Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

А. Н. Обухов, С. А. Колесников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЯДЫ

Учебное пособие

Утверждено
на заседании
ученого совета,
протокол №   от   2008

Краматорск 2008

УДК 510.022
ББК 517.2
О ?

Рецензенты:

Містяться методичні рекомендації та варіанти контрольних і тестових завдань з курсу «Вища математика» для студентів денного та заочного відділень, теоретичні і практичні вказівки до їхнього виконання, а також список необхідної літератури.

Обухов, А. Н.
О ? Высшая математика: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды : учебное пособие / А. Н. Обухов, С. А. Колесников. – Краматорск : ДГМА, 2008. – 72 с.
ISBN

Содержатся методические рекомендации и варианты контрольных и тестовых заданий по курсу «Высшая математика» для студентов дневного и заочного отделений, теоретические и практические рекомендации к их выполнению, а также список необходимой литературы.

УДК 210.022
ББК 517.2

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Включение образовательного пространства Украины в Болонский процесс, основывающийся на кредитно-модульной системе, усиливает значение самостоятельной работы студентов. Это означает, что возникают новые формы контроля и, соответственно, должны быть рекомендации, обеспечивающие подготовку студента как дневной, так и заочной форм обучения.

Настоящее пособие предоставляет студентам технических специальностей всех форм обучения возможность подготовиться к сдаче тестирования по соответствующим разделам курса высшей математики, которые изучаются в течение второго и третьего триместров; а студентам заочной формы обучения дает возможность выполнить контрольные работы, которые являются обязательной частью отчетности при изучении курса высшей математики.

Предлагаемое пособие состоит из трех частей, каждая из них поделена на разделы, соответствующие разделам курса высшей математики.

Первая часть пособия содержит краткие теоретические понятия, определения, формулы, а также примеры решения практических заданий. В начале каждого из разделов приведены ссылки на рекомендуемую литературу, среди которых учебники как на русском, так и на украинском языке. В начале каждого раздела также приведены ключевые слова, понятия и даны рекомендации в виде указания, что должен знать и уметь применять на практике студент по окончании изучения данной темы. Некоторые фундаментальные определения, формулы, свойства и примеры решения отдельных типовых контрольных заданий и тестовых упражнений приведены непосредственно в пособии.

Вторая часть пособия содержит варианты контрольных заданий по каждому из изучаемых разделов высшей математики. По уровню сложности они различны, что позволяет дифференцированно оценивать знания студента после выполнения контрольной работы. Выполнение части этих заданий дает возможность студенту сдать модуль на необходимый минимум (55 баллов из 100).

Третья часть пособия содержит набор типовых тестовых заданий для самостоятельной подготовки к тестированию по соответствующей теме (модулю). Часть этих заданий снабжена рекомендациями для выполнения.

Количество заданий, состав и содержание каждой контрольной работы, которую выполняют студенты заочной формы обучения, определяется решением кафедры высшей математики.

При оформлении контрольной работы необходимо записать условие каждого задания и привести его решение в полном объеме со всеми необходимыми теоретическими ссылками и объяснениями. Решение должно в обязательном порядке заканчиваться соответствующим ответом или ответами на все вопросы задачи.

Содержание заданий, входящих в контрольные работы, не может охватить все темы изучаемых разделов высшей математики, поэтому студенты заочной формы обучения должны научиться решать типовые тестовые задачи из третьей части настоящего пособия. Примеры решения таких заданий можно найти либо в самом пособии, либо в предлагаемой литературе или других учебниках по высшей математике.

1 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛОВ КУРСА

1.1 Неопределённый и определённый интеграл, его свойства

Основной задачей интегрального исчисления является нахождение функции по известной от нее производной. Прикладные задачи, где используют этот математический аппарат, принадлежат кругу вопросов, связанных с практическим применением производной. Например, если уметь находить функцию по производной, то по известному ускорению можно найти скорость, а по ней – соответствующую траекторию движения.

Многие задачи естествознания приводят к необходимости вычисления определенного интеграла. В результате получают число, которое имеет геометрический, механический или физический смысл.

1.1.1 Определение и основные свойства неопределённого интеграла. Простейшие правила интегрирования

Литература: [1, гл. IX, § 1; 4, гл. 8; 9, гл. X, § 1, 2].

Говорят, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если для $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Неопределённый интеграл для $f(x)$ – множество её первообразных. Обозначается:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C ,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение;

$F(x)$ – одна из первообразных;

C – постоянная интегрирования.

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1). \qquad \int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + C.$$

(Здесь и в последующих формулах под C понимается произвольная постоянная).

$$\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + C. \qquad \int cos\,x\,dx = sin\,x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C. \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,ctg\, x + C.$$

$$\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C. \qquad \int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C. \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C. \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \qquad \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \qquad \int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + C.$$

Простейшие правила интегрирования

1 Если $a = const$, тогда:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

2 $$\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

3 Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда:

$$\int f(kx+b)\, dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

Пример. Так как $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$, то по третьему свойству

$$\int \frac{dx}{1+(5-2x)^2} = -\frac{1}{2} arctg(5-2x) + C.$$

1.1.2 Основные методы интегрирования

Литература: [1, гл. IX, § 1; 4, гл. 8, § 1–3; 9, гл. X, § 4–6; 11, р. II, гл. 1, § 1, 2].

Метод замены переменной:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1.1.3 Стандартные методы интегрирования некоторых классов функций

Литература: [1, гл. IX, §3 - 5; 4, гл.8, § 4-6; 9, гл. X, § 7 - 13; 11, р. II, гл. 1, § 3 - 5].

Основной класс функций, для которых интегралы выражаются через элементарные функции – рациональные дроби. Выражение вида

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

называют рациональной дробью, если $(n \gg m)$ дробь называют неправильной, в противном случае – правильной.

Существуют 4 типа простейших правильных дробей, интегралы от которых выражаются через элементарные функции. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а, следовательно, интегралы от неё можно выразить через элементарные функции.

При изучении этой темы необходимо уметь:

а) интегрировать простейшие рациональные дроби I, II и III типов;

б) производить разложение правильной дроби на сумму простейших.

Замечание. Интегралы от простейших тригонометрических выражений и иррациональностей определённого типа с помощью соответствующей замены переменной, преобразуются в интегралы от рациональных дробей.

1.1.4 Определение, свойства и вычисление определённого интеграла

Литература: [1, гл. X, § 1; 4, гл. 9, § 1, 2; 9, гл. XI, § 1–6; 11, р. II, гл. II].

Отметим основные свойства определенного интеграла.

Свойство 1.

$$\int_a^b \left[A_1 f_1(x) \pm A_2 f_2(x) \right] dx = A_1 \int_a^b f_1(x)\,dx \pm A_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Свойство 2. Если на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Свойство 3. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Свойство 4 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Свойство 5. Если $f(x)$ нечетная на симметричном промежутке $[-c; c]$, то

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0.$$

Свойство 6. Если $f(x)$ четная на симметричном промежутке $[-c; c]$, то

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2\int_0^c f(x)\,dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

1.1.5. Геометрические и механические приложения определенных интегралов

Литература: [1, гл. X, § 3 - 9; 4, гл. 9, § 4; 9, гл. XII; 11, р. II, гл. III].

Определенный интеграл имеет многогранные геометрические приложения - вычисление в различных системах координат: площадей плоских фигур, длин дуг, а также объемов тел вращения и площадей поверхностей вращения.

Многие задачи механики, например, вычисление давления жидкости на пластину; вычисление работы переменной силы на прямолинейном отрезке пути; вычисление работы по выкачиванию жидкости из резервуара – можно решить, используя методы интегрирования.

Соответствующие типы задач, решение которых необходимо освоить студенту, приведены в разделах 2.1 и 3.1.

1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Литература: [2, гл. IV; 5, гл. 3; 8, р. 11; 10, гл. XIII].

Исследование многих задач естествознания приводит к решению уравнений, в которые входят неизвестная функция и ее производные различных порядков. Такие уравнения принято называть обыкновенными дифференциальными уравнениями (неизвестная функция одной переменной).

К числу основных фундаментальных понятий отнесем: порядок дифференциального уравнения, общее решение, частное решение, интегральную кривую, задачу Коши и ее геометрический смысл.

1.2.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Литература: [2, гл. IV, § 1; 5, гл. 3, § 1; 8, р. 11, § 11.1; 10, гл. XIII, § 1 - 9].

При изучении этой темы необходимо научиться определять тип дифференциального уравнения, к главным из которых отнесем уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные и дифференциальные уравнения Бернулли; изучить соответствующие подстановки, с помощью которых решается соответствующий тип; уметь находить частное решение дифференциального уравнения при решении задачи Коши.

1.2.2 Дифференциальные уравнения высших порядков

Литература: [2, гл. IV, §2, 3; 5, гл. 3, §3; 8, р. 11, §11.2; 10, гл. XIII, §16 - 18].

Если с помощью соответствующей подстановки порядок уравнения можно понизить, то такое уравнение называют дифференциальным уравнением, допускающим понижение порядка.

Студент должен научиться определять тип такого уравнения и уметь делать соответствующую подстановку для понижения его порядка, с последующим нахождением его общего решения.

1.2.3 Линейные дифференциальные уравнения

Литература: [8, р.11, § 11.3, 11.4; 10, гл. XIII, § 20 - 28; 12, р. II, гл. II].

Изучение процессов, протекающих в реальных механических и электрических системах, можно представить в виде соответствующей математической модели, которая, как правило, записывается с помощью линейного дифференциального уравнения первого или высшего порядков. В пособии рассматриваются уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами при неизвестной функции и ее производных.

При изучении этой темы необходимо уметь:

1 По заданному дифференциальному уравнению записать характеристическое уравнение.
2 По корням характеристического уравнения записать общее решение однородного дифференциального уравнения.
3 По виду правой части записать частное решение дифференциального уравнения.

4 Методом неопределённых коэффициентов находить частное решение.

5 Зная общее решение, находить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (уметь решать задачу Коши).

В пособии приведены примеры нахождения общего и частного решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а также одна из прикладных задач.

Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми решениями данного уравнения, то его общее решение есть

$$y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения в виде $y = e^{\lambda x}$. После нахождения производных и подстановки их в уравнение получим алгебраическое уравнение, которое называют характеристическим уравнением исходного дифференциального:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 .$$

Числа λ_1 и λ_2 называют характеристическими числами.

Случай 1. λ_1 и λ_2 действительные и разные числа. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} .$$

Случай 2. $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\,x e^{\lambda_2 x}$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тогда общее решение можно записать в виде:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Неоднородные линейные уравнения второго порядка

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой: общее решение неоднородного уравнения представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения y^* и общего решения $y_{од}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p y' + q y = 0$$

В случае уравнения с постоянными коэффициентами частное решение возможно найти, не прибегая к интегрированию. Рассмотрим несколько таких возможностей.

