

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания
к самостоятельной работе

для студентов технических и экономических специальностей
всех форм обучения

Краматорск 2011

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания
к самостоятельной работе

для студентов
технических и экономических специальностей
всех форм обучения

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № 6 от 17.02.2011

Краматорск 2011

Прикладные задачи математического анализа : методические указания к самостоятельной работе для студентов технических и экономических специальностей всех форм обучения / сост. : О. Г. Ровенская, Н. В. Белых. – Краматорск : ДГМА, 2011. – 152 с.

Методические указания содержат в кратком виде основной теоретический материал по приложениям дифференциального и интегрального исчисления для студентов технического и экономического направления. Указана тематика, приведены образцы решения контрольных и тестовых заданий.

Составители:

О. Г. Ровенская, ст. викл.,
Н. В. Белых, асс.

Отв. за выпуск

А. Н. Обухов, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ	5
1.1 Геометрические задачи	6
1.2 Приложения производной в задачах физики и алгебры	25
1.3 Приложения производной в задачах экономики	43
2 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА	54
2.1 Геометрические приложения определённого интеграла	54
2.2 Приложения определённого интеграла к решению физических задач	73
2.3 Приложения определённого интеграла к решению экономических задач	96
3 ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	104
3.1 Геометрические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений	105
3.2 Физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений	117
3.3 Другие задачи	142
ЛИТЕРАТУРА	151

ВВЕДЕНИЕ

В связи с перестройкой высшей школы, связанной с присоединением Украины к Болонской системе с ее основными подходами к формированию европейского высшего образования, особую актуальность приобретают курсы, которые позволяют рассмотреть взаимосвязь изучаемых наук, взаимное использование их понятий и методов. Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчёта, но также методом точного исследования и средством предельно чёткой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с её развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Прикладные задачи дифференциального и интегрального исчисления, – универсальный способ теоретического изучения окружающего мира через моделирование процессов, которые в нём происходят. В практической деятельности важную роль играет нахождение возможности затратить минимальное количество времени и материальных средств, получив при этом максимальный эффект. Кроме того, все процессы в природе происходят таким образом, что некоторая характеристика достигает экстремума. Сложность теории экстремума состоит не в том, чтобы найти производную и приравнять её к нулю, а в том, какую из характеристик выбрать для оптимизации. При этом выбор системы координат также имеет немаловажное значение.

Теория дифференциальных уравнений – одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные физические законы, описывающие разнообразные явления. Исследование многих технических, физических задач, а также задач из других областей науки сводится к решению дифференциальных уравнений.

Настоящее пособие предоставляет студентам дневной формы обучения возможность подготовиться к сдаче тестирования по разделам «Приложения производной», «Приложения определённого интеграла», «Приложения дифференциальных уравнений» курса высшей математики, а студентам заочной формы обучения даёт возможность выполнить контрольные работы, которые являются обязательной частью отчётности при изучении курса высшей математики.

В каждой теме коротко рассматриваются основные теоретические понятия, определения, алгоритмы, большое внимание уделяется решению практических заданий.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры высшей математики к. т. н. А. Н. Обухову за ценные замечания и помощь в работе.

1 ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом (минимумом) функции $f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются критическими.

Достаточные условия экстремума

1. Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$; если при переходе через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум).

2. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, а именно максимум, если $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на множестве X называют глобальным максимумом, а ее наименьшее значение – глобальным минимумом.

Чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, на котором она непрерывна, надо: найти критические точки, принадлежащие интервалу $(a; b)$ и вычислить значения функции в этих точках; вычислить значения функции в граничных точках отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$; из всех полученных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Общая схема решения прикладных задач такова:

1) записываем общую формулу, которая, вообще говоря, является функцией двух переменных $z = z(x, y)$ (обозначения, разумеется, могут быть другими);

2) используя условие задачи, устанавливаем связь между переменными x и y ;

3) подставляя уравнение связи в общую формулу, получаем функцию одной переменной $z = z(x)$;

4) находим естественную область определения этой функции;

5) к функции $z = z(x)$ применяем теорию экстремумов.

В прикладных задачах чаще всего встречается случай, когда внутри рассматриваемого промежутка (отрезка, полуинтервала или интервала) оказывается лишь одна критическая точка x_0 . Если в этой точке непрерывная функция имеет локальный максимум (минимум), то он является ее наибольшим (наименьшим) значением.

1.1 Геометрические задачи

Пример 1. На параболе $y = x^2 - 6x + 11$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = -x$ (рис. 1). Вычислить это расстояние.

Решение

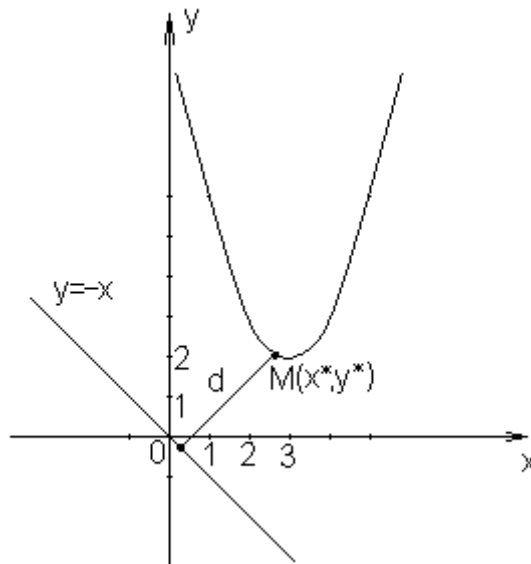


Рисунок 1

Пусть $M(x^*, y^*)$ – точка, удовлетворяющая заданному условию. Поскольку M принадлежит параболе, ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, т. е. $y^* = (x^*)^2 - 6x^* + 11$, $M(x^*; (x^*)^2 - 6x^* + 11)$.

Расстояние от точки до прямой определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Запишем уравнение прямой $y = -x$ в общем виде: $x + y = 0$. Отсюда $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$. Подставив вместо x_0 , y_0 в формулу координаты точки M , получим

$$d = \frac{\left| 1 \cdot x^* + 1 \cdot \left((x^*)^2 - 6x^* + 11 \right) + 0 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left| (x^*)^2 - 5x^* + 11 \right|}{\sqrt{2}}.$$

Решая уравнение $(x^*)^2 - 5x^* + 11 = 0$, находим: $D = 25 - 44 < 0$, т. е. выражение $(x^*)^2 - 5x^* + 11$ для всех x^* имеет один знак, а именно $(x^*)^2 - 5x^* + 11 > 0$. Таким образом,

$$d = \frac{(x^*)^2 - 5x^* + 11}{\sqrt{2}}.$$

Область определения этой функции $x^* \in R$. Требуется найти наименьшее значение функции $d(x^*)$, для этого вычислим ее производную:

$$d'(x^*) = \frac{2x^* - 5}{\sqrt{2}}.$$

Производная $d'(x^*)$ равна нулю, когда $2x^* - 5 = 0$, т. е. $x^* = 2.5$.

Так как $d''(x^*) = 2$, $d''(x^*) > 0$, то при $x^* = 2.5$ функция $d(x^*)$ достигает минимума, который и является ее наименьшим значением. Тогда $y^* = 2.5^2 - 6 \cdot 2.5 + 11 = 2.25$ и минимальное расстояние между прямой и параболой

$$d = \frac{(2.5)^2 - 5 \cdot 2.5 + 11}{\sqrt{2}} \approx 3.36.$$

Пример 2. Через точку $M(1, 4)$ провести прямую так, чтобы сумма величин положительных отрезков, отсекаемых ею на осях координат, была наименьшей. Записать уравнение этой прямой.

Решение

Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, a и b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат. Необходимо, чтобы сумма $S = a + b$ была минимальной.

Известна точка M , принадлежащая прямой (рис. 2); подставим ее координаты в уравнение и выразим b :

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1; \quad \frac{4}{b} = 1 - \frac{1}{a}; \quad \frac{4}{b} = \frac{a-1}{a}; \quad b = \frac{4a}{a-1}.$$

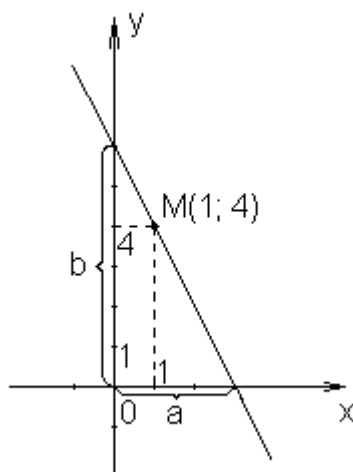


Рисунок 2

Подставим значение b в сумму S , получим функцию одной переменной:

$$S(a) = a + \frac{4a}{a-1} = a + \frac{(4a-4)+4}{a-1} = a + 4 + \frac{4}{a-1}.$$

Областью определения данной функции является $a \in (1; \infty)$. Исследуем функцию $S(a)$ на экстремум.

$$S'(a) = 1 - \frac{4}{(a-1)^2}.$$

$$\text{Если } S' = 0, \text{ то } \frac{4}{(a-1)^2} = 1, (a-1)^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -1; a_2 = 3.$$

Решение $a_2 = 3$ удовлетворяет области определения функции. Вычислим

$$S''(a) = \frac{8}{(a-1)^3}; \quad S''(3) = \frac{8}{(3-1)^3} = 1.$$

Отсюда следует, что $a_2 = 3$ является точкой минимума, который в данном случае является наименьшим значением функции; $b = \frac{4 \cdot 3}{3-1} = 6$ и уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{или} \quad 2x + y = 6.$$

Пример 3. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Решение

Введем следующие обозначения: R – радиус, α – центральный угол кругового сектора (рис. 3). Тогда площадь клумбы определяется формулой

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

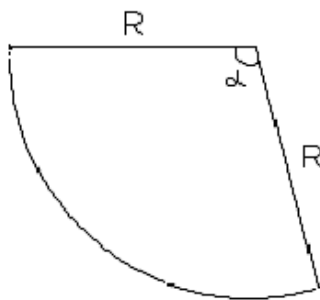


Рисунок 3

Периметр клумбы $P = 2R + L$, где L – длина дуги сектора. Учитывая, что $L = R\alpha$, получим

$$P = 2R + R\alpha = R(2 + \alpha).$$

Периметр клумбы должен совпадать с длиной проволоки, т. е.

$$R(2 + \alpha) = l \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} - 2.$$

Подставим выражение для α в формулу площади:

$$S = S(R) = \left(\frac{l}{R} - 2 \right) \frac{R^2}{2} = \frac{lR}{2} - R^2.$$

Получена функция одной переменной $S(R)$; найдем ее область определения: $R \in \left(0; \frac{l}{2} \right)$. Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось условие $S(R) > 0$; это условие выполняется на всей области определения функции.

Находим производную функции $S(R)$

$$S'(R) = \frac{l}{2} - 2R.$$

$S'(R) = 0$ при $R = \frac{l}{4}$, а так как $S''(R) = -2 < 0$, то в точке $R = \frac{l}{4}$ имеем максимум, который является наибольшим значением функции. Таким образом, площадь клумбы будет наибольшей, если радиус равен $\frac{l}{4}$ м.

Пример 4. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение

Введем систему координат, как показано на рис. 4.

Пусть вершина прямоугольника A имеет координаты x^* , y^* . Учитывая, что эта точка принадлежит также и эллипсу, имеем

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1; \quad (y^*)^2 = b^2 \left(1 - \frac{(x^*)^2}{a^2} \right); \quad y^* = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x^*)^2},$$

(рассматриваем значения $x^* > 0$, $y^* > 0$, так как точка A находится в первой координатной четверти). Тогда площадь прямоугольника $ABCD$

$$S = |2x^*| \cdot |2y^*| = 4x^* \cdot y^* = 4x^* \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x^*)^2} = \frac{4b}{a} x^* \cdot \sqrt{a^2 - (x^*)^2}.$$

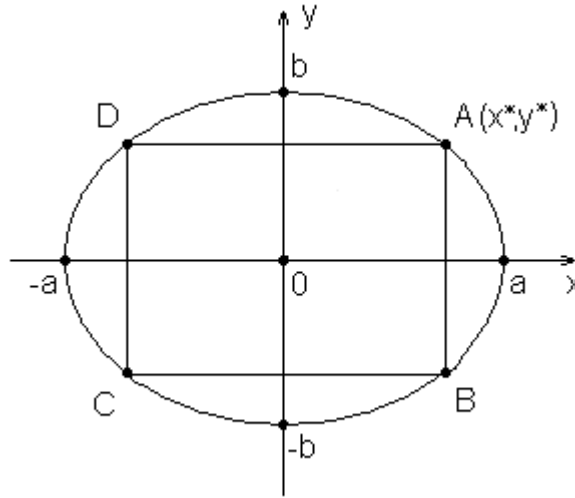


Рисунок 4

Областью определения функции $S(x^*)$ является $x^* \in (0; a)$, поскольку при $x^* = 0$ и $x^* = a$ прямоугольник вырождается в прямую. Исследуем функцию $S = S(x^*)$ на экстремум.

$$S'(x^*) = \frac{4b}{a} \left(\sqrt{a^2 - (x^*)^2} + x^* \cdot \frac{-2x^*}{2\sqrt{a^2 - (x^*)^2}} \right) = \frac{4b}{a} \left(\sqrt{a^2 - (x^*)^2} - \frac{(x^*)^2}{\sqrt{a^2 - (x^*)^2}} \right) = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2 - (x^*)^2 - (x^*)^2}{\sqrt{a^2 - (x^*)^2}} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2(x^*)^2}{\sqrt{a^2 - (x^*)^2}}.$$

Производная $S'(x^*)$ равна нулю, когда $2(x^*)^2 = a^2$ или $x^* = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$; производная $S'(x^*)$ не существует в точках $x^* = \pm a$. Точка $x^* = \frac{a}{\sqrt{2}}$ принадлежит области определения и при переходе аргумента x^* через эту точку производная $S'(x^*)$ меняет знак с плюса на минус, поэтому функция $S(R)$ в этой точке имеет максимум. Поскольку точка максимума единственная, в ней функция $S(x^*)$ достигает наибольшего значения. Найдём стороны прямоугольника $ABCD$:

$$AB = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a; \quad BC = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}b.$$

Пример 5. Окно имеет форму прямоугольника, заверщенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

Решение

Пусть R – радиус полукруга, сторону АВ прямоугольника ABCD обозначим a , сторона ВС будет равна $2R$ (рис. 5).

Окно будет пропускать наибольшее количество света в случае, если его площадь будет максимальной. Площадь окна состоит из площадей прямоугольника и полукруга, т.е.

$$S = 2R \cdot a + \frac{1}{2}\pi R^2,$$

а его периметр

$$P = 2R + 2a + \pi R.$$

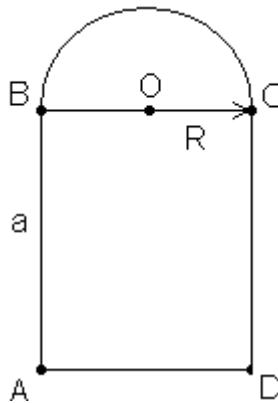


Рисунок 5

По условию периметр окна равен 15 м., т. е.

$$2R + 2a + \pi R = 15,$$

отсюда выразим a и подставим в формулу для площади:

$$a = 7.5 - R - \frac{\pi R}{2};$$

$$S = 2R \cdot \left(7.5 - R - \frac{\pi R}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi R^2 = 15R - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}.$$

Областью определения полученной функции будет $R \in \left(0; \frac{15}{2+\pi}\right)$.

Кроме этого, необходимо, чтобы выполнялось условие $S(R) > 0$, т. е.

$$15R - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} > 0,$$

откуда $R \in \left(0; \frac{15}{2+\frac{\pi}{2}}\right)$. Этот промежуток входит в область определения,

поэтому, окончательно, $R \in \left(0; \frac{15}{2+\pi}\right)$.

Найдем производную функции S :

$$S' = 15 - 4R - \pi R = 15 - (4 + \pi)R.$$

Производная равна нулю в точке $R_1 = \frac{15}{4+\pi}$. Так как $S'' = -(4+\pi)$, что меньше нуля, R_1 является точкой максимума функции S и ее наибольшим значением. Следовательно, окно будет пропускать наибольшее количество света при $R = \frac{15}{4+\pi} \approx 2.1$ м.

Пример 6. В каком отношении находятся наибольшая площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг, к площади этого круга?

Решение

Обозначим стороны треугольника $CB = a$, $AB = AC = b$ и радиус окружности $OA = R$ (рис. 6).

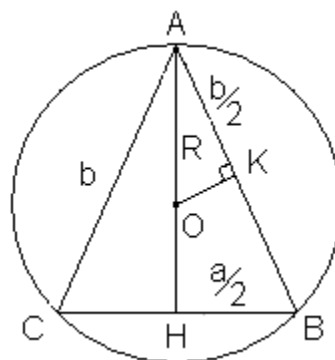


Рисунок 6

Тогда $HB = \frac{a}{2}$. Учитывая то, что центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, $AK = \frac{b}{2}$, угол AKO прямой и $OK = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$ по теореме Пифагора. Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{ab^2}{4R},$$

а площадь круга

$$S_{кр} = \pi R^2.$$

Установим связь между неизвестными параметрами a , b и R . Для этого рассмотрим два прямоугольных треугольника: ABH и AOK . Эти треугольники подобны по трем углам, следовательно,

$$\frac{HB}{KO} = \frac{AB}{AO} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{b}{R};$$

отсюда

$$a = \frac{2b\sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}}{R} = \frac{b\sqrt{4R^2 - b^2}}{R};$$

$$S_{\Delta} = \frac{b^3\sqrt{4R^2 - b^2}}{4R^2}.$$

Исследуем S_{Δ} на экстремум, как функцию аргумента b . Областью определения этой функции является интервал $(0; 2R)$. Находим

$$S'_{\Delta}(b) = \frac{1}{4R^2} \left(3b^2\sqrt{4R^2 - b^2} + \frac{b^3 \cdot (-2b)}{2\sqrt{4R^2 - b^2}} \right) = \frac{3b^2(4R^2 - b^2) - b^4}{4R^2\sqrt{4R^2 - b^2}} =$$

$$= \frac{3R^2b^2 - b^4}{R^2\sqrt{4R^2 - b^2}} = \frac{b^2(3R^2 - b^2)}{R^2\sqrt{4R^2 - b^2}},$$

откуда следует, что $S'_\Delta(b) = 0$ при $b_1 = \sqrt{3}R$, $b_2 = 0$ и $S'_\Delta(b)$ не существует при $b_3 = 2R$. Но $b_2 \notin (0; 2R)$, $b_3 \notin (0; 2R)$. Точка $b_1 = \sqrt{3}R$ является критической, при переходе через нее производная $S'_\Delta(b)$ меняет знак с плюса на минус, поэтому функция $S_\Delta(b)$ в этой точке имеет локальный максимум, который является также наибольшим значением этой функции. Найдем теперь наибольшую площадь равнобедренного треугольника и вычислим отношение площадей треугольника и круга.

$$S_\Delta(b_1) = \frac{(\sqrt{3}R)^3 \sqrt{4R^2 - (\sqrt{3}R)^2}}{4R^2} = \frac{3\sqrt{3}R^3 \cdot R}{4R^2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$$

$$\frac{S_\Delta}{S_{кр}} = \frac{3\sqrt{3}R^2/4}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Пример 7. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1,4)$ и $B(3,0)$ (рис. 7). Найти на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

Решение

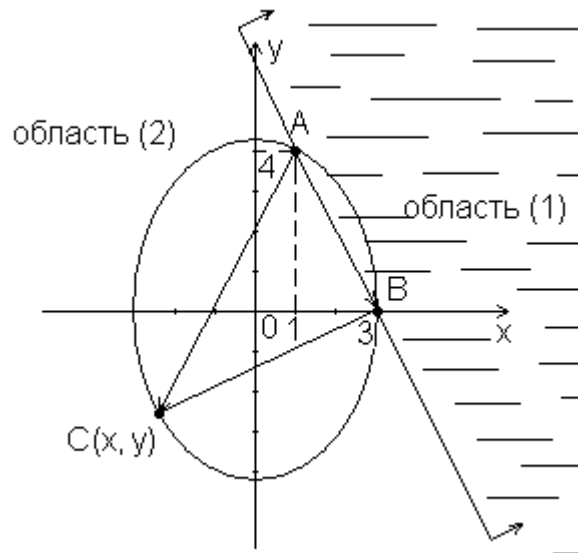


Рисунок 7

Обозначим координаты искомой точки C x и y . Площадь треугольника ABC задается формулой

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Найдем координаты векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} и вычислим их векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1, 0-4\} = \{2, -4\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x-1, y-4\};$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 0 \\ x-1 & y-4 & 0 \end{vmatrix} = (2(y-4) - (-4)(x-1))k = (4x+2y-12)k.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(4x+2y-12)^2} = |2x+y-6|.$$

Рассмотрим два случая:

1) $2x+y-6 > 0$, отсюда $y > 6-2x$, тогда точка C находится в области (1) (рис. 7);

2) $2x+y-6 < 0$ или $y < 6-2x$, тогда точка C находится в области (2).

Очевидно, что треугольник ABC будет иметь наибольшую площадь в случае расположения точки C в области (2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать функцию

$$S = -(2x+y-6) = 6-2x-y.$$

Поскольку точка C принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют равенству $2x^2 + y^2 = 18$ или $y = \pm\sqrt{18-2x^2}$. Подставив значение y в функцию S , получим функцию одной переменной

$$S = 6-2x \pm \sqrt{18-2x^2}.$$

Необходимо найти наибольшее значение этой функции. Область определения функции $S(x)$ $x \in [-3; 3]$. Найдем критические точки функции, принадлежащие указанному полуинтервалу:

$$S' = -2 \pm \frac{-4x}{2\sqrt{18-2x^2}} = -2 \pm \frac{2x}{\sqrt{18-2x^2}}.$$

Приравняв S' к нулю, находим:

$$\pm \frac{2x}{\sqrt{18-2x^2}} = -2 \quad \text{или} \quad \pm \frac{x}{\sqrt{18-2x^2}} = -1.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\frac{x^2}{18-2x^2}=1; \quad x^2=18-2x^2; \quad 3x^2=18; \quad x^2=6; \quad x=\pm\sqrt{6}.$$

Вычислим соответствующие значения y :

$$y_1=\sqrt{18-(\pm\sqrt{6})^2}=\sqrt{6}; \quad y_2=-\sqrt{18-(\pm\sqrt{6})^2}=-\sqrt{6}.$$

Таким образом, получим четыре критических точки: $M_1(\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $M_2(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, $M_3(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $M_4(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, причем точка M_1 не принадлежит области (2). S' не существует в точках $x=\pm 3$, одна из которых является граничной точкой, а другая не принадлежит области определения функции.

Вычислим значение функции $S=6-2x-y$ в критических точках и в граничных точках области определения.

$$\begin{aligned} S(-\sqrt{6}; \sqrt{6}) &= 6+2\sqrt{6}-\sqrt{6}=6+\sqrt{6}; \\ S(\sqrt{6}; -\sqrt{6}) &= 6-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=6-\sqrt{6}; \\ S(-\sqrt{6}; -\sqrt{6}) &= 6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}=6+3\sqrt{6}; \\ S(-3; 0) &= 6+2\cdot 3-0=12. \end{aligned}$$

Наибольшим значением функции является $S(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})=6+3\sqrt{6}$, поэтому $C(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$ – третья вершина треугольника ABC .

Пример 8. Объем правильной треугольной призмы равен V_0 . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Решение

Пусть a – сторона основания правильной треугольной призмы, l – ее ребро, тогда объем призмы $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot l$. Из условия $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot l=V_0$, т. е. $l=\frac{4V_0}{a^2\sqrt{3}}$. Полная поверхность правильной призмы задается формулой

$$S=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3al.$$

Подставив сюда выражение для l , получим

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4V_0}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{12V_0}{a\sqrt{3}}.$$

Теперь, когда функция S представлена как функция одной переменной a , запишем ее область определения: $a > 0$.

Найдем критические точки данной функции, имеем:

$$S' = \sqrt{3}a - \frac{12V_0}{a^2\sqrt{3}};$$

в силу необходимых условий экстремума находим

$$\sqrt{3}a - \frac{12V_0}{a^2\sqrt{3}} = 0; \quad \sqrt{3}a = \frac{12V_0}{a^2\sqrt{3}}; \quad a^3 = 4V_0; \quad a = \sqrt[3]{4V_0}.$$

Поскольку $S'' = \sqrt{3} + \frac{24V_0}{a^3\sqrt{3}} > 0$, то найденная точка является точкой минимума, а также наименьшим значением функции. Таким образом, сторона основания правильной треугольной призмы с наименьшей полной поверхностью $a = \sqrt[3]{4V_0}$.

