0.$ По теореме Виета: $x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

2 МАТРИЦЫ

Литература: [3, гл. IV, § 2, 4; 4, гл.1, 1.1, 1.2]

Пусть заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$

Действия над матрицами:

1. Сложение: $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$

2. Умножение матрицы на число: $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$

3. Умножение двух матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица существует только для квадратной невырожденной матрицы.

Обратная матрица A^{-1}: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Число λ называют собственным числом матрицы A, а вектор $\overline{x}$ - собственным вектором, если $\lambda A = \overline{x} A$. Чтобы найти собственные числа матрицы необходимо решить уравнение: $|A - \lambda E| = 0$.

Пример 4. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить $A - 2B, \ A \cdot B$.

Решение

$$\text{A} - 2\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-4) & -2-14 \\ 3-0 & 5-12 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 6 \\ 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -6 & 51 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти обратную матрицу матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 10 \neq 0$$

Следовательно, существует обратная матрица.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 & 4 \cdot (-0{,}3) + 3 \cdot 0{,}4 \\ -2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 & (-2) \cdot (-0{,}3) + 1 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Следовательно, обратную матрицу нашли верно.

Пример 6. Найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

Решим уравнение: $\left|A-\lambda E\right|=0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)-(-3)\cdot(-4)=0.$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые: $\lambda^2-3\cdot\lambda-10=0$. По теореме Виета: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-2$.

Ответ: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-2$ - собственные числа матрицы A.

3 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [3, гл. IV, §5,6; 4, гл. 2]

3.1 Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть задана система линейных уравнений двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

Если основной определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, то система имеет единственное решение и его можно найти по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где $\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Аналогично решается система трёх уравнений с тремя неизвестными.

3.2 Решение систем линейных уравнение методом Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных. Умножая строку на число и складывая (вычитая) строки, приводим систему к ступенчатому виду (см. пример 8), откуда без труда находят неизвестные.

Пример 7. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 6 + 1 = 7 \neq 0$$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 7 \cdot (-1) = 0 + 7 = 7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 0 \cdot 1 = 14 - 0 = 14$$

По формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

Пример 8. Доказать, что система совместная и решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 7 \\ 3x + 2y + z = 14 \end{cases}$$

Решение

Найдём основной определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(1\cdot1-2\cdot(-1)) + 1\cdot\big(2\cdot1-3\cdot(-1)\big) + 3\cdot(2\cdot2-3\cdot1) = 3+5+3 = 11 \neq 0.$$

Следовательно, по теореме Крамера система совместная.

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Умножим первую строку на 2 и от второй строки вычтем первую; умножим первую строку на 3 и вычтем от третьей первую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

Разделим вторую строку на 3, умножим на 5 и вычтем третью строку.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

Разделим третью строку на $-\dfrac{11}{3}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Запишем соответствующую систему:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - \dfrac{7}{3}z = -\dfrac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Решаем систему с последнего уравнения: $z = 1$, $y = 2$, $x = 3$.

Пример 9. Предприятие выпускает изделия трёх наименований (1, 2, 3), для производства которых используются три вида сырья (A, B, C). Данные о расходе сырья каждого вида на одну единицу продукции и количестве сырья каждого вида приведены в таблице 1. Какое количество продукции каждого наименования необходимо выпустить, чтобы израсходовать полностью запасы сырья?

Таблица 1

Сырьё	Изделие			Кол-во сырья
	1	2	3	
A	2	4	1	21
B	3	4	2	29
C	3	2	3	28

Решение

Пусть x_1, x_2, x_3 - количество продукции вида 1, вида 2 и вида 3. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 28 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 4 & 1 \\ 29 & 4 & 2 \\ 28 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 1 \\ 3 & 29 & 2 \\ 3 & 28 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 21 \\ 3 & 4 & 29 \\ 3 & 2 & 28 \end{vmatrix} = -6$$

По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Вывод: чтобы полностью израсходовать запасы сырья необходимо выпустить 5 изделий вида 1, 2 изделия вида 2, 3 изделия вида 3.

3.3 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$.

(Ответ: а) 16; б) -5; в) -27)

Задание 2. Решить уравнение:

а) $\begin{vmatrix} x & 6 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix} = 0$, б) $\begin{vmatrix} x & x+4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

(Ответ: а) $x_1 = 2, \; x_2 = 3$; б) $x = -1$)

Задание 3. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ x+2y=6 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ -x+y+z=-2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$.

(Ответ: а) $x=4;\ y=1$. б) $x=2,\ y=1,\ z=-1$)

Задание 4. Проверить, является ли система совместной, и решить её методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x-2y+z=-3 \\ -x-4y+5z=-3 \\ 2x+y+2z=4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x+2y-z=9 \\ x-y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$.

(Ответ: а) $x=0;\ y=2;\ z=1$; б) $x=1;\ y=3;\ z=-2$)

Задание 5. Найти матрицы $3A-2B$, $A\cdot B$.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;   б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

(Ответ: а) $3A-2B=\begin{pmatrix} 6 & -22 \\ -11 & 25 \end{pmatrix}$; $A\cdot B=\begin{pmatrix} -4 & 18 \\ 7 & -29 \end{pmatrix}$;

б) $3A-2B=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$; $A\cdot B=\begin{pmatrix} -20 & 10 \\ -14 & 25 \end{pmatrix}$)

Задание 6. Найти собственные числа матрицы:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,   б) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$,   в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(Ответ: а) $\lambda_1=-3;\ \lambda_2=2$; б) $\lambda_1=-4;\ \lambda_2=1$; в) $\lambda_1=6;\ \lambda_2=1$)

Задание 7. Найти обратную матрицу и сделать проверку: $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Ответ: $\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$)

4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Литература: [3, ч. I, гл. I, II, III; 4, гл3,4; 7; 10]

4.1 Векторы

Формула длины вектора:

$$\overline{a} = (x_a, y_a, z_a) \qquad \left|\overline{a}\right| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

Координаты вектора вычисляются по формуле:

$$\overline{AB} = (x_b - x_a;\, y_b - y_a;\, z_b - z_a),$$

где $A(x_a; y_a; z_a)$, $B(x_b; y_b; z_b)$ - координаты точек A и B.

Длина отрезка (расстояние между точками) определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

где M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) – координаты данных точек.
Координаты точки С - середины отрезка:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}; \quad y_c = \frac{y_a + y_b}{2}; \quad z_c = \frac{z_a + z_b}{2},$$

где $A(x_a; y_a; z_a)$, $B(x_b; y_b; z_b)$ - координаты концов отрезка A и B.

Пусть заданы три вектора: $\overline{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\overline{b} = (x_b, y_b, z_b)$, $\overline{c} = (x_c, y_c, z_c)$.

Скалярное произведение двух векторов: $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Векторное произведение двух векторов: $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение трёх векторов: $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$.

Угол между векторами: $\cos\overline{a}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $S=\dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Объём пирамиды, построенной на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$: $V=\dfrac{1}{6}\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right|$.

Условие коллинеарности двух векторов: их координаты пропорциональны.

Условие перпендикулярности двух векторов: их скалярное произведение равно нулю $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}=0\right)$.

Условие компланарности трёх векторов: их смешанное произведение равно 0 $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0\right)$.

Пример 10. Найти координаты вектора $\overline{AB}$. $A(1;\,-2;\,6)$, $\quad B(4;\,3;\,-1)$.

Решение

$\overrightarrow{AB}=(x_b-x_a;\,y_b-y_a;\,z_b-z_a)=(4-1;\,3-(-2);\,-1-6)=(3;\,5;\,-7)$.

Пример 11. Найти длину вектора $\overline{a}(1;\,-3;\,2)$.

Решение

$$|\overline{a}|=\sqrt{{x_a}^2+{y_a}^2+{z_a}^2}=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

Пример 12. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;-1;3)$, $\quad\overline{b}(4;-2;-4)$.

Решение

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=2\cdot4+(-1)\cdot(-2)+3\cdot(-4)=8+2-12=-2.$$

Пример 13. Найти косинус угла между векторами $\overline{a}(2;-1;3),\quad \overline{b}(4;-2;-4)$.

Решение

$$\cos\overline{a}\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{2\cdot4+(-1)\cdot(-2)+3\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)}}=\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{36}}=\frac{-1}{3\sqrt{14}}.$$

Пример 14. Найти векторное произведение $\overline{a}(2;-1;3),\quad \overline{b}(4;-2;-4)$.

Решение

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & -4\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & -4\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -4\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}((-1)\cdot(-4)-(-2)\cdot3)-\overline{j}(2\cdot(-4)-3\cdot4)+\overline{k}(2\cdot(-2)-4\cdot(-1))=$$

$$=10\overline{i}+20\overline{j}+0\overline{k}=10\overline{i}+20\overline{j}.$$

Пример 15. Найти площадь треугольника ABC
$A(2;-1;3),\ B(-3;2;4),\ C(5;1;7)$.

Решение

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

$$\overline{AB}(-3-2;\ 2-(-1);\ 4-3)=(-5;3;1)\quad \overline{AC}(5-2;1-(-1);\ 7-3)=(3;2;4).$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}(3\cdot4-2\cdot1)-\overline{j}((-5)\cdot4-3\cdot1)+\overline{k}(2\cdot(-5)-3\cdot3)=10\overline{i}+23\overline{j}-19\overline{k}.$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+23^2+(-19)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100+529+361}=\frac{1}{2}\sqrt{990}=\frac{3}{2}\sqrt{110}\ (\text{кв.ед.})$$

Пример 16. Проверить векторы $\overline{a}(3;-1;2),\quad \overline{b}(6;-2;5)$ на коллинеарность.

Решение

Найдём отношение координат векторов: $\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{5}$.

Отношения не выполняются, следовательно, векторы не коллинеарны.

Пример 17. Будут ли векторы $\overline{a}(2; 1; -3)$, $\overline{b}(1; 5; 2)$ перпендикулярны.

Решение

Найдём скалярное произведение векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 = 1 \neq 0,$$

следовательно, векторы не перпендикулярны.

Пример 18. Проверить векторы $\overline{a}(1; -1; 2)$, $\overline{b}(3; 1; -2)$, $\overline{c}(0; 2; 4)$ на компланарность.

Решение

Найдём смешанное произведение векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)\big) + \big(3 \cdot 4 - 0 \cdot (-2)\big) + 2 \cdot (3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 8 + 12 + 12 = 32 \neq 0$$

Следовательно, векторы не компланарны.

Пример 19. Найти смешанное произведение векторов $\overline{a}(1; 1; -1)$, $\overline{b}(3; -1; 2)$, $\overline{c}(0; 1; 4)$.

Решение

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(-1 \cdot 4 - 2 \cdot 1\big) - \big(3 \cdot 4 - 0 \cdot 2\big) - \cdot (3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) = -6 - 12 - 3 = -21$$

Пример 20. Найти объём пирамиды $ABCD$. $A(-2;\,0;\,-4)$, $B(-1;\,7;\,1)$, $C(4;\,-8;\,4)$, $D(1;\,-4;\,6)$.

Решение

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|.$$

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\overline{AB}=(-1-(-2);7-0;1-(-4))=(1;7;5).$$
$$\overline{AC}=(4-(-2);-8-0;4-(-4))=(6;-8;8).$$
$$\overline{AD}=(1-(-2);-4-0;6-(-4))=(3;-4;10).$$
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & 7 & 5\\ 6 & -8 & 8\\ 3 & -4 & 10\end{vmatrix}=-300.$$
$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|-300\right|=50\text{ (куб.ед.)}$$

Пример 21. Найти середину отрезка AB. $A(1;\,2;\,-3)$, $B(5;\,-1;\,-4)$

Решение

$$x_c=\frac{x_a+x_b}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$
$$y_c=\frac{y_a+y_b}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$
$$z_c=\frac{z_a+z_b}{2}=\frac{-3+(-4)}{2}=\frac{-7}{2}$$

Ответ: $C(3;\frac{1}{2};-\frac{7}{2})$ - середина отрезка AB.

4.2 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти координаты вектора $\overline{\text{AB}}$: $A(-1;\,6;\,5)$, $B(0;\,-3;\,2)$.
(Ответ: $\overline{AB}(1;\,-9;\,-3)$)
Задание 2. Найти длину вектора $\overline{BA}$: $A(4;\,-1;\,5)$, $B(1;\,0;\,-2)$.

(Ответ: $\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{59}$)

Задание 3. Найти длину отрезка AB и вычислить координаты его середины: $A(4;\,0;-5)$, $B(2;\,-6;\,1)$.

(Ответ: $\left|AB\right| = \sqrt{76},\ C(3;-3;\,-2)$)

Задание 4. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}(3;-4;\,5)$, $\overline{b}(1;-2;-2)$ и угол между ними.

(Ответ: $\overline{a}\cdot\overline{b} = 1$, см. примеры 12,13)

Задание 5. Вычислить векторное произведение векторов $\overline{a}(3;\,0;\,2)$, $\overline{b}(-1;\,4;\,-2)$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

(Указание: см. примеры 14,15)

Задание 6. Вычислить смешанное произведение векторов $\overline{a}(7;-4;\,2)$, $\overline{b}(1;\,3;\,-2)$, $\overline{c}(4;\,1;\,0)$ и объём пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

(Указание: см. примеры 19,20)

Задание 7. Проверить векторы $\overline{a}(8;-4;\,2)$, $\overline{b}(4;-2;1)$ на коллинеарность.

(Указание: см. пример 16)

Задание 8. Проверить векторы $\overline{a}(1;-4;\,2)$, $\overline{b}(0;\,3;\,5)$, $\overline{c}(4;\,1;\,0)$ на компланарность.

(Указание: см. пример 18)

4.3 Прямая на плоскости

Виды уравнений прямой на плоскости:

1. Общее уравнение прямой:

$$ax + by + c = 0,$$

где (x, y) - координаты любой точки прямой, $\overline{n}(a,b)$ - координаты нормального вектора.