Пусть правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой произведение показательных функций на многочлен, т. е. имеет вид:

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\gamma x},$$

где – многочлен $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Тогда возможны следующие частные случаи:

а) число γ не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y^* = Q_n(x)\, e^{\gamma x};$$

б) число γ есть простой (однократный) корень характеристического уравнения. В рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде многочлена $(n + 1)$-й степени, но без свободного члена, (так как свободный член этого многочлена исчезнет при дифференцировании):

$$y^* = x Q_n(x)\, e^{\gamma x}.$$

в) число γ есть двукратный корень характеристического уравнения

$$y^* = x^2 Q_n(x)\, e^{\gamma x}.$$

Если правая часть имеет вид

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\gamma x} \cos \delta x, \text{ или } f(x) = P_n(x)\, e^{\gamma x} \sin \delta x,$$

при этом числа $\gamma-\delta i$ и $\gamma+\delta i$ не является корнями характеристического уравнения, тогда частное решение уравнения следует искать в виде:

$$y^{*}=\left[U_{n}(x)\cos\delta x+V_{n}(x)\sin\delta x\right]e^{\gamma x}$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''+3y'-4y=5-x^{2},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0)=0\quad,\quad y'(0)=1.$$

Решение

Общее решение данного уравнения запишем в виде суммы:

$$y=y_{од}+y^{*},$$

где $y_{од}$ – общее решение $y''+3y'-4y=0$.

а) запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^{2}+3\lambda-4=0.$$

Корни уравнения λ_1 = - 4; λ_2 = 1, по корням запишем общее решение:

$$y_{од}=C_{1}e^{-4x}+C_{2}e^{x}.$$

б) найдём y_{*} - частное решение исходного дифференциального уравнения. Представим правую часть в виде:

$$f(x)=\left(5-x^{2}\right)e^{0x}$$

Так как λ_1 и $\lambda_2 \neq \gamma = 0$, то частное решение y^{*} находим в виде:

$$y^{*}=A_{0}x^{2}+A_{1}x+A_{2},$$

где A_0, A_1, A_2 – неизвестные коэффициенты.

в) подставляя y^{*} и его соответствующие производные в дифференциальное уравнение, находим:

$$\left(y^{*\prime} = 2A_0 + A_1, \; y^{*\prime\prime} = 2A_0 \right)$$

$$2A_0 + 3(2A_0x + A_1) - 4(A_0x^2 + A_1x + A_2) = 5 - x^2 \text{ или}$$

$$-x^2 + 5 = -4A_0x^2 + (6A_0 - 4A_1)x + 2A_0 + 3A_1 - 4A_2$$

Приравняв коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим:

$$\begin{cases} -4A_0 = -1 \\ -6A_0 - 4A_1 = 0 \\ 2A_0 + 3A_1 - 4A_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A_0 = \dfrac{1}{4} \\ A_1 = \dfrac{3}{8} \\ A_2 = -\dfrac{27}{32} \end{array}$$

Тогда $y^* = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{8}x - \dfrac{27}{32}$;

г) общее решение:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{27}{32};$$

Используя начальные условия, найдём C_1 и C_2:

$$y' = -4C_1e^{-4x} + C_2e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8};$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 - \frac{27}{32} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{27}{32};$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow -4C_1 + C_2 + \frac{3}{8} = 1 \Rightarrow -4C_1 + C_2 = \frac{5}{8}.$$

Окончательно $\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{27}{32} \\ -4C_1 + C_2 = \dfrac{5}{8} \end{cases}$

Решив систему, найдём $C_1 = \dfrac{7}{160}$; $C_2 = \dfrac{4}{5}$.

Искомое решение

$$y = \frac{7}{160} + \frac{4}{5}e^x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{27}{32}..$$

1.3 Кратные интегралы, криволинейные интегралы и теория поля

Литература: [2, гл. I, II; 5, гл. 1; 8, р. 12; 10, гл. XIV - XV; 12, р. III].

1.3.1 Двойной интеграл и его приложения

Литература: [2, гл. I, §1 - 4; 5, гл. 1, § 1; 10, гл. XIV, §1 - 10; 12, р. III, гл. I].

При изучении этой темы необходимо научиться:

а) для повторного интеграла расставлять пределы интегрирования в декартовой прямоугольной и полярной системах координат;

б) осуществлять переход от двойного интеграла к повторному интегралу в различных системах координат, и вычислять его;

в) осуществлять переход в двойном интеграле из прямоугольной в полярную систему координат по формулам: $x = \rho\cos\varphi$, $x = \rho\sin\varphi$.

г) находить площади плоских фигур и координаты центра масс однородной и неоднородной пластины, ограниченной линиями.

Пример. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y=8-x^2$.

Решение

Координаты центра масс можно вычислить по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}$$, здесь

$M_y = \iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)\,dx\,dy$ - статический момент пластины относительно оси оу;

$M_x = \iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)\,dx\,dy$ - статический момент пластины относительно оси ох;

$M = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy$ - масса пластины D,

где $\gamma(x,y)$ – поверхностная плотность материала пластины.

Изобразим область, ограниченную заданными кривими (рис. 1.1). Так как пластина однородная и симметрична относительно оси *оу*, то центр тяжести лежит на оси oy, т. е. $x_c = 0$; найдём y_c. Если пластина однородна, то в этом случае формулы для вычисления координат центра масс упрощаются и принимают вид:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x \cdot dx \cdot dy}{\iint\limits_D dx \cdot dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y \cdot dx \cdot dy}{\iint\limits_D dx \cdot dy};$$

Вычислим $\iint\limits_D dx\, dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{8-x^2} dy = \int\limits_{-2}^{2} y \Big|_{x^2}^{8-x^2} dx =$

$$= \int\limits_{-2}^{2} (8 - x^2)\, dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$

Вычислим $\iint\limits_D y\, dx\, dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{8-x^2} y dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} y^2 \Big|_{x^2}^{8-x^2} dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} ((8 - x^2)^2 - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} 16(4 - x^2)\, dx =$$

$$= 8\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{4 \cdot 64}{3}.$$

Тогда $y_c = \dfrac{\frac{4 \cdot 64}{3}}{\frac{64}{3}} = 4$; C(0, 4).

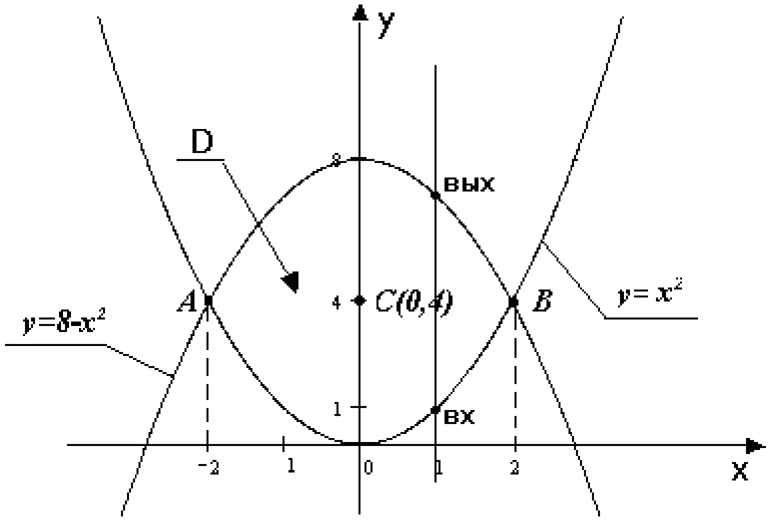

Рисунок 1.1

1.3.2 Тройной интеграл и его приложения

Литература: [2, гл. I, § 7; 5, гл. 1, § 2; 10, гл. XIV, §11 - 13; 12, р. III, гл. I, § 7].

При изучении этой темы необходимо научиться:

а) вычислять тройной интеграл в прямоугольной и цилиндрической системах координат;

б) находить объём и механические характеристики тел, ограниченных данными поверхностями.

1.3.3 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, их приложения

Литература: [2, гл. II; 5, гл. 1, § 4; 10, гл. XV, § 15; 12, р. III, гл. II].

При изучении этой темы необходимо научиться:

а) вычислять криволинейные интегралы первого и второго рода сведением их к определённым;

б) находить массу материальной линии;

в) вычислять работу переменной силы вдоль некоторой линии по формуле:

$$A = \int\limits_{L_{MN}} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{L_{MN}} F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy$$

г) вычислять криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру по формуле Грина.

Пример. Вычислить работу силы $\overline{F}$ вдоль кривой L при перемещении из точки M в точку N .

$$\overline{F} = 3xy\bar{i} + y^2 \quad , \quad L : y = x^2 \quad , \quad M(-1,1) \quad , \quad N(1,1)$$

Решение

Работу переменной силы вдоль криволинейного отрезка пути можно вычислить по формуле:

$$A = \int\limits_{L_{MN}} 3xy\,dx + y^2\,dy \quad , \quad L : y = x^2 \quad , \quad x \in [-1,1] \, .$$

Перейдём к определённому интегралу:

$$A = \int\limits_{L_{MN}} 3\,x\,y\,dx + y^2\,dy = \left\{ \begin{matrix} y = x^2 \\ dy = 2\,x\,dx \end{matrix} \quad x \in [\,-1{,}1\,] \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 3\,x \cdot x^2 dx + (\,x^2\,)^2 \cdot 2\,x\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (\,3\,x^3 + 2\,x^5\,)\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{6}x^6 \Bigg|_{-1}^{1} = 0 \quad ; \quad A = 0\,.$$

1.3.4 Теория поля

Литература: [2, гл. II, § 6; 5, гл. 1, § 3; 8, р. 12.5; 10, гл. XV].

При изучении этой темы необходимо знание таких понятий и применения навыков:

а) векторных линий в векторном поле;

б) вычисления потока векторного поля через полную поверхность или ее часть;

в) дивергенции векторного поля, её механического смысла;

г) ротора вектора и его механического смысла;

д) пользования формулой Гаусса – Остроградского.

Пример. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^2\,i + x\,j + x\,z\,k$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ, расположенной в первом октанте и образованной частями параболоида вращения $y = z^2 + x^2$ и следующих плоскостей: $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$.

Решение

Сделаем чертеж (рис. 1.2)

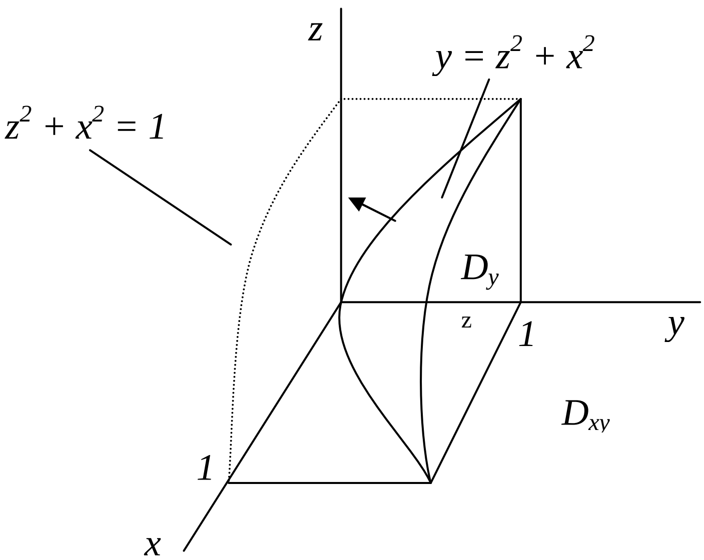

Рисунок 1.2

Используем формулу Остроградского

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \overline{F}\, \overline{n}\, d\,\sigma = \iiint\limits_{V} div\,\overline{F}\, dv$$

где n – внешняя нормаль поверхности σ.
Находим:

$$div\,\overline{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 2\,x + 0 + x = 3\,x$$

$$\Pi = \iiint\limits_{V} 3\,x\,dx\,dy\,dz = 3\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x\,dx \int\limits_0^{\sqrt{y-x^2}} dz = 3\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y-x^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y^{3/2}\,dy = \frac{2}{5}.$$

1.4 Числовые ряды

Литература: [2, гл. III, § 1; 5, гл. 4, §1; 10, гл. XVI, §1-8;11, р. III, гл. I].