Пример 9. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с полной поверхностью, равной S . Какой должна быть высота бака, чтобы его объем был наибольшим?

Решение

Обозначим радиус цилиндра R , а его высоту H . Полная поверхность цилиндра $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$, отсюда $H = \frac{S}{2\pi R} - R$. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ или, учитывая найденное выражение для H ,

$$V = \pi R^2 \left(\frac{S}{2\pi R} - R \right) = \frac{SR}{2} - \pi R^3.$$

При $R = 0$ цилиндр вырождается в прямую, а при $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ – в круг.

Поэтому областью определения функции $V(R)$ является $R \in \left(0; \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \right)$.

Условие $V(R) > 0$ выполняется на всей области определения.

Найдем производную функции $V(R)$:

$$V' = \frac{S}{2} - 3\pi R^2.$$

Производная равна нулю, когда $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, а так как $V'' = -6\pi R$, $V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) < 0$, то в точке $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ функция V достигает максимума, который, поскольку критическая точка на интервале единственная, и является наибольшим значением функции. Вычислим высоту бака, соответствующую наибольшему объему:

$$H = \frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{\sqrt{6\pi}S}{2\pi\sqrt{S}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \sqrt{\frac{3S}{2\pi}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{3\sqrt{S} - \sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}.$$

Пример 10. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

Решение

Введем обозначения: основание равнобедренного треугольника $AC=a$, его боковая сторона $AB = BC = b$ (рис. 8).

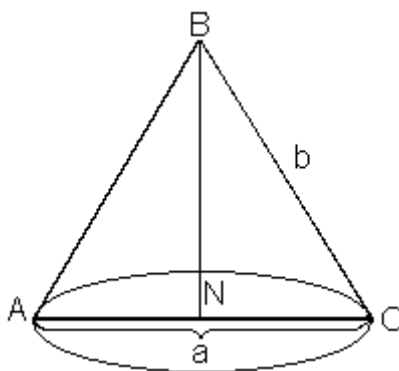


Рисунок 8

По условию периметр треугольника равен $2p$, т. е. $a + 2b = 2p$, откуда $b = p - \frac{a}{2}$. Объем конуса определяется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Здесь R – радиус основания конуса, он равен половине стороны AC треугольника, $R = \frac{a}{2}$; H – высота полученного конуса, совпадает с высотой треугольника ABC . Чтобы найти высоту, используем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника BCN :

$$BN = \sqrt{BC^2 - CN^2} \quad \text{или} \quad H = \sqrt{\left(p - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{p^2 - 2pa}.$$

Подставим полученные выражения для R и H в формулу объема конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{p^2 - pa} = \frac{\pi}{12} \cdot a^2 \sqrt{p^2 - pa}.$$

Областью определения полученной функции является интервал $(0; 2p)$. Требуется найти наибольшее значение функции $V(a)$ на этом интервале. Вычислим производную функции $V(a)$ и приравняем ее к нулю.

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{\pi}{12} \left(2a\sqrt{p^2 - pa} + a^2 \cdot \frac{-p}{2\sqrt{p^2 - pa}} \right) = \frac{\pi a}{12} \cdot \frac{4(p^2 - pa) - pa}{2\sqrt{p^2 - pa}} = \\ &= \frac{\pi p}{24} \cdot \frac{a(4p - 5a)}{\sqrt{p^2 - pa}}. \end{aligned}$$

$V'(a) = 0$ когда $a = 0$ или $a = \frac{4p}{5}$; $V'(a)$ существует во всех точках области определения. $a = 0$ не принадлежит интервалу $(0; 2p)$. В критической точке $a = \frac{4p}{5}$ производная $V'(a)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, в этой точке функция $V(a)$ имеет максимум и достигает своего наибольшего значения. Объем конуса будет наибольшим, когда $a = \frac{4p}{5}$. Найдём боковую сторону треугольника:

$$b = p - \frac{a}{2} = p - \frac{2p}{5} = \frac{3p}{5}.$$

Пример 11. Из круга вырезан сектор с центральным углом α . Из сектора свернута коническая поверхность (рис. 9). При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

Решение

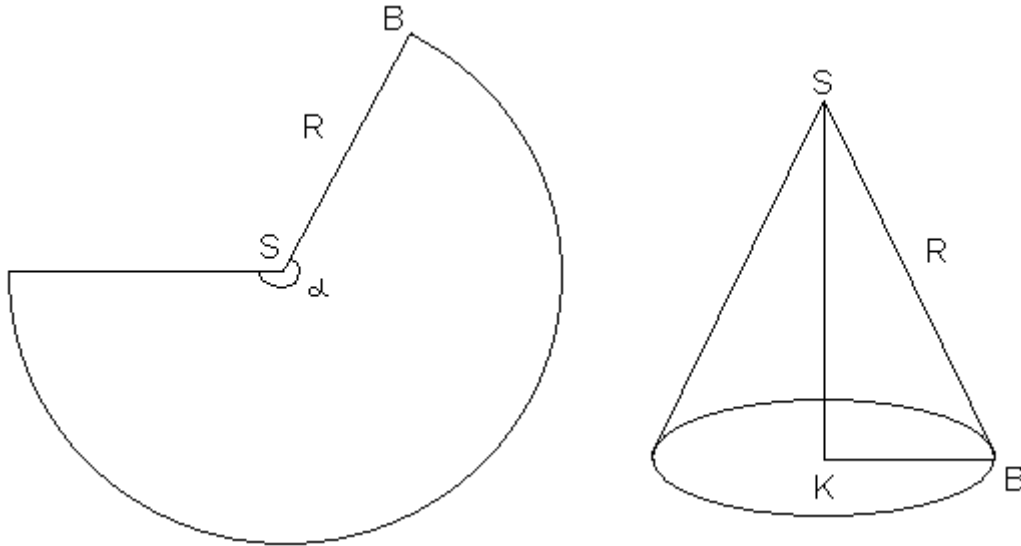


Рисунок 9

Пусть $SB = R$ – радиус кругового сектора. Образующая конуса SB совпадает с радиусом кругового сектора; длина дуги сектора совпадает с длиной окружности, лежащей в основании конуса, т. е. $SB \cdot \alpha = 2\pi \cdot KB$ или $R \cdot \alpha = 2\pi \cdot KB$, отсюда $KB = \frac{R\alpha}{2\pi}$. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi(KB)^2 \cdot SK = \frac{1}{3}\pi(KB)^2 \sqrt{(SB)^2 - (KB)^2}$$

или, с учетом введенных обозначений и выполненных преобразований,

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Исследуем функцию V на экстремум как функцию аргумента α при условии, что область определения этой функции $\alpha \in (0; 2\pi)$.

$$\begin{aligned} V'(\alpha) &= \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \left[2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \cdot \frac{-2\alpha}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right] = \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha[2(4\pi^2 - \alpha^2) - \alpha^2]}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Единственной критической точкой, удовлетворяющей области определения функции является точка $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$. При переходе аргумента α через эту точку производная $V'(\alpha)$ меняет знак с плюса на минус, поэтому при $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$ имеем максимум, а также наибольшее значение функции V . Таким образом, объем полученного конуса будет наибольшим, если $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$.

Пример 12. Рыбаку нужно переправиться с острова А на остров В (рис. 10). Чтобы пополнить свои запасы он должен попасть на участок берега MN. Найти наикратчайший путь рыбака $s = s_1 + s_2$, если $a = 1$ км, $b = 1.5$ км, $H = 2$ км, $h = 1.5$ км, $L = 3.5$ км.

Решение

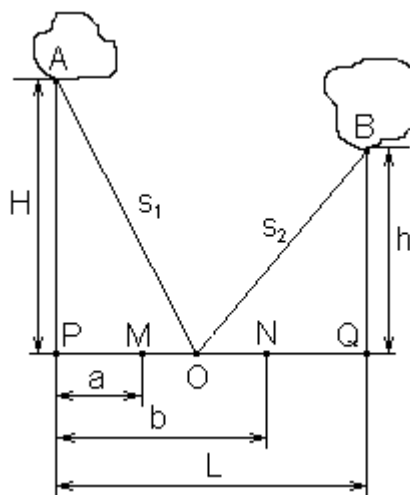


Рисунок 10

Пусть рыбак попадет на участок берега MN в точке O . Обозначим расстояние между точками M и O x . Тогда $|PO| = |PM| + |MO| = 1 + x$, $|OQ| = |PQ| - |PO| = 3.5 - 1 - x = 2.5 - x$.

Путь, пройденный рыбаком, представляет собой функцию $s = s_1 + s_2$. Найдем s_1 и s_2 из прямоугольных треугольников APQ и BQO .

$$\triangle APO: |AO| = \sqrt{|AP|^2 + |PO|^2} \quad \text{или} \quad s_1 = \sqrt{2^2 + (1+x)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 5};$$

$$\triangle BQO: |BO| = \sqrt{|OQ|^2 + |BQ|^2} \quad \text{или} \quad s_2 = \sqrt{(2.5-x)^2 + 1.5^2} = \sqrt{x^2 - 5x + 8.5}.$$

Тогда

$$s = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 5x + 8.5}.$$

Найдем область определения этой функции. Подкоренные выражения в функции $s(x)$ больше нуля для всех x . Точка O принадлежит отрезку MN , $|MN| = 1.5 - 1 = 0.5$, поэтому необходимо найти наибольшее значение функции $s(x)$ для $x \in [0; 0.5]$. Вычислим производную функции:

$$s' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+8.5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{x-2.5}{\sqrt{x^2-5x+8.5}}.$$

Приравнивая производную к нулю и возводя обе части равенства в квадрат, получим:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \frac{2.5-x}{\sqrt{x^2-5x+8.5}}; & \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+5} &= \frac{(2.5-x)^2}{x^2-5x+8.5}; \\ (x+1)^2 \cdot (x^2-5x+8.5) &= (2.5-x)^2 \cdot (x^2+2x+5); \\ (x+1)^2 \cdot ((2.5-x)^2 + 2.25) &= (2.5-x)^2 \cdot (4 + (1+x)^2); \\ (x+1)^2 (2.5-x)^2 + 2.25(x+1)^2 &= 4(2.5-x)^2 + (2.5-x)^2 (1+x)^2; \\ 2.25(x+1)^2 &= 4(2.5-x)^2; & 2.25(x^2+2x+1) &= 4(6.25-5x+x^2); \\ 1.75x^2 - 24.5x + 22.75 &= 0; & x^2 - 14x + 13 &= 0.\end{aligned}$$

Корнями полученного дифференциального уравнения являются числа 1 и 13, ни одно из которых не принадлежит отрезку $[0; 0.5]$. Поэтому вычислим значение функции $s(x)$ на концах этого отрезка и из полученных чисел выберем меньшее.

$$\begin{aligned}s(0) &= \sqrt{5} + \sqrt{8.5} \approx 5.15; \\ s(0.5) &= \sqrt{0.5^2 + 2 \cdot 0.5 + 5} + \sqrt{0.5^2 - 5 \cdot 0.5 + 8.5} = \sqrt{6.25} + \sqrt{6.25} = 5.\end{aligned}$$

Следовательно, путь рыбака будет кратчайшим, если он для пополнения запасов высадится в точке N .

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R .

(Ответ: $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ и $\frac{R\sqrt{5}}{5}$.)

Задание 2. Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если его площадь наибольшая?

(Ответ: $\frac{l}{4}$, $\frac{l}{4}$.)

Задание 3. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$, $y = 0$, вырезать прямоугольник наибольшей площадью.

(Ответ: $S = 9.22$.)

Задание 4. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна S .

(Ответ: $V = \frac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{6\pi}}$.)

Задание 5. Найти радиус конуса наименьшего объема, описанного около цилиндра радиусом R (плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

(Ответ: $1.5R$.)

Задание 6. В каком отношении находятся наименьший объем конуса, описанного около шара к объему шара?

(Ответ: 2.)

Задание 7. В каком отношении находится объем конуса к наибольшему объему цилиндра, вписанного в конус?

(Ответ: $\frac{9}{4}$.)

Задание 8. Найти отношение между объемом шара и наибольшим объемом цилиндра, вписанного в шар.

(Ответ: $\sqrt{3}$.)

Задание 9. В каком отношении находится площадь поверхности шара к наибольшей площади поверхности цилиндра, вписанного в шар?

(Ответ: $\frac{4}{1+\sqrt{5}}$.)

1.2 Приложения производной в задачах физики и алгебры

Задачи на движение

1. *Средняя скорость и скорость в заданный момент времени.* Пусть закон прямолинейного движения материальной точки имеет вид $s = s(t)$, где t – время. Средняя скорость точки за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Скорость в заданный момент времени (или мгновенная скорость) согласно физическому смыслу производной

$$v_{мгн}(t) = v(t) = s'(t).$$

2. *Путь, пройденный точкой.* Пусть задан закон прямолинейного движения материальной точки $s = s(t)$, t – время. Чтобы вычислить путь, пройденный точкой до полной остановки, найдём момент времени t , в который скорость точки $v(t) = 0$. Согласно п. 1

$$v(t) = s'(t)$$

Решая уравнение $s'(t) = 0$, находим момент остановки точки t^* . Тогда $s(t^*)$ – путь, пройденный точкой до остановки.

3. *Ускорение.* Пусть материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$. Тогда ускорение точки в заданный момент времени вычисляется по формуле

$$a(t) = v'(t).$$

Если закон движения точки задан в виде $s = s(t)$, то

$$a(t) = s''(t).$$

4. *Вращательное движение.* Пусть задан закон вращения материальной точки $\alpha = \alpha(t)$. Тогда угловая скорость точки равна

$$\omega(t) = \alpha'(t)$$

а угловое ускорение

$$a(t) = \alpha''(t).$$

Пример 13. Пусть материальная точка движется по закону $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 37t + 30$. Найти наибольшую скорость точки и момент времени, в который скорость наибольшая.

Решение

Найдём область допустимых значений для аргумента t . Так как должно выполняться неравенство $s(t) \geq 0$, то имеем

$$\begin{aligned} -t^3 + 6t^2 + 37t + 30 &\geq 0, \\ -(t+1)(t+3)(t-10) &\geq 0. \end{aligned}$$

Решая неравенство методом интервалов, найдём $t \in (-\infty; -1] \cup [-3; 10]$. Учитывая что $t \geq 0$, окончательно получим $t \in [0; 10]$.

Найдём скорость точки, используя п. 1

$$v(t) = (-t^3 + 6t^2 + 37t + 30)' = -3t^2 + 12t + 37.$$

Исследуем полученную функцию на наибольшее значение на отрезке $t \in [0; 10]$. Найдём критические точки

$$\begin{aligned} v'(t) &= (-3t^2 + 12t + 37)' = -6t + 12, \\ -6t + 12 &= 0, \\ t &= 2. \end{aligned}$$

Вычислим значения исследуемой функции в критической точке и на концах отрезка $[0; 10]$

$$\begin{aligned} v(2) &= -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 37 = 49, \\ v(0) &= -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 37 = 37, \\ v(10) &= -3 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 37 = -143. \end{aligned}$$

Значит максимальное значение скорости $v(2) = 49$.

Пример 14. Пусть закон прямолинейного движения материальной точки имеет вид $s(t) = 3t^2 + 5t + 1$. Вычислить среднюю скорость за первые 5 секунд движения и скорость точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение

Используя п. 1, вычислим среднюю скорость при $t \in [0; 5]$

$$v_{cp} = \frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 1 - (3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1)}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

и мгновенную скорость в момент времени $t = 2$ с

$$v(t) = (3t^2 + 5t + 1)' = 6t + 5, \\ v(2) = 6 \cdot 2 + 5.$$

Пример 15. Найти путь, пройденный точкой до полной остановки, если закон прямолинейного движения имеет вид $s(t) = te^{-t}$.

Решение

Вычислим скорость точки

$$v(t) = (te^{-t})' = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1 - t).$$

Найдём момент времени, в который точка остановится ($v(t) = 0$)

$$e^{-t}(1 - t) = 0, \\ t = 1.$$

Вычислим путь, пройденный точкой за 1 с

$$s(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37.$$

Пример 16. Задан закон прямолинейного движения материальной точки $s(t) = \frac{16}{(t+1)^2}$, t – время. Вычислить ускорение точки через 3 с после начала движения.

Решение

Используя п. 3, находим

$$s'(t) = \left(\frac{16}{(t+1)^2} \right)' = \frac{-32}{(t+1)^3}, \\ a(t) = s''(t) = \left(\frac{-32}{(t+1)^3} \right)' = \frac{64}{(t+1)^4}.$$

Вычислим ускорение через 3 с. после начала движения

$$a(3) = \frac{64}{(3+1)^4} = \frac{3}{8} \approx 0.38.$$

Пример 17. Законы движения по прямой двух материальных точек имеют вид $s_1(t) = 5t^2 + 2t + 6$ и $s_2(t) = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Решение

В момент встречи расстояния, пройденные точками одинаковы. Найдём момент встречи точек

$$\begin{aligned}5t^2 + 2t + 6 &= 4t^2 + 3t + 18, \\t^2 - t - 12 &= 0, \\t_1 &= -3 \quad t_2 = 4.\end{aligned}$$

Учитывая что $t \geq 0$, делаем вывод о том, что точки встретятся при $t = 4$ с. Вычислим скорости точек. Используя п. 1, имеем

$$\begin{aligned}v_1(t) &= (5t^2 + 2t + 6)' = 10t + 2, \\v_2(t) &= (4t^2 + 3t + 18)' = 8t + 3.\end{aligned}$$

Найдём скорости в момент встречи

$$\begin{aligned}v_1(4) &= 10 \cdot 4 + 2 = 42, \\v_2(4) &= 8 \cdot 4 + 3 = 35.\end{aligned}$$

Пример 18. Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за t с на угол $\alpha(t) = 3t - 0.01t^2$ (рад). Найти угловую скорость вращения маховика в момент $t = 7$ с и момент времени, в который маховик остановится.

Решение

Используя п. 4, найдём угловую скорость маховика в момент времени t

$$\omega(t) = (3t - 0.01t^2)' = 3 - 0.02t.$$

Вычислим угловую скорость в момент времени $t = 7$ с

$$\omega(7) = 3 - 0.02 \cdot 7 = 2.86 \text{ (рад/с)}.$$

Найдём момент остановки маховика ($\omega(t) = 0$)

$$\begin{aligned}3 - 0.02t &= 0, \\t &= 150 \text{ (с)}.\end{aligned}$$

Экстремальные физические задачи

При решении экстремальных физических задач (задач на наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке) используют рекомендации, приведённые в начале раздела.

Пример 19. Тело массой $m_0 = 1500$ кг падает с высоты $h = 4500$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 50$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

Решение

Кинетическая энергия тела вычисляется по формуле $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Масса тела в заданный момент времени $m = m_0 - kt = 1500 - 50t$, а скорость $v = v_0 + gt = 10t$. Тогда

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(1500 - 50t)(10t)^2}{2} = \frac{1}{2}(15 \cdot 10^4 t^2 - 5 \cdot 10^3 t^3).$$

Чтобы найти область допустимых значений для аргумента t , найдём время падения тела с высоты h . Имеем

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}.$$

Откуда, учитывая что $t \geq 0$, находим

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500}{10}} = 30.$$

Кроме того, $E_k \geq 0$

$$E_k = \frac{1}{2}(15 \cdot 10^4 t^2 - 5 \cdot 10^3 t^3) \geq 0,$$

Решая неравенство

$$\frac{1}{2}t^2(15 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3 t) \geq 0,$$

находим $0 \leq t \leq 30$. Значит, область допустимых значений аргумента $t \in [0; 30]$.

Исследуем полученную функцию $E_k = E_k(t)$ на наибольшее значение на отрезке $t \in [0; 30]$. Найдём производную

$$E'_k = \frac{1}{2}(30 \cdot 10^4 t - 15 \cdot 10^3 t^2).$$

Критические точки

$$t(30 \cdot 10^4 - 15 \cdot 10^3 t) = 0,$$

$$t = 0, \quad t = \frac{30 \cdot 10^4}{15 \cdot 10^3} = \frac{300}{15} = 20.$$

Критические точки принадлежат отрезку $[0; 30]$. Вычислим значение функции E_k в критических точках и на концах отрезка

$$E_k(0) = 0,$$

$$E_k(20) = \frac{1}{2}(15 \cdot 10^4 \cdot 20^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot 20^3) = 10^7,$$

$$E_k(30) = 0.$$

Значит, наибольшее значение кинетической энергии $E_{k \max} = E_k(20) = 10^7$ Дж.

Пример 20. На каком расстоянии h от горизонтальной плоскости следует разместить лампочку, чтобы в заданной точке A плоскости освещённость была наибольшей ($OA = a$) (рис. 11)?

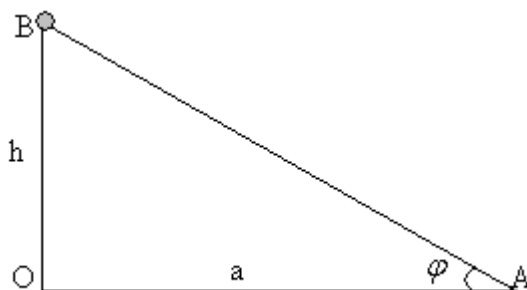


Рисунок 11

Решение

Освещённость прямо пропорциональна синусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света (рис. 11)

$$E = k \frac{\sin \varphi}{r^2}.$$

Найдём расстояние AB до источника света. Из треугольника OAB по теореме Пифагора $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$. Значит $r = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Найдём синус угла падения лучей света. Из треугольника OAB можем записать $\sin \angle OAB = \frac{OB}{AB}$. Значит $\sin \varphi = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. Тогда

$$E = k \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Исходя из условия задачи, область допустимых значений аргумента h это промежуток $[0; \infty)$. Исследуем функцию $E = E(h)$ на наибольшее значение на указанном интервале. Вычислим производную

$$E' = k \left(\frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \right)' = k \frac{(a^2 + h^2)^{3/2} - h \cdot \frac{3}{2} (a^2 + h^2)^{1/2} \cdot 2h}{(a^2 + h^2)^3} = \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{5/2}}.$$

Найдём критические точки

$$a^2 - 2h^2 = 0, \\ h_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Точка $h_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ принадлежит промежутку $[0; \infty)$. Найдём знак производной слева и справа от критической точки

$$E'(0,5a) = \frac{a^2 - 2(0,5a)^2}{(a^2 + (0,5a)^2)^{5/2}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{(a^2 + (0,5a)^2)^{5/2}} > 0, \\ E'(a) = \frac{a^2 - 2a^2}{(a^2 + a^2)^{5/2}} = \frac{-a^2}{(a^2 + a^2)^{5/2}} < 0.$$

В точке $\frac{a}{\sqrt{2}}$ производная меняет знак с «+» на «-», значит, в этой точке функция имеет максимум. Поскольку критическая точка на промежутке $[0; \infty)$ единственная, то наибольшее значение функция освещённости $E(h)$ достигает в этой точке.

Пример 21. На каком расстоянии от земли нужно сделать отверстие в цилиндрическом сосуде высотой H , чтобы дальность струи из отверстия была наибольшей?

Решение

Пусть L – дальность струи (рис. 12).

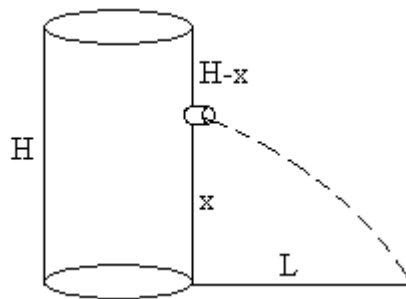


Рисунок 12

Тогда $L = vt$, где v – скорость вытекания жидкости, t – время за которое жидкость достигает земли. По закону Торричелли скорость вытекающей жидкости

$$v = \sqrt{2gh},$$

где g – ускорение свободного падения, h – высота столба жидкости над отверстием. Значит

$$v = \sqrt{2g(H-x)}.$$

Далее, используя известную формулу зависимости расстояния s от времени, за которое пройдено это расстояние (равноускоренное движение)

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

имеем $x = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. Тогда дальность струи

$$L = vt = \sqrt{2g(H-x)} \sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{(H-x)x} = 2\sqrt{Hx-x^2}.$$

По рис 12. ясно, что область допустимых значений аргумента x это промежуток $[0; H]$. Исследуем функцию $L = L(t)$ на наибольшее значение на указанном отрезке. Вычислим производную

$$L' = 2\left(\sqrt{Hx-x^2}\right)' = \frac{H-2x}{\sqrt{Hx-x^2}}.$$

Находим критические точки

$$\begin{aligned} H-2x &= 0, \\ x &= \frac{H}{2}. \end{aligned}$$

Критическая точка принадлежит отрезку $[0; H]$. Найдём знак производной слева и справа от критической точки

$$\begin{aligned} L'\left(\frac{H}{3}\right) &= \frac{H-2\frac{H}{3}}{\sqrt{H\frac{H}{3}-\left(\frac{H}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{3}H}{\frac{\sqrt{2}}{3}H} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \\ L'\left(\frac{3H}{4}\right) &= \frac{H-2\frac{3H}{4}}{\sqrt{H\frac{3H}{4}-\left(\frac{3H}{4}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{2}H}{\frac{\sqrt{3}}{4}H} = \frac{-2}{\sqrt{3}} < 0. \end{aligned}$$

Так как при переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «-», то в этой точке функция имеет максимум. Поскольку это единственная критическая точка на отрезке $[0; H]$, то наибольшая дальность струи достигается, если сделать отверстие на высоте $\frac{H}{2}$ от земли.