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(a,b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overline{p}(m;n)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b,$$

где k - тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

Пример 22. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-1)$, $M_2(3;4)$.

Решение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$
$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-(-1)}{4-(-1)}.$$
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{5}.$$

Запишем уравнение в общем виде:

$$5(x-2)=(y+1);$$
$$5x-y-11=0.$$

Ответ: $5x-y-11=0$.

Пример 23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-4)$ параллельно вектору $\overline{p}(3;5)$.

Решение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-(-4)}{5}.$$
$$5(x-2)=3(y+4).$$
$$5x-3y-22=0.$$

Ответ: $5x-3y-22=0$.

Пример 24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;7)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(-4;1)$.

Решение

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$
$$-4\cdot(x-(-1))+1\cdot(y-7)=0.$$
$$-4x+y-11=0.$$
$$4x-y+11=0.$$

Ответ: $4x-y+11=0$.

Пример 25. Найти точку пересечения прямых $x+2y-3=0$, $2x-y+4=0$.

Решение

Чтобы найти точку пересечения прямых, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и от первого вычтем второе: $5y-10=0$. Отсюда, $y=2$. Подставляем в первое уравнение системы и находим $x=-1$.

Ответ: $(-1;2)$ - точка пересечения прямых.

4.4 Кривые второго порядка

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ - общее уравнение кривой второго порядка.

Если $B = 0$:

1. $A = C$, то линия - окружность.
2. $A \neq C,\ A \cdot C \rangle 0$, то линия – эллипс.
3. $A \neq C,\ A \cdot C \langle 0$, то линия – гипербола.
4. $A = 0$ или $C = 0$, то линия – парабола.

Каноническое уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где (x_0, y_0) - координаты центра окружности, R - радиус окружности.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

где (x_0, y_0) - координаты центра эллипса, a и b - полуоси эллипса.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1,$$

где (x_0, y_0) - координаты центра гиперболы, a и b - полуоси гиперболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y - y_0 = 2p(x - x_0)^2,$$

где (x_0, y_0) - координаты вершины параболы.

Пример 26. Построить график линии:

а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Решение

Заданная линия – окружность с центром в точке $(1;-2)$ и радиусом 3. Схематически построим график линии (рис. 1)

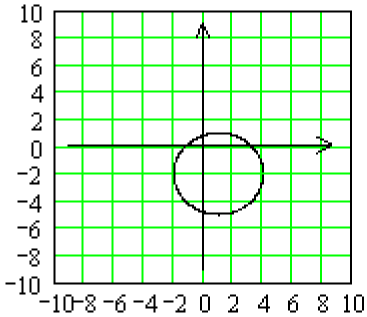

Рисунок 1

б) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

Решение

Заданная линия – эллипс с центром в точке $(2;1)$, $a=3$ - большая полуось, $b=2$ - малая полуось. Схематически построить график линии (рис. 2).

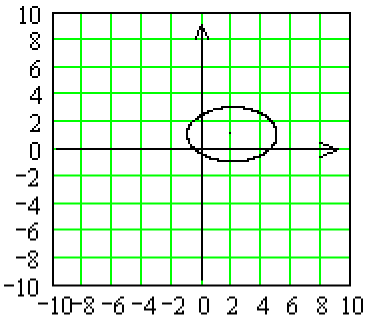

Рисунок 2

в) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

Решение

Заданная линия – гипербола с центром в точке $(-1;1)$, ветви гиперболы направлены вправо и влево, $a=4$ - действительная полуось, $b=2$ - мнимая полуось. Построим схематически график линии (рис. 3).

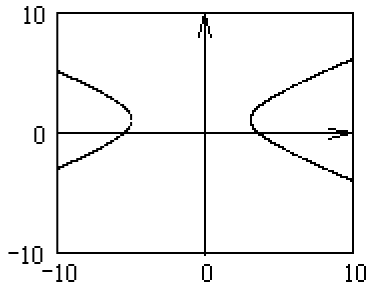

Рисунок 3

г) $-\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

Решение

Заданная линия – гипербола с центром в точке $(-1;-3)$, ветви гиперболы направлены вверх и вниз, $a=1$ - мнимая полуось, $b=2$ - действительная полуось. Построим схематически график линии (рис. 4).

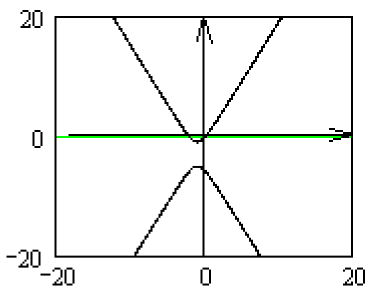

Рисунок 4

д) $y=-x^2+3x+4$

Решение

Заданная линия парабола, ветви направлены вниз, вершина в точке $\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$. Точки пересечения с осью Ox: $(-1;0)$, $(4;0)$. Точка пересечения с осью Oy: $(0;4)$. Построим схематически график линии (рис. 5).

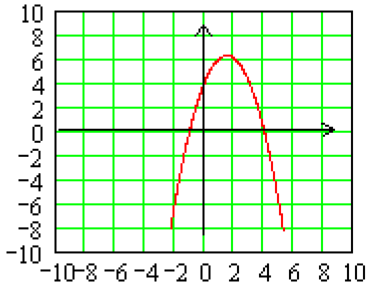

Рисунок 5

е) $x = y^2 - 5y + 4$

Решение

Заданная линия парабола, ветви направлены вправо, вершина в точке $(-2{,}25;\, 2{,}5)$. Точка пересечения с осью Ox: $(4;0)$, точки пересечения с осью Oy: $(0;1)$, $(0;4)$. Построим схематически график линии (рис. 6)

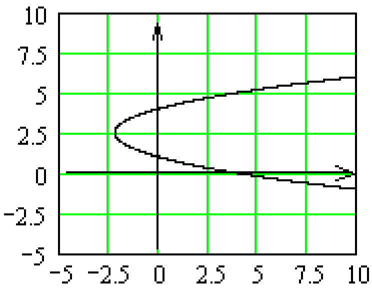

Рисунок 6

4.5 Прямая и плоскость в пространстве

Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - координаты заданной точки, $\bar{q}(m, n, p)$ - направляющий (параллельный) вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Общее уравнение плоскости:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где $\overline{n}(a;b;c)$ - нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(a;b;c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол между двумя прямыми находят как угол между их направляющими векторами.

Угол между двумя плоскостями находят как угол между их нормальными векторами.

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$ находят по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{q} \cdot \overline{n}|}{|\overline{q}| \cdot |\overline{n}|} = \frac{m \cdot a + n \cdot b + p \cdot c}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример 27.

а) Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;3;-1)$, $M_2(-2;5;0)$.

Решение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

$$\frac{x - 1}{-2 - 1} = \frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{z - (-1)}{0 - (-1)};$$

$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{1}$ - уравнение прямой M_1M_2.

б) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;4)$ параллельно вектору $\overline{q}(-2;7;5)$.

Решение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$
$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-(-3)}{7}=\frac{z-4}{5};$$
$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-4}{5}.$$

Пример 28.

а) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(4;3;1)$, $M_3(5;3;-1)$.

Решение

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-(-3) & z-2 \\ 4-1 & 3-(-3) & 1-2 \\ 5-1 & 3-(-3) & -1-2 \end{vmatrix}=0;$$
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}=0;$$
$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}-(y+3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0;$$
$$(x-1)\cdot(6\cdot(-3)-6\cdot(-1))-(y+3)\cdot(3\cdot(-3)-4\cdot(-1))+(z-2)\cdot(3\cdot 6-4\cdot 6)=0$$
$$(x-1)\cdot(-18+6)-(y+3)\cdot(-9+4)+(z-2)\cdot(18-24)=0;$$
$$(x-1)\cdot(-12)-(y+3)\cdot(-5)+(z-2)\cdot(-6)=0;$$
$-12x+5y-6z+39=0$ - уравнение плоскости $M_1M_2M_3$.

б) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;4)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(5;-2;1)$.

Решение

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0;$$
$$5\cdot(x-2)-2\cdot(y-(-3))+1\cdot(z-4)=0;$$

$$5x-2y+z-20=0.$$

Пример 29.

а) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;\,7;\,4)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+4z+8=0$.

Решение

Из уравнения плоскости найдём координаты нормального вектора: $\bar{n}(3;-2;4)$. Так как прямая перпендикулярна плоскости и нормальный вектор перпендикулярен плоскости, то прямая параллельна нормальному вектору и, значит, его координаты можно взять в качестве направляющего вектора прямой.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$
$$\frac{x-(-2)}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-4}{4};$$
$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-4}{4}.$$

б) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(6;\,1;\,-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+9}{2}=\dfrac{z-4}{4}$.

Решение

Из уравнения прямой найдём координаты направляющего вектора прямой: $\bar{q}(-5;2;4)$. Так как прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор прямой тоже перпендикулярен плоскости, значит, его можно взять в качестве нормального вектора плоскости.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0;$$
$$-5\cdot(x-6)+2\cdot(y-1)+4\cdot(z-(-3))=0;$$
$$-5x+2y+4z+40=0.$$

в) Найти угол между прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z+4}{-3}$ и плоскостью $2x-y+4z+7=0$.

Решение

Найдём координаты направляющего вектора прямой: $\overline{q}(1;2;-3)$. Найдём координаты нормального вектора плоскости: $\overline{n}(2;-1;4)$.

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{q}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|} = \frac{m\cdot a + n\cdot b + p\cdot c}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{q}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|} = \frac{|\ 1\cdot 2+2\cdot(-1)+(-3)\cdot 4\ |}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

4.6 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $A(0;-2)$, $B(1;-1)$

(Указание: см. пример 22)

Задание 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ параллельно вектору $\overline{a}(-2;7)$.

(Указание: см. пример 23)

Задание 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;-3)$ перпендикулярно вектору $\overline{a}(2;1)$.

(Указание: см. пример 24)

Задание 4. Построить график:

а) $4x-2y+8=0$, б) $x+2y^2-1=0$, в) $y-x^2+3=0$,

г) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$, д) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$, е) $x^2+6x+y^2=0$.

(Указание: см. пример 26)

Задание 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;-3;7)$ параллельно вектору $\overline{a}(3;2;-1)$:

(Указание: см. пример 27)

Задание 6. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(5;3;-4)$ $M_2(3;0;1)$:

(Указание: см. пример 27)

Задание 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0;-3;-4)$ перпендикулярно вектору $\overline{a}(4;\ -3;\ 0)$:

(Указание: см. пример 28)

Задание 8. Составить уравнение плоскости проходящей через три точки $M_1(1;-2;2)$; $M_2(2;-1;4)$; $M_3(3;-3;0)$

(Указание: см. пример 28)

Задание 9. Найти угол между прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+1}{-3}$ и плоскостью $2x-3y+z+4=0$

(Указание: см. пример 29)

Задание 10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;0;7)$ перпендикулярно прямой $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+3}{-2}$

(Указание: см. пример 29)

Задание 11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-4;-3;1)$ перпендикулярно плоскости $2x-4y+5z-1=0$

(Указание: см. пример 29)

5 ПРЕДЕЛЫ

Литература: [3, гл. VI, §4; 4, гл. 6]

5.1 Вычисление пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

При вычислении пределов часто используют следующие соотношения эквивалентностей:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\sim a_0x^n \quad - \quad \text{при } x\to\infty,$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ - первый замечательный предел и следствия из него:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x);$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ - второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)},$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x), \qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a, \qquad (1+\alpha(x))^m-1\sim m\alpha(x),$$

где $\alpha(\mathrm{x})$ - бесконечно малая величина;
$\beta(\mathrm{x})$ - бесконечно большая величина.

Пример 30. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-8}{4x^2-7x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left[\begin{matrix}2x^2+5x-8\sim 2x^2,\ x\to\infty\\ 4x^2-7x+1\sim 4x^2,\ x\to\infty\end{matrix}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Пример 31. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{x-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(4+x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(-x-4)=$$
$$=-4-4=-8$$

Пример 32.Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[tg3x\sim 3x,\ x\to 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$$

Пример 33. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-3}=\frac{-1+1}{-1-3}=0$$

Пример 34. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^{5x}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x-4}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2-(x-4)}{x-4}\right)^{5x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-4}\right)^{5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x-4}\cdot 5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{x}}=e^{30}.$$

Пример 35. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[1-e^{3x}\sim -3x,\ x\to 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 36. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{4x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[\sin(x+2)\sim(x+2),\ x+2\to 0\right]=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{4(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 37. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+4x-x^2+3x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^2+4x\sim x^2,\ x\to\infty \\ x^2-3x\sim x^2,\ x\to\infty \end{bmatrix}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}.$$

Пример 38. Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{2x-1}{x^2}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{2x-1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x-1-x^2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{-(x-1)^2\cdot x}{x^2\cdot(x-1)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{-(x-1)}{x}\right)}=e^{\frac{-(1-1)}{1}}=e^0=1.$$

5.2 Асимптоты

Асимптота – это прямая, к которой приближается точка графика функции $y=f(x)$ при неограниченном удалении этой точки в бесконечность.

$y=b$ - горизонтальная асимптота для функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

$x=a$ - вертикальная асимптота для функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a\pm0}f(x)=\pm\infty.$$

$y=kx+b$ - наклонная асимптота для функции $y=f(x)$, если существуют пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Пример 39. Найти асимптоты функции и сделать схематический чертёж

$$y=\frac{2}{x^2-4}.$$

Решение

Найдём вертикальные асимптоты: $x^2-4=0$. Прямые $x=2$ и $x=-2$ могут быть вертикальными асимптотами. Исследуем поведение функции в окрестностях точек.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{2}{(-0)\cdot 4}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{2}{(+0)\cdot 4}=+\infty$$

Следовательно, прямая $x=2$ будет вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{2}{(-4)\cdot(-0)}=+\infty$$
$$\lim_{x\to -2+0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{2}{(-4)\cdot(+0)}=-\infty$$

Следовательно, прямая $x=-2$ будет вертикальной асимптотой.