Выражение $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ называется рядом, а числа $U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ...$ – членами ряда. Ряд называется сходящимся, если его частичная сумма $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$, при этом величина S^* называется суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ (необходимый признак сходимости).

Обратное утверждение неверно: если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд может быть и сходящимся и расходящимся. Если U_n не стремится к нулю, то ряд обязательно расходится.

При исследовании сходимости рядов с положительными членами $(U_n > 0)$ используют достаточные признаки, приведенные в п. 1.4.1–1.4.5.

1.4.1 Признаки сравнения

Пусть даны два ряда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ и пусть, начиная с некоторого номера $n > N$, выполняется условие $U_n \le V_n \ (*)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если сходится ряд 2, то сходится и ряд 1;

2) если расходится ряд 1, то расходится и ряд 2.

Признак сравнения иногда удобно применять в предельной форме: если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A \ne 0$, то ряды 1) и 2) ведут себя одинаково или оба сходятся или расходятся. Ряд, с которым сравнивают исследуемый ряд, называют эталонным рядом. В качестве эталонных рядов используют ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, \ \text{сходится при} \ |q|<1 & (\text{Сумма ряда геомет}- \\ \text{расходится при} \ |q| \ge 1. & \text{рической прогрессии}) \end{cases}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \text{сходится при} \ \alpha > 1 & (\text{Обобщёно}-\text{гармо-} \\ \text{расходится при} \ \alpha \le 1 & \text{нический ряд}) \end{cases}$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} \Rightarrow \begin{cases} \text{сходится при} \ \alpha > 1, \beta \ \text{- любое;} \\ \text{сходится при} \ \alpha = 1, \beta > 1; \\ \text{расходится при} \ \alpha < 1, \beta \ \text{- любое.} \end{cases}$$

1.4.2 Признак Даламбера

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$. Тогда справедливы утверждения:

1) если $l < 1$, ряд сходится;

2) если $l > 1$, ряд расходится.

В случае $l = 1$ нужны дополнительные исследования о сходимости ряда.

1.4.3 Радикальный признак Коши

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$. Тогда справедливы утверждения:

1) если $l < 1$, ряд сходится;
2) если $l > 1$, ряд расходится.

В случае $l = 1$ нужны дополнительные исследования о сходимости ряда.

1.4.4 Интегральный признак

Если функция $f(x) \geq 0$ непрерывна и монотонно убывает на $(a,\ \infty)$ и $f(n) = U_n$ начиная с некоторого $n > N$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ вместе одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$

Решение

Ряд знакоположительный, общий член ряда $U_n = \frac{n}{n^3+3}$. При $n \to \infty$ $U_n = \frac{n}{n^3+3} \sim \frac{1}{n^2} \to 0$.

Применяем признак сравнения в предельной форме. Так как U_n эквивалентен общему члену сходящегося обобщённо-гармонического ряда $(\alpha = 2)$, то исследуемый ряд сходится по признаку сравнения.

Если сходится ряд $|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots$, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, то данный ряд так же сходится и называется абсолютно сходящимся. Если ряд из абсолютных величин расходится, а данный ряд сходится, то в этом случае он называется условно сходящимся.

1.4.5 Признак Лейбница

Рассмотрим знакочередующийся ряд:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots (a_n \geq 0)$$

Если в этом ряду абсолютные величины членов ряда убывают, т. е. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$, и общий член стремится к нулю $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд сходится, причём сумма ряда по абсолютной величине меньше его первого отбрасываемого слагаемого.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n$

Решение

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n$.

Применяем радикальный признак Коши: $U_n = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n$.

Найдём $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n} \right)^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$.

Исследуемый ряд сходится абсолютно.

1.5 Степенные ряды

Литература: [2, гл. III, § 4-6; 5, гл. 4, § 5, 6; 10, гл. XVI, § 13-17; 12, р. III, гл. II, § 3-7].

Если членами ряда являются не числа, а функции $U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$, то ряд называется функциональным. Множество значений переменной x, при которых этот ряд сходится, называется областью сходимости ряда. Суммой ряда называется функция $S^*(x)$, если $S^*(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$, а x принадлежит области сходимости.

В ряде случаев для нахождения области сходимости можно применять известные признаки сходимости числовых рядов (признак Даламбера, радикальный Коши, сравнения).

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – заданные числа, называемые коэффициентами.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(x-2)^3}{3}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{n}+\ldots$$

Решение

Пусть x – фиксировано, по признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}n}{(n+1)(x-2)^n}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x-2|.$$

При $|x-2|<1$ ряд сходится, при $|x-2|>1-$ расходится, здесь радиус сходимости R = 1. Разрешая неравенство $|x-2|<1,$ получим $1<x<3$, т. е. $x\in(1,3)-$ интервал сходимости ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала. При $x = 1$ получим ряд: $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots,$ который сходится по признаку Лейбница. При x = 3 получим ряд $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$. Это расходящийся (гармонический) ряд.

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости. При этом степенные ряды, которые будут получены, имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x=x_0$, то ряд вида

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2)$$

называют рядом Тейлора. Однако в каждом случае необходимо исследовать, при каких значениях x ряд сходится и когда его суммой будет функция $f(x)$. Если $x_0=0$, то полученный ряд называют рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (3)$$

Приведём разложения некоторых важных элементарных функций в ряды Маклорена с указанием области сходимости:

$$e^{Z} = 1 + \frac{Z}{1\,!} + \frac{Z^2}{2\,!} + \frac{Z^3}{3\,!} + \ldots + \frac{Z^n}{n\,!} + \ldots,\ Z \in (-\infty, \infty).\ \ n = 0,1,2,3\ldots$$

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3\,!} + \frac{Z^5}{5\,!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^{2n-1}}{(2n-1)\,!} + \ldots, Z \in (-\infty, \infty).$$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2\,!} + \frac{Z^4}{4\,!} - \ldots + (-1)\frac{Z^{2n-2}}{(2n-2)\,!} + \ldots, Z \in (-\infty, \infty), n = 0,1,2,3\ldots$$

$$(1+Z)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1\,!}Z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}Z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-n+1)}{n\,!}Z^n + \ldots,$$

$$Z \in (-1, 1).$$

$$\ln(1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \frac{Z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^n}{n} + \ldots, Z \in (-1,\ 1).$$

Иногда при разложении нужной функции в ряд используют почленное дифференцирование или интегрирование известных рядов, в частности, геометрической прогрессии.

Степенные ряды используют, в частности, для:

а) нахождения значений и пределов функций, приближения функций многочленами;

б) интегрирования функций;

в) нахождения частных и общих решений дифференциальных уравнений, решения интегральных уравнений.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{8+x^3}$ с точностью $\delta = 10^{-2}$.

Решение

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд

$$\frac{1}{8+x^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^3} = \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^6 - \left(\frac{x}{2}\right)^9 + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{3(n-1)} + \ldots\right)$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{8+x^3} = \frac{1}{8}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3(n-1)}}{2^{3(n-1)}}dx = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n-2}}{2^{3(n-1)}(3n-2)}\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^3\cdot 4}+\frac{1}{2^6\cdot 7}-\frac{1}{2^9\cdot 10}+\ldots\right)$$

Вычислим сумму полученного ряда с точностью $\delta=10^{-2}$.

Так как полученный ряд знакочередующийся, то найдем последовательно члены ряда:

$$1{,}000-\frac{1}{32}+\frac{1}{64\cdot 7}-\frac{1}{64\cdot 8\cdot 10}+\ldots\approx 1{,}000-0{,}031=0{,}969\approx 0{,}97.$$

(Отброшенная часть ряда не превосходит $\frac{1}{448}<\delta$)

Окончательно $\int\limits_0^1\frac{dx}{8+x^3}\approx 0{,}12.$

Пример. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальному условию:

$$y'=xy^2+1,\quad y(1)=0$$

Решение

Будем находить решение в виде ряда Тейлора по степеням $(x-1)$:

$$y(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1\,!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2\,!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3\,!}(x-1)^3+\ldots\,.$$

Используем начальное условие $y(1)=0$ и полагая в самом уравнении x = 1, найдём $y'(1)=1\cdot y^2(1)+1=1.$ Продифференцируем уравнение

$$y''=y^2+2xyy',\qquad\qquad y''(1)=y^2(1)+2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'(1)=0;$$

Далее снова дифференцируем уравнение

$y'''=2y\cdot y'+2yy'+2xy'^2+2xyy''.$ Найдём $y'''(1)=2.$ Аналогично

$y^{(4)}=6(y')^2+6y\cdot y''+6xy'y''+2xyy'''$ при $x=1$, $y^{(4)}(1)=6$ и т. д.

$$y(x)=(x-1)+\frac{2(x-1)^3}{3\,!}+\frac{6(x-1)^4}{4\,!}+\ldots=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$$

1.6 Ряды Фурье

Литература: [2, гл. III, § 8; 5, гл. 4, § 9; 10, гл. XVII, § 1-6; 12, р. III, гл. II, § 9].

Широкое применение на практике рядов Фурье обусловлено небольшими требованиями, которые выдвигаются для соответствующей функции *f (x)*, а также тем, что разложение ее в ряд по косинусам и синусам – не только формальная математическая операция, а есть отражение реальной картины некоторого физического процесса, который фактически является суперпозицией колебаний.