Пример 22. Имея n одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить из них батарею, соединяя по a элементов последовательно, а затем полученные группы (числом $\frac{n}{a}$) – параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{naE}{nR + a^2r},$$

где E – электродвижущая сила одного элемента, r – его внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Определить, при каком значении a батарея даст наибольший ток.

Решение

Исходя из условия задачи, $a \in (0; n]$. Исследуем на этом полуинтервале функцию $I = I(a)$ на наибольшее значение. Вычислим производную.

$$I' = nE \left(\frac{a}{nR + a^2r} \right)' = nE \frac{nR + a^2r - (2ar)a}{(nR + a^2r)^2} = nE \frac{nR - a^2r}{(nR + a^2r)^2}$$

Найдём критические точки

$$\begin{aligned} nR - a^2r &= 0, \\ a_1 &= -\sqrt{\frac{nR}{r}} \quad a_2 = \sqrt{\frac{nR}{r}}. \end{aligned}$$

Промежутку $(0; n]$ принадлежит только критическая точка $a = \sqrt{\frac{nR}{r}}$.

Найдём знак производной слева и справа от критической точки

$$\begin{aligned} I' \left(\sqrt{\frac{nR}{2r}} \right) &= nE \frac{nR - \frac{nR}{2r}r}{\left(nR + \frac{nR}{2r}r \right)^2} = nE \frac{\frac{nR}{2}}{\left(\frac{3nR}{2} \right)^2} = \frac{2}{9R} E > 0, \\ I' \left(\sqrt{\frac{2nR}{r}} \right) &= nE \frac{nR - \frac{2nR}{r}r}{\left(nR + \frac{2nR}{r}r \right)^2} = nE \frac{-nR}{(3nR)^2} = -\frac{1}{9R} E < 0. \end{aligned}$$

Так как при переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «-», то в этой точке функция имеет максимум. Поскольку это единственная критическая точка на промежутке $(0; n]$, то наибольший ток достигается при $a = \sqrt{\frac{nR}{r}}$.

Пример 23. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине a и квадрату высоты b . Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром d .

Решение

Прочность бруса $N = kab^2$, где k – коэффициент пропорциональности, $k > 0$. Из рис. 13. видно, что $a^2 + b^2 = d^2$, или $b^2 = d^2 - a^2$.

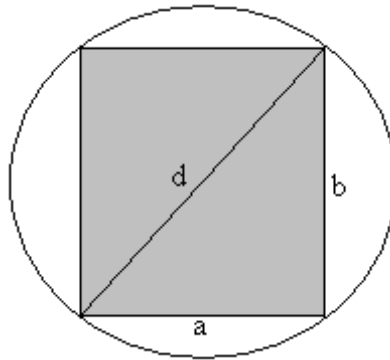


Рисунок 13

Тогда

$$N = ka(d^2 - a^2) = k(d^2a - a^3).$$

Из рис. 13. видно, что область допустимых значений аргумента a – интервал $(0; d)$. Исследуем функцию $N = N(a)$ на наибольшее значение на этом интервале. Вычислим производную

$$N' = k(d^2a - a^3)' = k(d^2 - 3a^2).$$

Критические точки

$$\begin{aligned} d^2 - 3a^2 &= 0, \\ a_1 &= -\frac{d}{\sqrt{3}} \quad a_2 = \frac{d}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Интервалу $(0; d)$ принадлежит только точка $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Найдём знак производной слева и справа от критической точки

$$N'\left(\frac{d}{2}\right) = k\left(d^2 - 3\frac{d^2}{4}\right) = k\frac{d^2}{4} > 0,$$

$$N'\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) = k\left(d^2 - 3\frac{d^2}{2}\right) = -k\frac{d^2}{2} < 0.$$

При переходе через критическую точку $\frac{d}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «-», значит, в этой точке функция $N(a)$ имеет максимум. Так как это единственная критическая точка на интервале $(0; d)$, то наибольшее

значение прочности бруса достигает если $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ и

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}.$$

Задачи алгебры

Пример 24. Сумма двух положительных чисел равна 10. Найти возможное наибольшее произведение таких чисел.

Решение

Обозначим числа a и b . Тогда $P = a \cdot b$. По условию задачи $a + b = 10$, значит $b = 10 - a$. Имеем

$$P = a(10 - a) = 10a - a^2.$$

Исходя из условия задачи область допустимых значений аргумента a это интервал $(0; 10)$. Исследуем функцию $P = P(a)$ на наибольшее значение при $a \in (0; 10)$. Вычислим производную

$$P' = (10a - a^2)' = 10 - 2a.$$

Найдём критические точки

$$10 - 2a = 0,$$

$$a = 5.$$

Критическая точка принадлежит интервалу $(0; 10)$. Вычислим значения производной $P'(a)$ слева и справа от критической точки

$$\begin{aligned}P'(4) &= 10 - 2 \cdot 4 = 2 > 0, \\P'(6) &= 10 - 2 \cdot 6 = -2 < 0.\end{aligned}$$

При переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «-», значит, в точке $a = 5$ функция достигает максимума. Так как на интервале $(0;10)$ это единственная критическая точка, то наибольшее значение произведения $P(a)$ достигает при $a = 5$. Тогда $b = 10 - 5 = 5$.

Пример 25. Число 54 представлено в виде суммы трёх положительных слагаемых. Первое слагаемое в два раза больше второго. Найти эти слагаемые, зная, что их произведение наибольшее.

Решение

Обозначим второе слагаемое a , тогда первое слагаемое равно $2a$, а третье равно $54 - a - 2a = 54 - 3a$. Составим произведение

$$P = 2a \cdot a \cdot (54 - 3a) = 108a^2 - 6a^3.$$

Найдём область допустимых значений аргумента a . По условию слагаемые положительные, значит

$$\begin{cases} a > 0 \\ 2a > 0 \\ 54 - 3a > 0. \end{cases}$$

Откуда следует $a \in (0;18)$. Исследуем функцию $P = P(a)$ на наибольшее значение на полученном интервале. Находим производную

$$P' = (108a^2 - 6a^3)' = 216a - 18a^2.$$

Критические точки

$$\begin{aligned}a(216 - 18a) &= 0, \\ a &= 0, \quad a = 12.\end{aligned}$$

Критическая точка $a = 12$ принадлежит интервалу $(0;18)$. Вычислим значения производной $P'(a)$ слева и справа от критической точки

$$\begin{aligned}P'(10) &= 216 \cdot 10 - 18 \cdot 10^2 = 360 > 0, \\ P'(13) &= 216 \cdot 13 - 18 \cdot 13^2 = -234 < 0.\end{aligned}$$

При переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «-», значит, в точке $a=12$ функция достигает максимума. Так как на интервале $(0;18)$ это единственная критическая точка, то наибольшее значение произведение $P(a)$ достигает при $a=12$. Значит, произведение будет наибольшим, если слагаемые равны 24, 12 и 18.

Пример 26. Число 15 представлено в виде суммы двух положительных слагаемых так, что сумма куба первого и утроенного второго слагаемого наименьшая. Найти такое разложение.

Решение

Обозначим первое слагаемое a , второе слагаемое b . Тогда сумма куба первого и утроенного второго слагаемого равна $S = a^3 + 3b$. По условию $b = 15 - a$. Значит

$$S = a^3 + 3(15 - a) = a^3 + 45 - 3a.$$

Найдём область допустимых значений аргумента a . По условию слагаемые положительные, значит

$$\begin{cases} 15 - a > 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

Значит $a \in (0;15)$. Исследуем функцию $S = S(a)$ на наименьшее значение на полученном отрезке. Находим производную

$$S' = (a^3 + 45 - 3a)' = 3a^2 - 3.$$

Критические точки

$$\begin{aligned} 3a^2 - 3 &= 0, \\ a &= -1, \quad a = 1. \end{aligned}$$

Критическая точка $a=1 \in (0;15)$. Вычислим значения $S'(a)$ слева и справа от критической точки

$$\begin{aligned} S'(0,5) &= 3 \cdot 0,5^2 - 3 = -1,25 < 0, \\ S'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0. \end{aligned}$$

При переходе через критическую точку знак производной $S'(a)$ меняется с «-» на «+», следовательно, в точке $a=1$ функция имеет минимум. Так как $a=1$ – единственная критическая точка интервала $(0;15)$, то наименьшего значения сумма достигает при $a=1$. Тогда $b=15-1=15-1=14$.

Другие применения производной

Пример 27. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+16}$ -ю часть курса, а забывает $\frac{1}{25}t$ -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

Решение

Пусть $U(t)$ – часть курса, которую студент знает в момент времени t . Значит

$$U(t) = \frac{t}{t+16} - \frac{1}{25}t.$$

Найдём область допустимых значений аргумента t . Имеем $t \geq 0$. Необходимо $U(t) \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{t}{t+16} - \frac{1}{25}t &\geq 0, \\ t\left(\frac{1}{t+16} - \frac{1}{25}\right) &\geq 0, \\ t\frac{25-(t+16)}{25(t+16)} &\geq 0, \\ \frac{t}{25(t+16)}(9-t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая что $t \geq 0$, окончательно находим $t \in [0;9]$. Исследуем функцию $U(t)$ на наибольшее значение на отрезке $[0;9]$. Находим производную

$$U'(t) = \left(\frac{t}{t+16}\right)' - \frac{1}{25}t' = \frac{16}{(t+16)^2} - \frac{1}{25}.$$

Найдём критические точки

$$\begin{aligned}\frac{16}{(t+16)^2} - \frac{1}{25} &= 0, \\ \frac{16}{(t+16)^2} &= \frac{1}{25}, \\ (t+16)^2 &= 400, \\ t_1 = 4 \quad t_2 &= 36.\end{aligned}$$

Вычислим значение функции $U(t)$ в критических точках, которые принадлежат отрезку $[0;9]$ и на концах отрезка

$$\begin{aligned}U(0) &= 0, \\ U(4) &= \frac{4}{4+16} - \frac{1}{25} \cdot 4 > 0, \\ U(9) &= 0.\end{aligned}$$

Значит, максимальная часть курса будет изучена за 4 дня.

Пример 28. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V . Стоимость 1 m^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет a грн., а стоимость 1 m^2 материала, идущего на стенки бака, — b грн. При каком отношении высоты бака к радиусу дна затраты на материал будут минимальными?

Решение

Площадь дна цилиндрического бака $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности $S_{\text{б. пов}} = 2\pi r h$. Тогда затраты на изготовление бака

$$\Pi = a \cdot \pi r^2 + b \cdot 2\pi r h.$$

Известно, что для цилиндра $V = \pi r^2 h$. Отсюда $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Тогда

$$\Pi = a \cdot \pi r^2 + b \cdot 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}.$$

Область допустимых значений аргумента $r \in (0; \infty)$. Исследуем функцию $\Pi = \Pi(r)$ на наименьшее значение на данном интервале. Вычислим производную

$$\Pi' = \left(a\pi r^2 + \frac{2bV}{r} \right)' = 2a\pi r - \frac{2bV}{r^2}.$$

Найдём критические точки

$$\begin{aligned} 2a\pi r - \frac{2bV}{r^2} &= 0, \\ a\pi r^3 - bV &= 0, \\ r &= \sqrt[3]{\frac{a\pi}{bV}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \Pi'' &= 2a\pi + \frac{4bV}{r^3} \\ \Pi'' \left(\sqrt[3]{\frac{a\pi}{bV}} \right) &> 0, \end{aligned}$$

то в точке $r = \sqrt[3]{\frac{a\pi}{bV}}$ функция имеет минимум. Так как это единственная критическая точка, то наименьшее значение затрат достигается при $r = \sqrt[3]{\frac{a\pi}{bV}}$. Значит

$$h = \frac{V}{\pi} \left(\frac{a\pi}{bV} \right)^{-2/3} = \left(\frac{b}{a} \right)^{2/3} \left(\frac{V}{\pi} \right)^{5/3}.$$

Наименьшее значение затрат достигается, если выполнено соотношение

$$\frac{h}{r} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{V}{\pi} \right)^2.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Точка массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t) = (t - 2)^{-2}$. Докажите, что действующая на неё сила пропорциональна квадрату пройденного пути.

Задание 2. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = \frac{1+t}{2+t}$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 2$.
(Ответ: 0.0625, -0.03125.)

Задание 3. Тело, выпущенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0 , движется по закону

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где h – высота в метрах, t – время в секундах. Найти высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 3 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 2$ м, $v_0 = 4$ м/с ($g = 10$ м/с².)

(Ответ: $\frac{122}{45}$ м.)

Задание 4. На прямолинейном отрезке AB , соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

(Ответ: на расстоянии $\frac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}}$ от точки A .)

Задание 5. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины поперечного сечения и куба высоты.)

(Ответ: $b = d/2$, $h = d\sqrt{3}/2$.)

Задание 6. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого перпендикулярна плоскости круга, проходящего через его центр, выражается формулой

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{3/2}},$$

где a – радиус круга, x – расстояние от центра круга до магнита, $c = \text{const}$.

При каких x величина F будет наибольшей?

(Ответ: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.)

Задание 7. Найти число, которое в сумме со своим квадратом даёт наименьшую сумму.

(Ответ: $-\frac{1}{2}$.)

Задание 8. Найти разложение числа 12 на сумму двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была: а) наибольшей; б) наименьшей.

(Ответ: а) 12 и 0; б) 6 и 6.)

Задание 9. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+0,5}$ -ю часть курса, а забывает $\frac{2}{49}t$ -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

(Ответ: 3.)

1.3 Приложения производной в задачах экономики

Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции

В практической деятельности важную роль играет нахождение возможности затратить минимальное количество времени и материальных средств, получив при этом максимальный эффект. Кроме того, большинство процессов в экономике происходят таким образом, что некоторая характеристика достигает экстремума. Правила нахождения локальных и глобальных экстремумов рассмотрены в п. . Рассмотрим задачи практического содержания.

Пример 29. Капитал в 8 млн. грн. может быть размещен в банке под 40% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 150% . Издержки задаются квадратичной зависимостью $\frac{x^2}{20}$. Прибыль облагается налогом в $p\%$. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, чем чистое размещение капитала в банке?

Решение

Весь капитал 8 млн. грн. разделим на части: x (млн.) – в производство, $(8-x)$ – в банк под проценты. Тогда через год из банка можно взять $(8-x) + (8-x)0.4$ – то, что вложили и плюс проценты:

$$(8-x) + (8-x)0.4 = (8-x)(1+0.4) = (8-x)1.4.$$

Доход от производства через год составит (учитывая начисленные 150%):

$$x + x \frac{150}{100} = x + 1.5x = 2.5x.$$

Тогда прибыль от вложения в производство – это доход минус издержки $\frac{x^2}{20}$, т. е.

$$2.5x - \frac{x^2}{20}.$$

Чистая прибыль окажется равной

$$2.5x - \frac{x^2}{20} - \left(2.5x - \frac{x^2}{20}\right) \frac{p}{100},$$

т. к. прибыль облагается налогом в $p\%$. Обозначим $\frac{p}{100}$ через i : $i = \frac{p}{100}$, тогда

$$2.5x - \frac{x^2}{20} - \left(2.5x - \frac{x^2}{20}\right) \frac{p}{100} = 2.5x - \frac{x^2}{20} - \left(2.5x - \frac{x^2}{20}\right) i = \left(2.5x - \frac{x^2}{20}\right) (1-i).$$

Через год общая сумма (от банка и от производства) прибыли составит:

$$S(x) = 1.4(8-x) + \left(2.5x - \frac{x^2}{20}\right) (1-i).$$

Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение этой функции на отрезке $[0;7]$. Для этого находим производную:

$$S'(x) = 1.4(-1) + \left(2.5 - \frac{2x}{20}\right) (1-i) = -1.4 + \left(2.5 - \frac{x}{10}\right) (1-i)$$

и приравниваем её к 0:

$$\begin{aligned}\left(2.5 - \frac{x}{10}\right)(1-i) &= 1.4; \\ 2.5 - \frac{x}{10} &= \frac{1.4}{1-i}; \\ \frac{x}{10} &= 2.5 - \frac{1.4}{1-i}; \\ x &= \left(2.5 - \frac{1.4}{1-i}\right)10 = 25 - \frac{14}{1-i}.\end{aligned}$$

Значит, критическая точка $x_0 = 25 - \frac{14}{1-i}$. Т. к. ищется наибольшее значение функции на отрезке $[0;7]$, то эта точка должна принадлежать отрезку, т. е. $0 < x_0 < 7$:

$$25 - \frac{14}{1-i} > 0, \quad 25 > \frac{14}{1-i}, \quad 1-i > \frac{14}{25}, \quad i < \frac{21}{25} = 0.84,$$

т. к. $i = \frac{P}{100}$, то

$$\frac{P}{100} < 0.84, \quad p < 84.$$

Значит, при значениях $p < 84$ % вложение в производство является более эффективным, чем чистое размещение капитала в банке.

Производительность труда

1. Пусть $U(t)$ – количество произведённой продукции U за время t . Необходимо найти производительность труда. В момент от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведённой продукции изменится от $U_0 = U(t_0)$ до $U_0 + \Delta U$. Тогда *средняя производительность* труда за период Δt

$$z_{\text{cp}} = \frac{\Delta U}{\Delta t}.$$

Производительность труда в заданный момент t_0

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0).$$

2. Скорость изменения производительности – $z'(t)$. Логарифмическую производную

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

называют относительной скоростью изменения функции или темпом изменения функции. В частности, $(\ln z)' = \frac{z'}{z}$ – темп изменения производительности.

Пример 30. Статистическим путём установлено, что объём продукции цеха $u(t)$ усл. ед. в течение рабочего дня описывается функцией

$$u(t) = \frac{-20}{3}t^3 + 60t^2 + 160t + 240, \quad 1 \leq t \leq 8,$$

где t – время, ч.

Найти:

а) Производительность труда, скорость и темп её изменения через 3 часа после начала работы;

б) В какой момент времени производительность труда будет наибольшей. Результат пояснить аналитически и графически. Сделать экономический анализ результатов.

Решение

а) производительность труда $z(t)$ рассчитывается по формуле $z(t) = u'(t)$:

$$z(t) = \left(\frac{-20}{3}t^3 + 60t^2 + 160t + 240 \right)' = -20t^2 + 120t + 160.$$

Находим производительность труда через 3 часа после начала работы:

$$z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160 = 340.$$

Скорость изменения производительности найдём как первую производную от $z(t)$:

$$z'(t) = (-20t^2 + 120t + 160)' = -40t + 120.$$

Находим скорость изменения производительности через 3 часа после начала работы:

$$z'(3) = -40 \cdot 3 + 120 = 0.$$

Далее вычисляем темп изменения производительности:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-40t + 120}{-20t^2 + 120t + 140},$$

и находим его значение через 3 часа после начала работы:

$$\frac{z'(3)}{z(3)} = \frac{-40 \cdot 3 + 120}{-20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160} = \frac{0}{340} = 0.$$

б) График функции производительности труда $z(t) = -20t^2 + 120t + 160$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение этой функции будет достигаться в вершине параболы. Для построения графика функции найдём координаты вершины параболы:

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2 \cdot (-20)} = 3, \quad z(t_0) = z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160 = 340.$$

Вершина параболы находится в точке $M(3;340)$. Так как ветви параболы направлены вниз, то найдём точки пересечения с осью Ot . Для этого приравняем $z(t)$ к нулю:

$$\begin{aligned} -20t^2 + 120t + 160 &= 0, \\ -t^2 + 6t + 8 &= 0, \\ D &= 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 68, \quad t_1 = \frac{-6 - \sqrt{68}}{-2} \approx 7.1 \quad t_2 = \frac{-6 + \sqrt{68}}{-2} \approx -1.1. \end{aligned}$$

Для нахождения пересечения с осью Oz подставим $t = 0$ в $z(t)$:

$$z(0) = -20 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 160 = 160.$$

Построим график функции (рис. 14):

По графику видно, что производительность труда растёт в первые 3 часа работы, а затем постепенно снижается к концу рабочего дня.

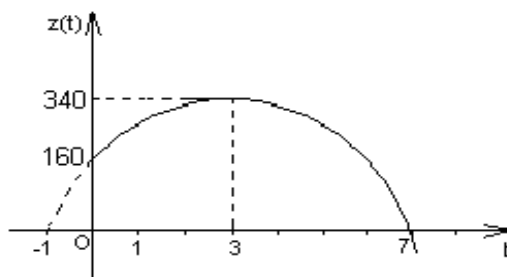


Рисунок 14

Средние и предельные издержки производства

Пусть x – количество выпускаемой продукции; y – издержки производства. Если Δx – приращение продукции, а Δy – приращение издержек производства, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

– *предельные издержки* производства.

Аналогично можно дать понятие следующим экономическим показателям: предельная выручка, предельный доход и др. Предельные издержки приближённо характеризуют дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 31. Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q усл. ед. Функции затрат $C(Q)$ и цены $P(Q)$ имеют вид:

$$C(Q) = 1.92Q^3 + 4.32Q^2 + 2.88Q + 15, \quad P(Q) = -1.44Q + 89.28.$$

Найти:

- а) максимальную прибыль предприятия, объём и цену, соответствующие максимальной прибыли;
- б) средние и предельные затраты, соответствующие максимальной прибыли;
- в) участки роста и убывания прибыли на отрезке $[2; 5]$;
- г) наименьшее значение затрат на $[2; 5]$.

Решение

а) Прибылью назовём разность дохода и затрат. При этом доходом назовём произведение цены на объём выпущенной продукции:

$$\begin{aligned} \Pi(Q) &= Q \cdot P(Q) - C(Q) = (-1.44Q + 89.28) \cdot Q - (1.92Q^3 + 4.32Q^2 + 2.88Q + 15) = \\ &= -1.92Q^3 - 5.76Q^2 + 86.4Q - 15 \end{aligned}$$

Исследуем эту функцию на наибольшее значение, для этого найдём её производную:

$$\begin{aligned}\Pi' &= -1.92 \cdot 3Q^2 - 5.76 \cdot 2Q + 86.4 \cdot 1 = \\ &= -5.76Q^2 - 11.52Q + 86.4.\end{aligned}$$

Найдём критические точки ($\Pi' = 0$):

$$\begin{aligned}-5.76Q^2 - 11.52Q + 86.4 &= 0 \quad | : -5.76, \\ Q^2 + 2Q - 15 &= 0, \\ Q_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \\ Q_1 &= 3; \quad Q_2 = -5.\end{aligned}$$

Отрицательная величина $Q_2 = -5$ не имеет экономического смысла, поэтому единственной критической точкой будем считать $Q_1 = 3$. Это и есть объём выпуска, который соответствует максимальной прибыли, так как при переходе через эту критическую точку производная меняет знак с плюса на минус:

$$\begin{aligned}\Pi'(2) &= -5.76 \cdot 2^2 - 11.52 \cdot 2 + 86.4 > 0, \\ \Pi'(4) &= -5.76 \cdot 4^2 - 11.52 \cdot 4 + 86.4 < 0.\end{aligned}$$

Найдём максимальную прибыль, вычисляя значение $\Pi(Q)$ в этой точке:

$$\Pi(3) = -1.92 \cdot 3^3 - 5.76 \cdot 3^2 + 86.4 \cdot 3 - 15 = 140.52.$$

Найдём цену, которая соответствует максимальной прибыли:

$$P(3) = -1.44 \cdot 3 + 89.28 = 84.96.$$

б) Найдём затраты, соответствующие максимальной прибыли:

$$C(3) = 1.92 \cdot 3^3 + 4.32 \cdot 3^2 + 2.88 \cdot 3 + 15 = 114.36.$$

Тогда средние затраты, которые соответствуют максимальной прибыли равны:

$$C_{cp} = \frac{C(3)}{3} = \frac{114.36}{3} = 38.12.$$

Чтобы найти предельные затраты нужно вычислить производную функции затрат:

$$C'(Q) = 5.76Q^2 + 8.64Q + 2.88.$$

В точке $Q = 3$:

$$C'(3) = 5.76 \cdot 3^2 + 8.64 \cdot 3 + 2.88 = 80.64.$$

в) Найдём участки роста и убывания прибыли, используя результаты предыдущего п. а). При объёме выпуска продукции от 2 до 3 ед. прибыль возрастает (т. к. на этом участке производная положительная), а при объёме выпуска от 3 до 5 ед. прибыль убывает (производная отрицательная).