Найдём наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^3-4x}=\left[x^3-4x\sim x^3\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^3}=\frac{2}{\infty}=0.$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2-4}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2-4}\right)=\left[x^2-4\sim x^2\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)=\frac{2}{\infty}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота.

Построим схематически график функции (рис. 7).

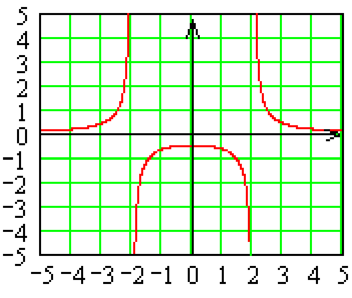

Рисунок 7

Пример 40. Найти асимптоты функции и сделать схематический чертёж

$$y = \frac{x^3 - 3x + 10}{2x^2 + 4x + 2}.$$

Решение

Найдём вертикальные асимптоты: $2x^2 + 4x + 2 = 0$. Прямая $x = -1$ может быть вертикальной асимптотой. Исследуем поведение функции в окрестностях точки.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3 - 3x + 10}{2(x+1)^2} = \frac{(-1-0)^3 - 3\cdot(-1-0) + 10}{2\cdot(-1-0+1)^2} = \frac{13}{2\cdot(-0)^2} = \frac{13}{2\cdot(+0)} + \infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3 - 3x + 10}{2(x+1)^2} = \frac{(-1+0)^3 - 3\cdot(-1+0) + 10}{2\cdot(-1+0+1)^2} = \frac{13}{2\cdot(+0)^2} = \frac{13}{2\cdot(+0)} + \infty$$

Следовательно, прямая $x = -1$ будет вертикальной асимптотой.

Найдём наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 10}{(2x^2 + 4x + 2)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 10}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x + 10 \sim x^3,\ x \to \infty \\ 2x^3 + 4x^2 + 2x \sim 2x^3,\ x \to \infty \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3 - 3x + 10}{2x^2 + 4x + 2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 10 - x\cdot(x^2 + 2x + 1)}{2x^2 + 4x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 10 - x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 + 4x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - 4x + 10}{2x^2 + 4x + 2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} -2x^2 - 4x + 10 \sim -2x^2,\ x \to \infty \\ 2x^2 + 4x + 2 \sim 2x^2,\ x \to \infty \end{array}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = -1.$$

Следовательно, прямая $y = \frac{1}{2}x - 1$ - наклонная асимптота.

Проверим, не будет ли график функции пересекать наклонную асимптоту:

$$\frac{x^3 - 3x + 10}{2x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2}x - 1;$$

$$\frac{x^3-3x+10}{x^2+2x+1}=x-2;$$
$$x^3-3x+10=(x-2)\cdot(x^2+2x+1);$$
$$x^3-3x+10=x^3-3x-2;$$
$$12=0.$$

Равенство неверное, значит, точек пересечения графика функции с наклонной асимптотаой нет.

Построим схематически график функции (рис.8).

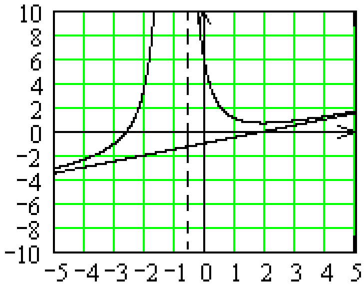

Рисунок 8

5.3 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4-9n^5+n}{3n^5+n^3}$, б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(3x+3)}{6x+6}$,

в) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2-16}{5x+20}$, г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{4x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$, е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{-8x}$.

(Ответ: а) -3; б) 0,5; в) -1,6; г) -0,5; д) 5,5; е) e^{-2})

Задание 2. Найти асимптоты графика функции и построить схематически график функции:

а) $y=\frac{4-x}{2x^2-15x+22}$; б) $y=\frac{2x^2+x+3}{x+6}$.

(Указание: см. примеры 39, 40)

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [3, ч.1, гл. VII, § 1, 2; 4, гл.VII, 7.1 – 7.7, гл.VIII, 8.3 – 8.6]

6.1 Вычисление производных. Таблица производных

Отыскание производной называется дифференцированием функции. Для вычисления производных используют таблицу производных (таблица 2).

Таблица 2

	y	y′
	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
	e^x	e^x
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	a^x	$a^x \cdot \ln a$
	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
3	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
4	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
5	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$

6.2 Основные правила дифференцирования

Пусть С – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1 $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

2 $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

3 $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2}$.

4 $f'(u(x)) = f'_u u'_x(x)$.

Пример 41. Найти производные функций

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}$;

Решение

$$y' = \left(2x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}\right)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7\left(x^{1/2}\right)' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x +$$
$$+7 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = 6x^2 - 10x + \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

б) $y = x^2 \ln x$

Решение

$$y' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

в) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

Решение

$$y' = \frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right) - \left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(1-e^x\right) - \left(1+e^x\right)\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2} =$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

г) $y=2\cos 3x$

Решение

$$y'=\left(2\cos 3x\right)'=2\left(-\sin 3x\right)\cdot\left(3x\right)'=2\left(-\sin 3x\right)\cdot 3=-6\sin 3x.$$

д) $y=\ln\left(6x-1\right)$

Решение

$$y'=\left(\ln\left(6x-1\right)\right)'=\frac{1}{6x-1}\cdot\left(6x-1\right)'=\frac{6}{6x-1}.$$

е) $y=\sin^8\frac{x}{8}$

Решение

$$y'=\left(\sin^8\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cdot\left(\sin\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cdot\left(\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cdot\frac{1}{8}=$$
$$=\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}.$$

ж) $y=\sqrt{x}arctg\sqrt{x}$

Решение

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'arctg\sqrt{x}+\sqrt{x}\left(arctg\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\frac{1}{2\left(1+x\right)}.$$

Пример 42. Вычислить производную y' в точке x_0, если

$y=\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2}, \quad x_0=1.$

Решение

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(4+x^2\right)'\left(4-x^2\right)-\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)'}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{2x\left(4-x^2\right)-\left(4+x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(4-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{8x-2x^3+8x+2x^3}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{16x}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{8x}{16-x^4};$$

$$y'\left(x_0\right)=y'(1)=\frac{8\cdot 1}{16-1^4}=\frac{8}{15}.$$

Пример 43. Показать, что функция $y=f\left(x\right)$ удовлетворяет уравнению:

$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(1-x^2\right)y'-xy=1.$

Решение

$$y'=\frac{\left(\arcsin x\right)'\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1+\arcsin x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставим y и y' в уравнение:

$$\left(1-x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$
$$1=1.$$

Получено верное равенство, следовательно, функция $y=f\left(x\right)$ удовлетворяет заданному уравнению.

6.3 Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y=f\left(x\right)$ называется производная от ее производной, то есть

$$y''=\left(y'\right)'.$$

Производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляются последовательным дифференцированием функции. В общем случае

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Пример 44. Найти производную второго порядка функции $y=f\left(x\right)$.

$$y=-\frac{3}{x^2-5}$$

Решение

$$y'=\left(-\frac{3}{x^2-5}\right)'=-3\left(\left(x^2-5\right)^{-1}\right)'=-3\cdot(-1)\left(x^2-5\right)^{-2}\left(x^2-5\right)'=\frac{3}{\left(x^2-5\right)^2}\cdot 2x=$$
$$=\frac{6x}{\left(x^2-5\right)^2}.$$

$$y''=\left(\frac{6x}{\left(x^2-5\right)^2}\right)'=\frac{(6x)'\cdot\left(x^2-5\right)^2-6x\cdot\left(\left(x^2-5\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2-5\right)^2\right)^2}=$$
$$=\frac{6\left(x^2-5\right)^2-6x\cdot 2\left(x^2-5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^4}=\frac{6\left(x^2-5\right)-24x^2}{\left(x^2-5\right)^3}=-\frac{30+18x^2}{\left(x^2-5\right)^3}.$$

Пример 45. Для функции $y=f\left(x\right)$ вычислить w:

$y = e^{-x}\sin x,\quad w = y'' + 2y' + 2y$.

Решение

$$y' = \left(e^{-x}\right)'\sin x + e^{-x}\left(\sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}\left(cosx - \sin x\right);$$

$$y'' = \left(e^{-x}\right)'\left(\cos x - \sin x\right) + e^{-x}\left(cosx - \sin x\right)' = -e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) +$$
$$+e^{-x}\left(-\sin x - \cos x\right) = -e^{-x}\left(\cos x - \sin x + \sin x + \cos x\right) = -2e^{-x}\cos x.$$

Подставим y, y', y'' в функцию w:

$$w = -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) + 2e^{-x}\sin x = -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\cos x -$$
$$-2e^{-x}\sin x + 2e^{-x}\sin x = 0.$$

6.4 Касательная и нормаль к плоской кривой

Уравнение касательной к кривой $y = f\left(x\right)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right),$$

а уравнение нормали–

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Пример 46. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 + 2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение Если $x_0 = 1$, то $y_0 = y\left(1\right) = 1^2 + 2 = 3$, а $f'\left(x\right) = 2x$ и $f'\left(x_0\right) = f'\left(1\right) = 2$.

Уравнение касательной примет вид

$$y - 3 = 2\left(x - 1\right) \qquad \text{или} \qquad 2x - y + 1 = 0,$$

а уравнение нормали

$$y - 3 = -\frac{1}{2}\left(x - 1\right) \qquad \text{или} \qquad x + 2y - 7 = 0.$$

6.5 Экстремум функции

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются критическими.

Достаточные условия экстремума

1. Пусть x_0–критическая точка функции $y = f(x)$; если при переходе через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум).

2. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, а именно максимум, если $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Признак возрастания и убывания функции Если непрерывная на интервале (a,b) и дифференцируемая внутри него функция $y = f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную для всех $x \in (a,b)$, то она возрастает (убывает) на этом интервале.

Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности.

Пример 47. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 10 + 16x - \frac{1}{3}x^3$.

Решение

Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = 16 - x^2$ и определяем критические точки: $y = 0$, когда $16 - x^2 = 0$, $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$. Исследуем знаки первой производной до и после критической точки (рис. 9).

Согласно признаку возрастания и убывания функции $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ и возрастает при $x \in (-4, 4)$.

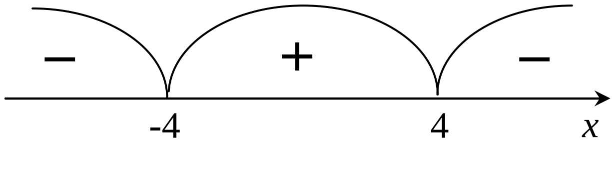

Рисунок 9

В точке $x_1 = -4$ функция достигает минимума, а в точке $x_2 = 4$ –максимума, при этом

$$y_{\min} = y(-4) = 10 + 16 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3} = -\frac{98}{3};$$
$$y_{\max} = y(4) = 10 + 16 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} = \frac{158}{3}.$$

6.6 Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) Если функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a,b) имеет $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$), то график функции является выпуклым (вогнутым) на интервале (a,b).

Если в точке $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, то точка М называется точкой перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба Если $M(x_0, f(x_0))$ –точка перегиба графика функции $f(x)$, то при $x = x_0$ вторая производная равна нулю или не существует.

Достаточное условие существования точки перегиба Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0 и пусть в самой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если в указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, график функции имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пример 48. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2 + x$.

Решение

Функция определена на всей числовой оси. Находим первую производную $y' = 3x^2 - 12x + 1$ и вторую производную $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ когда $x = 2$. Исследуем знаки второй производной до и после критической точки (рис.10).

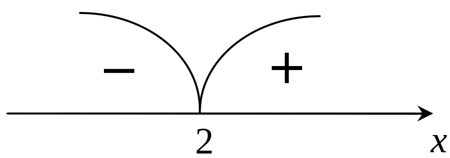

Рисунок 10

График функции является выпуклым при $x \in (-\infty, 2)$ и вогнутым при $x \in (2, +\infty)$, $x = 2$–точка перегиба графика.

6.7 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти производные функций

а) $y = 3x^2 - 5x + 1 - \dfrac{2}{x}$;

б) $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)e^x$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$;

г) $y = \sqrt{1 + 2tgx}$

(Указание: в п. а) применить правило дифференцирования 1, в п. б) – правило 2, в п. в) – 3, в п. г) – 4).

Задание 2. Вычислить производную y' в точке x_0, если

$y = \left(1 + \sqrt{x}\right)^3$, $x_0 = 1$. (Ответ: 6).

Задание 3. Найти производную второго порядка функции $y = f(x)$

а) $y = 1 - x^2 - x^4$

б) $y = \ln^2 x$ (Ответ: $\dfrac{2(1 - \ln x)}{x^2}$).

Задание 4. Доказать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению:

$y = \dfrac{x-3}{x+4}$, $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Задание 5. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 + x - 2$ в точке $x_0 = 1$ (Ответ: $4x - y - 4 = 0$–касательная, $x + 4y - 1 = 0$–нормаль).

Задание 6. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ (Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ возрастает, $(-2, 2)$ убывает, $y_{\max} = \frac{64}{15}$ при $x = -2$, $y_{\min} = -\frac{64}{15}$ при $x = 2$).

Задание 7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y = x^4 - 2x^3 + 5$ (Ответ: $x = 0$, $x = 1$–точки перегиба, интервалы: вогнутости–$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, выпуклости–$(0, 1)$).

7 ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Литература: [2, гл. VIII, § 1 – 4, 3, ч.1, гл. VIII, § 2, 4; 4, гл.XV, 15.3, 15.5]

7.1 Частные производные

Для вычисления частных производных применяются обычные правила и формулы дифференцирования.