Если $f(x)$ имеет период $T = 2\ell$, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x \right) \qquad x \in [-\ell, \ell] \, ,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\, dx.$$

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2ℓ кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-\ell, \ell]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом сумма полученного ряда равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. А в точках разрыва сумма равна среднему арифметическому пределов слева и справа. Пусть $x = c$ точка разрыва, тогда сумма ряда равна

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Если $f(x)$ чётная $(f(x) = f(-x))$, то коэффициенты Фурье на $x \in [-\ell, \ell]$ вычисляют по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\, dx, \quad b_n = 0.$$

и в ряде Фурье сохраняются только косинусы. Если $f(x)$ нечётна $(f(-x)=-f(x))$, в ряде Фурье сохраняются только синусы:

$$a_0=a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

Пример. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье и построить график суммы ряда:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

Решение

Вычислим коэффициенты ряда. Полагая $\ell=\pi$, получим:

$$a_0=a_n=0,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi)=$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ - чётно}\\ \dfrac{4}{\pi n}, & n\text{ - нечётно}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+\ldots\right)$$

Построим график $S(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. (рис. 1.3)

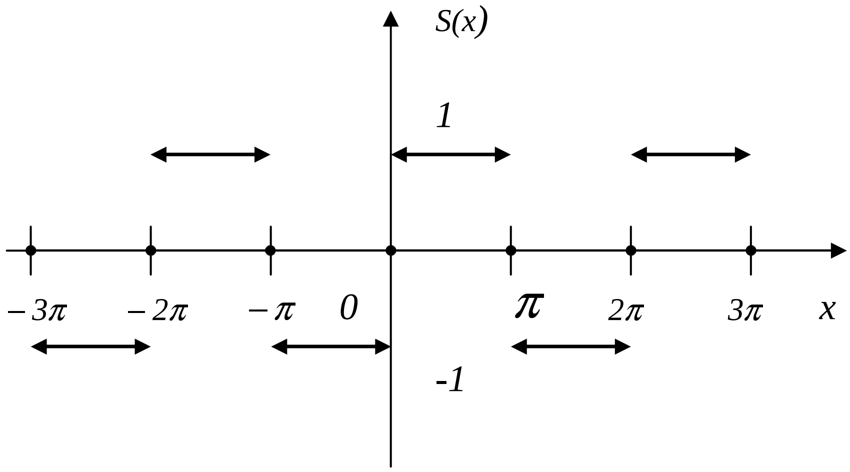

Рисунок 1.3

Замечание. Если $f(x)$ определена на отрезке $x \in [0, \ell]$, то её можно разложить в ряд Фурье, как по синусам, так и по косинусам.

1.7 Элементы теории функций комплексного переменного

Литература: [3, гл. I, § 1-4; 5, гл. 2, § 1-3; 6, гл. 1. § 5; 7, гл. 11, § 1, 2; 8, р. 7.1, р. 15.1].

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + i\,y$ (алгебраическая форма комплексного числа), где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = Re\ z$, $y = lm\,z$.

Комплексное число $z = x - i\,y$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + i\,y$.

Комплексное число $z = x + i\,y$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O\ (0, 0)$, а конец в точке $M\ (x, y)$ (рис. 1.4).

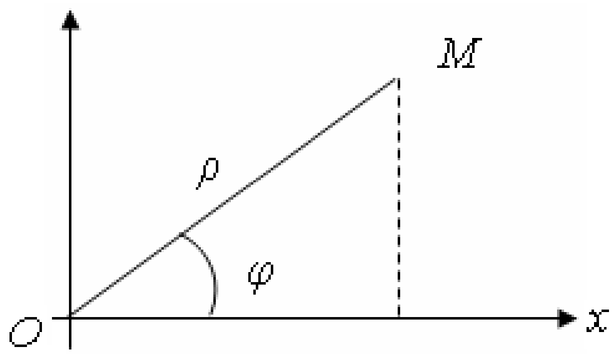

Рисунок 1.4

Длинна ρ вектора $\overline{OM}$ называется модулем комплексного числа и обозначается | z |, так что $\rho = \left| z \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Arg\ z$; он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого кратного 2π, $\arg z = arctg\ {}^{y}\!/\!{}_{x}$.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$.

1 Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2 Разностью $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

3 Произведением $z_1\,z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

4 Частное двух комплексных чисел вычисляется по формуле $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$.

Другие формы записи комплексных чисел и действия над ними

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая;

$z = \rho\, e^{\,i\varphi}$ – показательная.

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1 \cdot \rho_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Функции комплексного переменного

Пусть $z = x + i\,y$ и $w = u + i\,v$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией *w* и комплексной переменной *z* может быть описана с помощью двух действительных функций *u* и *v*, действительных переменных *x* и *y*.

Условие Коши – Римана

Если $w = u(x, y) + i\,v(x, y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $w = f(z)$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1.8 Операционное исчисление

Литература: [3, гл. II, § 14, 15, 17; 7, гл. 13, § 1-4; 8, р. 16.2; 10, гл. XIX, § 1-12].

Операционным методом удобно решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений. Этот метод заключается в преобразовании данного дифференциального уравнения (или системы), содержащего оригинал и его производные, в уравнение относительно соответствующего изображения. После чего оказывается, что для нахождения изображения оригинала достаточно решить простое линейное алгебраическое уравнение (или систему таких уравнений). Затем остаётся восстановить оригинал (или оригиналы) по найденному изображению.

Для успешного применения методов операционного исчисления студенту нужно уметь свободно применять теоремы, проводить операции над оригиналами и изображениями, используя таблицу основных оригиналов и изображений.

Приведем основные понятия и определения относящиеся к операционному исчислению, а так же основную таблицу изображений для элементарных функций.

Функцию $f(t)$ определенную $t \in [0,\infty)$ будем называть оригиналом если она:

1) кусочно-монотонна;

2) существует такие же числа $M > 0, S > 0$, что для любого $t \in [0,\infty)$ выполняется соотношение $\left| f(t) \right| \le M\ e^{St}$;

3) $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$.

Функцию $F(p)$ где (p – комплексная переменная), определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt$$

будем называть изображением оригинала $f(t)$ и записывать

$$f(t) \div F(p)$$

Справедливы следующие соотношения:

1. $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F(p) + C_2 F(p)$.
2. $f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.
3. $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{1}{p} F(p)$.
4. $t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$.
5. $e^{-\alpha t} f(t) \div F(p+\alpha)$.
6. $f(t - t_0) \div F(p) e^{-t_0 p}, t_0 > 0 - const$.
7. $\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(z)\, dz$.

Приведем изображения некоторых элементарных функций (табл. 1.1)

Изображение кусочномонотонной периодической функции

Рассмотрим функцию $f_0(t) = \begin{cases} 0 & при \quad t < 0, \\ f(t) & при \quad 0 \le t \le T_0, \\ 0 & при \quad t > T_0. \end{cases}$ которая имеет изображение $f_0(t) \div F_0(p)$.

Тогда для периодической функции $f(t)$, где $T = T_0$ – период, изображение находим по формуле :

$$f(t) \div \frac{F_0(p)}{1 - e^{-T_0 P}},$$

Пример. Найти изображение оригинала.

$$f(t) = t \cos^2 4t$$

Решение

Преобразуем данный оригинал

$$f(t) = \cos^2 4t = \frac{1}{2} t(1 + \cos t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t \cos t \div$$

Используя таблицу изображений элементарных функций и свойство линейности изображений, получим $\div \frac{1}{2}$

$$\frac{1!}{p^2}+\frac{1}{2}\ \frac{p^2-8^2}{(p^2+8^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{p^2-64}{(p^2+64)^2}\right).$$

Таблица 1.1 - Изображения элементарных функций

$F(t)$, при $t>0$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$t\cdot\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t\cdot\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 3e^{2t}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Решение

Введем обозначение

$$\begin{array}{lcl} y(t) \div \overline{y}(p) & & y(t) \div \overline{y} \\ y'(t) \div p\overline{y} - y(0) & \Rightarrow & y'(t) \div p\overline{y} - 1 \\ y''(t) \div p^2\overline{y} - p\,y(0) - y^1(0) & & y''(t) \div p^2\overline{y} - p. \end{array}$$

$3e^{2t} \div \dfrac{3}{p-2}$, где $\overline{y}(p)$ – изображение искомого решения. Найдем оригинал полученного изображения. Разложим:

$$\bar{y}(p) = \frac{p^2 - 4p + 7}{(p-2)(p-1)^2} = \frac{A_1}{p-2} + \frac{A_2}{(p-1)^2} + \frac{A_3}{p-1}.$$

Используем метод подстановки, найдем коэффициенты:

p = 2, $A_1 = \dfrac{4 - 8 + 7}{(2-1)^2} = 3$; $\qquad$ $A_1 = 3$;

$p = 1$, $A_2 = \dfrac{1 - 4 + 7}{1 - 2} = \dfrac{4}{-1}$; $\qquad$ $A_2 = -4$;

$$p^2 - 4p + 7 = A_1(p-1)^2 + A_2(p-2) + A_3(p-1)(p-2);$$

$$p^2 \,\Big|\; A_1 + A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = 1 - A_1 \Rightarrow A_3 = 1 - 3 = -2; \;\; A_3 = -2.$$

Тогда $\bar{y}(p) = \dfrac{3}{p-2} - \dfrac{4}{(p-1)^2} - \dfrac{2}{p-1}$.

Используя результаты таблицы и свойство линейности изображения, получим искомое решение в виде

$$y(t) = 3e^{2t} - 4te^t - 2e^t \text{ или}$$

$$y(t) = -2(1 + 2t)e^t + 3e^{2t}.$$

2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

2.1 Неопределённый и определённый интеграл, его приложения

Задания 1.1–1.25. Найти неопределённые интегралы:

1.1 а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int (4-3x)e^{-3x}\,dx$;

в) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

1.2 а) $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$;

в) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$; г) $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx$.

1.3 а) $\int \frac{2\operatorname{ctg} x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$; б) $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$;

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1.4 а) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$; б) $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x+5)\sin 2x}$; г) $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$;

1.5 а) $\int \frac{3+2\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx$; б) $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$;

в) $\int \frac{x^3+6x^2+9x-6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$.