г) Наименьшее значение затрат найдём используя производную:

$$C'(Q) = 5.76Q^2 + 8.64Q + 2.88.$$

Находим критические точки ($C'(Q) = 0$):

$$5.76Q^2 + 8.64Q + 2.88 = 0 \mid : 2.88,$$

$$2Q^2 + 3Q + 1 = 0,$$

$$Q_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4},$$

$$Q_1 = -0.5; \quad Q_2 = -1.$$

Нужно вычислить значение функции $C(Q)$ в критических точках, принадлежащих указанному промежутку, и на концах промежутка. Из полученных чисел выбрать наименьшее.

Критические точки $Q_1 = -0.5$ и $Q_2 = -1$ не принадлежат промежутку $[2; 5]$, значит вычислим значение функции только в точках 2 и 5:

$$C(2) = 1.92 \cdot 2^3 + 4.32 \cdot 2^2 + 2.88 \cdot 2 + 15 = 44.76,$$

$$C(5) = 1.92 \cdot 5^3 + 4.32 \cdot 5^2 + 2.88 \cdot 5 + 15 = 377.4.$$

Значит, наименьшее значение затрат на промежутке $[2; 5]$ равно 44.76.

Эластичность и её применение в экономике

Одним из важнейших применений дифференциального исчисления в экономике является введение с помощью производной понятия эластичности. Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит.

1. Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных y и x :

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{f'(x)x}{f(x)}.$$

Эластичность спроса по цене

$$E_p(q) = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q}$$

показывает относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Эластичность спроса по доходу

$$E_I(q) = \frac{dq}{dI} \frac{I}{q}.$$

2. *Частная эластичность.* Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Величины $E_x(z)$, $E_y(z)$, которые определяются формулами

$$E_x(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{z}, \quad E_y(z) = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{y}{z}$$

называются частными эластичностями функции $z = f(x, y)$ относительно переменных x и y . Частная эластичность $E_x(z)$ приблизительно означает процент роста (или снижения) функции z , если аргумент x увеличивается на 1%, а аргумент y остается постоянным.

Например, $E_{P_B}(z_A)$ – частная эластичность спроса на товар А относительно цены P_B , приблизительно означает процент роста (снижения) спроса на товар А, если цена товара В возрастает на 1%, а цена товара А остается неизменной.

Пример 32. Опытным путём установлены функции спроса $q(p)$ и предложения $S(p)$:

$$q(p) = \frac{p+8}{p+2}, \quad S(p) = p+0.5,$$

где p – цена товара, q и S – количество товара покупаемого и предлагаемого на продажу.

Найти:

а) равновесную цену;

б) эластичность спроса и предложения для этой цены. Сделать экономический анализ результатов;

в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение

а) Равновесная цена это цена, при которой спрос и предложение равны:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0.5;$$

$$p+8 = (p+2)\left(p+\frac{1}{2}\right) = p^2 + \frac{5}{2}p + 1;$$

$$p = p^2 + \frac{5}{2}p + 1 - 8 = p^2 + \frac{5}{2}p - 7;$$

$$p^2 + \frac{3}{2}p - 7 = 0;$$

$$p_1 = 2$$

($p_2 = -\frac{7}{2}$ не имеет экономического смысла).

б) Эластичность спроса вычисляется по формуле

$$E_p(q) = q'_p \cdot \frac{p}{q(p)}.$$

$$\text{Вычислим } q'_p = \left(\frac{p+8}{p+2}\right)' = \frac{p+2-(p+8)}{(p+2)^2} = \frac{-6}{(p+2)^2}.$$

$$\text{Получим } E_p(q) = q'_p \cdot \frac{p}{q(p)} = \frac{-6}{(p+2)^2} \cdot \frac{p}{\left(\frac{p+8}{p+2}\right)} = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

При $p=2$

$$E_2(q) = \frac{-6 \cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0.3.$$

Эластичность предложения вычисляется по формуле

$$E_p(S) = S'_p \cdot \frac{p}{S(p)}.$$

$$\text{Вычислим } S'_p = (p+0.5)' = 1.$$

Получим
$$E_p(S) = S'_p \cdot \frac{P}{S(p)} = 1 \cdot \frac{P}{p + 0,5}.$$

При $p=2$

$$E_2(S) = \frac{2}{2 + 0,5} = 0,8.$$

Т. к. $|E_2(q)| < 1$ и $|E_2(S)| < 1$, то спрос и предложение не эластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведёт к резкому изменению спроса и предложения.

При увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0.3%, а предложение увеличится на 0.8%.

в) При увеличении цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на 1.5% (т. к. $-0,3 \cdot 5 = -1,5$), следовательно доход возрастает на 3.5%.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Объём продукции предприятия в течение рабочего дня описывается функцией $u(t) = \frac{-10}{3}t^3 + 40t^2 + 200t + 30$. Вычислить производительность через 4 часа после начала работы. Определить, через какое время темп изменения производительности будет равен 0.

(Ответ: 200; 2.)

Задание 2. Зависимость прибыли предприятия от объёма выпускаемой продукции описывается формулой $\Pi = -x^2 + 4x + 11$. Найти значение объёма продукции, при котором достигается максимальное значение прибыли. Указать участки роста и убывания прибыли. Построить график зависимости.

(Ответ: 2.)

Задание 3. Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q усл. ед. Функция затрат $C(Q)$ имеет вид $C(Q) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t + 20$. Найти минимальное значение затрат, если объём меняется от 0.5 до 3 усл. ед.

(Ответ: 17.)

Задание 4. Зависимость издержек предприятия от объёма выпускаемой продукции задана функцией $K = x^2 - x + 2$. Найти значение объёма, при котором издержки принимают значение 8 усл. ед. Указать возможное минимальное значение издержек и объём продукции, при котором достигается экстремальное значение.

(Ответ: 3, $K(0,5) = 1,75$.)

Литература: [5, гл. 11, § 1, 6; 6, гл. IV, § 2; 7, р. 2, гл. II; 8, ч. 1, гл. 5, § 1; 9, р. 4, § 5.2; 10, ч. 1, р. 10, § 10.7; 11, ч. 1, р. 6, § 6.8].

2 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

С математической точки зрения приложение определённого интеграла можно реализовать по одной из двух схем. Первая основана на определении интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Вторая схема применения определённого интеграла состоит в следующем. Пусть требуется найти некоторую геометрическую или физическую величину Q , имеющую определённое значение на заданном отрезке $[a; b]$. Предполагается, что величина Q является аддитивной, т.е. если разделить отрезок $[a; b]$ на части, то величина Q будет равна сумме значений Q , соответствующих этим частям. Из условия задачи находится «элемент» dQ величины Q , соответствующий «элементарному промежутку» $[x; x + \Delta x]$, в виде $dQ = q(x) dx$. При этом пользуются различными допущениями. Например, переменную силу на «элементарном промежутке» считают постоянной, криволинейную трапецию – прямоугольником и т.п. Убедившись, что dQ найдено верно, т.е., что $dQ \approx \Delta Q$, интегрируют по отрезку $[a; b]$ элемент dQ и получают искомую величину

$$Q = \int_a^b q(x) dx.$$

2.1 Геометрические приложения определённого интеграла

Площадь области

1. *Площадь в декартовой системе координат.* Для площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f_2(x)$, снизу графиком $y = f_1(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, непосредственно из геометрического смысла определённого интеграла имеем

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

2. В случае области, ограниченной линией, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ (заданной *параметрически*), учитывая п. 1, имеем

$$S = \pm \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt,$$

знак «+» если $x(t_2) > x(t_1)$ при $t_2 > t_1$;

знак «-» если $x(t_2) < x(t_1)$ при $t_2 > t_1$.

3. Площадь области, ограниченной линиями, заданными в *полярной системе координат*, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] d\varphi,$$

где $\rho = \rho_1(\varphi)$ – внутренняя граница области, $\rho = \rho_2(\varphi)$ – внешняя граница, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$.

Пример 33. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 2x - 2$.

Решение

Графиком функции $y = x^2 - 2x + 1$ является парабола с вершиной в точке $(1; 0)$, ветви направлены вверх. График линейной функции $y = 2x - 2$ – прямая. Изобразим графики на одном чертеже (рис. 15).

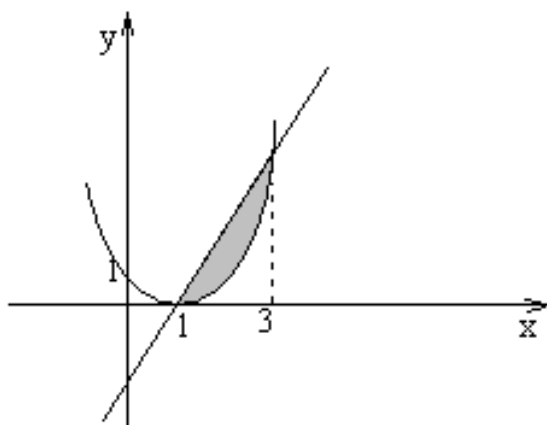


Рисунок 15

Найдём точки пересечения графиков

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 &= 2x - 2, \\x^2 - 4x + 3 &= 0, \\x_1 &= 1, \quad x_2 = 3.\end{aligned}$$

Используя формулу п. 1, вычислим площадь области

$$\begin{aligned}S &= \int_1^3 [2x - 2 - (x^2 - 2x + 1)] dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \\&= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Пример 34. Найти площадь эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Решение

Пусть площадь эллипса S , площадь эллипса в первой четверти S_1 . Тогда $S = 4S_1$ так как область симметрична относительно координатных осей (рис. 16)

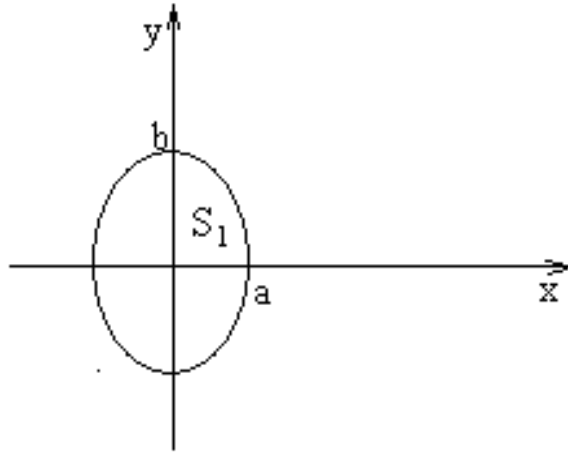


Рисунок 16

Вычислим площадь, используя формулу п. 2.

$$\begin{aligned}S &= 4S_1 = -4 \int_0^{\pi/2} b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \\&= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.\end{aligned}$$

Пример 35. Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$\begin{cases} \rho = 2(1 - \cos \varphi) \\ \rho = 2 \cos \varphi \end{cases}.$$

Решение

Построим графики заданных функций. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ – кардиоида, так как перед $\cos \varphi$ стоит знак « $-$ », направлена влево; $\rho = 2 \cos \varphi$ – окружность с центром в точке $(1;0)$ и радиусом 1 (рис. 17).

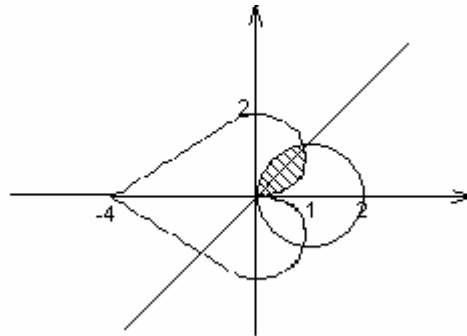


Рисунок 17

Искомая площадь S состоит из двух равных частей. Значит $S = 2S_1$, где S_1 – заштрихованная площадь. S_1 представляет собой сумму двух площадей S_2 и S_3 , каждую из которых найдём в отдельности. Найдём значение φ , которое соответствует точке пересечения графиков функций

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos \varphi) &= 2 \cos \varphi, \\ 2 \cos \varphi &= 1, \cos \varphi = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Площадь S_2 ограничена графиком кардиоиды (φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{3}$)

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4(1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \left(\varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \pi - \frac{7\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Площадь S_3 ограничена графиком окружности (φ изменяется от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$)

$$S_3 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Значит } S = 2(S_2 + S_3) = 2 \left(\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{7\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

Пример 36. Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 0 \\ x^2 - 8x + y^2 = 0 \end{cases},$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

Решение

Построим графики заданных функций (рис. 18). Далее перейдём к полярной системе координат с помощью формул

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Имеем

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi - 4\rho \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi,$$

$$x^2 - 8x + y^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi - 8\rho \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 0 \Rightarrow \rho = 8 \cos \varphi,$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Условие задачи примет вид

$$\begin{cases} \rho = 4 \cos \varphi \\ \rho = 8 \cos \varphi, \\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

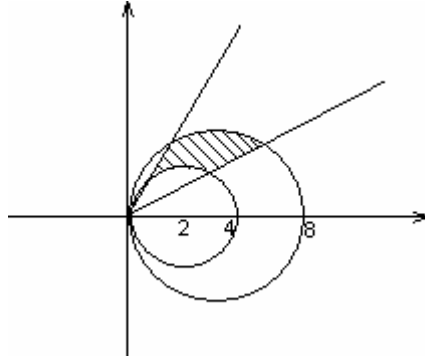


Рисунок 18

Чтобы найти площадь заштрихованной фигуры воспользуемся формулой п. 3.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (64 \cos^2 \varphi - 16 \cos^2 \varphi) d\varphi = 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 12 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Длина линии

1. *Длина линии в декартовой системе координат.* Если функция $y = y(x)$ такая, что $y'(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то длина L соответствующей линии существует и

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

2. Если линия L задана *параметрически*, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, при этом $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

3. Если линия L задана в *полярной системе координат* $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, и $\rho'(\varphi)$ непрерывна, то

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Пример 37. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $(0;0)$ до точки $(4;8)$.

Решение

Из уравнения параболы $y = \pm\sqrt{x^3}$. Так как на участке графика от точки $(0;0)$ до точки $(4;8)$ $y > 0$, то $y = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Найдём производную

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Пределы интегрирования 0 и 4, т. к. абсцисса первой точки равна 0, второй равна 4. Используя формулу п. 1, вычислим длину линии

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{4+9x}{4}} dx = \int_0^4 \frac{\sqrt{4+9x}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 (4+9x)^{1/2} dx = \frac{1}{27} (4+9x)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{1}{27} (40^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{27} (40\sqrt{40} - 8). \end{aligned}$$

Пример 38. Вычислить длину дуги цепной линии $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$, $x \in [0;2]$.

Решение

Вычислим производную

$$y' = \frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2}(e^{x/2} - e^{-x/2}).$$

Используя формулу п. 1, вычислим длину линии

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^{x/2} - e^{-x/2})\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left((e^{x/2})^2 - 2 \cdot e^{x/2} \cdot e^{-x/2} + (e^{-x/2})^2\right)} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - 2 \cdot 1 + e^{-x})} dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4 + e^x - 2 + e^{-x}}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{\left(e^{x/2}\right)^2 + 2 \cdot e^{x/2} \cdot e^{-x/2} + \left(e^{-x/2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)^2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(2 \cdot e^{x/2} - 2e^{-x/2}\right) \Big|_0^2 = \left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right) \Big|_0^2 = \\
&\quad \left(e^{2/2} - e^{-2/2}\right) - \left(e^{0/2} - e^{-0/2}\right) = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Пример 39. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln \cos x + 2$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

Решение

Вычислим производную

$$y' = (\ln \cos x + 2)' = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

Найдём длину линии, используя формулу п. 1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{|\cos x|} = \left| \begin{array}{l} \cos x > 0, \quad x \in [0; \pi/6] \\ |\cos x| = \cos x \end{array} \right| = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \\
&= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_0^{\pi/6} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \\
&= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| = \ln \sqrt{3} - \ln 1 = \ln \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Пример 40. Вычислить длину одного витка циклоиды

$$\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение

Один виток циклоиды соответствует $t \in [0; 2\pi]$. Вычислим производные

$$\begin{cases} x'_t = (9(t - \sin t))' = 9(1 - \cos t) \\ y'_t = (9(1 - \cos t))' = 9 \sin t. \end{cases}$$

Найдём длину линии, используя формулу п. 2.

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{81(1 - \cos t)^2 + 81 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{81(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\
 &= 9 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 9\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \left| \begin{array}{l} \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}, \\ 2 \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t \end{array} \right| = \\
 &= 9\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 18 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \left| \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi, \\ \sin \frac{t}{2} > 0, \quad \left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sin \frac{t}{2} \end{array} \right| = 18 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\
 &18 \cdot (-2) \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -36(\cos \pi - \cos 0) = -36(-2) = 72.
 \end{aligned}$$

Пример 41. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 5 \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

Решение

Вычислим производные

$$\begin{cases} x'_t = 5 \cdot 2 \cos t (-\sin t) = -5 \sin 2t \\ y'_t = 5 \cdot 2 \sin t \cos t = 5 \sin 2t. \end{cases}$$

Вычислим длину линии

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{25 \sin^2 2t + 25 \sin^2 2t} dt = 5\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2t} dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \sin 2t > 0, \quad 0 \leq t \leq \pi/2, \\ |\sin 2t| = \sin 2t \end{array} \right| = 5\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -5\sqrt{2} \frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{5\sqrt{2}}{2} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{-5\sqrt{2}}{2} (-2) = 5\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 42. Вычислить длину дуги астроиды

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение

Так как график линии (рис. 19) симметричен относительно Ox и Oy , то можно вычислить четвёртую часть длины дуги, а затем умножить на 4. Параметр t при этом будет изменяться от 0 до $\pi/2$, т.к. отрезок $[0; \pi/2]$ соответствует четверти длины периода $[0; 2\pi]$.

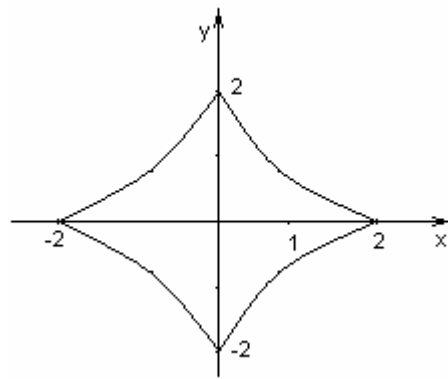


Рисунок 19

Вычислим производные $\begin{cases} x'_t = 2 \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) = -6 \cos^2 t \sin t \\ y'_t = 2 \cdot 3 \sin^2 t \cos t = 6 \sin^2 t \cos t. \end{cases}$

Используя формулу п. 2, найдём длину линии L , $L = 4L_1$

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 3 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= -\frac{3}{2} (\cos \pi - \cos 0) = 3. \\ L &= 4L_1 = 4 \cdot 3 = 12. \end{aligned}$$

Пример 43. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Решение

Вычислим производные

$$\begin{cases} x'_t = 3(-2\sin t + 2\sin 2t) \\ y'_t = 3(2\cos t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{9(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + 9(2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt = \\ &= \int_0^\pi \sqrt{9 \cdot 4(\sin^2 t - 2\sin t \sin 2t + \sin^2 2t) + 9 \cdot 4(\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)} dt = \\ &= 6 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 2t + \cos^2 2t - 2(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)} dt = \\ &= 6 \int_0^\pi \sqrt{2 - 2(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)} dt = 6 \int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \\ &= 6\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 6\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \left| \begin{array}{l} \sin \frac{t}{2} > 0, \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{t}{2} \end{array} \right| = 12 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -24 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = -24 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -24(0 - 1) = 24. \end{aligned}$$

Пример 44. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

Решение

Так как линия симметричная (рис. 20), вычислим длину дуги как $L = 2L_1$, где L_1 – длина верхней половины кривой, φ при этом будет изменяться от 0 до π .

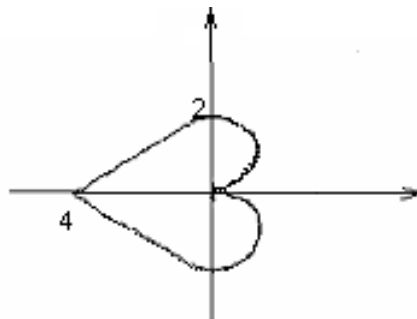


Рисунок 20

Найдём производную $\rho' = (2(1 - \cos \varphi))' = 2 \sin \varphi$. Используя формулу п. 3, вычислим длину линии

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^\pi \sqrt{4(1 - \cos \varphi)^2 + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2 \int_0^\pi \sqrt{1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= 4 \int_0^\pi \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4 \int_0^\pi \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -8 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = -8 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -8(0 - 1) = 8. \end{aligned}$$

Пример 45. Найти длину линии $\rho = a\sqrt{e^{b\varphi}}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение

Вычислим производную $\rho' = \left(a e^{\frac{b}{2}\varphi} \right)' = \frac{ab}{2} e^{\frac{b}{2}\varphi}$. Используя формулу п.

3, найдём длину линии.

$$\begin{aligned} L &= \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \sqrt{\left(a e^{\frac{b}{2}\varphi} \right)^2 + \left(\frac{ab}{2} e^{\frac{b}{2}\varphi} \right)^2} d\varphi = \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \sqrt{a^2 e^{b\varphi} + \frac{a^2 b^2}{4} e^{b\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 + a^2 b^2}}{2} \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} e^{\frac{b}{2}\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{4a^2 + a^2 b^2}}{b} e^{\frac{b}{2}\varphi} \Big|_{-0,5\pi}^{0,5\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 + a^2 b^2}}{b} \left(e^{\frac{b\pi}{4}} - e^{-\frac{b\pi}{4}} \right). \end{aligned}$$

Пример 46. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 5(1 + \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Решение

Найдём производную $\rho' = (5(1 + \sin \varphi))' = 5 \cos \varphi$. Вычислим длину дуги

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{25(1 + \sin \varphi)^2 + 25 \cos^2 \varphi} d\varphi = 5 \int_0^\pi \sqrt{1 + 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 5 \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin \varphi} d\varphi = 5\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin \varphi} d\varphi = \left| \sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} d\varphi = 5\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} d\varphi = \\
& = 10 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -20 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = -20 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \right) = \\
& = -20 \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \right) = -20 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 20\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Объём тел

1. *Объём тела с известным поперечным сечением.* Пусть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox равна $S(x)$, $x \in [a; b]$. (рис. 21). Для части объёма тела между сечениями в точках x и $x + \Delta x$ имеем $dV = S(x)dx$.

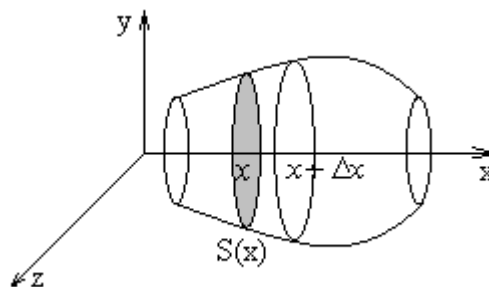


Рисунок 21

Значит, объём тела с известным поперечным сечением (перпендикулярным к Ox) можно вычислить по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Если известно сечение тела плоскостью, перпендикулярной другой координатной оси, то формула аналогична.

2. *Объём тела вращения.* Если тело образовано вращением вокруг оси Ox плоской области, ограниченной снизу и сверху графиками линий $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, имеем $S(x) = \pi[f_2^2(x) - f_1^2(x)]$. Используя формулу п. 1, имеем

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

Если тело образовано вращением плоской области вокруг оси Oy , то аналогично имеем

$$V_{Oy} = \pi \int_a^b [f_2^2(y) - f_1^2(y)] dy.$$

Пример 47. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = 1.$$

Решение

Построим поверхности на одном чертеже (рис. 22). $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ – эллиптический параболоид, ось симметрии Oz . $z = 1$ – плоскость, параллельная плоскости xOy , проходящая от неё на расстоянии 1.