Частная производная от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x вычисляется в предположении, что y–постоянная ($y = const$) и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x.

Частная производная от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y вычисляется в предположении, что x–постоянная ($x = const$) и обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Пример 49. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z = x^2 + 3xy - 2y + 4.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 3xy - 2y + 4\right)'_x = \left(x^2\right)'_x + (3xy)'_x - (2y)'_x + (4)'_x = \left(x^2\right)'_x +$$

$$+3y(x)'_x - 2y(1)'_x + (4)'_x = 2x + 3y\cdot 1 - 2y\cdot 0 + 0 = 2x + 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 3xy - 2y + 4\right)'_y = \left(x^2\right)'_y + (3xy)'_y - (2y)'_y + (4)'_y = x^2(1)'_y +$$

$$+3x(y)'_y - 2(y)'_y + (4)'_y = x^2\cdot 0 + 3x\cdot 1 - 2\cdot 1 + 0 = 3x - 2.$$

Пример 50. Дана функция $z = f(x, y)$. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

$z = x^2 - xy + y^2 - 3x.$

Решение

Найдем частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - xy + y^2 - 3x\right)'_x = \left(x^2\right)'_x - (xy)'_x + \left(y^2\right)'_x - (3x)'_x = 2x - y - 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - xy + y^2 - 3x\right)'_y = \left(x^2\right)'_y - (xy)'_y + \left(y^2\right)'_y - (3x)'_y = -x + 2y.$$

Решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0; \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 2\cdot 2y - y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 3y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases}$$

7.2 Градиент функции

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющий своими координатами частные производные функции z:

$$grad\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Пример 51. Найти градиент скалярного поля

$$u=\frac{2x}{y^2}-4y^3+\frac{1}{6x^3}.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{2x}{y^2}-4y^3+\frac{1}{6x^3}\right)'_x=\frac{2}{y^2}(x)'_x-4y^3(1)'_x+\frac{1}{6}\left(x^{-3}\right)'_x=\frac{2}{y^2}\cdot 1-4y^3\cdot 0+$$

$$+\frac{1}{6}\left(-3x^{-4}\right)=\frac{2}{y^2}-\frac{1}{2x^4};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{2x}{y^2}-4y^3+\frac{1}{6x^3}\right)'_y=2x\left(y^{-2}\right)'_y-4\left(y^3\right)'_x+\frac{1}{6x^3}(1)'_x=2x\left(-2y^{-1}\right)-$$

$$-4\cdot 3y^2++\frac{1}{6x^3}=-\frac{4x}{y^3}-12y^2.$$

Тогда

$$grad\,u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{2}{y^2}-\frac{1}{2x^4};-\frac{4x}{y^3}-12y^2\right).$$

7.3 Частные производные второго порядка

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, тогда частными производными второго порядка называются частные производные от производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Частные производные второго порядка обозначаются

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\qquad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\qquad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ –смешанные производные, их значение не зависит от порядка дифференцирования, то есть $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Поэтому достаточно вычислить только одну смешанную производную.

Пример 52. Найти частные производные второго порядка функции

$z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3\right)'_x = 6x + 2y^2 - 4y + 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3\right)'_y = 4xy - 4x + x^2 - 3y^2.$$

Теперь вычислим частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6x + 2y^2 - 4y + 2xy\right)'_x = 6 + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(6x + 2y^2 - 4y + 2xy\right)'_y = 4y - 4 + 2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(4xy - 4x + x^2 - 3y^2\right)'_y = 4x - 6y.$$

Пример 53. Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что $F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$

$$z = \ln\left(e^x + e^y\right); \qquad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Решение

Найдем частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)'_x=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot\left(e^x+e^y\right)'_x=\frac{e^x}{e^x+e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)'_y=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot\left(e^x+e^y\right)'_y=\frac{e^y}{e^x+e^y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)'_x=\frac{\left(e^x\right)'_x\cdot\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot\left(e^x+e^y\right)'_x}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+e^y\right)^2}=$$
$$=\frac{e^{2x}+e^{x+y}-e^{2x}}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)'_y=e^x\left(\left(e^x+e^y\right)^{-1}\right)'_y=\frac{-e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{-e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)'_y=\frac{\left(e^y\right)'_y\cdot\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot\left(e^x+e^y\right)'_y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^y\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=$$
$$=\frac{e^{x+y}+e^{2y}-e^{2y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

Подставим значения частных производных второго порядка в функцию F.

$$F=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}\cdot\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}-\left(\frac{-e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}\right)^2=\frac{e^{2x+2y}}{\left(e^x+e^y\right)^4}-\frac{e^{2x+2y}}{\left(e^x+e^y\right)^4}=0.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $z=x^3y-y^3x$;

б) $z=x^y$ (Ответ: б) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$).

Задание 2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$ и вычислить их значение в точке $M(1,1)$ (Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = 6,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = -13,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = -8$).

Задание 3. Доказать, что функция $z = x^3 - 3xy^2$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

8 НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [3, гл. IX; 4, гл. 10; 5, гл. 1-4; 8, р. II, гл. 1, § 1-5].

8.1 Интегрирование табличных функций

Интегралы, приведённые ниже являются табличными (таблица 3). Большинство остальных интегралов может быть приведено к ним с помощью основных методов интегрирования.

Таблица 3

№	Формула
1	$\int A dx = Ax + C$, $A = const$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3	$\int \cos x dx = \sin x + C$
4	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
7	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
8	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{x+a}{x-a} \right\| + C$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$

11	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
14	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
15	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Пример 55: Найти неопределённые интегралы

а) $\int \left(\sin x + 2 + \sqrt{x}\right) dx$

Решение

$$\int \left(\sin x + 2 + \sqrt{x}\right) dx = \int \left(\sin x + 2 + x^{1/2}\right) dx = -\cos x + 2x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C;$$

б) $\int \left(\frac{7}{x} + \frac{6}{x^3} + 5x\right) dx$

Решение

$$\int \left(\frac{7}{x} + \frac{6}{x^3} + 5x\right) dx = \int \left(\frac{7}{x} + 6x^{-3} + 5x\right) dx = 7\ln|x| + 6\frac{x^{-2}}{-2} + 5\frac{x^2}{2} + C.$$

Замечание: при интегрировании произведения нельзя интегрировать каждый множитель отдельно:

$$\int x^2 \cos x dx \neq \frac{x^3}{3} \cdot \sin x + C.$$

8.2 Интегрирование по формуле $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Данная формула применяется в случае, если в табличном интеграле вместо переменной x стоит выражение вида $ax+b$. Тогда, одновременно с применением соответствующей формулы из таблицы перед результатом записывается коэффициент $\frac{1}{a}$.

Пример 56: Найти неопределённые интегралы

а) $\int \cos(2x+7)dx$

Решение

$$\int \cos(2x+7)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+7) + C;$$

б) $\int e^{3-5x}dx$

Решение

$$\int e^{3-5x}dx = \int e^{-5x+3}dx = \frac{1}{-5}e^{-5x+3} + C;$$

в) $\int \cos 3x dx$

Решение

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C;$$

г) $\int \frac{7dx}{5+4x}$

Решение

$$\int \frac{7dx}{5+4x} = 7\int \frac{dx}{4x+5} = 7\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+5| + C = \frac{7}{4}\ln|4x+5| + C;$$

д) $\int (11x+6)^4 dx$

Решение

$$\int (11x+6)^4 dx = \frac{1}{11}\frac{(11x+6)^5}{5} + C;$$

е) $\int \frac{4dx}{(3x+6)^7}$

Решение

$$\int \frac{4dx}{(3x+6)^7} = 4\int (3x+6)^{-7}\,dx = 4\frac{1}{3}\frac{(3x+6)^{-6}}{-6} + C;$$

ж) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^4}\,dx$

Решение

$$\int \sqrt[3]{(2x+1)^4}\,dx = \int (2x+1)^{4/3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{7/3}}{7/3} + C.$$

8.3 Интегрирование с помощью замены переменной

Данный метод интегрирования применяется в случае, если под знаком интеграла одновременно находится некоторая функция и её производная. Например, x^2 и $2x$, x^3 и $3x^2$, $\ln x$ и $\frac{1}{x}$, $\sin x$ и $\cos x$ и т. д.

В этом случае вводят замену, где через новую переменную обозначают функцию, тогда её дифференциал легко выразить через производную. Например: $t = x^2$, $dt = 2xdx$; $t = x^3$, $dt = 3x^2dx$; $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$. Дифференциал dt всегда находится как производная от того, чему равно t, домноженная на dx, т. е. если $t = x^2$, то $dt = (x^2)'\,dx = 2xdx$.

После введённой замены интеграл, как правило, становится табличным, либо легко сводится к одной из табличных формул.

Пример 57: Найти неопределённые интегралы

а) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

Решение

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x, \\ dt = (\ln x)'\,dx, \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C;$$

б) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

Решение

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C;$$

в) $\int \sqrt[5]{\sin x} \cdot \cos x dx$

Решение

$$\int \sqrt[5]{\sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \sqrt[5]{t} \cdot dt = \frac{t^{6/5}}{6/5} + C = \frac{5}{6} \sin^{6/5} x + C;$$

г) $\int \sqrt[5]{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx$

Решение

$$\int \sqrt[5]{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 3x \\ dt = 3\cos 3x dx \ \ |:3 \\ \frac{1}{3} dt = \cos 3x dx \end{array} \right| = \int \sqrt[5]{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{6/5}}{6/5} + C =$$

$$= \frac{5}{18} \sin^{6/5} x + C.$$

8.4 Интегрирование по частям

Данный метод интегрирования чаще всего применяется, если интеграл содержит произведение многочлена (например x, $3x+2$, x^2, x^2+1, $2x^2$, $\sqrt{x}$ и т. д.) и одной из функций: $\cos x$, $\sin x$, e^x, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\ln x$.

Используется формула «интегрирования по частям»:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,$$

где через u обозначается $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\ln x$, либо (если присутствуют $\sin x$, $\cos x$, e^x), многочлен.

Пример 58: Найти неопределённые интегралы

а) $\int (2x+3)\cos 4x dx$

Решение

Пусть $u = 2x+3$, тогда $dv = \cos 4x dx$. Зная u, легко можем найти du: $du = (2x+3)' dx = 2dx$. Найдём v как интеграл от того, чему равно dv: $v = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x$. Подставляя u, v, du, dv в формулу «интегрирования по частям», находим

$$\int (2x+3)\cos 4x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ dv = \cos 4x dx & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right| = (2x+3)\cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x \cdot 2dx =$$

$$= (2x+3)\cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\cdot 2\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sin 4x - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + C.$$

б) $\int x e^{7-2x} dx$

Решение

$$\int x e^{7-2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = (x)' dx = dx \\ dv = e^{7-2x}dx & v = \int e^{7-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{7-2x} \end{matrix} \right| = x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{7-2x}\right) -$$

$$-\int\left(-\frac{1}{2}e^{7-2x}\right)\cdot dx = -\frac{1}{2}xe^{7-2x} + \frac{1}{2}\int e^{7-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{7-2x} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{7-2x} + C;$$

в) $\int x \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} dx =$

Решение

$$= \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} & du = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)' dx = \frac{dx}{\sqrt{1+\left(1/x^2\right)^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2dx}{x\sqrt{x^4+1}} \\ dv = xdx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{-2dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{2}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}} =$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}+\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

Вычислим интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$ отдельно.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}=\left|\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=\left(x^2\right)' dx=2xdx \ \ |:2 \\ \frac{1}{2}dt=xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right|+C\,.$$

Значит, исходный интеграл равен

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right|+C\,.$$

г) $\int\sqrt{x}\ln xdx$

Решение

$$\int\sqrt{x}\ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\left(\ln x\right)' dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=\sqrt{x}dx & v=\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\end{matrix}\right|=\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-$$

$$-\int\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+C$$

8.5 Интегрирование дробно-рациональных функций

Можно интегрировать только дроби, степень числителя которых меньше степени знаменателя. Если степень числителя больше или равна степени знаменателя (например, $\frac{2x+x^3+3}{x^2+6x+1}$, $\frac{2x^2+3x+3}{x^2+5}$), то перед интегрированием у дроби нужно выделить целую часть (например, с помощью деления «в столбик» числителя на знаменатель). В результате деления будут получены многочлен и дробь, степень числителя которой меньше степени знаменателя, т. е. дробь, которую уже можно интегрировать.

Пример 59: Выделить целую часть дроби

а) $\dfrac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+x^2+x}$

Решение

$$\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+x^2+x}=4x+4+\frac{-8x^2-7x-3}{x^3+x^2+x},$$

так как при делении «в столбик» $4x^4+8x^3-3x-3$ на x^3+x^2+x получаем частное $4x+4$ и остаток $-8x^2-7x-3$;

б) $\dfrac{x^4+4}{x^2+3x-1}$

Решение

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Вначале рассмотрим интегралы от трёх типов дробей (называемых простейшими), к которым можно свести любые другие интегралы, содержащие дробь.

I. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax+b}$ II. $\displaystyle\int\frac{dx}{(ax+b)^m}$ III. $\displaystyle\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q},\ D<0$

Пример 60: Найти неопределённые интегралы
Тип I:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{7x+2}$

Решение

$$\int\frac{dx}{7x+2}=\frac{1}{7}\ln|7x+2|+C;$$

б) $\displaystyle\int\frac{3dx}{2-8x}$

Решение

$$\int \frac{3dx}{2-8x} = 3\int \frac{dx}{-8x+2} = 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\ln|-8x+2| + C = -\frac{3}{8}\ln|-8x+2| + C.$$

Тип II:

а) $\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$

Решение

$$\int \frac{dx}{(5x+2)^4} = \int (5x+2)^{-4}\,dx = \frac{1}{5}\frac{(5x+2)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15}(5x+2)^{-3} + C;$$

б) $\frac{8dx}{(9-x)^3}$

Решение

$$\int \frac{8dx}{(9-x)^3} = 8\int \frac{dx}{(9-x)^3} = 8\int (9-x)^{-3} = 8\cdot\frac{1}{-1}\frac{(9-x)^{-2}}{-2} + C = 4(9-x)^{-2} + C.$$

Тип III:

а) $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$

Решение

Решение интегралов третьего типа начинается с выделения в знаменателе полного квадрата, используя одну из формул сокращённого умножения $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ или $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{x^2-2\cdot 3x+25} = \int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot 3x+3^2\right)-3^2+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16}$$

Полученный интеграл – табличный (формула № 7 таблицы интегралов), где $a^2=16$. Значит

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{4}arctg\frac{x-3}{4} + C;$$

б) $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2-8x+25}$

Решение

Выделим полный квадрат

$$\int\frac{(3x-5)dx}{x^2-8x+25}=\int\frac{(3x-5)dx}{x^2-2\cdot 4x+25}=\int\frac{(3x-5)dx}{(x^2-2\cdot 4x+4^2)-4^2+25}=$$
$$=\int\frac{(3x-5)dx}{(x-4)^2+9}$$

Введём замену $t=x-4$, тогда $x=t+4$, а $dx=(t+4)'dt=dt$. Подставим в интеграл

$$\int\frac{(3x-5)dx}{(x-4)^2+9}=\int\frac{(3\cdot(t+4)-5)dt}{t^2+9}=\int\frac{(3t+12-5)dt}{t^2+9}=\int\frac{(3t+7)dt}{t^2+9}=\int\frac{3tdt}{t^2+9}+$$
$$+\int\frac{7dt}{t^2+9}=3\int\frac{tdt}{t^2+9}+7\int\frac{dt}{t^2+9}=3\int\frac{tdt}{t^2+9}+7\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$
$$=3\int\frac{tdt}{t^2+9}+\frac{7}{3}arctg\frac{x-4}{3}+C.$$

Рассмотрим интеграл $\int\frac{tdt}{t^2+9}$ отдельно, используя метод замены переменной.

$$\int\frac{tdt}{t^2+9}=\left|\begin{array}{c} z=t^2 \\ dz=(t^2)'dt=2tdt|:2 \\ \frac{1}{2}dz=tdt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z+9}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z+9}=\frac{1}{2}\ln|z+9|+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|t^2+9|+C.$$

Значит, исходный интеграл равен

$$3\cdot\frac{1}{2}\ln|t^2+9|+\frac{7}{3}arctg\frac{x-4}{3}+C=\frac{3}{2}\ln|(x-4)^2+9|+\frac{7}{3}arctg\frac{x-4}{3}+C.$$

К сумме дробей рассмотренных выше трёх типов можно свести любую дробь, если степень её числителя меньше степени знаменателя. В этом случае обычно используют метод «неопределённых коэффициентов», который заключается в следующем:

а) Знаменатель дроби раскладывается на множители;

б) дробь записывается в виде суммы вышеперечисленных трёх типов дробей по правилу:

$$\frac{\dots}{(x-a)(x-b)\dots(x-c)^k\left(x^2+mx+n\right)\dots\left(x^2+px+q\right)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots$$
$$+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{(x-c)^2}+\frac{E}{(x-c)^3}+\dots+\frac{F}{(x-c)^k}+$$
$$+\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}+\dots+\frac{Px+Q}{x^2+px+q},$$

где каждому простому множителю первой степени $(x-a)$ соответствует дробь вида $\frac{A}{x-a}$, каждому повторяющемуся множителю $(x-c)^k$ соответствует сумма дробей, состоящая из k слагаемых $\frac{C}{x-c}+\frac{D}{(x-c)^2}+\frac{E}{(x-c)^3}+\dots+\frac{F}{(x-c)^k}$ и каждому множителю второй степени x^2+mx+n соответствует дробь вида $\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}$;

в) с помощью приведения правой части к общему знаменателю и сравнения коэффициентов при соответствующих степенях x в числителях левой и правой частей определяются значения A, B, C и т. д.

Пример 61: Найти неопределённые интегралы

а) $\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$

Решение

Степень числителя данной дроби меньше степени знаменателя, целую часть выделять не нужно. Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^3+x^2-6x=x\left(x^2+x-6\right)$$

Находим корни многочлена x^2+x-6:

$$x^2+x-6=0;$$
$$D=1-4\cdot1\cdot(-6)=25,\ \ x_1=\frac{-1-5}{2}=-3,\ \ x_2=\frac{-1+5}{2}=2;$$

Используя формулу разложения на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, получаем $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$. Значит $x^3+x^2-6x=x(x+3)(x-2)$.

Далее запишем дробь в виде суммы простейших дробей используя метод «неопределённых коэффициентов»:

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3};$$

приведём три дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

и раскроем скобки

$$\frac{A(x^2+x-6)+B(x^2+3x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+3)}=\frac{Ax^2+Ax-6A+Bx^2+3Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x+3)}$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\frac{(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A}{x(x-2)(x+3)}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в числителе у дроби $\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}$ и у последней дроби. Получим, что $A+B+C=0$ (так как у выражения $7x-5$ отсутствует слагаемое содержащее x^2), $A+3B-2C=7$ и $-6A=-5$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=7 \\ -6A=-5 \end{cases}$$

Используя для решения метод Крамера или метод подстановки, находим:

$$A=\frac{5}{6}, \qquad B=\frac{9}{10}, \qquad C=-\frac{26}{15}.$$

Значит, исходная дробь раскладывается в сумму простейших дробей следующим образом:

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{5/6}{x}+\frac{9/10}{x-2}+\frac{-26/15}{x+3}.$$

Вычислим интеграл от полученной суммы:

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx=\int\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx=$$
$$=\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C.$$

б) $\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

Решение

Целую часть дроби выделять не нужно, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Разложим знаменатель дроби на множители. Для этого найдём корни уравнения $x^3-x^2-x+1=0$. Так как уравнение третьей степени, то возможно его корнем будет один из делителей свободного члена, т. е. 1. К делителям 1 относятся числа +1 и –1. Подставляя число +1 в уравнение вместо x получим верное равенство ($1^3-1^2-1+1=0$), значит, число 1 является корнем уравнения. Поэтому, одним из множителей будет выражение $(x-1)$ (если число α – корень, то $(x-\alpha)$ – множитель). Для дальнейшего разложения разделим выражение x^3-x^2-x+1 на один из его множителей $(x-1)$, используя, например метод деления «в столбик». Если деление выполнено правильно, то остаток должен быть равен 0, а частное и будет вторым искомым множителем. Выполнив деление получим, что частное равно x^2-1, значит $x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$. В свою очередь, x^2-1 также раскладывается на множители с помощью нахождения корней:

$$x^2-1=0;$$
$$x_1=1,\qquad x_2=-1.$$

Значит, $x^2-1=(x-1)(x+1)$ (аналогичный результат можно было получить с помощью формул сокращённого умножения). Учитывая найденные три множителя:

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1).$$

Далее разложим дробь, заданную в условии на сумму простейших:

$$\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{x+5}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1};$$

приведём дроби в правой части к общему знаменателю и раскроем скобки:

$$\frac{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{Ax^2-A+Bx+B+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)^2(x+1)};$$

сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\frac{(A+C)x^2+(B-2C)x-A+B+C}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях у исходной и последней дробей. Получим:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-2C=1 \\ -A+B+C=5 \end{cases}$$

Решив систему, находим

$$A=-1, \qquad B=3, \qquad C=1$$

Получаем разложение данной дроби:

$$\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

Подставим найденное разложение в интеграл:

$$\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$\int\left(\frac{-1}{x-1}+3(x-1)^{-2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\ln|x-1|+3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\ln|x+1|+C.$$

в) $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$

Решение

У данной дроби степень числителя больше степени знаменателя, поэтому перед интегрированием нужно выделить целую часть. При делении числителя на знаменатель получаем, что остаток равен $2x^2+10x-5$, а частное $x-2$. Значит

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Представим дробь $\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}$ в виде суммы простейших дробей. Сначала разложим знаменатель на множители:

$$x^3+2x^2+5x = x\left(x^2+2x+5\right)$$

Это разложение окончательное, так как уравнение $x^2+2x+5=0$ действительных корней не имеет, его дискриминант меньше 0. Следовательно, дробь можно представить в виде

$$\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{2x^2+10x-5}{x\left(x^2+2x+5\right)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

Приведём дроби в правой части к общему знаменателю

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{A\left(x^2+2x+5\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+2x+5\right)},$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые в числителе

$$\frac{Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+2x+5\right)} = \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+5A}{x\left(x^2+2x+5\right)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в числителе первой и последней дроби, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+C=10 \\ 5A=-5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим, что $A=-1$. Подставив значения A в первое уравнение, получим

$$B=2-(-1)=3.$$

Находим C из второго уравнения:

$$C=10-2(-1)=12.$$

Значит, исходная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}=x-2+\frac{-1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}.$$

Вычислим интеграл

$$\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx=\int\left(x-2+\frac{-1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}\right)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x|+\int\frac{3x+12}{x^2+2x+5}dx$$

Рассмотрим отдельно последний интеграл который является простейшим интегралом третьего типа. Выделим в знаменателе полный квадрат.

$$\int\frac{3x+12}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{3x+12}{\left(x^2+2\cdot 1x+1^2\right)-1^2+5}dx=\int\frac{3x+12}{(x+1)^2+4}dx.$$

Используем метод замены переменной.

$$\int\frac{3x+12}{(x+1)^2+4}dx=\left|\begin{array}{c} t=x+1\\ x=t-1\\ dx=(t-1)'dt=dt\end{array}\right|=\int\frac{3(t-1)+12}{t^2+4}dt=$$
$$\int\frac{3t+9}{t^2+4}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+4}+9\int\frac{dt}{t^2+4}=3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+9\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C=$$
$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+4\right|+\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Значит

$$\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+4\right|+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

8.6 Интегрирование тригонометрических выражений

I. Интегралы вида

$$\int \sin^m x dx, \qquad \int \cos^m x dx$$

а) если m чётное. Для вычисления интеграла используются формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 62: Найти неопределённые интегралы

а) $\int \cos^2 3x dx$

Решение

$$\int \cos^2 3x dx=\int \frac{1+\cos 6x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C;$$

б) $\int \sin^4 x dx$

Решение

$$\int \sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)+C.$$

б) если m нечётное. Для вычисления интеграла используются формулы

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

Пример 63: Найти неопределённый интеграл

$$\int \sin^3 4x dx$$

Решение

$$\int \sin^3 4x dx = \int \sin^2 4x \cdot \sin 4x dx = \int \left(1-\cos^2 4x\right)\sin 4x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \cos 4x \\ dt = -4\sin 4x dx \,\big|: -4 \\ -\frac{1}{4}dt = \sin 4x dx \end{array} \right| = \int \left(1-t^2\right)\left(-\frac{1}{4}dt\right) = -\frac{1}{4}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos 4x - \frac{\cos^3 4x}{3}\right) + C$$

Аналогичным образом поступают и при вычислении интегралов вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

если хотя бы одно из чисел m или n нечётное.

II. Интегралы вида

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \ \int \cos\alpha x \cos\beta x dx, \ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx$$

решаются с помощью одной из формул:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 64: Найти неопределённый интеграл

$$\int \sin 5x \cos 2x dx$$

Решение

$$\int \sin 5x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(5x-2x) + \sin(5x+2x)\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin 7x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{7}\cos 7x\right)+C.$$

III. Интегралы от дроби, содержащей $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$. Интегрируются с помощью замены

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

При этом

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

В результате получают интегралы от дробно-рациональных функций, примеры решения которых подробно рассмотрены в предыдущем параграфе.

Пример 65: Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$$

Решение

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t+3(1-t^2)+5(1+t^2)}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\frac{2}{2}\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+2\cdot 2t+2^2)-2^2+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\frac{(t+2)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C.$$

8.7 Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left((ax+b), \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right)$$

интегрируются с помощью замены переменной

$$ax+b=t^s, \qquad s=НОК(n_1,n_2,\ldots,n_k).$$

Такая подстановка позволяет свести интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции.

Пример 66: Найти неопределённый интеграл

а) $\int \frac{-\sqrt[6]{x-2}+4\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt[3]{x-2}}dx$

Решение

Наименьшее общее кратное чисел 6, 2 и 3 (показателей корней, присутствующих в интеграле) равно 6. Обозначим

$$x-2=t^6$$

Тогда

$$x=t^6+2, \qquad dx=\left(t^6+2\right)' dt=6t^5dt$$

Сделаем замену в интеграле

$$\int \frac{-\sqrt[6]{x-2}+4\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt[3]{x-2}}dx=\int \frac{-\sqrt[6]{t^6}+4\cdot\sqrt{t^6}}{\sqrt{t^6}+2\cdot\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5dt=$$
$$=6\int \frac{-t+4t^3}{t^3+2t^2}t^5dt=6\int \frac{\left(-t+4t^3\right)t^5}{(t+2)t^2}dt=6\int \frac{\left(-t+4t^3\right)t^3}{t+2}dt=$$
$$=6\int \frac{-t^4+4t^6}{t+2}dt=6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt$$

Данный интеграл представляет собой интеграл от дроби, степень числителя которой больше степени знаменателя. Выделим целую часть:

$$\frac{4t^6-t^4}{t+2}=4t^5-8t^4+15t^3-30t^2+60t-120+\frac{240}{t+2}$$

Значит

$$6\int\frac{4t^6-t^4}{t+2}dt=6\int\left(4t^5-8t^4+15t^3-30t^2+60t-120+\frac{240}{t+2}\right)dt=$$

$$=6\left(4\frac{t^6}{6}-8\frac{t^5}{5}+15\frac{t^4}{4}-30\frac{t^3}{3}+60\frac{t^2}{2}-120t+240\ln|t+2|\right)+C=$$

$$=6\left(4\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^6}{6}-8\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^5}{5}+15\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^4}{4}-30\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^3}{3}+60\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2}{2}-\right.$$

$$\left.-120\sqrt[6]{x-2}+240\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right|\right)+C=$$

$$=4(x-2)-\frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5}+\frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-60\sqrt[2]{x-2}+180\sqrt[3]{x-2}-$$

$$\left.-720\sqrt[6]{x-2}+1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right|\right)+C.$$

8.8 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти неопределённые интегралы

а) $\int\sin(1-5x)dx$

б) $\int tg2xdx$

в) $\int\frac{\cos 3xdx}{\sqrt{\sin 3x}}$

г) $\int(x+1)e^{x^2+2x}dx$

д) $\int x^2\cos xdx$

е) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}$

ж) $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}dx$

з) $\int\frac{3x+1}{x^2+8x+25}dx$ (Ответ: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2"+8x+25\right|-\frac{11}{3}arctg\frac{x+4}{3}+C$)

и) $\int\frac{7x-11}{x^2-x-6}dx$ (Ответ: $2\ln|x-3|+5\ln|x+2|+C$)

к) $\int\frac{3x^5-4x^4+x^3-7x^2+x-2}{x^3-2x^2}dx$ (Ответ: $x^3+x^2+5x-\frac{1}{x}+3\ln|x-2|+C$)

(Указание: в п. б) - г) применить метод замены переменной, в п. д) дважды применить метод интегрирования по частям, в п. з)-к) применить методы интегрирования дробно-рациональных функций)

9 ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Литература: [3, ч. 1 гл. Х § 1,3; 4, гл. 11 § 1-6,9,10; 8, р. 2, гл. II,III].