1.6 а) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int \frac{4\operatorname{tg} x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\,dx$;

в) $\int (5x-2)\, e^{3x}\, dx$; г) $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\, dx$;

1.7 а) $\int tg\, x \cdot \ln\cos x\, dx$; б) $\int (1-6x) e^{2x}\, dx$;

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$; г) $\int \frac{8+tg\, x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\, dx$;

1.8 а) $\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}\, dx$; б) $\int \ln(x^2+4)\, dx$;

в) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\, dx$; г) $\int \frac{tg\, x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}\, dx$

1.9 а) $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$; б) $\int \ln(4x^2+1)\, dx$;

в) $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx$; г) $\int \frac{3\, tg\, x-1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1} dx$;

1.10 а) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$; б) $\int (2-4x)\sin 2x\, dx$;

в) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx$; г) $\int \frac{1+ctg\, x}{(\sin x+2\cos x)^2} dx$;

1.11 а) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^2} dx$; б) $\int arctg\sqrt{6x-1}\, dx$;

в) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}\, dx$; г) $\int \frac{tg\, x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4} dx$;

1.12 а) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2} dx$; б) $\int e^{-2x}(4x-3)\, dx$;

в) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\, dx$; г) $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}} dx$;

1.13 а) $\int \frac{x^3+x}{1+x^4} dx$; б) $\int e^{-3x}(2-9x)\, dx$;

в) $\int \frac{3x^2+1}{x^2-1} dx$; г) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$;

1.14 а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$; б) $\int arctg\sqrt{6x-1}\,dx$;

в) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}\,dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4}\,dx$;

1.15 а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int arctg\sqrt{3x-1}\,dx$;

в) $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2}\,dx$; г) $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx$;

1.16 а) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6}\,dx$; б) $\int arctg\sqrt{5x-1}\,dx$;

в) $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x\,(1 + \cos x)}$;

1.17 а) $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^5}\,dx$; б) $\int (5x + 6)\cos 2x\,dx$;

в) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2}\,dx$; г) $\int \frac{4 - 7\,tg\,x}{2 + 3\,tg\,x}\,dx$;

1.18 а) $\int \frac{4\,arctg\,x - x}{1 + x^2}\,dx$; б) $\int (3x - 2)\cos 5x\,dx$;

в) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$; г) $\int \frac{\sin x}{5 + 3\sin x}\,dx$

1.19 а) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4}\,dx$; б) $\int (x\sqrt{2} - 3)\cos 2x\,dx$;

в) $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$;

1.20 а) $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x}\,dx$; б) $\int (4x + 7)\cos 3x\,dx$;

в) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx$; г) $\int \frac{\sin x}{2 + \sin x}\,dx$;

1.21 а) $\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$; б) $\int (2x-5)\cos 4x\, dx$;

в) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$;

1.22 а) $\int \frac{8x - arctg\, 2x}{1+4x^2} dx$; б) $\int (8-5x)\cos 5x\, dx$;

в) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)} dx$; г) $\int \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x + \cos x)^2} dx$;

1.23 а) $\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x}{(\sqrt{x} + x^2)} dx$; б) $\int (2x+5)\sin 3x\, dx$;

в) $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx$; г) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x - \sin x)^2} dx$;

1.24 а) $\int \frac{x}{x^4+1} dx$; б) $\int (2 - \frac{3}{5}x)\sin 2x\, dx$;

в) $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{(x^2 - 2x)} dx$; г) $\int \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)} dx$;

1.25 а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$; б) $\int \frac{4x+3}{5}\sin 5x\, dx$;

в) $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx$; г) $\int \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2} dx$.

Задание 2.1–2.5. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями:

2.1 $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$;

2.2 $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \le x \le 3)$;

2.3 $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$;

2.4 $y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$, $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$;

2.5 $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Задание 2.6–2.10. Вычислить площади фигур ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

2.6 $r = 2\cos\gamma$, $r = 2\sqrt{3}\sin\gamma, (0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2})$;

2.7 $r = \cos\gamma$, $r = \sqrt{2}\cos(\gamma - \frac{\pi}{2})$, $(0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2})$;

2.8 $r = \cos\gamma$, $r = \sin\gamma$, $(0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2})$;

2.9 $r = \cos\gamma$, $r = 2\cos\gamma$;

2.10 $r = 6\sin\gamma$, $r = 4\sin\gamma$.

Задание 2.11–2.15. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями:

2.11 $\begin{matrix} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{matrix}$ $(0 \le t \le \pi)$;

2.12 $\begin{matrix} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{matrix}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

2.13 $\begin{matrix} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{matrix}$ $(0 \le t \le 2)$;

2.14 $\begin{matrix} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{matrix}$ $(0 \le t \le \pi)$;

2.15 $\begin{matrix} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{matrix}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$.

Задание 2.16–2.20. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, ось вращения OX:

2.16 $y = -x^2 + 5x - 6, \ y = 0$;

2.17 $y = 3\sin x, \ y = \sin x, \ (0 \le x \le \pi)$;

2.18 $y = x^2, \ y^2 - x = 0$;

2.19 $y = 5\cos x, \ y = \cos x, \ x = 0, \ (x \ge 0)$;

2.20 $y = x^3, \ y = \sqrt{x}$;

Задание 2.21–2.25. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 2.1). Удельный вес воды $1\,{}^{т}\!/_{м^3}$

2.21 a = 4,4м, b = 6,6м, h = 3м;

2.22 a = 5,1м, b = 7,8м, h = 3м;

2.23 a = 5,7м, b = 9,0м, h = 4м;

2.24 a = 6,3м, b = 1θ,2м, h = 4м;

2.25 a = 6,9м, b = 11,4м, h = 5м;

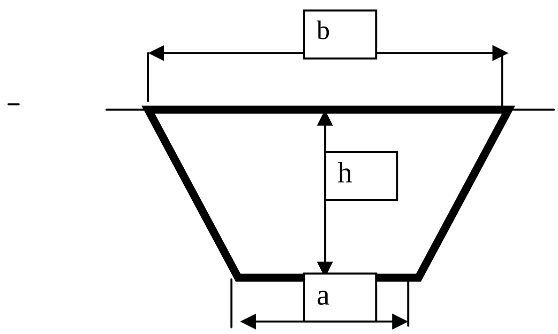

Рисунок 2.1

2.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задание 3.1–3.25. Для всех заданий установить аргументировано тип дифференциального уравнения и метод его решения. Решить задачу Коши.

3.1 $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \; y(1) = 0;$

3.2 $x\,dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx, \; y(1) = 0;$

3.3 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, \; y(e) = 1;$

3.4 $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0, \; y(1) = 2;$

3.5 $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), \; y(1) = 1;$

3.6 $xy'(\ln y - \ln x) = y, \; y(e) = 1;$

3.7 $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8, \; y(1) = 1;$

3.8 $(xy' - y)\,arctg\,\frac{y}{x} = x, \; y(1) = 0;$

3.9 $y' - \frac{y}{x} = x^2, \; y(1) = 0;$

3.10 $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x, \; y(\frac{\pi}{2}) = 0;$

3.11 $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \; y(0) = 0;$

3.12 $y' + y\,tg\,x = \cos^2 x, \; y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2};$

3.13 $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \; y(-1) = \frac{3}{2};$

3.14 $y' - \frac{1}{x+1} y = e^{x}(x+1), \quad y(0) = 1;$

3.15 $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y = (\frac{\pi}{2}) = 1;$

3.16 $y' + 2xy' = -2x^{3}, \quad y(1) = e^{-1};$

3.17 $y' + xy = -x^{3}, \quad y(0) = 3;$

3.18 $y' + \frac{x}{2(1-x^{2})} y = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3};$

3.19 $y' + 2xy = x e^{-x^{2}} \sin x, \quad y(0) = 1;$

3.20 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$

3.21 $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^{2}, \quad y(0) = 1;$

3.22 $xy' + y = 2y^{2} \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2};$

3.23 $2(xy' + y) = xy^{2}, \quad y(1) = 2;$

3.24 $xy' - y = -y^{2}(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1;$

3.25 $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-x^{2}}, \quad y(0) = 1.$

Задание 4.1–4.25. Найти общее решение дифференциального уравнения:

4.1. $y'' - 6y' + 9y = x^{2} - x + 3;$

4.2 $y'' + 7y' + 12y = 24x^{2} + 6x - 15;$

4.3 $y'' - 8y' + 12y = 65 \cos 4x;$

4.4 $y'' - 3y' = xe^{4x};$

4.5 $y'' - 2y' + y = 4(\sin x + \cos x)$;

4.6 $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$;

4.7 $y'' - 4y' + 5y = (x - 1)e^x$;

4.8 $4y'' - y = x^3 - 24x$;

4.9 $7y'' - y' = 14x$;

4.10 $y'' + 2y' + y = 16e^x$;

4.11 $y'' - y' - 2y = (3x + 7)e^{2x}$;

4.12 $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$;

4.13 $y'' + 3y' = 3(2 - x^2)$;

4.14 $y'' + 9y = xe^x$;

4.15 $y'' + 6y' + 9y = 3 - 2x^2$;

4.16 $y'' - 16y = 2\sin 4x$;

4.17 $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$;

4.18 $y'' - 5y' = 3(x + 1)^2$;

4.19 $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;

4.20 $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

4.21 $y'' - 2y' + 5y = -\cos x$;

4.22 $y'' + 5y' - 6y = xe^x$;

4.23 $y'' - y' - 2y = (6x - 11)e^{-x}$;

4.24 $y'' + 4y = x^2 + 2x$;

4.25 $y'' + 100y = 10\cos 10x$.

Задание 5.1–5.25. Приложение дифференциальных уравнений к решению задач естествознания и геометрии.

5.1 Поезд, вес которого P вместе с тепловозом, движется по прямолинейному пути (горизонтально). Сила тяги тепловоза постоянна и равна F. Сила W сопротивления при движении задаётся как линейная функция ($W = Pf + kV$) от скорости поезда. Найти зависимость скорости поезда от пройденного пути, если в начальный момент времени скорость и путь равны нулю. (Здесь f – коэффициент трения, k – коэффициент пропорциональности).

5.2 Лодка массой m разгоняется в спокойной воде до скорости V_0, после чего выключает двигатель. Сопротивление воды пропорционально скорости с коэффициентом пропорциональности k. Найти зависимость скорости лодки от пройденного пути, а так же пройденный лодкой путь до остановки.

5.3 Точка массой m движется прямолинейно, на нее действует сила, равная утроенному кубу времени. В момент времени $t = 0$, $V(0) = V_0$. Кроме того, точка испытывает при движении сопротивление среды, пропорциональное произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности k). Найти зависимость скорости от времени.

5.4 В цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L действует периодическая электродвижущая сила $E(t) = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (где T – период, t – время, E_0 – максимальное значение величины $E(t)$). Определить силу тока в цепи в любой момент времени, если в начальный момент сила тока равна нулю.

5.5 Стальной шарик массой m падает с высоты h без начальной скорости на горизонтальную плиту. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости с коэффициентом пропорциональности k. Найти скорость шарика в момент удара о плиту.

5.6 Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению квадрата скорости V на время t. Найти зависимость между скоростью и временем, если при $t = 0$, $V = 60\ \frac{км}{ч}$.

5.7 Материальная точка массой $0{,}2\ кг$ с начальной скоростью, равной $0{,}05\ \frac{м}{с}$, погружается в воду. Найти путь, пройденный точкой за $2\ с$, если сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $k = 2$).

5.8 Футбольный мяч массой $0{,}1\ кг$ брошен вверх со скоростью $20\ м/с$. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $0{,}48\ г$ при скорости $1\ м/с$. Вычислить время подъема мяча.

5.9 Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в данный момент его фактической стоимости. Начальная стоимость равна $4\,млн.грн$. Известно, что стоимость оборудования через 3 года стала $3\,млн.грн$, найти стоимость оборудования по истечению $10\,лет$.

5.10 Моторная лодка двигается в спокойной воде со скоростью $V_0 = 12\,\frac{км}{ч}$. На полном ходу ее мотор был выключен и через $10\ с$ скорость лодки уменьшилась до $V_1 = 6\,\frac{км}{ч}$. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через $1\ мин$ после выключения мотора.

5.11 В электронагревательную печь с температурой $T_{ср} = 1200^{\circ}$ поместили заготовку с температурой $T_0 = 200^{\circ}$. Через $1 час$ температура заготовки повысилась до $T_1 = 400^{\circ}$. Какой будет температура заготовки через $4 часа$, если известно что скорость изменения температуры заготовки пропорциональна разности температуры среды и температуры заготовки.