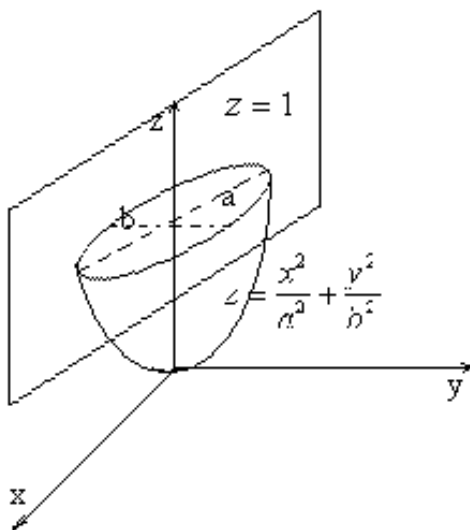


Рисунок 22

Пересечём полученное тело плоскостью $z = \text{const}$, параллельной плоскости xOy . В сечении получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1.$$

Полуоси эллипса $\sqrt{z}a$ и $\sqrt{z}b$. Площадь поперечного сечения (площадь эллипса) $S(z) = \pi\sqrt{z}a\sqrt{z}b = \pi abz$. Используя п. 1, вычислим объём тела

$$V = \int_a^b S(z) dz = \int_0^1 \pi abz dz = \pi ab \int_0^1 z dz = \pi ab \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi ab}{2}.$$

Пример 48. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг Ox области $y = 2\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Решение

Построим область (рис. 23).

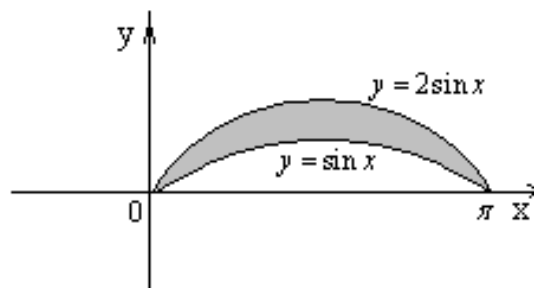


Рисунок 23

Используя формулу п. 2, имеем

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^{\pi} [4 \sin^2 x - \sin^2 x] dx = 3\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \\ &= \frac{3}{2} \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{3}{2} \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi^2. \end{aligned}$$

Пример 49. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг Oy плоской области, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение

Построим графики линий, ограничивающие область, на одном чертеже (рис. 24). График функции $y = x^2 - 2x + 1$ – парабола, ветви направлены вверх, вершина в точке (1;0). График $x = 2$ – прямая, параллельная Oy .

Перепишем уравнение линии $y = x^2 - 2x + 1$ в виде $x = f(y)$. Имеем $y = (x-1)^2$, $x = 1 \pm \sqrt{y}$.

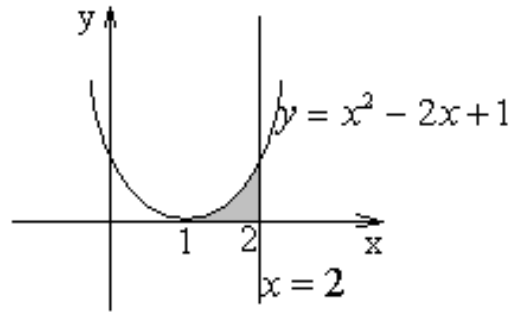


Рисунок 24

Так как область ограничена правой ветвью параболы, то $x = 1 + \sqrt{y}$. Для вычисления объёма используем формулу п. 2.

$$\begin{aligned} V_{Oy} &= \pi \int_0^1 \left(2^2 - (1 + \sqrt{y})^2 \right) dy = \pi \int_0^1 (3 - 2\sqrt{y} - y) dy = \\ &= \pi \left(3y - \frac{4}{3} y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6} \pi. \end{aligned}$$

Пример 50. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг Ox одного витка циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение

Один виток циклоиды соответствует значению параметра $t \in [0; 2\pi]$. Используя формулу п. 2, и учитывая что $dx = x'_t dt = a(1 - \cos t) dt$, имеем

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= a^3 \pi \left(t - 3\sin t + \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 5a^3 \pi^2. \end{aligned}$$

Площадь поверхности вращения

1. Площадь поверхности, которая образована вращением вокруг оси Ox линии $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги этой кривой, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t , соответствующие концам дуги.

Пример 51. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг Ox параболы $y^2 = x$, отсечённой прямой $x = 3$.

Решение

Запишем уравнение параболы в виде $y = f(x)$. Можно считать, что поверхность образована вращением ветви параболы $y = \sqrt{x}$. Тогда $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Вычислим площадь, используя формулу п. 1.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^3 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{4x+1}}{2} dx = 2\pi \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} (4x+1)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (13\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Пример 52. Вычислить площадь поверхности сферы радиуса R .

Решение

Поверхность сферы можно получить в результате вращения вокруг Ox полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, при этом $x \in [-R; R]$. Используя формулу п. 1, вычислим площадь

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4\pi R^2.
 \end{aligned}$$

Пример 53. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг Ox астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение

Дуга AB астроида при вращении вокруг Ox образует половину искомой площади (рис. 25). Найдём площадь поверхности, полученной от вращения дуги AB вокруг Ox , и результат удвоим.

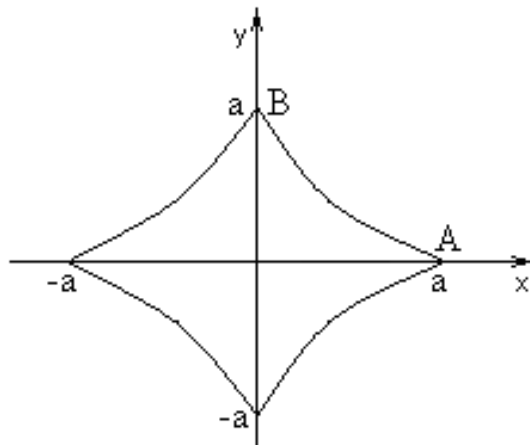


Рисунок 25

Найдём пределы интегрирования. В точке $A(a; 0)$ имеем $x = a \cos^3 t = a$, значит $\cos t = 1$, $t = 0$. В точке $B(0; a)$ имеем $x = a \cos^3 t = 0$, значит $\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$. Вычислим производные

$$\begin{cases} x' = (a \cos^3 t)' = -3a \cos^2 t \sin t \\ y' = (a \sin^3 t)' = 3a \sin^2 t \cos t. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой п. 2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 6\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{5}\pi a^2.\end{aligned}$$

Вся искомая площадь $S = \frac{12}{5}\pi a^2$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью Ox .

(Ответ: $S = 3$.)

Задание 2. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$, $\rho = \frac{3}{\cos \varphi}$.

(Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.)

Задание 3. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = \sqrt{3}y$, $z = 0$.

(Ответ: $V = 8$.)

Задание 4. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг Ox плоской области, ограниченной линиями $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, $y = 0$.

(Ответ: $V_{Ox} = \frac{11}{120}\pi$.)

Задание 5. Вычислить объём тела, которое получается от вращения вокруг оси ординат области, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, соответствующей четверти периода.

(Ответ: $V_{Oy} = \frac{1}{4}\pi^2 - 2\pi$.)

Задание 6. Вычислить длину дуги линии $y = \ln \cos x + 2$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

(Ответ: $L = \ln \sqrt{3}$.)

Задание 7. Вычислить длину дуги линии, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 5 \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Ответ: $L = 5\sqrt{2}$.)

Задание 8. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 2x + 1$, заключенной между точками с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

(Ответ: $S = \frac{112}{3}\pi$.)

2.2 Приложения определённого интеграла к решению физических задач

Давление жидкости

Согласно закону Паскаля сила давления жидкости на элемент площади ds вычисляется по формуле

$$dP = \gamma h ds,$$

где γ – удельный вес жидкости, h – высота столба жидкости над элементом ds .

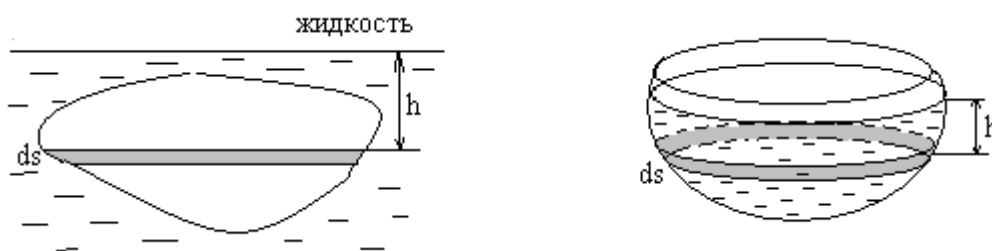


Рисунок 26

1. Давление на вертикально погружённую в жидкость пластинку. Чтобы вычислить давление жидкости на пластинку заданной формы, выберем систему координат. Ось Ox направим вертикально вниз (Ox удобно направить в сторону увеличения искомой величины, так будем делать и в дальнейшем), ось Oy совпадает с поверхностью жидкости (рис. 27).

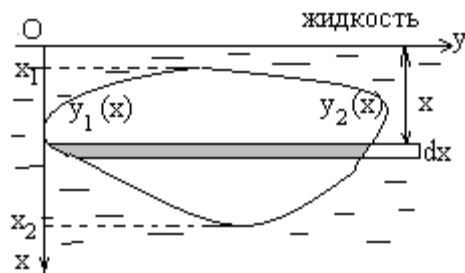


Рисунок 27

Тогда $h = x$, $ds = (y_2(x) - y_1(x))dx$, $dP = \gamma x(y_2(x) - y_1(x))dx$. Значит

$$P = \gamma \int_{x_1}^{x_2} x(y_2(x) - y_1(x))dx,$$

где x_1 , x_2 – значения переменной x , которые соответствуют верхнему и нижнему краю пластинки, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – уравнения линий, которые задают левый и правый край пластинки соответственно.

2. Давление жидкости на стенки сосуда. Чтобы вычислить силу давления жидкости с удельным весом γ на стенки сосуда, выберем систему координат. Ось Ox направим вертикально вниз, ось Oy совпадает с поверхностью жидкости (рис. 28).

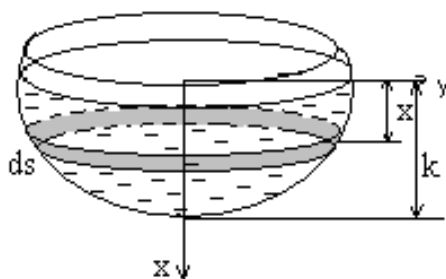


Рисунок 28

Тогда $h = x$, $ds = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$. Значит

$$P = 2\pi\gamma \int_0^k xy\sqrt{1+(y')^2}dx,$$

где k – высота жидкости в сосуде, $y = y(x)$ – уравнение линии, вращением которой вокруг оси Ox образуется поверхность сосуда.

Пример 54. Вычислить давление воды на плотину, сечение которой имеет форму параболы (рис. 29). Удельный вес воды $1 \frac{т}{м^3}$.

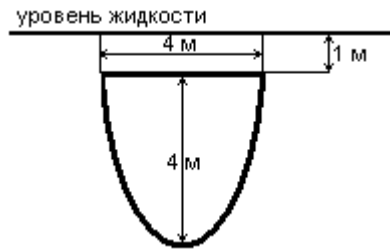


Рисунок 29

Решение

Введем систему координат как показано на рис. 30.

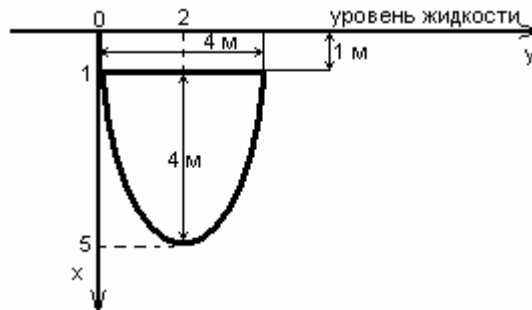


Рисунок 30

Чтобы найти выражения для $y_1(x)$ и $y_2(x)$, составим уравнение параболы. Уравнение параболы, ветви которой направлены в сторону, противоположную положительному направлению оси OX имеет вид: $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, где (x_0, y_0) — координаты вершины параболы. Как видно из рисунка, вершина параболы находится в точке $(5, 2)$. Значит уравнение примет вид $(y - 2)^2 = -2p(x - 5)$. Определим p . Так как парабола проходит через точку $(1, 0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы:

$$\begin{aligned} (0 - 2)^2 &= -2p(1 - 5), \\ 4 &= -2p(-4), \\ p &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Значит, уравнение параболы имеет вид

$$(y - 2)^2 = -(x - 5).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(y-2)^2 &= 5-x, \\ y-2 &= \pm\sqrt{5-x}, \\ y_1 &= -\sqrt{5-x}+2, \quad y_2 = \sqrt{5-x}+2.\end{aligned}$$

Давление воды ($\gamma=1$) на пластину рассчитаем по формуле

$$\begin{aligned}P &= \int_{x_1}^{x_2} x(y_2(x)-y_1(x))dx \\ P &= \int_1^5 x(\sqrt{5-x}+2-(-\sqrt{5-x}+2))dx = \int_1^5 x2\sqrt{5-x}dx = 2\int_1^5 x\sqrt{5-x}dx =\end{aligned}$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5-x}dx &= \left| \begin{matrix} \sqrt{5-x}=t, 5-x=t^2, \\ x=5-t^2, dx=-2tdt \end{matrix} \right| = \int (5-t^2)t(-2tdt) = 2\int (t^4-5t^2)dt = \\ &= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{5t^3}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{(5-x)}^5}{5}-\frac{5\sqrt{(5-x)}^3}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^5 x\sqrt{5-x}dx &= 4\left(\frac{\sqrt{(5-x)}^5}{5}-\frac{5\sqrt{(5-x)}^3}{3}\right)\bigg|_1^5 = \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{(5-5)}^5}{5}-\frac{5\sqrt{(5-5)}^3}{3}-\left(\frac{\sqrt{(5-1)}^5}{5}-\frac{5\sqrt{(5-1)}^3}{3}\right)\right) = \frac{416}{15} \text{ Т.}\end{aligned}$$

Пример 55. Рассчитать давление воды на пластинку, изображённую на рис. 31

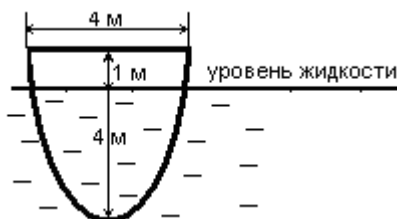


Рисунок 31

Решение

Введем систему координат как показано на рис. 32.

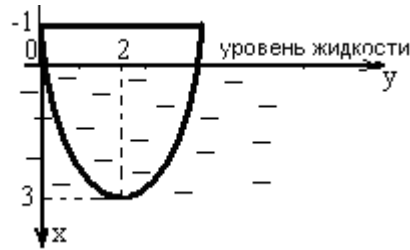


Рисунок 32

Составим уравнение параболы. Вершина в точке (3;2). Значит, уравнение имеет вид

$$x - 3 = 2p(y - 2)^2.$$

Парабола проходит через точку (-1;0). Подставим её координаты в уравнение и найдём $p = -\frac{1}{2}$. Тогда уравнение параболы имеет вид:

$$x - 3 = -(y - 2)^2,$$

или

$$y_1 = 2 - \sqrt{3 - x}, \quad y_2 = 2 + \sqrt{3 - x}.$$

Давление воды ($\gamma = 1$) на пластину рассчитаем по формуле

$$P = \int_{x_1}^{x_2} x(y_2(x) - y_1(x))dx$$

$$P = \int_0^3 x 2\sqrt{3 - x} dx = \frac{24\sqrt{3}}{5} \text{ Т.}$$

Пример 56. Рассчитать давление жидкости с удельным весом γ на пластинку, изображённую на рис. 33.

Решение

Выберем систему координат как показано на рис. 34.

Разделим пластину на более простые части так, чтобы однозначно можно было записать уравнения линий, ограничивающих пластинки справа и слева. Обозначим давление на эти части P_1 и P_2 .

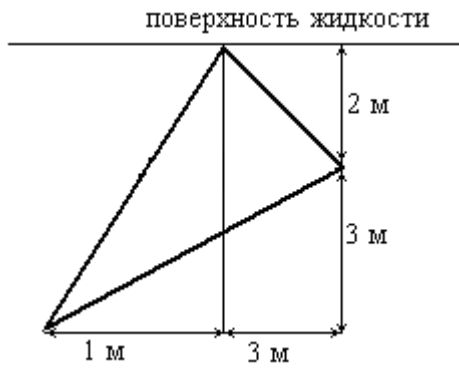


Рисунок 33

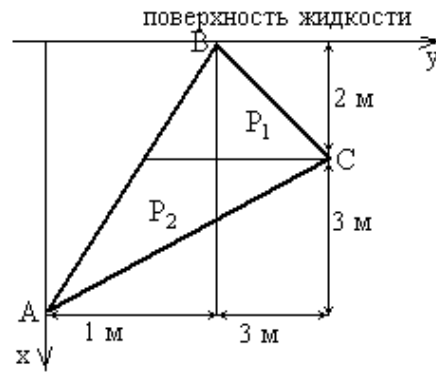


Рисунок 34

Вычислим P_1 . Составим уравнение прямых, проходящих через точки $A(5;0)$, $B(0;1)$ (прямая AB) и $B(0;1)$, $C(2;3)$ (прямая BC). Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда уравнение AB :

$$\frac{x - 5}{0 - 5} = \frac{y - 0}{1 - 0};$$

$$y = 1 - \frac{x}{5}.$$

Уравнение BC :

$$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 1}{3 - 1};$$

$$y = x + 1.$$

Значит

$$y_2(x) - y_1(x) = x + 1 - \left(1 - \frac{x}{5}\right) = \frac{6}{5}x;$$

$$P_1 = \gamma \int_0^2 x \frac{6}{5} x dx = \gamma \frac{6}{5} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{5} \gamma.$$

Вычислим P_2 . Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(5;0)$ и $C(2;3)$ (прямая AC):

$$\frac{x-5}{2-5} = \frac{y-0}{3-0};$$

$$y = -x + 5.$$

Значит

$$y_2(x) - y_1(x) = -x + 5 - \left(1 - \frac{x}{5}\right) = -\frac{4}{5}x + 4;$$

$$P_2 = \gamma \int_2^5 x \left(-\frac{4}{5}x + 4\right) dx = \gamma \left(2x^2 - \frac{4}{15}x^3\right) \Big|_2^5 = \frac{54}{5} \gamma.$$

Тогда

$$P = P_1 + P_2 = \frac{16}{5} \gamma + \frac{54}{5} \gamma = 14 \gamma.$$

Пример 57. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 35). Удельный вес воды $1 \frac{т}{м^3}$.

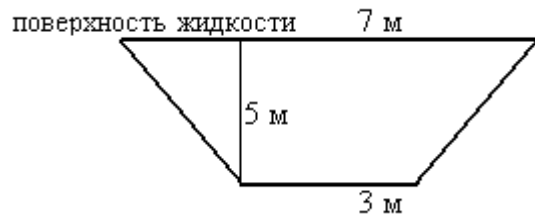


Рисунок 35

Решение

Выберем систему координат как показано на рис. 36. Составим уравнения прямых AD и BC .

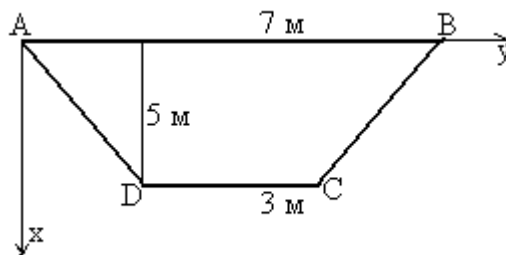


Рисунок 36

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;0)$ и $D(5;2)$ имеет вид (см. предыдущий пример):

$$\frac{x-0}{5-0} = \frac{y-0}{2-0};$$

$$y = \frac{2}{5}x.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $B(0;7)$ и $C(5;5)$ имеет вид:

$$\frac{x-0}{5-0} = \frac{y-7}{5-7};$$

$$y = 7 - \frac{2}{5}x.$$

Вычислим давление на плотину.

$$P = \gamma \int_{x_1}^{x_2} x(y_2(x) - y_1(x)) dx = 1 \int_0^5 x \left(7 - \frac{2}{5}x - \left(\frac{2}{5}x \right) \right) dx =$$

$$= \left(7 \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{325}{6} \text{ Т.}$$

Пример 58. Вычислить давление жидкости (удельный вес γ), на стенки резервуара, представляющего собой полусферу радиуса R . Резервуар заполнен полностью.

Решение

Выберем систему координат как показано на рис. 37.

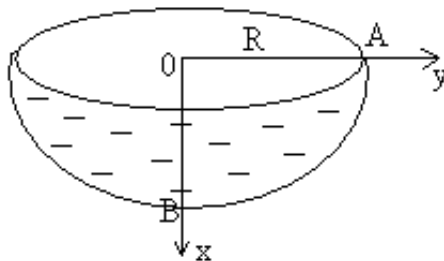


Рисунок 37

Резервуар можно рассматривать как поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox дуги AB . Составим уравнение AB . Дуга представляет собой часть окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом R . Уравнение такой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Отсюда

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как дуга AB проходит через точку $(R;0)$, то уравнение AB

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Находим y' :

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Значит

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\gamma \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi\gamma \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi\gamma \int_0^R xR dx = 2\pi\gamma \frac{R^3}{2} = \pi\gamma R^3. \end{aligned}$$

Пример 59. Вычислить давление воды ($\gamma=1$) на стенки сосуда, представляющего собой конус, обращённый вершиной вниз с радиусом основания 2 м и высотой 5 м. Высота воды в сосуде 3 м.

Решение

Выберем систему координат как показано на рис. 38.

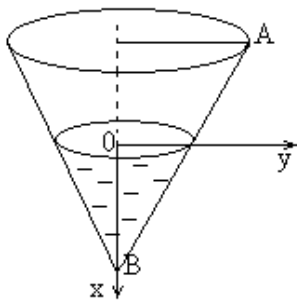


Рисунок 38

Конус можно рассматривать как поверхность, образованную вращением вокруг Ox прямой AB . Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;2)$ и $B(3;0)$.

$$\frac{x-(-2)}{3-(-2)} = \frac{y-2}{0-2},$$

$$y = \frac{-2(x-3)}{5}.$$

Тогда $y' = -\frac{2}{5}$. Значит

$$P = 2\pi \int_0^3 x \frac{-2(x-3)}{5} \sqrt{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 x \frac{-2(x-3)}{5} \frac{\sqrt{29}}{5} dx =$$

$$= -\frac{4\sqrt{29}}{25} \pi \int_0^3 x(x-3) dx = \frac{18\sqrt{29}}{25} \pi.$$

Работа переменной силы

Пусть под действием постоянной силы F материальная точка движется по прямолинейному участку пути s . Работа A силы на этом участке вычисляется по формуле

$$A = F \cdot s.$$

1. *Работа по выкачиванию жидкости.* Чтобы вычислить работу, необходимую для выкачивания жидкости с удельным весом γ из резервуара на высоту h введём систему координат как показано на рис. 39. (ось Ox удобно направить в сторону увеличения искомой величины, так будем делать и в дальнейшем).

Пусть dP — вес слоя жидкости высотой dx . Тогда $dP = \gamma dV = \gamma S(x) dx$, где $S(x)$ — площадь слоя. Пусть dA — элементарная работа, т. е. работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять слой жидкости весом dP на высоту $x+h$.

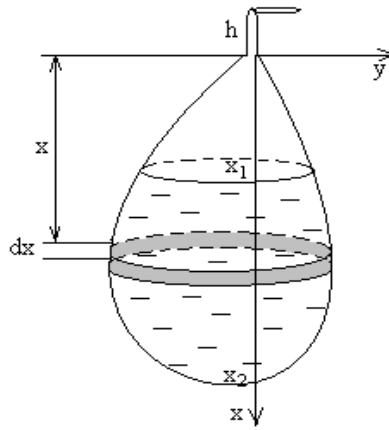


Рисунок 39

Так как слой жидкости весом dP необходимо поднять на высоту $x+h$, то $dA = dP \cdot (x+h) = \gamma(x+h)S(x)dx$. Значит

$$A = \gamma \int_{x_1}^{x_2} (x+h) S(x) dx,$$

где $S(x)$ – площадь сечения резервуара на расстоянии x от начала координат, x_1 , x_2 – значения, соответствующие верхней и нижней границе жидкости.

2. *Работа по подъёму спутника.* Чтобы вычислить работу, совершаемую при подъёме спутника массой m с поверхности Земли на высоту H , воспользуемся законом гравитации

$$F(r) = G \frac{Mm}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, M_z – масса Земли, r – расстояние от центра Земли до спутника. Введём систему координат как показано на рис. 40.