9.1 Применение понятия производной

Пример 67. Капитал в 8 млн. грн. может быть размещен в банке под 40% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 150% . Издержки задаются квадратичной зависимостью $\frac{x^2}{20}$. Прибыль облагается налогом в р%. При каких значениях р вложение в производство является более эффективным, чем чистое размещение капитала в банке?

Решение. Весь капитал 8 (млн. грн.) разделим на части: х (млн) – в производство, $(8-x)$ – в банк под проценты. Тогда через год из банка можно взять $(8-x)+(8-x)0{,}4$ – то что вложили и плюс проценты.

$$(8-x)+(8-x)0{,}4=(8-x)(1+0{,}4)=(8-x)1{,}4.$$

Доход от производства через год составит (учитывая начисленные 150%):

$$x+x\frac{150}{100}=x+1{,}5x=2{,}5x.$$

Тогда прибыль от вложения в производство это доход минус издержки $\frac{x^2}{20}$, т. е.

$$2{,}5x-\frac{x^2}{20}.$$

Чистая прибыль окажется равной

$$2{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(2{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)\frac{p}{100},$$

т. к. прибыль облагается налогом в р%. Обозначим через $i=\frac{p}{100}$, тогда

$$2{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(2{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)\frac{p}{100}=2{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(2{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)i=\left(2{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)(1-i)$$

Через год общая сумма (от банка и от производства) прибыли составит:

$$S(x)=1{,}4(8-x)+\left(2{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)(1-i).$$

Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение этой функции на отрезке [0,7]. Для этого находим производную

$$S'(x)=1{,}4(-1)+\left(2{,}5-\frac{2x}{20}\right)(1-i)=-1{,}4+\left(2{,}5-\frac{x}{10}\right)(1-i)$$

и приравниваем её к 0:

$$\left(2{,}5-\frac{x}{10}\right)(1-i)=1{,}4;$$

$$2{,}5-\frac{x}{10}=\frac{1{,}4}{1-i};$$

$$\frac{x}{10}=2{,}5-\frac{1{,}4}{1-i};$$

$$x=\left(2{,}5-\frac{1{,}4}{1-i}\right)10=25-\frac{14}{1-i}.$$

Значит критическая точка $x_0=25-\frac{14}{1-i}$. Т. к. ищется наибольшее значение функции на отрезке [0,7], то эта точка должна принадлежать отрезку, т. е. $0<x_0<7$:

$$25-\frac{14}{1-i}>0, \qquad 25>\frac{14}{1-i}, \qquad 1-i>\frac{14}{25}, \qquad i<\frac{21}{25}=0{,}84,$$

т. к. $i=\frac{p}{100}$, то

$$\frac{p}{100}<0{,}84, \qquad p<84.$$

Ответ: p<84%.

Пример 68. Опытным путём установлены функции спроса $q(p)$ и предложения $S(p)$:

$$q(p)=\frac{p+8}{p+2}, \qquad S(p)=p+0.5.$$

где p – цена товара, q и S – количество товара покупаемого и предлагаемого на продажу. Найти:

а) равновесную цену;

б) эластичность спроса и предложения для этой цены. Сделать экономический анализ результатов;

в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение. Выполним каждый пункт задания отдельно:

а) Равновесная цена это цена, при которой спрос и предложение равны:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0.5;$$

$$p + 8 = (p+2)\left(p + \frac{1}{2}\right) = p^2 + \frac{5}{2}p + 1;$$

$$p = p^2 + \frac{5}{2}p + 1 - 8 = p^2 + \frac{5}{2}p - 7;$$

$$p^2 + \frac{3}{2}p - 7 = 0;$$

$$p_1 = 2$$

($p_2 = -\frac{7}{2}$ не подходит по смыслу задачи т. к. p это цена).

б) Эластичность спроса вычисляется по формуле

$$E_p(q) = q'_p \cdot \frac{p}{q(p)}$$

$$q'_p = \left(\frac{p+8}{p+2}\right)' = \frac{p+2-(p+8)}{(p+2)^2} = \frac{-6}{(p+2)^2},$$

$$E_p(q) = q'_p \cdot \frac{p}{q(p)} = \frac{-6}{(p+2)^2} \cdot \frac{p}{\left(\frac{p+8}{p+2}\right)} = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

При p=2

$$E_2(q) = \frac{-6 \cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0{,}3.$$

Эластичность предложения вычисляется по формуле

$$E_p(S) = S'_p \cdot \frac{p}{S(p)}$$

$$S'_p=(p+0.5)'=1,$$

$$E_p(S)=S'_p\cdot\frac{p}{S(p)}=1\cdot\frac{p}{p+0,5}$$

При p=2

$$E_2(S)=\frac{2}{2+0,5}=0,8.$$

Т. к. $|E_2(q)|<1$ и $|E_2(S)|<1$, то спрос и предложение не эластичны относительно цены. Это означает что изменение цены не приведёт к резкому изменению спроса и предложения.

При увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на 1,5% (т. к. $-0,3\cdot5=-1,5$), следовательно доход возрастает на 3,5%.

Пример 69. Статистическим путём установлено, что объём продукции цеха $u(t)$ усл. ед. в течении рабочего дня описывается функцией

$$u(t)=\frac{-20}{3}t^3+60t^2+160t+240,\qquad 1\le t\le 8,$$

где t – время в часах.

Найти:

а) Производительность труда, скорость и темп её изменения через 3 часа после начала работы;

б) В какой момент времени производительность труда будет наибольшей. Результат пояснить аналитически и графически. Сделать экономический анализ результатов.

Решение

а) производительность труда $z(t)$ рассчитывается по формуле $z(t)=u'(t)$

$$z(t)=\left(\frac{-20}{3}t^3+60t^2+160t+240\right)'=-20t^2+120t+160;$$

Находим производительность труда через 3 часа после начала работы:

$$z(3)=-20\cdot3^2+120\cdot3+160=340.$$

Скорость изменения производительности найдём как первую производную от $z(t)$:

$$z'(t)=\left(-20t^2+120t+160\right)'=-40t+120;$$

Находим скорость изменения производительности через 3 часа после начала работы:

$$z'(3)=-40\cdot 3+120=0.$$

Далее вычисляем темп изменения производительности

$$\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{-40t+120}{-20t^2+120t+140},$$

и находим его значение через 3 часа после начала работы:

$$\frac{z'(3)}{z(3)}=\frac{-40\cdot 3+120}{-20\cdot 3^2+120\cdot 3+160}=\frac{0}{340}=0.$$

б) График функции производительности труда $z(t)=-20t^2+120t+160$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение этой функции будет достигаться в вершине параболы. Для построения графика функции найдём координаты вершины параболы:

$$t_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-120}{2\cdot(-20)}=3, \qquad z(t_0)=z(3)=-20\cdot 3^2+120\cdot 3+160=340,$$

Вершина параболы находится в точке $M(3;340)$. Так как ветви параболы направлены вниз, то найдём точки пересечения с осью Ot. Для этого приравниваем $z(t)$ к нулю:

$$-20t^2+120t+160=0;$$
$$-t^2+6t+8=0;$$
$$D=36-4\cdot(-1)\cdot 8=68, \qquad t_1=\frac{-6-\sqrt{68}}{-2}\approx 7{,}1 \; t_2=\frac{-6+\sqrt{68}}{-2}\approx -1{,}1$$

Для нахождения пересечения с осью Oz подставим $t=0$ в $z(t)$:

$$z(0)=-20\cdot 0+120\cdot 0+160=160.$$

Построим график функции (рис. 11):

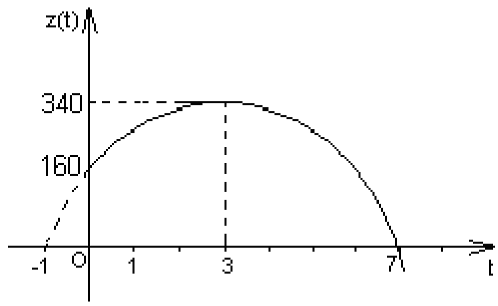

Рисунок 11

По графику видно, что производительность труда растёт в первые 3 часа работы, а затем постепенно снижается к концу рабочего дня.

Пример 70. Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q усл. ед. Функции затрат $C(Q)$ и цены $P(Q)$ имеют вид:

$$C(Q) = 1.92Q^3 + 4.32Q^2 + 2.88Q + 15, \qquad P(Q) = -1.44Q + 89.28$$

Найти:

а) максимальную прибыль предприятия, объём и цену, соответствующие максимальной прибыли;

б) средние и предельные затраты, соответствующие максимальной прибыли;

в) участки роста и убывания прибыли на отрезке [2,5];

г) наименьшее значение затрат на [2,5].

Решение.

а) Прибылью назовём разность дохода и затрат. При этом доходом назовём произведение цены на объём выпущенной продукции:

$$П(Q) = Q \cdot P(Q) - C(Q) = (-1.44Q + 89.28) \cdot Q - \left(1.92Q^3 + 4.32Q^2 + 2.88Q + 15\right) =$$
$$-1.92Q^3 - 5.76Q^2 + 86.4Q - 15$$

Исследуем эту функцию на экстремум, для этого найдём её производную:

$$П' = -1.92 \cdot 3Q^2 - 5.76 \cdot 2Q + 86.4 \cdot 1 =$$
$$= -5.76Q^2 - 11.52Q + 86.4$$

Найдём критические точки, приравняв производную к нулю:

$$-5.76Q^2-11.52Q+86.4=0 \,|: -5.76\,;$$
$$Q^2+2Q-15=0\,;$$
$$Q_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 15}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}\,;$$
$$Q_1=3; \qquad Q_2=-5.$$

Отрицательная величина $Q_2=-5$ не имеет экономического смысла, поэтому единственной критической точкой будем считать $Q_1=3$. Это и есть объём выпуска, который соответствует максимальной прибыли, так как при переходе через эту критическую точку производная меняет знак с плюса на минус:

$$\Pi'(2)=-5.76\cdot 2^2-11.52\cdot 2+86.4>0$$
$$\Pi'(4)=-5.76\cdot 4^2-11.52\cdot 4+86.4<0$$

Найдём максимальную прибыль, вычисляя значение $\Pi(Q)$ в этой точке:

$$\Pi(3)=-1.92\cdot 3^3-5.76\cdot 3^2+86.4\cdot 3-15=140.52$$

Найдём цену, которая соответствует максимальной прибыли:

$$P(3)=-1.44\cdot 3+89.28=84.96$$

б) Найдём затраты, соответствующие максимальной прибыли:

$$C(3)=1.92\cdot 3^3+4.32\cdot 3^2+2.88\cdot 3+15=114.36$$

Тогда средние затраты, которые соответствуют максимальной прибыли равны:

$$C_{ср}=\frac{C(3)}{3}=\frac{114.36}{3}=38.12$$

Чтобы найти предельные затраты нужно вычислить производную функции затрат:

$$C'(Q)=5.76Q^2+8.64Q+2.88$$

В точке $Q=3$:

$$C'(3)=5.76\cdot 3^2+8.64\cdot 3+2.88=80.64$$

в) Найдём участки роста и убывания прибыли, используя результаты предыдущего п. а). При объёме выпуска продукции от 2 до 3 ед. прибыль возрастает (т. к. на этом участке производная положительная), а при объёме выпуска от 3 до 5 ед. прибыль убывает (производная отрицательна).
г) Наименьшее значение затрат найдём используя производную:

$$C'(Q) = 5.76Q^2 + 8.64Q + 2.88$$

Приравниваем её к нулю чтобы найти критические точки:

$$5.76Q^2 + 8.64Q + 2.88 = 0 \,|\, : 2.88\,;$$
$$2Q^2 + 3Q + 1 = 0\,;$$
$$Q_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$
$$Q_1 = -0{,}5; \qquad Q_2 = -1.$$

Нужно вычислить значение функции $C(Q)$ в критических точках, принадлежащих указанному промежутку, и на концах промежутка. Из полученных чисел выбрать наименьшее.
Критические точки $Q_1 = -0{,}5$ и $Q_2 = -1$ не принадлежат промежутку [2,5], значит вычислим значение функции только в точках 2 и 5:

$$C(2) = 1.92 \cdot 2^3 + 4.32 \cdot 2^2 + 2.88 \cdot 2 + 15 = 44.76$$
$$C(5) = 1.92 \cdot 5^3 + 4.32 \cdot 5^2 + 2.88 \cdot 5 + 15 = 377.4$$

Значит наименьшее значение затрат на промежутке [2,5] равно 44.76.