5.12 Заготовку при температуре $T_0 = 1000^{\circ}$ извлекли из печи и оставили при температуре окружающей среды $T_{ср} = 30^{\circ}$. Через 1 $час$ температура заготовки понизилась до $T_1 = 800^{\circ}$. Какой будет температура заготовки через $10\,часов$, если известно, что скорость изменения температуры заготовки пропорциональна разности температур среды и заготовки.

5.13 Пуля, движется со скоростью $V_0 = 400\ \frac{м}{с}$, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее, испытывая силу сопротивления стены; эта сила сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7\,м^{-1}$. Найти скорость пули через $0{,}001\ с$ после вхождения в стену.

5.14 В сосуде 100 $л$ водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью $q = 5\frac{л}{мин}$, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора, В начальный момент в растворе содержится $m_0 = 10\ кг$ соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через $20\,мин$ после начала процесса.

Задание 5.15–5.20. Найти линию, проходящую через точку M_0, если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a:b$ (считая от оси OY).

5.15 $M_0(1,2),\ a:b = 1:1.$

5.16 $M_0(1,3),\ a:b = 2:1.$

5.17 $M_0(3,-1),\ a:b = 3:2.$

5.18 $M_0(2,1),\ a:b = 1:2.$

5.19 $M_0(2,-3),\ a:b = 3:1.$

5.20 $M_0(4,2),\ a:b = 3:2.$

Задание 5.21–5.25. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overline{MN}$ с концом на оси OY имеет проекцию на ось OY равную a.

5.21 $M_0(1,2),\ a = -1;$

5.22 $M_0(1,5),\ a = -2;$

5.23 $M_0(1,6),\ \ a=3;$

5.24 $M_0(1,2),\ \ a=-1;$

5.25 $M_0(1,3),\ \ a=-4;$

2.3 Кратные интегралы и теория поля

Задание 6.1–6.15. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми:

6.1 $x=2y^2;\ \ x=y;$

6.2 $y^2=4x+4;\ \ y^2=-2x+4;$

6.3 $x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0;$

6.4 $y^2=x,\ x=1,\ \ y\geq 0;$

6.5 $x=2y^2;\ 2x=1;\ y\geq 0;$

6.6 $x=3y^2;\ 3x=1;\ \ y\geq 0;$

6.7 $y^2=3x;\ x=3;\ y\geq 0;$

6.8 $4(x^2+y^2)=25,\ y\geq 0;$

6.9 $3y^2=2x, 3x=2, y\geq 0;$

6.10 $3x^2+3y=1;\ \ y=0$

6.11 $2x^2+2y=5;\ y=0.$

6.12 $y=5-x^2,\ y=0.$

6.13 $y=3-x^2,\ y=0.$

6.14 $y=x^2,\ x=y^2.$

6.15 $y=1-x^2,\ y=0.$

Задание 6.16–6.25. Вводя полярные координаты, вычислить площадь, ограниченную кривыми:

6.16 $x^2+y^2=8x,\ y=x, y=0.$

6.17 $r=2(1+\cos\varphi),\ r=2$ (вне кардиоиды).

6.18 $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ y=0.$

6.19 $r\leq\dfrac{3}{2}(1+\cos\varphi), r\geq\dfrac{3}{2}\cos\varphi.$

6.20 $r\leq 2(1+\cos\varphi), r\cos\varphi\geq\dfrac{3}{2}.$

6.21 $x^2+y^2=18x, x=0, y=x.$

6.22 $r=2(1+\cos\varphi),\ r=2\cos\varphi.$

6.23 $x^2+y^2=14x,\ x=y,\ y=0.$

6.24 $r=8(1+\cos\varphi)$`, $r\cos\varphi=6.$

6.25 $x^2+y^2=2x,\ y=x,\ x^2+y^2=4x,\ y=0.$

Задание 7.1–7.25. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

7.1 $z=y^2+x^2,\ z=9.$

7.2 $y=1+x^2,\ z=3x,\ y=5,\ z=0.$

7.3 $y^2=x, y=x^2,\ z=x^2+y^2.$

7.4 $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x=1,\ y=2x,\ y=0.$

7.5 $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ x+z=6.$

7.6 $z=9-y^2,\ 3x+4y=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.7 $z=x^2+y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2=1.$

7.8 $z=3x^2+2y^2,\ x=2,\ x=5,\ y=2,\ y=3,\ z=0.$

7.9 $z=2x^2+3y^2,\ z=0,\ x=1,\ x=2,\ y=-1,\ y=2.$

7.10 $4z=1-4x^2,\ 2x+2y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.11 $z=9-x^2,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.12 $z=4-x^2,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.13 $2z=x^2+y^2,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.14 $z=10-x^2-y^2,\ z=6.$

7.15 $3z=x^2+y^2,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.16 $z=x^2+3y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.17 $z=3x^2+y^2,\ x+y=\frac{1}{2},\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.18 $z=x^2+y^2,\ x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.19 $z=x^2+2y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.20 $z=1-x^2-y^2,\ z=0.$

7.21 $z=2x^2+y^2,\ z=0,\ x=2,\ x=4,\ y=2,\ y=3.$

7.22 $2z=x^2+2y^2,\ z=0,\ x=1,\ x=3,\ y=1,\ y=2.$

7.23 $z=x^2+\frac{y^2}{2},\ x=2,\ x=3,\ y=1,\ y=2,\ z=0.$

7.24 $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$, $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$, $z=0$.

7.25 $4z=x^2+4y^2$, $z=0$, $x=1$, $x=4$, $y=1$, $y=2$.

Задание 8.1–8.25. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N:

8.1 $\overline{F}=(x^2+2y)\,\bar{i}+(y^2+2x)\,\bar{j}$, $L: 2-\frac{x^2}{8}=y$, $M(-4,0), N(0,2)$.

8.2 $\overline{F}=x^3\,\bar{i}-y^3\,\bar{j}$, $L: x^2+y^2=4$, $(x\geq 0, y\geq 0)$, $M(2,0), N(0,2)$.

8.3 $\overline{F}=-x\bar{i}+y\bar{j}$, $L:=x^2+\frac{y^2}{9}=1$, $(x\geq 0, y\geq 0)$, $M(1,0), N(0,3)$.

8.4 $\overline{F}=(x+y)^2\,\bar{i}-(x^2+y^2)\bar{j}$, $L: x^2+y^2=1$, $M(1,0), N(0,1)$.

8.5 $\overline{F}=-y\bar{i}+x\bar{j}$, $L: y=x^3$, $M(0,\ 0), N(2,\ 8)$.

8.6 $\overline{F}=(xy-x)\bar{i}+\frac{x^2}{2}\bar{j}$, $L: y=2\sqrt{x}$, $M(0,0), N(1,\ 2)$.

8.7 $\overline{F}=-xy\bar{i}$, $L: y=\sin x$, $M(\pi,\ 0)$, $N(0,\ 0)$.

8.8 $\overline{F}=-x^2y\,\bar{i}+xy^2\,\bar{j}$, $L: x^2+y^2=4$, $(x\geq 0, y\geq 0)$, $M(2,\ 0)$, $N(0,\ 2)$.

8.9 $\overline{F}=(x-y)\,\bar{i}+y^2\,\bar{j}$, $L: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $y\geq 0$, $M(3,0)$, $N(-3,\ 0)$.

8.10 $\overline{F}=(xy-y^2)\bar{i}+x\bar{j}$, $L: y=2x$, $M(0,0), N(1,\ 2)$

8.11 $\overline{F}=(x^2-2y)\,\bar{i}+(y^2-2x)\bar{j}$, $L: MN-\textit{отрезок}$, $M(4,0), N(0,2)$

8.12 $\overline{F}=(x^2+2y)\,\bar{i}+(y^2+2x)\bar{j}$, $L: 2y-\frac{x^2}{8}=4$, $\mathrm{M}(-4,\ 3), N(0,2)$

8.13 $\overline{F}=x^3\,\bar{i}-y^3\bar{j}$, $L: x^2+y^2=4$, $(x\geq 0, y\geq 0)$, $M(2,\ 0), N(0,2)$

8.14 $\overline{F}=x^2y\,\bar{i}-y\,\bar{j}$, $L: MN-\textit{отрезок}$, $M(-1,\ 0), N(0,1)$

8.15 $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+(x-y)\,\bar{j}$, $L: x^2+\frac{y^2}{9}=1$, $(x\geq 0, y\geq 0)$, $M(1,\ 0)$ $N(0,3)$

8.16 $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(x-y)\overline{j}, L: x^2+\dfrac{y}{9}=1 \ (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1,0)$ $N(0,3)$

8.17 $\overline{F}=(x^2+2y)\overline{i}+(y^2+2x)\overline{j}, L: MN-\textit{отрезок}$, $M(-4,0)$ $N(0,9)$

8.18 $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+2x\overline{j}$, $L: x^2+y^2=4, (y\ge 0)$, $M(2,0)$ $N(-2,0)$

8.19 $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(x-y)\overline{j}$, $L: y=x^2$, $M(-1,1)$ $N(1,1)$

8.20 $\overline{F}=-x\overline{i}+y\overline{j}, L: x^2+\dfrac{y^2}{9}=1 \ (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1,0)$ $N(0,3)$

8.21 $\overline{F}=(2xy-y)\overline{i}$, $L: x^2+y^2=9, (y\ge 0)$, $M(3,0)$ $N(-3,0)$

8.22 $\overline{F}=y\overline{i}-x\overline{j}, L: x^2+y^2=1, (y\ge 0)$, $M(1,0)$ $N(-1,0)$

8.23 $\overline{F}=xy\overline{i}+2y\overline{j}, L: x^2+y^2=1, (x\ge 0, y\ge 0)$, $M(1,0)$ $N(0,1)$

8.24 $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j}$, $L: y=x^3$, $M(0,0)$ $N(2,8)$

8.25 $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+\overline{j}, L: x^2+y^2=4, (y\ge 0)$, $M(2,0)$ $N(-2,0)$

Задание 9.1–9.15. Найти поток векторного поля $\overline{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

9.1 $\overline{a}=(\cos z+3x)\overline{i}+(x-2y)\overline{j}+3z\overline{k}$;

$S: z^2=36(x^2+y^2),\ z=6$.

9.2 $\overline{a}=(\ln y+7x)\overline{i}-2y\overline{j}+(e^y-2z)\overline{k}$;

$S: x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z-2$.

9.3 $\overline{a}=(6x-\cos y)\overline{i}+(e^x+z)\overline{j}+(2y-3z)\overline{k}$;

$S: x^2+y^2=z^2\ z=1,\ z=2$.

9.4 $\overline{a}=(5x-6y)\overline{i}+(11x^2+2y)\overline{j}+(x^2-4z)\overline{k}$;

$S: x+y+2z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

9.5 $\overline{a}=(3x-2z)\overline{i}+(z-2y)\overline{j}+(1+2z)\overline{k}$;

$S: z^2=4(x^2+y^2), z=2$.