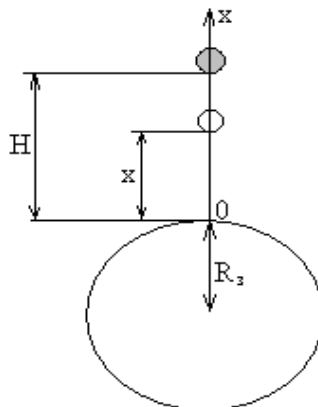


Рисунок 40

Обозначим через $F(x)$ силу, которая действует на спутник на высоте x над Землёй, $a(x)$ – ускорение свободного падения на высоте x . При этом $F(x) = ma(x)$. Если $x = 0$ (спутник находится на поверхности Земли) то $a(x) = g = 9,8 \text{ м/с}^2$, значит $F(0) = ma(0) = mg$. С другой стороны, используя закон гравитации, имеем

$$F(x) = G \frac{mM}{(R_3 + x)^2}, \quad F(0) = G \frac{mM}{R_3^2}.$$

Значит

$$ma(x) = G \frac{mM}{(R_3 + x)^2}, \quad mg = G \frac{mM}{R_3^2}.$$

Из последней формулы находим $M = \frac{gR_3^2}{G}$. Тогда

$$F(x) = G \frac{m}{(R_3 + x)^2} \frac{gR_3^2}{G} = \frac{mgR_3^2}{(R_3 + x)^2},$$

Пусть dA – элементарная работа, т. е. работа, по преодолению силы притяжения $F(x)$ на высоте x . Тогда

$$dA = F(x)dx = \frac{mgR_3^2}{(R_3 + x)^2} dx.$$

Работа, совершаемая при поднятии спутника на высоту H над Землёй, вычисляется по формуле

$$A = \int_0^H \frac{mgR_3^2}{(R_3 + x)^2} dx.$$

3. *Работа по растяжению пружины.* Чтобы вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на s ед. длины (коэффициент жёсткости пружины k), воспользуемся законом Гука $F = ks$, где F – сила, растягивающая пружину.

Чтобы растянуть пружину на длину dx необходимо затратить элементарную работу $dA = F(x)dx$. Тогда

$$A = \int_0^s F(x)dx,$$

где s – удлинение пружины.

4. *Работа по сжатию газа.* Чтобы вычислить работу, затрачиваемую на сжатие газа в цилиндре радиуса R и высотой H , воспользуемся уравнением состояния газа $P_1V_1 = P_2V_2$.

Пусть в начале процесса давление в цилиндре было равным P_0 . Объём цилиндра $V_0 = \pi R^2 H$. Обозначим $P(x)$ – давление газа в цилиндре при перемещении поршня на расстояние x от начального положения (рис. 41).

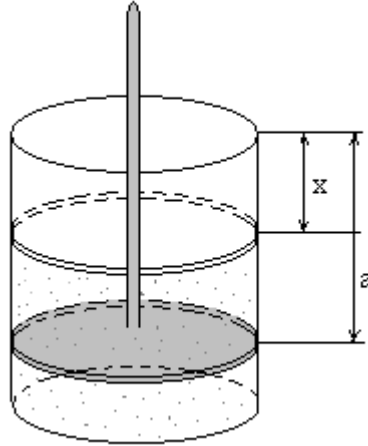


Рисунок 41

При этом объём части цилиндра с газом $V(x) = \pi R^2 (H - x)$. Тогда

$$P_0 V_0 = P(x) V(x), \quad P_0 \pi R^2 H = P(x) \pi R^2 (H - x).$$

Из последнего уравнения находим силу давления газа $P(x)$

$$P(x) = \frac{P_0 \pi R^2 H}{H - x}.$$

При перемещении поршня на расстояние dx затрачивается элементарная работа $dA = P(x) dx = \frac{P_0 \pi R^2 H}{H - x} dx$. Тогда работа по сжатию газа в цилиндрическом резервуаре вычисляется по формуле

$$A = \int_0^a \frac{P_0 \pi R^2 H}{H - x} dx = P_0 \pi R^2 H \int_0^a \frac{dx}{H - x},$$

где a – расстояние, на которое перемещается поршень.

Пример 60. Вычислить работу по выкачиванию жидкости, удельный вес которой γ , из конического резервуара размерами R и H .

Решение

Введём систему координат и обозначения как показано на рис. 42.

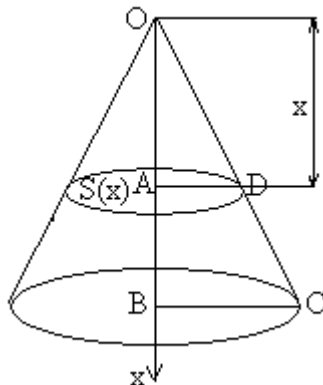


Рисунок 42

Обозначим через $S(x)$ площадь сечения конуса на расстоянии x от начала координат. Найдём радиус сечения $r(x)$. Рассмотрим треугольники BOC и AOD . Из подобия $\frac{AD}{BC} = \frac{OA}{OB}$. Так как $AD = r(x)$, $BC = R$, $OA = x$, $OB = H$, получим

$$\frac{r(x)}{R} = \frac{x}{H}, \quad r(x) = \frac{xR}{H}.$$

Тогда

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi \frac{x^2 R^2}{H^2}.$$

Используя формулу п. 1, вычислим работу

$$A = \int_0^H (x+0) \cdot \pi \frac{x^2 R^2}{H^2} dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \frac{\pi R^2 H^2}{4}.$$

Пример 61. Желоб, перпендикулярное сечение которого является параболой, заполнен жидкостью с удельным весом γ . Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край желоба. Длина желоба 5 м, ширина 4 м, глубина 4 м.

Решение

Введём систему координат как показано на рис. 43.

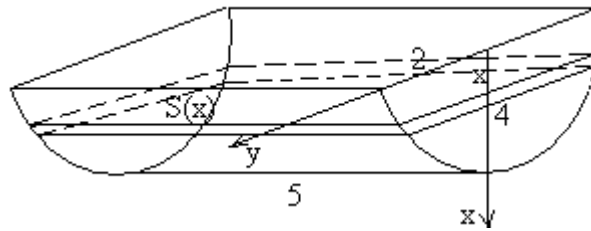


Рисунок 43

Обозначим площадь сечения желоба на расстоянии x от начала координат через $S(x)$. Сечение является прямоугольником, одна из сторон которого $a = 5$ м. Найдём вторую сторону. Уравнение параболы в такой системе координат имеет вид $x = 4 - y^2$ или $y_1 = -\sqrt{4 - x}$, $y_2 = \sqrt{4 - x}$. Значит,

$$b = y_2 - y_1 = \sqrt{4 - x} - (-\sqrt{4 - x}) = 2\sqrt{4 - x}.$$

Вычислим площадь прямоугольника

$$S(x) = a \cdot b = 5 \cdot 2\sqrt{4 - x} = 10\sqrt{4 - x}.$$

Находим работу, используя формулу п.3

$$A = \gamma \int_0^4 10x\sqrt{4 - x} dx = -20\gamma \left(\frac{4}{3} (\sqrt{4 - x})^3 - \frac{1}{5} (\sqrt{4 - x})^5 \right) \Big|_0^4 = \frac{256}{3} \gamma.$$

Пример 62. Цилиндр наполнен газом при атмосферном давлении $103.3 \cdot 10^3$ Па. Считая газ идеальным, определить работу, совершаемую при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившемся внутрь цилиндра (радиус основания 0.4 м, высота 2 м) на 1.5 м.

Решение

Воспользуемся формулой п. 4. Имеем

$$\begin{aligned} A &= \pi \int_0^{1.5} \frac{103.3 \cdot 10^3 \cdot 0.4^2 \cdot 2}{2 - x} dx = \pi \cdot 33.056 \cdot 10^3 \int_0^{1.5} \frac{dx}{2 - x} = \\ &= -\pi \cdot 33.056 \cdot 10^3 \ln |2 - x| \Big|_0^{1.5} = \pi \cdot 33.056 \cdot 10^3 \ln \frac{2}{0.5} = \pi \cdot 33.056 \cdot 10^3 \ln 4 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Пример 63. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0.1 м, если известно, что для удлинения её на 0.01 м необходимо приложить силу в $2 \cdot 10^3$ Н.

Решение

Найдём коэффициент жёсткости пружины. Используя закон Гука $F = ks$, при $F = 2 \cdot 10^3$ и $s = 0.01$ имеем $k = 2 \cdot 10^3 : 0.01 = 2 \cdot 10^5$. Используя формулу п. 3, вычислим работу

$$A = 2 \cdot 10^5 \int_0^{0.1} x dx = 2 \cdot 10^5 \frac{0.1^2}{2} = 10^3 \text{ Дж.}$$

Задачи на движение

1. *Прямолинейное движение.* Пусть материальная точка движется прямолинейно с переменной скоростью, являющейся известной функцией от времени $v = v(t)$. Требуется найти путь, пройденный точкой от момента времени t_1 до t_2 . Рассмотрим элементарный промежуток времени $[t; t + \Delta t]$. За это время точка пройдёт путь $ds = v(t)dt$. Интегрируя по отрезку $[t_1; t_2]$, получим величину пути, пройденного точкой за этот отрезок времени:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

2. *Криволинейное движение.* Пусть траектория движения точки задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Чтобы вычислить путь, пройденный точкой за отрезок времени $[t_1; t_2]$, воспользуемся формулой длины дуги линии, заданной в параметрической форме:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Пример 64. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t^2 + 4t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 3]$.

Решение

Согласно формуле п. 1, имеем

$$s = \int_0^3 (6t^2 + 4t + 1) dt = \left(2t^3 + 2t^2 + t \right) \Big|_0^3 = 56 \text{ м}.$$

Пример 65. Скорость прямолинейного движения точки $v(t) = te^{-\alpha t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые β с от начала движения.

Решение

Путь, пройденный точкой за β с, вычислим по формуле

$$s = \int_0^{\beta} te^{-\alpha t} dt.$$

Интегрируем «по частям»:

$$\begin{aligned} s = \int_0^{\beta} te^{-\alpha t} dt &= \left| \begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-\alpha t} dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \end{array} \right| = -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\beta} - \\ - \int_0^{\beta} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} dt &= -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\beta} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\beta} = -\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha^2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Пример 66. Вычислить среднюю скорость и путь, пройденный точкой за время $t \in [0; 6]$, если закон движения точки

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t. \end{cases}$$

Решение

Чтобы вычислить путь, пройденный точкой, воспользуемся формулой п. 2. Учитывая что

$$\begin{cases} x' = \left((t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \right)' = t^2 \cos t \\ y' = \left((2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \right)' = t^2 \sin t, \end{cases}$$

находим путь, пройденный точкой за $t \in [0; 6]$

$$s = \int_0^6 \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} dt = \int_0^6 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^6 = 72.$$

Вычислим среднюю скорость

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{72}{6} = 12.$$

Вычисление массы. Моменты. Центр масс

Рассмотрим плоскую кривую $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, плотность которой $\rho = \rho(x)$ (рис. 44).

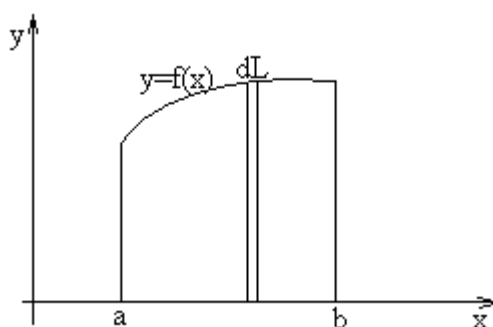


Рисунок 44

Выделим элемент дуги кривой dL .

1. *Масса* этого участка кривой $dm = \rho(x) dL$. Используя формулу $dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, имеем

$$m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

2. *Моментом инерции* материальной точки A относительно точки (прямой) вращения называется величина

$$I = mr^2,$$

где m – масса точки A , r – расстояние до точки (прямой) вокруг которой происходит вращение.

Согласно определению момент инерции плоской кривой относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \int_a^b \rho(x) (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

а моменты инерции относительно координатных осей Ox и Oy – по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

3. *Статическим моментом* точки A относительно точки (прямой) называется величина

$$M = mr,$$

где m – масса точки A , r – расстояние до точки (прямой) относительно которой вычисляется момент.

Согласно определению статический момент плоской кривой относительно начала координат вычисляется по формуле

$$M_0 = \int_a^b \rho(x) \sqrt{(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

а статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy – по формулам

$$M_x = \int_a^b \rho(x) y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

4. Из соотношений $M_x = my_C$ и $M_y = mx_C$ находим координаты *центра масс* $C(x_C; y_C)$

$$x_C = \frac{\int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx}, \quad y_C = \frac{\int_a^b \rho(x) y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx}.$$

Рассмотрим плоскую область, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, плотность которой $\rho = \rho(x)$ (рис. 45).

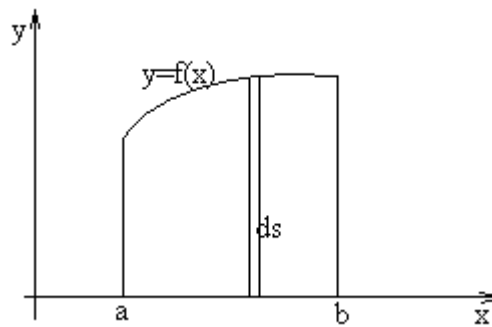


Рисунок 45

Выделим элемент площади ds .

5. *Масса* этого участка области $dm = \rho(x)ds$. Используя геометрическую интерпретацию определённого интеграла, имеем

$$m = \int_a^b \rho(x) f(x) dx.$$

6. Согласно определению (п. 2), *момент инерции* плоской области относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \int_a^b \rho(x) (x^2 + f^2(x)) f(x) dx,$$

а моменты инерции относительно координатных осей Ox и Oy – по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^3(x) dx, \quad I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 f(x) dx.$$

7. Согласно определению (п. 3), *статический момент* плоской области относительно начала координат вычисляется по формуле

$$M_0 = \int_a^b \rho(x) \sqrt{(x^2 + f^2(x))} f(x) dx,$$

а статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy – по формулам

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x) x f(x) dx.$$

8. Координаты *центра масс* $C(x_c; y_c)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int_a^b x \rho(x) f(x) dx}{\int_a^b \rho(x) f(x) dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx}{\int_a^b \rho(x) f(x) dx}.$$

Пример 67. Вычислить момент инерции и статический момент однородной окружности ($\rho = \text{const}$) $x^2 + y^2 = R^2$ относительно центра.

Решение

Так как $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, имеем

$$I_0 = 4\rho \int_0^R R^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4\rho R^3 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi \rho R^3,$$

$$M_0 = 4\rho \int_0^R R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4\rho R^2 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi \rho R^2.$$

Пример 68. Вычислить координаты центра масс однородной пластинки ($\rho = \text{const}$), ограниченной кривыми $y = 5 - x^2$, $y = 0$.

Решение

Построим заданную область (рис. 46).

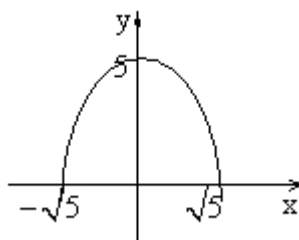


Рисунок 46

Из однородности и симметричности данной фигуры относительно Ox следует, что $x_c = 0$. Для определения y_c воспользуемся формулами п. 8. Имеем

$$y_c = \frac{\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5-x^2)^2 dx}{\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5-x^2) dx} = \frac{\left(25x - \frac{10}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}}{\left(5x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{20}{3}\sqrt{5}}{\frac{20}{3}\sqrt{5}} = 1.$$

Пример 69. Вычислить массу и координаты центра масс плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$, если плотность $\rho(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение

Для вычисления массы воспользуемся формулой п. 1. Учитывая что

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = x^{1/2},$$

имеем

$$m = \int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+\left(x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^1 (1+x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Чтобы вычислить координаты центра масс кривой найдём интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1+\left(x^{1/2}\right)^2} dx &= \int_0^1 x(1+x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}, \\ \int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \sqrt{1+\left(x^{1/2}\right)^2} dx &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^{3/2}(1+x) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{7}x^{7/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{16}{35}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами п. 4

$$x_c = \frac{5}{6} : \frac{3}{2} = \frac{10}{18}, \quad y_c = \frac{16}{35} : \frac{3}{2} = \frac{32}{105}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить силу давления воды на пластину (полукольца, рис. 47), вертикально погружённую в воду, считая удельный вес воды $\gamma = 1$.

(Ответ: 46.8 т.)



Рисунок 47

Задание 2. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = te^{-0,01t} \text{ м/с}$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

(Ответ: 10^4 м.)

Задание 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, представляющего собой правильную треугольную пирамиду со стороной основания 2 м и высотой 5 м, обращённую вершиной вверх.

(Ответ: 10.8 Дж.)

Задание 4. Определить работу, совершаемую при подъёме спутника с поверхности Земли на высоту 600 м. Масса спутника 7 т. (Радиус Земли $6.38 \cdot 10^6 \text{ м}$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$).

(Ответ: $38.39 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$)

Задание 5. Вычислить силу давления жидкости (удельный вес $\gamma = 1$) на стенки сосуда, представляющего собой конус с радиусом основания 2 м, высотой 5 м, обращённый вершиной вниз. Сосуд заполнен полностью.

(Ответ: $2\sqrt{29}\pi$.)

Задание 6. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$, заключённой между точками $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы.

(Ответ: $\frac{19}{3}$.)

Задание 7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 3$, $y = 0$, если плотность в каждой точке $\rho(x) = x$.

(Ответ: $\frac{18}{5}\sqrt{3}$.)

Задание 8. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.

(Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.)

2.3 Приложения определённого интеграла к решению экономических задач

Коэффициент Джини

Рассмотрим зависимость y – процента доходов населения от процента x , имеющего эти доходы населения, т.е., функцию $y = f(x)$.

С помощью функции $f(x)$ (кривая Лоренца, рис. 48) можно оценить степень неравенства в распределении доходов населения.

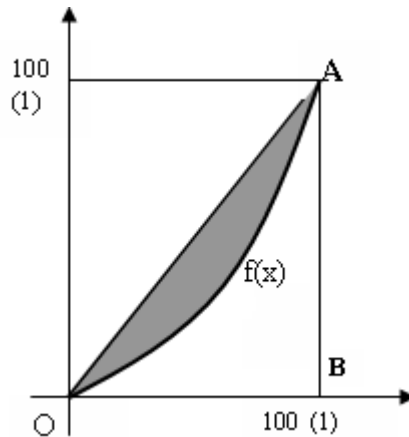


Рисунок 48

При равномерном распределении доходов кривая $f(x)$ вырождается в биссектрису OA . Площадь сегмента OfA , отнесенная к площади треугольника OAB называется коэффициентом Джини. Этот коэффициент характеризует степень неравенства в распределении доходов населения:

если коэффициент Джини не превышает 0.33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному;

если коэффициент Джини находится в пределах от 0.33 до 0.67, то распределение доходов считают неравномерным;

если коэффициент Джини более 0.67, то распределение доходов можно считать существенно неравномерным.

Пример 70. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран, кривая Лоренца может быть описана уравнением

$y = \frac{3}{2-x} - \frac{5}{3}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение

Площадь сегмента O_fA , отнесённая к площади треугольника OAB (рис. 49) называется коэффициентом Джини.

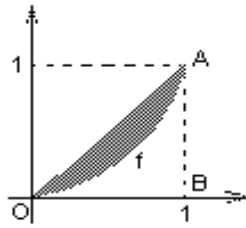


Рисунок 49

$$k = \frac{S_{O_fA}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{S_{\triangle OAB} - S_{O_fAB}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAB}} - \frac{S_{O_fAB}}{S_{\triangle OAB}} = 1 - \frac{S_{O_fAB}}{S_{\triangle OAB}} = 1 - \frac{S_{O_fAB}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2S_{O_fAB},$$

(т. к. $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$). Вычислим площадь O_fAB с помощью определённого интеграла:

$$\begin{aligned} S_{O_fAB} &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2-x} - \frac{5}{3} \right) dx = 3 \int_0^1 \frac{dx}{2-x} - \frac{5}{3} \int_0^1 dx = -3 \ln|2-x| \Big|_0^1 - \frac{5}{3} x \Big|_0^1 = \\ &= -3(\ln 1 - \ln 2) - \frac{5}{3} = 3 \ln 2 - \frac{5}{3} \approx 3 \cdot 0.69 - \frac{5}{3} = 0.403; \\ k &= 1 - 2 \cdot 0.403 = 0.194. \end{aligned}$$

Так как коэффициент Джини не превышает 0.33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному.

Объём выпускаемой продукции. Среднее значение функции.

1. Известно, что производительность труда в течение рабочего дня изменяется. Пусть изменение производительности труда определяется функцией $f(t)$, где t – отрезок времени, отсчитываемый от начала рабочего дня, а $f(t)$ – производительность труда в данный момент. Тогда величина

$$U = \int_0^T f(t) dt$$

есть *объём* выпускаемой продукции за время $[0; T]$.

2. Часто при решении практических задач приходится находить *средние значения функции*, например, средняя производительность труда, средние издержки производства, средняя мощность двигателя и т.д. В этих случаях используют теорему о среднем значении (интеграла).

Теорема о среднем. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдется такое значение $c \in [a; b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = L.$$

Число L называется средним значением функции $f(t)$ на отрезке $[a; b]$.

Пример 71. В течение рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t) = -t^2 + 6t + 7$. Найти:

- а) Объём выпускаемой продукции за время $[0; 4]$.
- б) Среднее значение производительности за время $[0; 4]$ и моменты t_0 и t_1 , в которые достигаются среднее и максимальное значения производительности;
- в) Результат пояснить графически.

Решение

а) Объём выпускаемой продукции за время $[0; T]$ вычислим используя формулу п.1.

$$U = \int_0^4 (-t^2 + 6t + 7) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + 7t \right) \Big|_0^4 = \frac{-4^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2} + 7 \cdot 4 - 0 = \frac{164}{3}.$$

б) Среднее значение производительности $f(t)$ за время $[0; T]$ вычислим используя формулу п. 2.

$$F(c) = \frac{1}{4} \int_0^4 (-t^2 + 6t + 7) dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{164}{3} = \frac{41}{3}.$$

Чтобы найти момент времени t_0 в который достигается среднее значение производительности, решим уравнение:

$$\begin{aligned} -t^2 + 6t + 7 &= \frac{41}{3} \quad | \cdot 3, \\ 3t^2 - 18t + 20 &= 0, \\ t_1 &= \frac{18 - \sqrt{84}}{6} \approx 1.5 \quad t_2 = \frac{18 + \sqrt{84}}{6} \approx 4.5 \notin [0; 4]. \end{aligned}$$

Значит, $t_0 \approx 1.5$, причём $f(t_0) = \frac{41}{3}$.

Чтобы найти момент времени t_1 в который достигается максимальное значение производительности, найдём вершину параболы $f(t) = -t^2 + 6t + 7$ (максимальное значение будет достигаться именно в вершине, т. к. ветви параболы направлены вниз):

$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

в) Для построения параболы найдём вторую координату вершины:

$$f(t_s) = f(3) = -(3)^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16.$$

Значит, вершина параболы находится в точке $(3; 16)$. Найдём точки пересечения параболы с осью Ot :

$$\begin{aligned} -t^2 + 6t + 7 &= 0; \\ D &= 64 \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 7. \end{aligned}$$

Построим график функции производительности (рис. 50).

Графически видно, что площадь заштрихованной фигуры, выражающая собой объём выпускаемой продукции за 4 часа, равна площади прямоугольника $OABC$, высотой которого является отрезок прямой, равный среднему значению производительности труда за первые 4 часа работы.

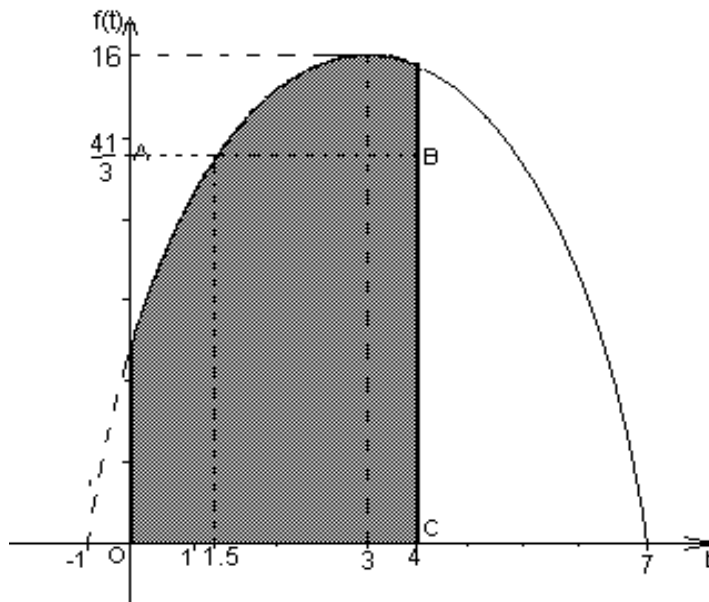


Рисунок 50

Пример 72. Найти среднее значение издержек $K = 2x^2 + 12x + 7$, если объём продукции x изменяется от 1 до 3 единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Результат пояснить графически.