9.2 Применение понятия интеграла

Пример 71. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран, кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \frac{3}{2-x} - \frac{5}{3}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Площадь сегмента OfA, отнесённая к площади треугольника OAB (рис. 12) называется коэффициентом Джини.

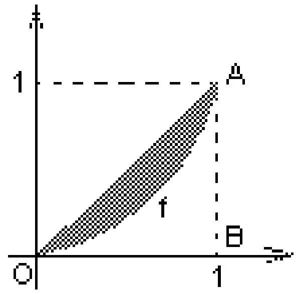

Рисунок 12

$$k=\frac{S_{OAf}}{S_{\Delta OAB}}=\frac{S_{\Delta OAB-}S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}}=\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAB}}-\frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}}=1-\frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}}=1-\frac{S_{OfAB}}{1/2}=1-2S_{OfAB},$$

(т. к. $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$). Вычислим площадь OAfB с помощью определённого интеграла

$$S_{OfAB}=\int_0^1\left(\frac{3}{2-x}-\frac{5}{3}\right)dx=3\int_0^1\frac{dx}{2-x}-\frac{5}{3}\int_0^1 dx=-3\ln|2-x|\,\Big|_0^1-\frac{5}{3}x\,\Big|_0^1=$$

$$=-3(\ln 1-\ln 2)-\frac{5}{3}=3\ln 2-\frac{5}{3}\approx 3\cdot 0.69-\frac{5}{3}=0.403;$$

$$k=1-2\cdot 0.403=0.194$$

Так как коэффициент Джини не превышает 0.33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному.

Пример.72 В течении рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t)=-t^2+6t+7$. Найти:

а) Объём выпускаемой продукции за время [0, 4];

б) Среднее значение производительности за время [0, 4] и моменты t_0 и t_1, в которые достигаются среднее и максимальное значение производительности;

в) Результат пояснить графически.

Решение

а) Объём выпускаемой продукции за время [0, T] вычисляется по формуле:

$$U=\int_0^T f(t)dt$$

$$U=\int_0^4\left(-t^2+6t+7\right)dt=\left(\frac{-t^3}{3}+\frac{6t^2}{2}+7t\right)\Big|_0^4=\frac{-4^3}{3}+\frac{6\cdot 4^2}{2}+7\cdot 4-0=\frac{164}{3}$$

б) Среднее значение производительности за время [0,T] вычисляется по формуле:

$$F(c) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$F(c) = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(-t^2 + 6t + 7\right)dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{164}{3} = \frac{41}{3}$$

Чтобы найти момент времени t_0 в который достигается среднее значение производительности, решим уравнение:

$$-t^2 + 6t + 7 = \frac{41}{3} \ \Big|\cdot 3,$$

$$-3t^2 + 18t + 21 = 41,$$

$$3t^2 - 18t + 20 = 0,$$

$$t_1 = \frac{18-\sqrt{84}}{6} \approx 1.5 \qquad t_2 = \frac{18+\sqrt{84}}{6} \approx 4.5 \notin [0,4],$$

Значит $t_0 \approx 1.5$, причём $f(t_0) = \frac{41}{3}$.

Чтобы найти момент времени t_1 в который достигается максимальное значение производительности, найдём вершину параболы $f(t) = -t^2 + 6t + 7$ (максимальное значение будет достигаться именно в вершине, т. к. ветви параболы направлены вниз).

$$t_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

в) Для построения параболы найдём вторую координату вершины:

$$f(t_в) = f(3) = -(3)^2 + 6\cdot 3 + 7 = 16.$$

Значит, вершина параболы находится в точке $(3;16)$. Найдём точки пересечения параболы с осью Ot:

$$-t^2 + 6t + 7 = 0;$$

$$D = 64 \qquad t_1 = -1, \quad t_2 = 7$$

Построим график функции производительности (рис 13)

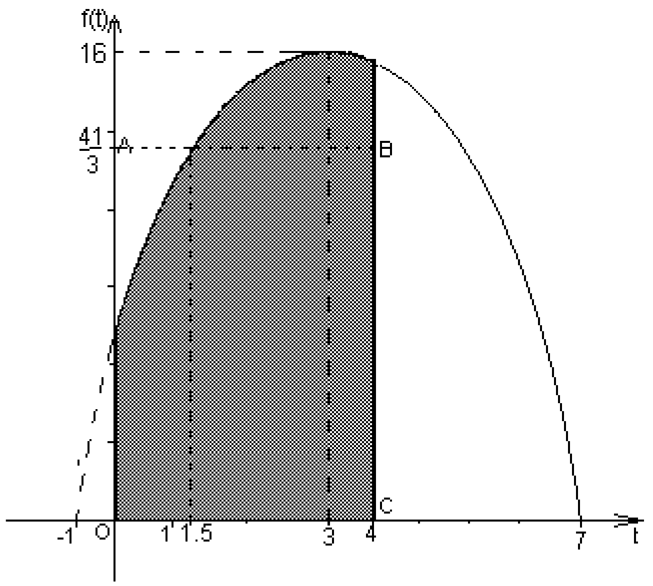

Рисунок 13

Графически видно, что площадь заштрихованной фигуры, выражающая собой объём выпускаемой продукции за 4 часа, равна площади прямоугольника $OABC$, высотой которого является отрезок прямой, равный среднему значению производительности труда за первые 4 часа работы.

Пример. 73 Найти среднее значение издержек $K = 2x^2 + 12x + 7$, если объём продукции x изменяется от 1 до 3 единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Результат пояснить графически.

Решение. Среднее значение издержек, если объём продукции x изменяется от m до n единиц, вычисляется по формуле

$$l = \frac{1}{n-m}\int_m^n K(x)dx$$

$$l = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \left(2x^2 + 12x + 7\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\cdot 27}{3} + \frac{12\cdot 9}{2} + 7\cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{12}{2} + 7\right)\right) = \frac{134}{3}$$

Чтобы найти объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение, решим уравнение

$$2x^2 + 12x + 7 = \frac{134}{3},$$

$$6x^2 + 36x + 21 = 134, \qquad 6x^2 + 36x - 113 = 0,$$

$$x_1 = \frac{-36 - \sqrt{4008}}{12} \approx -8.3 \notin [1,3] \qquad x_2 = \frac{-36 + \sqrt{4008}}{12} \approx 2.3,$$

Поясним результат графически. График функции $K = 2x^2 + 12x + 7$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Найдём вершину параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3,$$

$$K(x_0) = K(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 7 = -11.$$

Построим параболу на отрезке от 1 до 3 (рис 14):

$$K(1) = 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 7 = 21, \qquad K(3) = 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 7 = 61$$

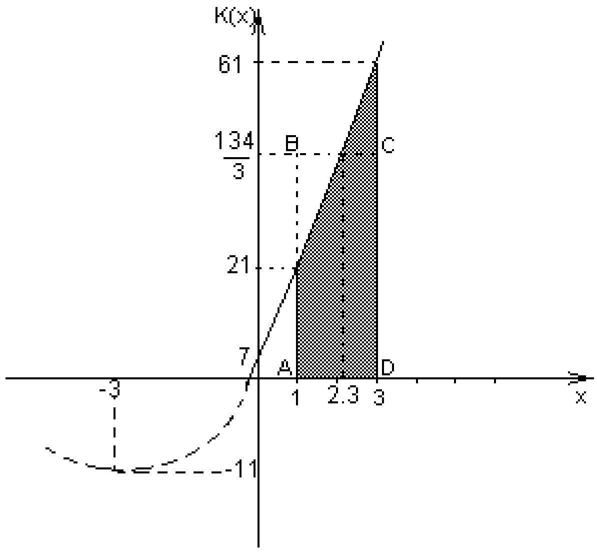

Рисунок 14

Графически видно, что площадь прямоугольника $ABCD$, стороной которого является отрезок $[1;3]$, а высотой – среднее значение функции на этом отрезке равна площади заштрихованной области.

Пример. 74 Определить дисконтированный доход К за 4 года при процентной ставке p=6%, если первоначальные капиталовложения составили 12 тыс. грн., и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 1 тыс. грн. Найти $\lim\limits_{T \to \infty} K(T)$.

Решение. Ведём функцию $f(t) = N + mt$, где N – начальные капиталовложения, m – сумма на которую намечается ежегодно увеличивать капиталовложения. Значит $f(t) = 12 + t$.

Дисконтированный доход за время T вычисляется по формуле

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt\,,$$

где $i=\dfrac{p}{100}=\dfrac{6}{100}=0.06$

Значит

$$K=\int_0^4 (12+t)e^{-0.06t}dt=\left|\begin{matrix} u=12+t, & dv=e^{-0.06t}dt \\ du=dt, & v=\dfrac{1}{-0.06}e^{-0.06t}\end{matrix}\right|=$$

$$=(12+t)\frac{1}{-0.06}e^{-0.06t}\Bigg|_0^4-\int_0^4\frac{1}{-0.06}e^{-0.06t}dt=$$

$$=(12+t)\frac{1}{-0.06}e^{-0.06t}\Bigg|_0^4-\frac{1}{(0.06)^2}e^{-0.06t}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{-16}{0.06}e^{-0.24}+\frac{12}{0.06}-\frac{1}{(0.06)^2}e^{-0.24}+\frac{1}{(0.06)^2}\approx 49{,}5$$

Найдём величину $\lim\limits_{T\to\infty}K(T)$:

$$\lim_{T\to\infty}K(T)=\lim_{T\to\infty}\left((12+t)\frac{1}{-0.06}e^{-0.06t}\Bigg|_0^T-\frac{1}{(0.06)^2}e^{-0.06t}\Bigg|_0^T\right)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\left((12+T)\frac{1}{-0.06}e^{-0.06T}-(12+0)\frac{1}{-0.06}e^{-0.06\cdot 0}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{(0.06)^2}e^{-0.06T}-\frac{1}{(0.06)^2}e^{-0.06\cdot 0}\right)\right)$$

Учитывая, что $\lim\limits_{T\to\infty}e^{-0.06T}=0$ и $\lim\limits_{T\to\infty}e^{-0.06\cdot 0}=1$ получаем

$$\lim_{T\to\infty}K(T)=\left(\left(0-12\frac{1}{-0.06}\cdot 1\right)-\left(0-\frac{1}{(0.06)^2}\cdot 1\right)\right)=$$

$$=\frac{12}{0.06}+\frac{1}{(0.06)^2}\approx 477.8$$

9.2 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Объём продукции предприятия в течении рабочего дня описывается функцией $u(t) = \frac{-10}{3}t^3 + 40t^2 + 200t + 30$. Вычислить производительность через 4 часа после начала работы. Определить, через какое время темп изменения производительности будет равен 0. (Ответ: 200; 2).

Задание 2. Зависимость прибыли предприятия от объёма выпускаемой продукции описывается формулой $\Pi = -x^2 + 4x + 11$. Найти значение объёма продукции, при котором достигается максимальное значение прибыли. Указать участки роста и убывания прибыли. Построить график зависимости. (Ответ: 2).

Задание 3. Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q усл. ед. Функция затрат $C(Q)$ имеет вид $C(Q) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t + 20$. Найти минимальное значение затрат, если объём меняется от 0.5 до 3 усл. ед. (Ответ: 17).

Задание 4. Кривая Лоренца, описывающая распределение доходов в одной из стран, задаётся уравнением $y = 2^x - 1$. Вычислить коэффициент Джини. (Ответ: k=0.12).

Задание 5. В течении рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t) = 3t^2 + 6t - 1$.Найти объём выпускаемой продукции за время [1, 3]. (Ответ: 48).

Задание 6. Найти среднее значение издержек $K = 6x^2 + 8x - 3$, если объём продукции x меняется от 2 до 5 единиц. (Ответ: 103).

Задание 7. Зависимость издержек предприятия от объёма выпускаемой продукции задана функцией $K = x^2 - x + 2$. Найти значение объёма, при котором издержки принимают значение 8 усл. ед. (Ответ: 3).

Задание 8. Определить дисконтированный доход К за 3 года при процентной ставке P=8%, если первоначальные капиталовложения составили 18 тыс. грн., и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 2 тыс. грн. Найти $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$. (Ответ: 55.5; 537.5).

10 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: [3, ч.2, гл. IV, § 1, 3; 4, гл.XII, 12.1, 12.2, 12.4 – 12.6, 12.8, 5, гл. VIII, § 1 – 3, 21 – 25]

10.1 Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

которое связывает независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество.

Функция $y=\varphi(x,C)$, при любых значениях постоянной С удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется общим решением дифференциального уравнения.

Всякое решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ формулируется следующим образом: найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Пример 74. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=2x+4.$$

Решение

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$y=\int(2x+4)dx=x^2+4x+C.$$

Пример 75. Решить задачу Коши:

$$y'=4\sin 2x, \qquad y(0)=-1.$$

Решение

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$y=\int 4\sin 2x dx=4\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x)+C=-2\cos 2x+C$$

и подставим начальные условия $y(0)=-1$:

$$-2\cos 0+C=-2+C=-1\Rightarrow C=1.$$

Отсюда $y=-2\cos 2x+1$–частное решение дифференциального уравнения.

10.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде

$$f(x)dx=g(y)dy.$$

Пример 76. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'=x$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Преобразуем его:

$$\frac{dy}{dx}=x \Rightarrow dy=xdx.$$

Если равны дифференциалы, следовательно равны и неопределенные интегралы, то есть $\int dy=\int xdx$. Отсюда получаем $y=\frac{x^2}{2}+C$–общее решение.