9.6 $\overline{a}=(x+y^2)\overline{i}+(xz+y)\overline{j}+(e^x+z)\overline{k}$;

$S: x^2+y^2+z^2=2y+3.$

9.7 $\overline{a}=(y^2+6x)\overline{i}+(e^z-2y)\overline{j}+(x+y-z)\overline{k}$;

$S: x^2+y^2=z^2,\ z=1, z=3.$

9.8 $\overline{a}=(yz-2x)\overline{i}+(\sin x+y)\overline{j}+(x-2z)\overline{k}$;

$S: x+2y+3z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

9.9 $\overline{a}=(y+z^2)\overline{i}+(x^2+3y)\overline{j}+xy\overline{k}$;

$S: x^2+y^2+z^2=2x.$

9.10 $\overline{a}=(\sqrt{z-x})\overline{i}+(x-y)\overline{j}+(y^2-z)\overline{k}$;

$S: 3x-2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

9.11 $\overline{a}=(e^z+2x)\overline{i}+e^x\overline{j}+e^y\overline{k}$;

$S: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

9.12 $\overline{a}=(3z^2+x)\overline{i}+(e^x-2y)\overline{j}+2z\overline{k}$;

$S: x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ z=4.$

9.13 $\overline{a}=(\cos z+3x)\overline{i}+(x-2y)\overline{j}+3z\overline{k}$;

$S: z^2=36(x^2+y^2),\ z=6\ .$

9.14 $\overline{a}=(\ln y+7x)\overline{i}-2y\overline{j}+(e^y-2z)\overline{k}$;

$S: x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z-2.$

9.15 $\overline{a}=x\overline{i}+(xz-3y)\overline{j}+(z+x^2)\overline{k}$;

$S: 2x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Задание 9.16 –9.25. Найти поток векторного поля $\overline{a}$ через часть плоскости Р, расположенной в первом октанте (нормаль образует с осью OZ острый угол).

9.16 $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, $P: x+y+z=1.$

9.17 $\overline{a}=2x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, $P: x+y+z=2.$

9.18 $\overline{a}=x\overline{i}+3y\overline{j}+z\overline{k}$, $P:\frac{x}{3}+y+\frac{z}{2}=1.$

9.19 $\overline{a}=x\overline{i}\quad y\overline{j}+6z\overline{k}$, $P:\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1.$

9.20 $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}+2z\overline{k}$, $P:2x+\frac{y}{2}+z=1.$

9.21 $\overline{a}=x\overline{i}+3y\overline{j}+2z\overline{k}$, $P:x+y+z=1.$

9.22 $\overline{a}=y\overline{i}+3z\overline{k}$, $P:\frac{x}{2}+y+z=1.$

9.23 $\overline{a}=2x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, $P:x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

9.24 $\overline{a}=2x\overline{i}+3y\overline{j}+z\overline{k}$, $P:\frac{x}{3}+y+\frac{z}{2}=1.$

9.25 $\overline{a}=x\overline{i}-2y\overline{j}+3z\overline{k}$, $P:2x+6y+3z=6.$

2.4 Числовые ряды

Задание 10.1–10.25. Исходя из определения суммы ряда, вычислить сумму данного ряда.

10.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}.$

10.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}.$

10.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}.$

10.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}.$

10.5 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}.$

10.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}.$

10.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}.$

10.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-7n-12}$.

10.9 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n-2}$.

10.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-14n-48}$.

10.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{36n^2-24n-5}$

10.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-84n-13}$.

10.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2+4n-3}$

10.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+35n-6}$.

10.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{9n^2+3n-20}$.

10.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-42n-40}$.

10.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{16n^2-8n-15}$

10.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-21n-10}$.

10.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{25n^2+5n-6}$.

10.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{4n^2-9}$.

10.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-35n-6}$.

10.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$.

10.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2+12n-35}$.

10.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+21n-10}$.

10.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2-3n-2}$.

Задание 11.1–11.25. Исследовать на сходимость ряд.

11.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

11.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+n+1}$.

11.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

11.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

11.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}}-1\right)$.

11.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

11.7 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!\ 4^n}$.

11.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^3}{n^3+1}$.

11.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n\, n^2}$.

11.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n}{\sqrt{(n+3)^5}}$.

11.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

11.12 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

11.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$.

11.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$.

11.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{4n}$.

11.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

11.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}\cdot 2^n.$ 11.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot 2^{n-1}\cdot e^{-n}.$

11.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}.$ 11.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{\left(2n^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}.$

11.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2+n}.$ 11.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^n\cdot\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}.$

11.23 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-3\right)\ln^2 n}.$ 11.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$

11.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}.$

2.5 Степенные ряды

Задание 12.1–12.25. Найти область сходимости степенного и функционального ряда.

12.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(3x^2+4x+2\right)^n}.$

12.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{8n+3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}x^{2n}\sin(x+\pi n).$

12.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-3)^3 x^n}{2n+3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{\left(27x^2+12x+2\right)^n}.$

12.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}}x^{2n}\cos(x+\pi n).$

12.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2\cdot 9^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}.$

12.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+4)\cdot 5^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n x^n\,tg\frac{3x}{n}.$

12.7 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 8^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n\left(n^2+1\right)}\left(25x^2+1\right)^n.$

12.8 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4 \cdot 7^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$

12.9 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 6^{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n.$

12.10 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 \cdot 7^{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{x}{7^{nx}(x-1)}.$

12.11 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(3x^2+8x+6\right)^n}.$

12.12 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n-4)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{n}{\ln x}}.$

12.13 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n\left(n^2+5\right)}.$

12.14 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{5^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\ln x\right)^n}{\sqrt{x-e^{\frac{1}{e}}}}.$

12.15 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3+2} \cdot \frac{1}{\left(3x^2+10x+9\right)^n}.$

12.16 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^4}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^2+1\right)}{n^2} \cdot \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n.$

12.17 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot 6^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n} \sin(2x-\pi n).$

12.18 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{7^{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)^n.$

12.19 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+6)^n$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}x^{2n}\cos(2x-\pi n).$

12.20 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+4}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2\left(x^2-x\right)+nx+x^3}{n^2(x+2)-nx^2+1}\right]^n.$

12.21 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+3}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\arcsin\frac{x}{3n}\cdot x^{3n}.$

12.22 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2n+3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}tg^n(2x).$

12.23 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$

12.24 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{x}{n^2+1}.$

12.25 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n+4}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}.$

Задание 13.1–13.10. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

13.1 $\int\limits_0^{0.1}e^{-6x^2}dx.$ 13.2 $\int\limits_0^{1}cos\,x^2\,dx.$

13.3 $\int\limits_0^{0.1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$ 13.4 $\int\limits_0^{0.1}sin100x^2\,dx.$

13.5 $\int\limits_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$ 13.6 $\int\limits_0^{1}\frac{ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx.$

13.7 $\int\limits_0^{1}\frac{sin\,x^2}{x^2}dx.$ 13.8 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-2x}-1}{x}dx.$

13.9 $\int\limits_0^{1}\frac{1-cos\,x^2}{x}dx.$ 13.10 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}cos^2x^2\,dx.$

Задание 13.11–13.20. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальному условию.

13.11 $y'' = x \cdot y;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

13.12 $y'' = -xy' - y;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

13.13 $y'' = xyy';\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

13.14 $(1-x)y' = 1 + x - y;\quad y(0) = 0.$

13.15 $y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1.$

13.16 $y' = e^y + xy;\ y(0) = 0.$

13.17 $y' = x^2 y^2 - 1;\ y(0) = 1.$

13.18 $y'' = y \cdot y' - x^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

13.19 $y' = y^2 + x^3;\ y(0) = \dfrac{1}{2}.$

13.20 $y' = y^2 + xy;\ y(0) = 1.$

Задание 13.21–13.25. Пользуясь разложением данной функции в ряд Маклорена, найти значения производных указанного порядка при $x = 0$ для функций:

13.21 $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2};\ f^{(6)}(0) = ?$

13.22 $f(x) = x^3 \ln\left(1 - x + x^2 - x^3\right);\ f^{(8)}(0) = ?$

13.23 $f(x) = x^6 \cdot \operatorname{arctg} x;\quad f^{(12)}(0) = ?;\ f^{(13)}(0) = ?$

13.24 $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x;\ f^{(7)}(0) = ?$

13.25 $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}};\quad f^{(5)}(0) = ?$

2.6 Ряды Фурье

Задание 14.1–14.10. Разложить функцию *f (x)* в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$ и построить график суммы ряда.

14.1 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi).$

14.2 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0;\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

14.3 $f(x)=x-1, x\in(-\pi,\pi).$

14.4 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

14.5 $f(x)=x+1, x\in(-\pi,\pi).$

14.6 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

14.7 $f(x)=x+1, x\in(-\pi,\pi).$

14.8 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

14.9 $f(x)=|x|, x\in(-\pi,\pi).$

14.10 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi<x<0;\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

Задание 14.11-14.18. Разложить функцию f (x) в интервале (0, ℓ) в ряд Фурье по синусам и построить график суммы ряда.

14.11 $f(x)=x^2,\ x\in(0,\ 2).$

14.12 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2},\ x\in(0,\ \pi).$

14.13 $f(x)=\operatorname{ch} x,\ x\in(0,\ \pi).$

14.14 $f(x)=2-x,\ x\in(0,\ 2).$

14.15 $f(x)=e^{x}, x\in(0,\ 4).$

14.16 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}, x\in(0,\ \pi).$

14.17. $f(x)=\operatorname{sh} x, x\in(0,\ \pi).$

14.18 $f(x)=x,\ x\in(0,\ 2).$

Задание 14.19-14.25. Разложить функцию f (x) в интервале (0, ℓ) в ряд Фурье по косинусам и построить график суммы ряда.

14.19 $f(x)=x^2, x\in(0,2).$ 14.20 $f(x)=\cos\frac{x}{2}, x\in(0,\pi)$

14.21 $f(x)=\mathrm{ch}\,x, x\in(0,\pi).$ 14.22 $f(x)=2-x, x\in(0,2).$

14.23 $f(x)=e^x, x\in(0,4).$ 14.24 $f(x)=\sin\frac{x}{2}, x\in(0,\pi).$

14.25 $f(x)=\mathrm{sh}\,x, x\in(0,\pi).$

2.7 Элементы теории функций комплексного переменного

Задание 15.1–15.25. Представить функцию $\omega=f(z)$, где $z=x+iy$, в виде $\omega=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение её производной в заданной точке z_0.

15.1 $f(z)=(iz)^3$, $z_0=-1+i.$

15.2 $f(z)=i\left(1-z^2\right)-2z$, $z_0=1.$

15.3 $f(z)=z^3+3z-i$, $z_0=-i.$

15.4 $f(z)=2z^2-iz$, $z_0=1-i.$

15.5 $f(z)=z^3+z^2+i$, $z_0=\frac{2}{3}i.$

15.6 $f(z)=z\sin z$, $z_0=-1.$

15.7 $f(z)=(3z+1)e^{-z}$, $z_0=0.$

15.8 $f(z)=\left(2z^2-3\right)\cos 2z$, $z_0=i.$

15.9 $f(z)=(3-2z)\sin 2z$, $z_0=0.$

15.10 $f(z)=\left(z-2z^2\right)\mathrm{sh}\,z$, $z_0=0.$

15.11 $f(z)=\frac{z\cdot \mathrm{sh}\,2z}{3}$, $z_0=\ln 2.$

15.12 $f(z)=\sin z^2$, $\quad z_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

15.13 $f(z)=\frac{1}{3}z\cos^2 z$, $\quad z_0=0$.