Решение

Среднее значение издержек $K(x)$, если объём продукции x изменяется от m до n единиц, вычислим, используя формулу п. 2

$$l = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (2x^2 + 12x + 7) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 7x \right) \Big|_1^3 =$$

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{2 \cdot 27}{3} + \frac{12 \cdot 9}{2} + 7 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{12}{2} + 7 \right) \right) = \frac{134}{3}.$$

Чтобы найти объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение, решим уравнение:

$$2x^2 + 12x + 7 = \frac{134}{3},$$

$$6x^2 + 36x + 21 = 134, \quad 6x^2 + 36x - 113 = 0,$$

$$x_1 = \frac{-36 - \sqrt{4008}}{12} \approx -8.3 \notin [1; 3] \quad x_2 = \frac{-36 + \sqrt{4008}}{12} \approx 2.3.$$

Поясним результат графически. График функции $K = 2x^2 + 12x + 7$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Найдём вершину параболы:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3,$$

$$K(x_0) = K(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 7 = -11.$$

Построим параболу на отрезке от 1 до 3 (рис. 51):

$$K(1) = 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 7 = 21, \quad K(3) = 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 7 = 61.$$

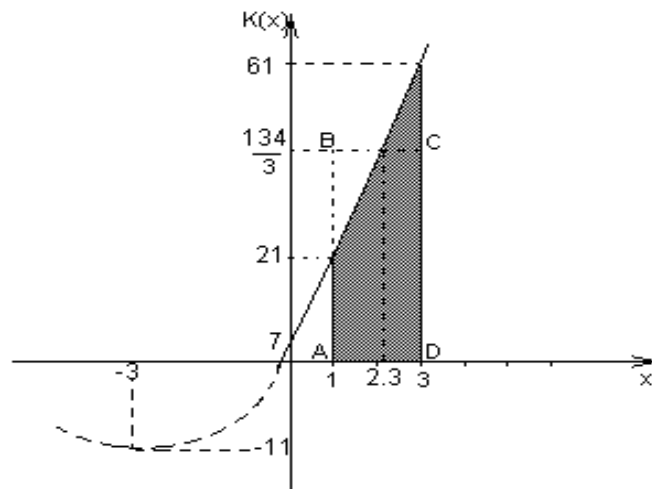


Рисунок 51

На графике видно, что площадь прямоугольника $ABCD$, стороной которого является отрезок $[1;3]$, а высотой – среднее значение функции на этом отрезке, равна площади заштрихованной области.

Дисконтированный доход

При изучении экономической эффективности капитальных вложений встречаются задачи, связанные с определением начальной суммы по ее конечной величине, полученной через t лет при годовом проценте p (процентная ставка). Такая задача называется *дисконтированием*. Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ при удельной норме процента, равной $i = \frac{P}{100}$. Процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt.$$

Если базовое капиталовложение составляет N (усл. ед.) и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на m (усл. ед.), то

$$f(t) = N + mt.$$

Пример 73. Определить дисконтированный доход K за 4 года при процентной ставке $p=6\%$, если первоначальные капиталовложения составили 12 тыс. грн., и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 1 тыс. грн. Найти $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T)$.

Решение

Ведём функцию $f(t) = N + mt$, где N – начальные капиталовложения, m – сумма на которую намечается ежегодно увеличивать капиталовложения. Значит, $f(t) = 12 + t$.

Дисконтированный доход за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it} dt,$$

$$\text{где } i = \frac{p}{100} = \frac{6}{100} = 0.06.$$

Значит,

$$\begin{aligned} K &= \int_0^4 (12 + t)e^{-0.06t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 12 + t, \quad dv = e^{-0.06t} dt \\ du = dt, \quad v = \frac{1}{-0.06} e^{-0.06t} \end{array} \right| = \\ &= (12 + t) \frac{1}{-0.06} e^{-0.06t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{-0.06} e^{-0.06t} dt = \\ &= (12 + t) \frac{1}{-0.06} e^{-0.06t} \Big|_0^4 - \frac{1}{(0.06)^2} e^{-0.06t} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{-16}{0.06} e^{-0.24} + \frac{12}{0.06} - \frac{1}{(0.06)^2} e^{-0.24} + \frac{1}{(0.06)^2} \approx 49.5. \end{aligned}$$

Найдём величину $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T)$:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} K(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left((12 + t) \frac{1}{-0.06} e^{-0.06t} \Big|_0^T - \frac{1}{(0.06)^2} e^{-0.06t} \Big|_0^T \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left((12 + T) \frac{1}{-0.06} e^{-0.06T} - (12 + 0) \frac{1}{-0.06} e^{-0.06 \cdot 0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(0.06)^2} e^{-0.06T} - \frac{1}{(0.06)^2} e^{-0.06 \cdot 0} \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-0.06T} = 0$ и $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-0.06 \cdot 0} = 1$ получаем:

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} K(T) &= \left(\left(0 - 12 \frac{1}{-0.06} \cdot 1 \right) - \left(0 - \frac{1}{(0.06)^2} \cdot 1 \right) \right) = \\ &= \frac{12}{0.06} + \frac{1}{(0.06)^2} \approx 477.8.\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Кривая Лоренца, описывающая распределение доходов в одной из стран, задаётся уравнением $y = 2^x - 1$. Вычислить коэффициент Джини.

(Ответ: $k=0.12$.)

Задание 2. В течение рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t) = 3t^2 + 6t - 1$. Найти объём выпускаемой продукции за время $[1;3]$.

(Ответ: 48.)

Задание 3. Найти среднее значение издержек $K = 6x^2 + 8x - 3$, если объём продукции x меняется от 2 до 5 единиц.

(Ответ: 103.)

Задание 4. Определить дисконтированный доход K за 3 года при процентной ставке $P=8\%$, если первоначальные капиталовложения составили 18 тыс. грн., и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 2 тыс. грн. Найти $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T)$.

(Ответ: 55.5; 537.5.)

Литература: [5, гл. 11, § 9,10; 7, р. 2, гл. III; 9, р. 10, § 10.1, 10.2].

3 ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для решения технических задач с применением теории дифференциальных уравнений предлагается следующая последовательность действий:

- 1) подробный разбор условий задачи, введение обозначений и составление расчетной схемы, поясняющей ее суть;
- 2) составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса;
- 3) интегрирование составленного уравнения и определение общего решения этого уравнения;
- 4) определение частного решения задачи на основании данных начальных условий;
- 5) в случае необходимости определение вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и др.) с использованием для этой цели дополнительных условий;
- 6) вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин;
- 7) анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

В зависимости от условия задачи некоторые из этих этапов решения могут отсутствовать.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

К решению дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными приводятся очень многие практические задачи.

2. Однородные и линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ —однородная функция, то есть $f(kx, ky) = f(x, y)$.

С помощью замены $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$, $y' = u'x + u$), где $u = u(x)$ —новая неизвестная функция, однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, имеющее вид

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Для его решения применяется подстановка $y = u \cdot v$ ($y' = u'v + uv'$), где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые неизвестные функции.

3.1 Геометрические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений

В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются геометрическое истолкование производной и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой).

Геометрический смысл производной. Если $y = f(x)$ изображена своим графиком – кривой в декартовых координатах (рис. 52), то $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной к кривой в ее точке $M_0(x_0; y_0)$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

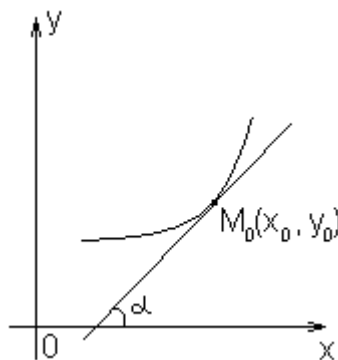


Рисунок 52

Пример 74. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(2, 0)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой пропорционален квадрату абсциссы точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$.

Решение

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной $y'(x)$ функции $y(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y(x_0))$. Из условия задачи имеем $y' = kx^2$ или $y' = 3x^2$. Интегрируя обе части дифференциального уравнения, получим его общее решение

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Известно, что линия проходит через точку $M_0(2, 0)$, т. е. начальное условие имеет вид $y(2) = 0$. Подставляя значения $x = 2$ и $y = 0$ в общее решение, найдем C :

$$0 = 2^3 + C \Rightarrow C = -8$$

и запишем уравнение искомой кривой:

$$y = x^3 - 8.$$

Пример 75. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(1, 4)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой обратно пропорционален ординате точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 2$.

Решение

Исходя из условия задачи,

$$y' = \frac{2}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение, получим:

$$y dy = 2 dx; \quad \int y dy = 2 \int dx + C_1; \quad \frac{y^2}{2} = 2x + C_1; \quad y^2 = 4x + C.$$

Используя координаты точки, через которую проходит кривая, запишем начальное условие: $y(1) = 4$ и найдем C : $16 = 4 + C$, откуда $C = 12$ и уравнение кривой имеет вид $y^2 = 4x + 12$ или $y^2 = 4(x + 3)$. Кривая является параболой с вершиной в точке $A(-3, 0)$, осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо (рис. 53).

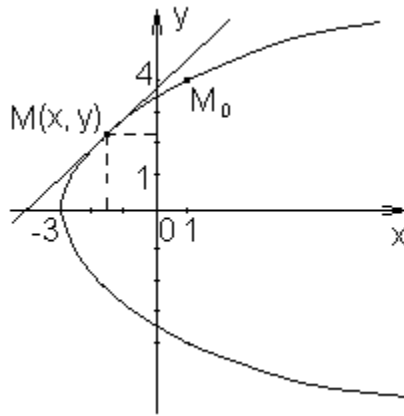


Рисунок 53

Пример 76. Найти линию, проходящую через точку $M_0(1,2)$, если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении 2:1 (считая от оси Oy).

Решение

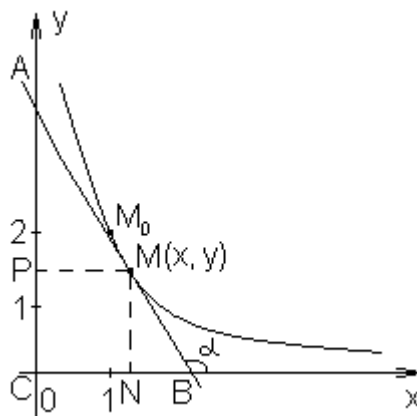


Рисунок 54

Пусть $M(x, y)$ – текущая точка кривой $y = y(x)$. Угол между касательной и положительным направлением оси Ox обозначим α , тогда $\operatorname{tg} \alpha = y'$. В прямоугольном треугольнике MBN $\angle MBN = 180^\circ - \alpha$, $\operatorname{tg} \angle MBN = \frac{|MN|}{|NB|}$. $|MN| = y$, $|NB|$ найдем, рассматривая треугольники MBN и AMP , которые подобны по трем углам:

$$\frac{|NB|}{|PM|} = \frac{|MB|}{|AM|}; \quad \frac{|NB|}{|PM|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |NB| = \frac{|PM|}{2} = \frac{x}{2}.$$

Подставив найденные значения в формулу для вычисления тангенса угла MBN , получим:

$$\operatorname{tg}(180 - \alpha) = \frac{y}{x/2}; \quad -\operatorname{tg}\alpha = \frac{2y}{x}; \quad -y' = \frac{2y}{x}; \quad y' = -\frac{2y}{x}.$$

Разделяем переменные и интегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln|y| = -2\ln|x| + C_1.$$

Таким образом, $y = \frac{C}{x^2}$ – уравнение семейства кривых, обладающих заданным свойством. Подставляя в это выражение начальное условие $y(1) = 2$, т. е. координаты точки M_0 , вычислим C :

$$2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2;$$

и запишем уравнение искомой кривой:

$$y = \frac{2}{x^2}.$$

Пример 77. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1,0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

Решение

Обозначим произвольную точку кривой $M(x, y)$. В прямоугольном треугольнике MON $\angle MON$ обозначим α (рис. 55). Учитывая, что этот угол является углом между касательной к кривой и осью Ox , $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Для прямоугольного треугольника MPN запишем равенство:

$$\operatorname{tg}\angle MNP = \frac{|MP|}{|PN|}.$$

Найдем угол MNP из треугольника MON : $\angle MNP = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$.
 $|MP| = y$; $|PN| = |ON| - |OP| = x + 2 - x = 2$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{y}{2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{y}{2}; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{y}; \quad y' = \frac{2}{y}.$$

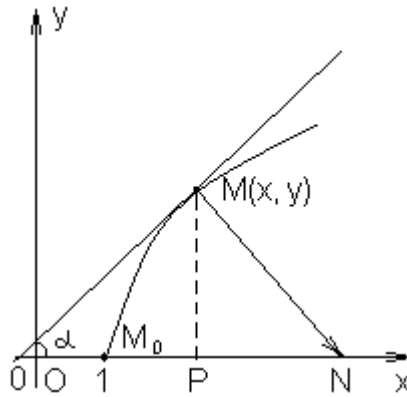


Рисунок 55

Разделяя переменные и интегрируя дифференциальное уравнение, запишем его общее решение:

$$y^2 = 4x + C.$$

Точка $M_0(1,0)$ принадлежит искомой кривой, т. е.

$$y(1) = 0, \quad 0 = 4 + C \Rightarrow C = -4$$

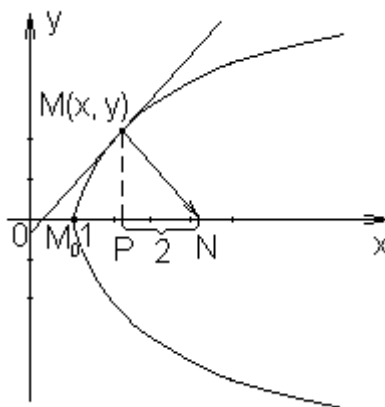


Рисунок 56

и уравнение кривой принимает вид $y^2 = 4(x-1)$. Найденная кривая – парабола с вершиной в точке $M_0(1,0)$, осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо (рис. 56).

Пример 78. Найти линию, проходящую через точку $M_0(1,3)$ и обладающую свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Ox равную -2 .

Решение

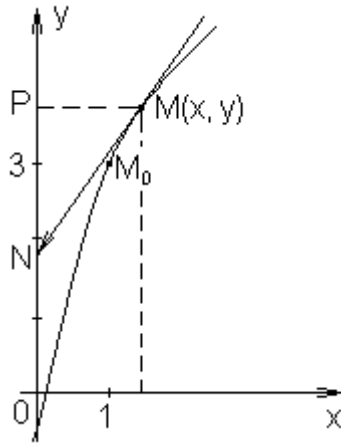


Рисунок 57

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, $M^*(X, Y)$ – произвольная точка касательной. Тогда уравнение касательной к кривой в точке $M(x, y)$ имеет вид:

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

Точка $N(0, Y_N)$ принадлежит касательной (рис. 57); подставляя ее координаты в уравнение касательной, находим

$$Y_N - y = y'(x)(0 - x) \Rightarrow Y_N = y - xy'.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{PN} = y_N - y_p = Y_N - y$ и по условию $\overrightarrow{PN} = -2$, тогда

$$Y_N - y = -2 \Rightarrow Y_N = y - 2.$$

Приравняв выражения для Y_N , получим дифференциальное уравнение:

$$y - xy' = y - 2 \quad \text{или} \quad y' = \frac{2}{x}.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$y = 2 \int \frac{dx}{x} + \ln C; \quad y = 2 \ln x + \ln C.$$

Из общего решения найдем линию, проходящую через точку $M_0(1,3)$:

$$3 = 2 \ln 1 + \ln C \Rightarrow \ln C = 3.$$

Окончательно, уравнение искомой кривой имеет вид

$$y = 2 \ln x + 3.$$

Пример 79. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты конечной точки дуги.

Решение

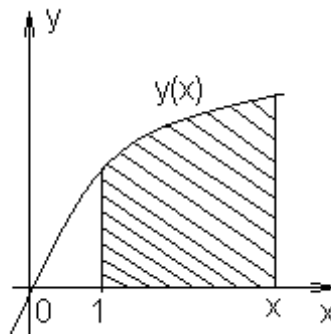


Рисунок 58

Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t) dt = (y(x))^3.$$

Дифференцируя это равенство по x , получаем дифференциальное уравнение $y = 3y^2 y'$, или

$$y' = \frac{1}{3y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, найдем общее решение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y}; \quad ydy = \frac{dx}{3}; \quad \int ydy = \frac{1}{3} \int dx; \quad \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}x + C_1; \quad y^2 = \frac{2}{3}x + C.$$

Учитывая начальное условие $y(0)=0$, получим $C=0$ и запишем уравнение кривой, проходящей через начало координат:

$$y^2 = \frac{2}{3}x.$$

Пример 80. Найти кривую, проходящую через точку $A(0;1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, – равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

Решение

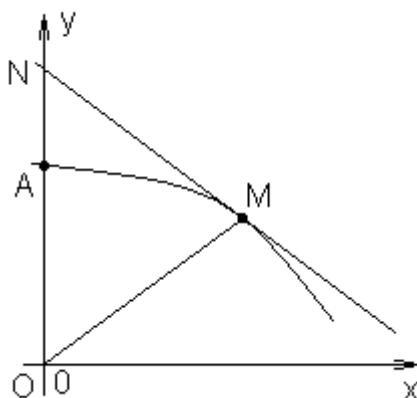


Рисунок 59

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой. Проведем касательную MN в точке M кривой до пересечения с осью Oy в точке N (рис. 59). Согласно условию, должно выполняться равенство $|ON|=|OM|$. Но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|ON|$ найдем из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, полагая $X = 0$, т. е. $Y = |ON| = y - xy'$.

Итак, приходим к однородному уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'.$$

Полагая $y = ux$, после замены и разделения переменных получим:

$$\sqrt{x^2 + u^2 x^2} = ux - x(u'x + u); \quad x^2 \frac{du}{dx} = -x\sqrt{1 + u^2}; \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln C - \ln x \quad \text{или} \quad u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C}{x}.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получим

$$x^2 = C(C - 2y)$$

(семейство парабол, осью которых является ось Oy).

Подставляя координаты точки A в найденное общее решение, получим $0 = C(C - 2)$; из двух значений $C = 0$ и $C = 2$ подходит лишь второе, поскольку при $C = 0$ парабола вырождается в ось Oy . Итак, искомой кривой является парабола $x^2 = 4(1 - y)$.

Пример 81. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

Решение

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, $M^*(X, Y)$ – произвольная точка касательной. ON – отрезок, отсекаемый касательной, проведенной в точке M кривой от оси ординат (рис. 60). По условию $|ON|^2 = xy$ или $|ON| = \pm\sqrt{xy}$, а так как $N(0, Y_N)$, получим:

$$Y_N = \pm\sqrt{xy}.$$

С учетом введенных обозначений, запишем уравнение касательной к кривой в точке $M(x, y)$:

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

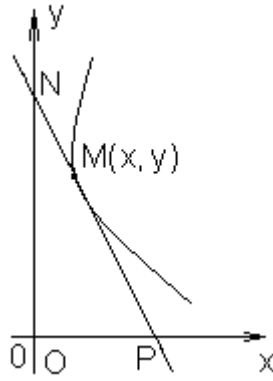


Рисунок 60

В точке $N(0, Y_N)$ уравнение касательной примет вид

$$Y_N - y = -xy',$$

откуда

$$Y_N = y - xy'.$$

Приравнявая выражения для Y_N , получим дифференциальное уравнение

$$y - xy' = \pm\sqrt{xy} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y}{x}},$$

которое является однородным. Заменяя y на ux , разделяя переменные и интегрируя, найдем общее решение уравнения:

$$u'x + u = u \pm \sqrt{u}; \quad u'x = \pm\sqrt{u}; \quad \frac{dx}{x} = \pm \frac{du}{\sqrt{u}}; \quad \ln x = \pm 2\sqrt{u} + \ln C \Rightarrow x = Ce^{\pm 2\sqrt{u}}.$$

Выполнив обратную подстановку $u = \frac{y}{x}$, получим уравнение семейства кривых, обладающих заданным свойством:

$$x = Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}.$$

Пример 82. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $P(1,2)$ и обладающей следующим свойством: площадь треугольника, образованного радиус-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2.

Решение

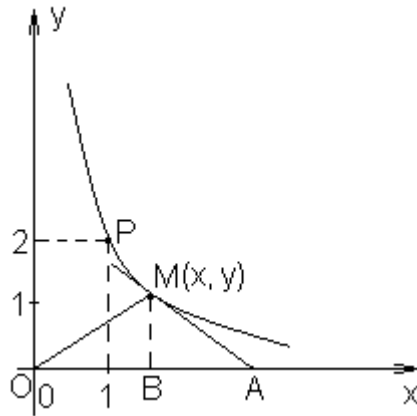


Рисунок 61

Введем следующие обозначения: $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, $M^*(X, Y)$ – произвольная точка касательной. Площадь треугольника OMA (рис. 61) определяется формулой

$$S_{OMA} = \frac{1}{2} |OA| |MB|.$$

$|MB| = y$, $|OA|$ найдем, записав уравнение касательной

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

и подставив в него координаты точки $A: A(X_A, 0)$, тогда

$$-y = y'(X_A - x); \quad X_A = x - \frac{y}{y'}.$$

Учитывая, что $|OA| = X_A$ и по условию $S_{OMA} = 2$, запишем следующее выражение для S_{OMA} :

$$S_{OMA} = \frac{1}{2} y \left(x - \frac{y}{y'} \right) = 2.$$

Преобразуем дифференциальное уравнение и определим его вид:

$$y\left(x - \frac{y}{y'}\right) = 4; \quad \frac{y}{y'} = x - \frac{4}{y}; \quad y' = \frac{y^2}{xy - 4}; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{xy - 4}{y^2}; \quad x' - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2},$$

т. е. получено уравнение первого порядка, линейное относительно функции $x = x(y)$. Решаем его с помощью подстановки $x = uv$ ($u = u(y)$, $v = v(y)$).

Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{4}{y^2}; \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{4}{y^2} \Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{v}{y} = 0; \\ u'v = -\frac{4}{y^2}; \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}; \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}; \quad \ln v = \ln y; \quad v = y;$$

$$(2) \quad u'y = -\frac{4}{y^2}; \quad u' = -\frac{4}{y^3}; \quad u = -\int \frac{4}{y^3} dy + C; \quad u = \frac{2}{y^2} + C;$$

$$x = uv = y\left(\frac{2}{y^2} + C\right) = \frac{2}{y} + Cy.$$

Искомая кривая проходит через точку $P(1,2)$, т. е. $x(2) = 1$, поэтому $1 = 2C + 1$, $C = 0$. Следовательно, ее уравнение $x = \frac{2}{y}$ или $xy = 2$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(1,3)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой обратно пропорционален абсциссе точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 5$.

(Ответ: $y = 5 \ln x + 3$.)

Задание 2. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(0,3)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой пропорционален произведению абсциссы и ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = -2$.

(Ответ: $y = 3e^{-x^2}$.)

Задание 3. Найти кривую, для которой отрезок, отсекаемый нормалью на оси ординат в какой-либо точке кривой, равен расстоянию от начала координат до этой точки.

(Ответ: $x^2 = C(2y + C)$.)

Задание 4. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

(Ответ: $y = C(x^2 + y^2)$.)

Задание 5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1,0)$, если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна $\frac{3}{2}$.

(Ответ: $y = \frac{1}{x} - x^2$.)

3.2 Физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения теплообмена тела с окружающей средой

Предположим, что $T(t)$ – температура тела в момент времени t , а T_{cp} – температура окружающей среды. Требуется найти закон изменения температуры тела от времени t . По известному закону Ньютона бесконечно малое количество теплоты dQ , отданное телом в течение бесконечно малого промежутка времени dt , пропорционально разности температур тела и окружающей среды, следовательно,

$$dQ = -k(T - T_{cp})dt, \quad T > T_0.$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности; знак “–” поставлен потому, что потеря тепла dQ – величина отрицательная. Но, с другой стороны $Q = mc(T - T_0)$, где m – масса тела; c – теплоемкость тела. Допуская, что теплоемкость – величина, не зависящая от температуры, найдем $dQ = mc dT$. Следовательно,

$$mc dT = -k(T - T_{cp})dt$$

или, разделив правую и левую части равенства на mc , получим дифференциальное уравнение остывающего тела в виде

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc}(T - T_{cp}).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{T - T_{cp}} = -\frac{k}{mc} dt.$$

Интегрируя уравнение, после достаточно простых преобразований запишем решение:

$$T = T_{cp} + C_1 e^{-\frac{k}{mc}t},$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ температура тела $T(0) = T_0$. Тогда, используя начальные условия, находим $C_1 = T_0 - T_{cp}$ и закон изменения температуры остывающего тела имеет вид

$$T(t) = T_{cp} + (T_0 - T_{cp}) e^{-\frac{kt}{mc}}.$$

Следует заметить, что дифференциальное уравнение температуры нагревающегося тела ($T_{cp} > T$) будет иметь тот же вид, а следовательно, и аналогичное решение

$$T(t) = T_{cp} + (T_0 - T_{cp}) e^{-k_1 t},$$

где $k_1 = \frac{k}{mc}$ определяют экспериментально.