Пример 77. Найти решение задачи Коши:

$(2x+1)dy=(y-3)dx$, $y(0)=4$.

Решение

$$(2x+1)dy=(y-3)dx \Rightarrow \frac{dy}{y-3}=\frac{dx}{2x+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y-3}=\int\frac{dx}{2x+1} \Rightarrow \ln|y-3|=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\ln|C| \Rightarrow \ln|y-3|=\ln\sqrt{2x+1}+\ln|C| \Rightarrow \ln|y-3|=\ln|C|\sqrt{2x+1} \Rightarrow$$
$$y-3=C\sqrt{2x+1}$$

или $y=C\sqrt{2x+1}+3$–общее решение уравнения.

Решим задачу Коши:

$$y(0)=4 \;\Rightarrow\; C\sqrt{2\cdot 0+1}+3=4.$$

Отсюда $C=1$ и $y=\sqrt{2x+1}+3$–частное решение уравнения.

Однородные уравнения первого порядка Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно может быть представлено в виде

$$y'=f(x,y),$$

где $f(x,y)$–однородная функция, то есть $f(kx,ky)=f(x,y)$.

С помощью замены $u=\frac{y}{x}$ ($y=ux,\; y'=u'x+u$), где $u=u(x)$–новая неизвестная функция, однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 78. Решить дифференциальные уравнения

а) $y'+\frac{y}{x}=2$.

Решение

Здесь $f(x,y)=2-\frac{y}{x}$, $f(kx,ky)=2-\frac{ky}{kx}=2-\frac{y}{x}=f(x,y)$.

Следовательно, уравнение является однородным.

Введем подстановку $\frac{y}{x}=u$, тогда $y'=u'x+u$, уравнение примет вид

$$u'x+u+u=2 \Rightarrow u'x=2-2u \Rightarrow \frac{du}{dx}x=2(1-u) \Rightarrow \frac{du}{1-u}=2\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{1-u}=2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|1-u|=2\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{1}{1-u}\right|=\ln x^2+\ln|C| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-u}=Cx^2 \Rightarrow 1-u=\frac{1}{Cx^2} \Rightarrow u=1-\frac{1}{Cx^2}.$$

Сделав обратную замену $u=\frac{y}{x}$, получим общее решение

$$\frac{y}{x}=1-\frac{1}{Cx^2} \qquad \text{или} \qquad y=x-\frac{1}{Cx}.$$

б) $\left(x^2+y^2\right)dy-xydx=0$.

Решение

Преобразуем уравнение:

$$\left(x^2+y^2\right)dy = xydx \Rightarrow y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Тогда $\quad f\left(x,y\right)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},\ f\left(kx,ky\right)=\dfrac{k^2xy}{k^2x^2+k^2y^2}=\dfrac{xy}{x^2+y^2}=f\left(x,y\right)$, уравнение однородное. Сделав подстановку $y=ux$, получим

$$u'x+u=\frac{x\cdot ux}{x^2+\left(ux\right)^2} \Rightarrow u'x+u=\frac{u}{1+u^2} \Rightarrow u'x=\frac{u}{1+u^2}-u \Rightarrow u'x=\frac{u-u-u^3}{1+u^2} \Rightarrow$$

$$u'x=-\frac{u^3}{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx}x=-\frac{u^3}{1+u^2} \Rightarrow \frac{1+u^2}{u^3}du=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2u^2}+\ln\left|u\right|=-\ln\left|x\right|+C \Rightarrow -\frac{1}{2u^2}+\ln\left|ux\right|=C.$$

Сделав обратную подстановку $u=\dfrac{y}{x}$, получим общее решение дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{2\left(y/x\right)^2}+\ln\left|\frac{y}{x}\cdot x\right|=C \quad \text{или} \quad \ln\left|y\right|-\frac{x^2}{2y^2}=C.$$

Линейные уравнения первого порядка Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right).$$

Для его решения применяется подстановка $y=u\cdot v$ ($y'=u'v+uv'$), где $u=u\left(x\right)$, $v=v\left(x\right)$–новые неизвестные функции.

Пример 79. Решить дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=-x\sin x.$$

Решение

Уравнение является линейным. Заменив $y=uv$, получим

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=-x\sin x \Rightarrow u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=-x\sin x .$$

Выберем функцию v таким образом, чтобы $v'-\frac{v}{x}=0$, тогда $u'v=-x\sin x$.

Из первого уравнения находим функцию v:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=\ln|x| \Rightarrow v=x .$$

Подставляем $v=x$ во второе уравнение:

$$u'x=-x\sin x \Rightarrow u'=-\sin x \Rightarrow u=-\int\sin xdx \Rightarrow u=\cos x+C$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y=u\cdot v=x(\cos x+C).$$

Пример 80. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y'+2xy=e^{-x^2}, \quad y(0)=1.$$

Решение

Сделав замену $y=uv$, получим

$$u'v+uv'+2xuv=e^{-x^2} \quad \text{или} \quad u'v+u(v'+2xv)=e^{-x^2} .$$

Приравнивая к нулю выражение в скобках, находим функцию v:

$$v'+2xv=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-2xv \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=-2\int xdx \Rightarrow \ln|v|=-x^2 \Rightarrow v=e^{-x^2} .$$

Подставив v в уравнение $u'v=e^{-x^2}$, находим u:

$$u'e^{-x^2}=e^{-x^2} \Rightarrow u'=1 \Rightarrow u=\int dx \Rightarrow u=x+C .$$

Отсюда

$$y = uv = e^{-x^2}\left(x + C\right).$$

Решая задачу Коши $y\left(0\right) = 1$, находим

$$e^{o}\left(0 + C\right) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Окончательно получим:

$$y = e^{-x^2}\left(x + 1\right).$$

10.3 Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

где a_1, a_2 –некоторые постоянные.

Решение данного уравнения будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$. После нахождения производных и подстановки их в исходное уравнение, получим уравнение

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

которое называется характеристическим. Это уравнение является квадратным и имеет два корня λ_1 и λ_2. Рассмотрим различные случаи.

1) Если λ_1, λ_2 –действительные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2) Если $\lambda_1 = \lambda_2$, тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

3) λ_1, λ_2 –комплексные сопряженные числа, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тогда

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Пример 81. Решить дифференциальные уравнения.

а) $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, получим $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$. Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение

Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Так как λ_1, λ_2–комплексные сопряженные корни, $\alpha = -1,\ \beta = 2$, то общее решение имеет вид

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Общее решение такого уравнения ищется в виде суммы какого-нибудь частного решения y_* этого уравнения и общего решения $y_{од}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Рассмотрим способы нахождения частного решения в случае, когда правая часть линейного неоднородного уравнения имеет специальный вид.

Пусть правая часть уравнения $f(x)$ является многочленом n–й степени, то есть имеет вид

$$f(x) = P_n(x).$$

Тогда возможны следующие случаи:

1) число 0 не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Тогда частное решение нужно искать в виде

$$y_* = Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$–многочлен n–й степени с неизвестными коэффициентами.

2) Число 0 есть корень характеристического уравнения, тогда

$$y_* = x^k Q_n(x),$$

где k–кратность корня $\lambda = 0$.

Пример 82. Решить дифференциальные уравнения.

а) $y'' - 6y' + 9y = 6$.

Решение

Найдем $y_{од}$–решение уравнения $y'' - 6y' + 9 = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, поэтому

$$y_{од} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения и в правой части стоит многочлен нулевой степени, то частное решение будем искать в виде

$$y_* = A.$$

Продифференцируем дважды y_*: $y_*' = 0,\ y_*'' = 0$.Подставим $y_*,\ y_*',\ y_*''$ в уравнение:

$$0 - 6 \cdot 0 + 9A = 6.$$

Отсюда $A = \dfrac{2}{3}$ и $y_* = \dfrac{2}{3}$,

$$y = y_{од} + y_* = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{2}{3}.$$

б) $y'' + 3y' = 18x + 9$.

Решение

Так как корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0$, то $y_{од}$ имеет вид

$$y_{од} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{0x} = C_1 e^{-3x} + C_2.$$

Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности один, поэтому частное решение будем искать в виде

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

$y_*' = 2Ax + B,\ y_*'' = 2A$. Подставим $y_*',\ y_*''$ в уравнение

$$2A + 3(2Ax + B) = 18x + 9;$$
$$2A + 6Ax + 3B = 18x + 9.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x & \left\{\begin{array}{l} 6A = 18; \\ 2A + 3B = 9. \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3; \\ 3B = 9 - 2 \cdot 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3; \\ B = 1. \end{cases}$$

Отсюда $y_* = 3x^2 + x$,

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 + 3x^2 + x.$$

Пусть правая часть линейного неоднородного уравнения $f(x)$ представляет собой произведение показательной функции на многочлен n–й степени, то есть

$$f(x) = P_n(x)e^{\gamma x}.$$

Тогда возможны частные случаи:

1) число γ не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y_* = Q_n(x)e^{\gamma x}.$$

2) Число γ–корень характеристического уравнения кратности k. Тогда

$$y_* = x^k Q_n(x)e^{\gamma x}.$$

Пример 83. Решить дифференциальные уравнения.

а) $y'' + 2y' + y = 16e^x$.

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_{од} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Правая часть $f(x) = 16e^x$. Здесь $\gamma = 1$, γ не является корнем характеристического уравнения, значит,

$$y_* = Ae^x.$$

Дифференцируя y_* дважды и подставляя выражения для y_*' и y_*'' в исходное уравнение, находим

$$Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 16e^x \qquad \text{или} \qquad 4Ae^x = 16e^x.$$

Отсюда $A = 4,\ y_* = 4e^x$.

Таким образом,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4e^x.$$

б) $y'' + y' - 12y = (-12x - 8)e^{2x}$.

Решение

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения

$$y_{од} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}.$$

Число $\gamma = 2$ не совпадает с $\lambda_1,\ \lambda_2$.Многочлен $P_n(x)$ первой степени, поэтому

$$y_* = (Ax + B)e^{2x}.$$

Находим

$$y_*' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x},$$
$$y_*'' = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$$

и подставляем $y_*,\ y_*',\ y_*''$ в исходное уравнение:

$$(4Ax + 4A + 4B)e^{2x} + (2Ax + A + 2B)e^{2x} - 12(Ax + B)e^{2x} = (-12x - 8)e^{2x},$$
$$(4Ax + 4A + 4B + 2Ax + A + 2B - 12Ax - 12B)e^{2x} = (-12x - 8)e^{2x},$$
$$-6Ax + 5A - 6B = -12x - 8.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения А и В.

$$\begin{array}{c|l} x & \multirow{2}{*}{} \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} -6A = -12; \\ 5A - 6B = -8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2; \\ -6B = -8 - 5 \cdot 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2; \\ B = 3. \end{cases}$$

Тогда

$$y_* = (2x + 3)e^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} + \left(2x+3\right)e^{2x}.$$

в) $y'' - y' - 2y = \left(6x-11\right)e^{-x}$

Решение

Из уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ находим $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$,

$$y_{од} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Число $\gamma = -1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, следовательно,

$$y_* = x\left(Ax+B\right)e^{-x} = \left(Ax^2+Bx\right)e^{-x}.$$

$$y_*' = \left(2Ax+B\right)e^{-x} - \left(Ax^2+Bx\right)e^{-x} = \left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)e^{-x}$$

$$y_*'' = \left(-2Ax+2A-B\right)e^{-x} - \left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)e^{-x} =$$
$$= \left(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B\right)e^{-x}.$$

Подставляя y_* и его производные в уравнение, приходим к тождеству

$$\left(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B\right)e^{-x} - \left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)e^{-x} -$$
$$-2\left(Ax^2+Bx\right)e^{-x} = \left(6x-11\right)e^{-x},$$
$$\left(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B+Ax^2-2Ax+Bx-B-2Ax^2-2Bx\right)e^{-x} = \left(6x-11\right)e^{-x}$$
$$\left(-6Ax+2A-3B\right)e^{-x} = \left(6x-11\right)e^{-x},$$
$$-6Ax+2A-3B = 6x-11.$$

Отсюда $A=-1,\ B=3$ и $y_* = \left(-x^2+3x\right)e^{-x}$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \left(-x^2+3x\right)e^{-x}.$$

10.7 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений; в случае, если заданы начальные условия, решить задачу Коши.

а) $yy' = \frac{1-2x}{y}$ (Указание: данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными);

б) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$, $y(0) = 1$ (Ответ: $y^2 = 1 - x^2$);

в) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ (Ответ: $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$);

г) $y' - ytgx = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y(0) = 0$ (Ответ: $y = \frac{x}{\cos x}$);

д) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;

е) $y'' + 4y' + 29y = 0$;

ж) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$ (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$);

з) $y'' - 3y' + 2y = (3 - 6x)e^{-x}$ (Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-x}$).

Литература

1 Методические указания, индивидуальные и тестовые задания для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей / сост.: В. Н. Астахов, Г. С. Буланов. – Краматорск : ДГМА, 2006. – С. 51.

2 Пискунов А. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. – М.: Наука, 1970 – 1985. - Т.1. – 436 с.

3 Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г.Попов, Т. Я. Кожевников. – М.: Высш. школа, 2002. - ч. I, II. - с. 312 – 278.

4 Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, 2002. – 471 с.

5 Двайт Г. В. Таблиці інтегралів і інші математичні формули.- М.: Наука, 1977р. – 224 с.

6 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. І. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова.- К.: Либідь, 1994.-280 с.

7 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди.-К.: Либідь, 1994.- 352 с.

8 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння.-К.: Либідь, 1994.- 352 с.

9 Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М. : Наука, 1976. – 272 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи

з дисципліни «Вища математика»

для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання

(*Російською мовою*)

Укладачі: Ровенська Ольга Геннадіївна
Білих Наталія Валер’ївна
Горбач Олена Володимирівна

Редактор Ініціали Прізвище

Комп’ютерна верстка О. П. Ордіна

Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.