15.14 $f(z)=(z-\cos z)^2$, $\quad z_0=0$.

15.15 $f(z)=e^{-z^2}$, $\quad z_0=i$.

15.16 $f(z)=e^{1-2z}$, $\quad z_0=\frac{\pi}{3}i$.

15.17 $f(z)=e^{1-2iz}$, $\quad z_0=\frac{\pi}{6}$.

15.18 $f(z)=e^{iz^2}$, $\quad z_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}i$.

15.19 $f(z)=ze^z$, $\quad z_0=-1+i\pi$.

15.20 $f(z)=(1-z)\cos z$, $\quad z_0=\frac{\pi}{2}$.

15.21 $f(z)=\left(z^2-z\right)e^{2z}$, $\quad z_0=1$.

15.22 $f(z)=e^{z^2-2z}$, $\quad z_0=0$.

15.23 $f(z)=\frac{3z-2}{5}e^{-\frac{1}{2}z}$, $\quad z_0=0$.

15.24 $f(z)=(3-2z)\,\mathrm{ch}\,z$, $\quad z_0=0$.

15.25 $f(z)=\frac{1}{3}\mathrm{ch}\,3z$, $\quad z_0=\frac{1}{3}\ln 2$.

2.8 Операционное исчисление

Задание 16.1–16.28. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + p\,y' + q\,y = (a\,t + b)\,e^{k\,t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$. (табл. 2.1)

Таблица 2.1 – Таблица коэффициентов для задания №16

Вариант	p	q	a	b	k	y_0	y'_0
1	3	2	-24	-38	2	1	-1
2	1	-2	-2	1	-1	2	-1
3	0	-4	-6	-4	-1	-3	1
4	-1	-6	4	-1	-1	0	3
5	4	4	-2	-2	-1	-2	5
6	2	1	9	33	2	3	-1
7	0	-1	6	-1	2	-2	6
8	-1	-2	-4	-3	-2	3	7
9	-2	-3	6	-1	2	-1	2
10	3	2	12	7	2	3	7
11	0	-1	6	11	2	-1	0
12	-2	1	-4	12	-1	3	5
13	-3	2	-12	28	-1	-5	2
14	-4	3	8	-30	-1	3	-3
15	1	-2	-4	2	-1	5	-4
16	-1	-2	-4	1	-2	-1	6
17	-3	2	-12	10	-1	-6	2
18	-4	4	9	3	-1	5	3
19	-5	6	24	10	-1	-2	2
20	0	-4	3	-7	-1	3	-7
21	-2	-3	6	5	2	4	3
22	-4	3	8	-22	-1	-3	7
23	-5	6	24	-26	-1	5	-6
24	-6	9	-16	8	-1	-2	4
25	-1	-6	8	2	-1	3	8

3 ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ

3.1 Неопределенный, определенный интеграл и его приложения

3.1.1 Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int\sqrt{5-4x}\,dx$;

в) $\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$;

г) $\int \sin(5-3x)dx$;

е) $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx$;

ж) $\int \cos^2 3x\,dx$;

з) $\int \frac{2x-1}{x^2-x-9}dx$;

и) $\int(3+2x)e^{-x}\,dx$.

3.1.2 Вычислить определенный интеграл.

а) $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12\,ctg\,3x\,dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x\,dx$.

3.1.3 Вычислить определенный интеграл интегрированием по частям или заменой переменной:

а) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$;

в) $\int\limits_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$.

3.1.4 Найти среднее значение функции на данном отрезке.

а) x^3, $0 \le x \le 1$.

б) $\sqrt[3]{x}$, $0 \le x \le 1$.

в) $\cos x$, $0 \le x \le \pi/2$.

3.1.5 Оценить интеграл сверху: $\int_0^1 \sqrt{8+x^3}\,dx$.

3.1.6 Оценить интеграл снизу: $\int_0^3 \left(x^2 - 4x + 12\right)dx$.

3.1.7 Вычислить с точностью до двух знаков после запятой площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

а) $y = x^2$, $y = 2 - x$;

б) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

в) $y^2 = 9x$, $y = 3x$;

г) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$;

д) $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0,\pi]$;

е) $\rho = 2 + \cos\varphi$.

3.1.8 Вычислить длину дуги данной линии:

а) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $(0 \le x \le 8)$;

б) $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

3.1.9 Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной оси координат:

а) $y^2 = 4 - x$, $x = 0$, Ox;

б) $y^2 = x$, $x^2 = y$, Oy;

в) $y = \sin x$, $x \in [0;\pi]$, Ox;

г) $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, Oy;

д) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in (0;\pi]$, Ox.

3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.2.1 Доказать, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y=3+2e^{-4x}$, $y''+4y'=0$.

3.2.2 Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $(1+x^2)y'=2xy$.

3.2.3 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'=e^{y/x}+y/x$ с помощью подстановки $y=xU(x)$.

3.2.4 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{y}{x}=x^2$ с помощью подстановки $y=U(x)V(x)$.

3.2.5 Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(1,\sqrt{3})$, если известно, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной пропорционален абсциссе и обратно пропорционален ординате точки касания с коэффициентом пропорциональности $k=-1$.

3.2.6 Найти общее решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка дифференциального уравнения:

а) $y''=4-x+\sin 2x$: решить методом непосредственного интегрирования;

б) $xy''+y'=0$: применить подстановку $y'=z(x)$, $y''=z'(x)$;

в) $y''=1-y'^2$: применить подстановку $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$.

3.2.7 Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений

а) $y''+6y'+5y=0$; б) $4y''-y=0$;

в) $3y''-2y'=0$; г) $y''+9y=0$;

д) $y''+6y'+25y=0$; е) $y''+4y'+4y=0$.

3.2.8 Найти общее решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений

а) $y''+4y=x^2-2x$; б) $y''-4y'=2x-3$;

в) $y''-3y'+2y=e^{-x}$.

3.2.9 Решить задачу Коши $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

3.2.10 Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

3.3 Кратные интегралы и теория поля

3.3.1 Расставить пределы интегрирования, проектируя область D на оси Ox и Oy. D: $y = x^2 - 2x$, $y = 2 - x$.

3.3.2 Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями.

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$;

б) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, $(x \le 0)$.

3.3.3 Изменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3.3.4 Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\mu = 2xy$ где D ограничена заданными линиями: $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$.

3.3.5 Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль заданной кривой от точки M к точке N:

а) $\overline{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, $y = x^2$, $M(-1;1)$, $N(1;1)$;

б) $\overline{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $M(2;0)$, $N(-2;0)$.

(Записать уравнение кривой в параметрической форме $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0;\pi]$).

3.3.6 Выяснить, является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (x, y, z)$ соленоидальным:

$$\overline{a}(M) = x^2 y\,\overline{i} - 2xy^2\,\overline{j} + 2xyz\,\overline{k}.$$

3.3.7 Выяснить, является ли векторное поле $\overline{a}(M)$ потенциальным:

$$\overline{a}(M) = yz\,\overline{i} - xz\,\overline{j} + xy\,\overline{k}.$$

3.4 Числовые ряды

3.4.1 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{10^n}$.

3.4.2 Исследовать на сходимость указанные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-n+8}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2-n+2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{\sqrt{4n^2-3}}$;   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n-1}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)tg(\frac{\pi}{3^n})$;   е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$.

3.4.3 Исследовать на абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2+3}$.

3.5 Степенные ряды

3.5.1 Найти область сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$.

3.5.2 Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности δ, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции:

а) $\sqrt{1,3}$, $\delta = 0,001$;   б) $cos\, 2^\circ$, $\delta = 0,001$;

в) $\frac{1}{e}$, $\delta = 0,0001$.

3.5.3 Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

а) $\int\limits_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx$; б) $\int\limits_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

3.5.4 Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения) $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$.

3.5.5 Найти разложение в ряд Фурье функции $y(x)$ на заданном промежутке.

1. $y = 2x$, $x \in (-\pi; \pi)$

2. $y = \begin{cases} -1, & x \in [-2; 0); \\ 1, & x \in (0; 2]; \end{cases}$

3. $y = x - 3$, $x \in (-3; 3)$

3.6 Комплексные числа и действия над ними

3.6.1 Найти $z_1 - 3z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = i$, $z_2 = 1 - i$.

3.6.2 Найти модуль и главное значение аргумента для комплексных чисел:

а) $z = -i$; б) $z = 1 + \sqrt{3}\, i$; в) $z = -1$.

3.6.3 Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 1$; б) $z = 1 - i$; в) $z = -\sqrt{3} + i$;

3.6.4 Найти все значения: $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}\, i}$.

3.7 Операционное исчисление

3.7.1 Найти изображение функций.

а) $f(t)=4-3t$; б) $f(t)=e^{2t}-te^{3t}$; в) $f(t)=cos^2 t$.

3.7.2 Найти оригиналы по заданному изображению.

а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$;

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

3.7.3 Решить операционным методом дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях.

а) $x'-x=1,\ x(0)=-1$;

б) $x''-2x'=e^{2t},\ x(0)=x'(0)=0$.

3.7.4 Решить операционным методом систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0, \end{cases} \qquad x(0)=1, \quad y(0)=-1.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век ; Мир и Образование, 2002. – 2 ч.

3 **Краснов, М. Л.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 304 с., ил.

4 Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посібник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – 2-вид., зі змінами. – К. : Либідь, 1997. – 312 с. – ISBN 5–325–00585–5.

5 Вища математика: основні означення, приклади і задачі: навч. посібник: у 2 кн. Кн. 2 / І. П. Васильченко [та ін..] ; за ред. проф. І. П. Васильченка. – 2-вид., зі змінами. – К. : Либідь, 1997. – 312с. – ISBN 5–325–00586–3.

6 Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 463 с.

7 Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы математического анализа: А. В. Ефимов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 366 с.

8 **Пак, В. В.** Вища математика: підручник. / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996. – 440 с. – ISBN 5–325–00712–2.

9 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов : в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 2 т.

10 **Шкіль, М. І.** Вища математика : підручник. У 3 кн. Кн. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352с. – ISBN 5–325–00495–6.

11 **Шкіль, М. І.** Вища математика : підручник. У 3 кн. Кн. 3 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальне рівняння / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352с. – ISBN 5–325–00543–х.

Навчальне видання

ОБУХОВ Анатолій Миколайович,
КОЛЕСНИКОВ Сергій Олексійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, РЯДИ

Навчальний посібник

(*Російською мовою*)

Редактор Я. О. Бершацька

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

222/2007. Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 3,13.
Тираж прим. Зам. № .

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.