Анализ полученных зависимостей показывает, что в обоих случаях (остывания и нагревания тела) с течением времени $t \rightarrow \infty$ температура тела стремится к температуре окружающей среды (рис. 62).

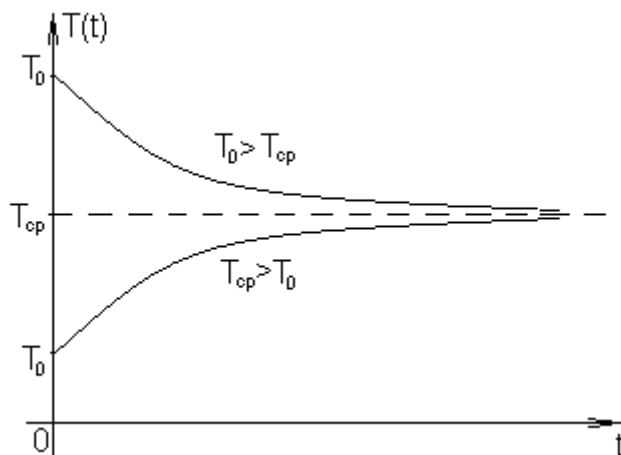


Рисунок 62

Пример 83. В электронагревательную печь с температурой $T_{cp} = 1000^{\circ}$ поместили заготовку с температурой $T_0 = 200^{\circ}$. Через два часа температура заготовки повысилась до $T_1 = 500^{\circ}$. Найти температуру заготовки через 5 часов, если известно, что скорость изменения температуры заготовки пропорциональна разности температуры среды и температуры заготовки.

Решение

Пусть $T(t)$ – температура заготовки, тогда $\frac{dT}{dt}$ – скорость изменения температуры заготовки. Запишем дифференциальное уравнение нагревающегося тела:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_{cp} - T) \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} = k(1000 - T).$$

Разделяя переменные, запишем

$$\frac{dT}{1000 - T} = k dt.$$

Проинтегрировав обе части равенства, запишем общее решение:

$$\int \frac{dT}{1000 - T} = k \int dt + C_1; \quad -\ln(1000 - T) = kt + C_1; \quad \ln(1000 - T) = -kt - C_1;$$

$$1000 - T = Ce^{-kt}; \quad T = 1000 - Ce^{-kt}.$$

Из условия известно, что $T(0) = 200$, $T(2) = 500$. Подставим эти данные в общее решение дифференциального уравнения:

$$T(0) = 1000 - Ce^0 = 1000 - C = 200, \text{ отсюда } C = 800 \text{ и } T = 1000 - 800e^{-kt};$$

$$T(2) = 1000 - 800e^{-2k} = 500, \text{ отсюда } 800e^{-2k} = 500, e^{-2k} = \frac{5}{8}, e^{-k} = \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{и } T(t) = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{2}}.$$

Вычислим температуру заготовки через 5 часов:

$$T(5) = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 752.95^\circ.$$

Пример 84. Температура тела в течение 20 мин. снижается от 100° до 60° С. Температура воздуха равна 20° С. Определить время, за которое температура тела понизится до 25° С, если скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и воздуха.

Решение

Дифференциальное уравнение, описывающее процесс охлаждения тела имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{с}}),$$

где $T_{\text{с}}$ – температура воздуха, $T_{\text{с}} = 20$, подставим это значение в уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20).$$

Разделяем переменные и интегрируем уравнение:

$$\frac{dT}{T - 20} = -k dt; \quad \int \frac{dT}{T - 20} = -k \int dt + C_1; \quad \ln(T - 20) = -kt + C_1;$$

$$T = 20 + Ce^{-kt}.$$

Неизвестные коэффициенты C и k определим из начальных условий: $T(0) = 100$, $T(20) = 60$.

$$T(0) = 20 + Ce^0 = 100 \Rightarrow C = 80 \text{ и } T = 20 + 80e^{-kt};$$

$$T(20) = 20 + 80e^{-20k} = 60 \Rightarrow e^{-20k} = 0.5, e^{-k} = 0.5^{\frac{1}{20}}, \text{ тогда}$$

$$T(t) = 20 + 80 \cdot (0.5)^{\frac{t}{20}}.$$

Вычислим время, за которое температура тела понизится до 25°C , для этого решим уравнение

$$20 + 80 \cdot (0.5)^{\frac{t}{20}} = 25.$$

$$80 \cdot (0.5)^{\frac{t}{20}} = 5; \quad (0.5)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{16}; \quad (0.5)^{\frac{t}{20}} = (0.5)^4; \quad \frac{t}{20} = 4 \Rightarrow t = 80.$$

Таким образом, тело охладится до 25°C через 80 минут или 1 час 20 минут.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела под действием заданных сил

Пусть тело массой m движется поступательно под действием силы тяги F_T и силы сопротивления движению $F_{\text{сопр}}$. Найти скорость тела как функцию времени t , если в начальный момент времени $t = 0$, $v(0) = v_0$. Здесь v – искомая скорость движения, $F_T = f(v)$, $F_{\text{сопр}} = g(v)$. Составим дифференциальное уравнение движения тела.

Согласно второму закону Ньютона, сила, под действием которой движется материальная точка, равна произведению массы точки на ее ускорение:

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ – ускорение движения точки, F – сила, действующая в направлении движения. В нашем случае $F = F_T - F_{\text{сопр}}$ и уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{dv}{dt} = F_T - F_{\text{сопр}}.$$

Решение этого уравнения и подстановка начальных условий полностью описывают характер движения тела.

Пусть нам требуется найти скорость как функцию пройденного точкой пути. Обозначим путь через $S(t)$, тогда $\frac{dS}{dt} = v(t)$, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dS}$ и уравнение движения примет вид

$$mv \frac{dv}{dS} = F_T - F_{\text{comp}}.$$

Пример 85. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости v на время t . Найти зависимость между скоростью и временем, если в начальный момент времени скорость тела была 50 км/ч, а через 20 минут после начала движения 60 км/ч.

Решение

Исходя из условия, запишем:

$$a = kvt \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = kvt$$

(уравнение с разделяющимися переменными) и начальные условия $v(0) = 50$, $v\left(\frac{1}{3}\right) = 60$ (20 минут составляют $\frac{1}{3}$ часть часа).

После разделения переменных в дифференциальном уравнении и интегрирования, получим

$$\frac{dv}{v} = ktdt; \quad \int \frac{dv}{v} = k \int tdt + C_1; \quad \ln v = \frac{kt^2}{2} + C_1; \quad v(t) = Ce^{\frac{kt^2}{2}}.$$

Подставим в общее решение начальные условия:

$$v(0) = Ce^0 = C = 50 \Rightarrow C = 50; \quad v(t) = 50e^{\frac{kt^2}{2}};$$

$$v\left(\frac{1}{3}\right) = 50e^{\frac{k}{18}} = 60 \Rightarrow e^{\frac{k}{18}} = 1.2^9.$$

Тогда зависимость между скоростью и временем движения тела принимает вид

$$v(t) = 50 \cdot 1.2^{9t^2}.$$

Пример 86. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Решение

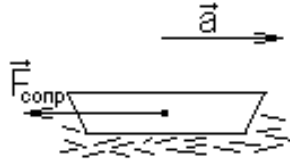


Рисунок 63

Согласно второму закону Ньютона, движение лодки определяется равенством

$$ma = -F_{\text{сопр}}.$$

По условию $F_{\text{сопр}} = kv$, отсюда

$$m \frac{dv}{dt} = -kv;$$

начальные условия $v(0) = 20$ и $v\left(\frac{1}{90}\right) = 8$.

Найдем общее решение уравнения движения лодки:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt; \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt + C_1; \quad v(t) = C e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Подставляя в общее решение начальные условия, найдем неизвестные постоянные:

$$v(0) = C e^0 = 20 \Rightarrow C = 20; \quad v(t) = 20 e^{-\frac{k}{m} t};$$

$$v\left(\frac{1}{90}\right) = 20 e^{-\frac{k}{90m}} = 8 \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = 0.4^{90}; \quad v(t) = 20 \cdot (0.4)^{90t}.$$

Вычислим скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора.

$2 \text{ мин} = \frac{1}{30}$ ч, тогда

$$v\left(\frac{1}{30}\right) = 20 \cdot (0.4)^3 = 1.28 \text{ (км/ч)}.$$

Пример 87. Парашютист массой 80 кг прыгает с высоты 1000 м без начальной скорости. Сопротивление воздуха при спуске пропорционально квадрату его скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 4$. Определить зависимость скорости спуска от пройденного пути и установить скорость парашютиста в момент приземления.

Решение

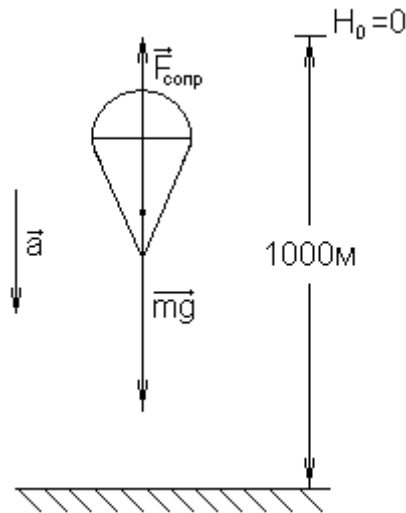


Рисунок 64

Запишем закон движения парашютиста:

$$ma = mg - F_{\text{сопр}} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{mg - 4v^2}{m}.$$

Пусть $h(t)$ – пройденный парашютистом путь при спуске. Известно, что

$$\frac{dh}{dt} = v(h) \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = v \frac{dv}{dh},$$

тогда уравнение движения парашютиста примет вид

$$v \frac{dv}{dh} = \frac{mg - 4v^2}{m}.$$

Разделим переменные в полученном дифференциальном уравнении и проинтегрируем его:

$$\frac{v dv}{mg - 4v^2} = \frac{dh}{m}; \quad \int \frac{v dv}{mg - 4v^2} = \frac{1}{m} \int dh + C_1;$$

$$-\frac{1}{8} \ln |mg - 4v^2| = \frac{h}{m} + C_1; \quad \ln |mg - 4v^2| = \frac{-8h}{m} - 8C_1; \quad mg - 4v^2 = C e^{\frac{-8h}{m}};$$

$$4v^2 = mg - C e^{\frac{-8h}{m}} \Rightarrow v(h) = \frac{1}{2} \sqrt{mg - C e^{\frac{-8h}{m}}}.$$

Учитывая, что скорость и путь, пройденный парашютистом в начальный момент времени равны нулю, т. е. $v(0) = 0$, найдем C :

$$v(0) = \frac{1}{2} \sqrt{mg - C} = 0 \Rightarrow C = mg.$$

Подставив в выражение для $v(h)$ значение C , а также известные данные, получим зависимость скорости спуска парашютиста от пройденного пути:

$$v(h) = \frac{1}{2} \sqrt{80 \cdot 9.8 \left(1 - e^{\frac{-8h}{80}} \right)} = 14 \sqrt{1 - e^{\frac{-h}{10}}}.$$

Для того чтобы найти скорость парашютиста в момент приземления, необходимо вычислить $v(1000)$:

$$v(h) = 14 \sqrt{1 - e^{\frac{-1000}{10}}} = 14 \sqrt{1 - e^{-100}} \approx 14 \text{ м/с}.$$

Таким образом, скорость парашютиста в момент приземления 14 м/с и эта скорость является для него максимальной.

Пример 88. Поезд, вес которого P вместе с тепловозом, движется по прямолинейному пути (горизонтально). Сила тяги тепловоза постоянна и равна F . Сила W сопротивления при движении задается как линейная функция ($W = Pf + kv$) от скорости поезда. Найти зависимость скорости поезда от пройденного пути, если в начальный момент времени скорость и путь равны нулю. (Здесь f – коэффициент трения, k – коэффициент пропорциональности).

Решение

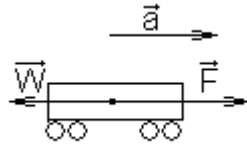


Рисунок 65

Закон движения поезда имеет вид:

$$ma = F - W.$$

Подставляя данные из условия, получим

$$Pa = F - Pf - kv \quad \text{или} \quad P \frac{dv}{dt} = F - Pf - kv.$$

Учитывая, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dS},$$

где S – расстояние, $v = v(S)$ перепишем дифференциальное уравнение в виде:

$$Pv \frac{dv}{dS} = F - Pf - kv.$$

Разделяя переменные и интегрируя дифференциальное уравнение, найдем зависимость скорости поезда от пройденного пути.

$$\frac{v dv}{F - Pf - kv} = \frac{dS}{P}; \quad -\frac{1}{k} \cdot \frac{F - Pf - kv - F + Pf}{F - Pf - kv} dv = \frac{dS}{P};$$

$$\left(1 - \frac{F - Pf}{F - Pf - kv}\right) = -\frac{k}{P} dS; \quad v + \frac{F - Pf}{k} \ln(F - Pf - kv) = -\frac{k}{P} S + C.$$

Из начального условия $v(0) = 0$, $S(0) = 0$ найдем постоянную C :

$$\frac{F - Pf}{k} \ln(F - Pf) = C,$$

тогда зависимость скорости поезда от пройденного расстояния принимает вид:

$$v + \frac{F - Pf}{k} \ln(F - Pf - kv) = -\frac{k}{P} S + \frac{F - Pf}{k} \ln(F - Pf)$$

или

$$v + \frac{F - Pf}{k} \ln\left(1 - \frac{kv}{F - Pf}\right) = -\frac{k}{P} S.$$

Пример 89. Снаряд выстрелен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Сила сопротивления движению снаряда равна $F_{\text{сопр}} = \beta m v^2$, где β – аэродинамический коэффициент, m – масса снаряда, v – искомая скорость. Определить высоту подъема снаряда.

Решение

Составим расчетную схему и введем обозначения. Движение снаряда условно принимается за движение материальной точки массой m под действием силы сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}}$ и собственного веса $P = mg$, где g – ускорение свободного падения. Обозначим t – время, $h(t)$ – пройденный снарядом путь, $v(t)$ – скорость движения снаряда; тогда $\frac{dv}{dt}$ – ускорение снаряда.

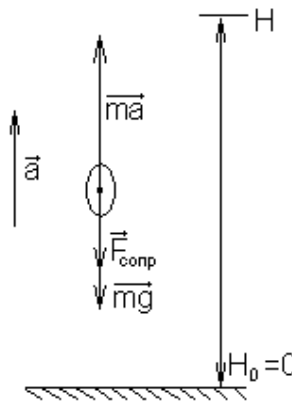


Рисунок 66

Составим дифференциальное уравнение движения снаряда. Согласно второму закону Ньютона,

$$m \frac{dv}{dt} = -(P + F_{\text{сопр}}),$$

где знак минус указывает, что силы веса и сопротивления замедляют движение снаряда, т. е. направлены против его движения (рис. 66). Учитывая выражения для $F_{\text{сопр}}$ и P , получим

$$m \frac{dv}{dt} = -(mg + \beta mv^2)$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -(g + \beta v^2).$$

Учитывая, что

$$\frac{dh}{dt} = v(h) \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = v \frac{dv}{dh},$$

перепишем уравнение в виде

$$v \frac{dv}{dh} = -(g + \beta v^2).$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения снаряда. Так как в начальный момент времени $t = 0$, скорость снаряда равна v_0 , а пройденный путь равен нулю, то начальное условие запишем в виде $v(0) = v_0$.

Найдем частное решение дифференциального уравнения движения снаряда, удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{v dv}{g + \beta v^2} = -dh.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{v dv}{g + \beta v^2} = -\int dh + C_1; \quad \frac{1}{2\beta} \ln |g + \beta v^2| = -h + C_1; \quad g + \beta v^2 = C e^{-2\beta h};$$

$$v(h) = \sqrt{\frac{C e^{-2\beta h} - g}{\beta}}.$$

Используя начальное условие, найдем значение C :

$$v(0) = \sqrt{\frac{C-g}{\beta}} = v_0 \Rightarrow C = g + \beta v_0^2.$$

Окончательно частное решение примет вид

$$v(h) = \sqrt{\frac{(g + \beta v_0^2)e^{-2\beta h} - g}{\beta}}.$$

В момент достижения снарядом своего наивысшего значения ($h = H$) скорость его, очевидно, должна равняться нулю, т. е. $v(H) = 0$. Подставляя это условие в уравнение движения снаряда, получим наибольшую высоту подъема снаряда:

$$v(H) = \sqrt{\frac{(g + \beta v_0^2)e^{-2\beta H} - g}{\beta}} = 0; \quad (g + \beta v_0^2)e^{-2\beta H} = g; \quad e^{-2\beta H} = \frac{g}{g + \beta v_0^2};$$

$$H = -\frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{g}{g + \beta v_0^2}\right).$$

Пример 90. Точка массой m движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная кубу времени (коэффициент пропорциональности k). Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности k_1). Найти зависимость скорости от времени, если в момент $t = 0$ скорость точки была равна v_0 .

Решение

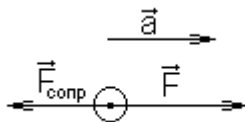


Рисунок 67

Пусть $v(t)$ – скорость движения точки, тогда $\frac{dv}{dt}$ – ускорение точки.

Запишем уравнение движения точки

$$m \frac{dv}{dt} = kt^3 - k_1 vt \quad \text{или} \quad mv' + k_1 vt = kt^3,$$

которое является линейным уравнением первого порядка. Сделав замену $v = yz$ ($y = y(t)$, $z = z(t)$), получим:

$$y'z + yz' + \frac{k_1}{m} yzt = \frac{k}{m} t^3; \quad y'z + y \left(z' + \frac{k_1}{m} zt \right) = \frac{k}{m} t^3; \quad \begin{cases} z' + \frac{k_1}{m} zt = 0; \\ y'z = \frac{k}{m} t^3; \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{k_1}{m} zt; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{k_1}{m} t dt; \quad \ln z = -\frac{k_1}{2m} t^2; \quad z = e^{-\frac{k_1}{2m} t^2};$$

$$(2) \quad y' e^{-\frac{k_1}{2m} t^2} = \frac{k}{m} t^3; \quad y' = \frac{k}{m} t^3 e^{\frac{k_1}{2m} t^2}; \quad y = \frac{k}{m} \int t^3 e^{\frac{k_1}{2m} t^2} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{k_1}{2m} t^2 = p, \quad t^2 = \frac{2m}{k_1} p, \\ 2t dt = \frac{2m}{k_1} p dp, \quad t dt = \frac{m}{k_1} dp \end{array} \right] = \frac{k}{m} \int 2 \left(\frac{m}{k_1} \right)^2 e^p p dp = \frac{2km}{k_1^2} \int p \cdot e^p dp =$$

(интегрируем по частям)

$$= \frac{2km}{k_1^2} \left(p \cdot e^p - \int e^p dp \right) = \frac{2km}{k_1^2} e^p (p - 1) + C = \frac{2km}{k_1^2} e^{\frac{k_1}{2m} t^2} \left(\frac{k_1}{2m} t^2 - 1 \right) + C.$$

Таким образом,

$$v(t) = yz = \left[\frac{2km}{k_1^2} e^{\frac{k_1}{2m} t^2} \left(\frac{k_1}{2m} t^2 - 1 \right) + C \right] e^{-\frac{k_1}{2m} t^2} = \frac{2km}{k_1^2} \left(\frac{k_1}{2m} t^2 - 1 \right) + C e^{-\frac{k_1}{2m} t^2}.$$

Из начального условия $v(0) = v_0$ найдем C :

$$v(0) = -\frac{2km}{k_1^2} + C = v_0 \Rightarrow C = v_0 + \frac{2km}{k_1^2}$$

и запишем выражение, определяющее зависимость скорости точки от времени:

$$v(t) = \frac{2km}{k_1^2} \left(\frac{k_1}{2m} t^2 - 1 \right) + e^{-\frac{k_1}{2m} t^2} \left(v_0 + \frac{2km}{k_1^2} \right) = \frac{2km}{k_1^2} \left(\frac{k_1}{2m} t^2 - 1 + e^{-\frac{k_1}{2m} t^2} \right) + v_0 e^{-\frac{k_1}{2m} t^2}.$$

Пример 91. Машина массой m приводится в движение силой F ($F = \text{const}$), которая замедляется силами трения в опорах. Сила трения пропорциональна скорости, но так как происходит нагревание смазки в опорах, то коэффициент пропорциональности меняется со временем, и его принимают равным $\frac{\alpha}{t + \beta}$ (α и β определяют экспериментально). Найти уравнение движения машины, предполагая, что в момент времени $t = 0$ $v(0) = 0$.

Решение

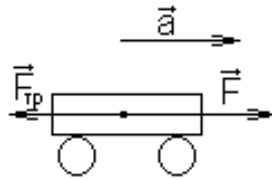


Рисунок 68

Обозначим скорость машины $v(t)$, $\frac{dv}{dt}$ – ускорение машины, тогда уравнение движения машины имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{\alpha}{t + \beta} v \quad \text{или} \quad v' + \frac{\alpha v}{m(t + \beta)} = \frac{F}{m}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением, для его решения сделаем замену $v = yz$ ($y = y(t)$, $z = z(t)$). Имеем:

$$y'z + yz' + \frac{\alpha yz}{m(t + \beta)} = \frac{F}{m}; \quad y'z + y \left(z' + \frac{\alpha z}{m(t + \beta)} \right) = \frac{F}{m}; \quad \begin{cases} z' + \frac{\alpha z}{m(t + \beta)} = 0; \\ y'z = \frac{F}{m}; \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\alpha z}{m(t + \beta)}; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{\alpha}{m(t + \beta)} dt; \quad \ln z = -\frac{\alpha}{m} \ln(t + \beta) \Rightarrow z = (t + \beta)^{-\frac{\alpha}{m}};$$

$$(2) \quad y'(t + \beta)^{-\frac{\alpha}{m}} = \frac{F}{m}; \quad y' = \frac{F}{m} (t + \beta)^{\frac{\alpha}{m}}; \quad y = \frac{F}{m} \int (t + \beta)^{\frac{\alpha}{m}} dt + C \Rightarrow$$

$$y = \frac{F}{m} \frac{(t + \beta)^{\frac{\alpha}{m} + 1}}{\frac{\alpha}{m} + 1} + C = \frac{F}{\alpha + m} (t + \beta)^{\frac{\alpha}{m} + 1} + C;$$

$$v(t) = (t + \beta)^{-\frac{\alpha}{m}} \left(\frac{F}{\alpha + m} (t + \beta)^{\frac{\alpha}{m} + 1} + C \right) = \frac{F(t + \beta)}{\alpha + m} + C(t + \beta)^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

Подставляя в общее решение уравнения начальное условие $v(0) = 0$, найдем C :

$$v(0) = \frac{F\beta}{\alpha + m} + C\beta^{-\frac{\alpha}{m}} = 0 \Rightarrow C = -\frac{F\beta^{\frac{\alpha}{m} + 1}}{\alpha + m}$$

и запишем закон движения машины:

$$v(t) = \frac{F(t + \beta)}{\alpha + m} - \frac{F\beta^{\frac{\alpha}{m} + 1}(t + \beta)^{-\frac{\alpha}{m}}}{\alpha + m} = \frac{F}{\alpha + m} \left(t + \beta - \frac{\beta^{\frac{\alpha}{m} + 1}}{(t + \beta)^{\frac{\alpha}{m}}} \right).$$

Дифференциальное уравнение силы переменного тока в случае, когда в цепи есть самоиндукция и омическое сопротивление

Предположим, что в цепи омическое сопротивление равно R , сила тока I возбуждается электродвижущей силой E . Самоиндукция равна L . Пусть известно, что электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$, где E_0 и ω – постоянные. Требуется определить силу тока в цепи в момент t , зная, что в момент $t = 0$ она равна нулю: $I_0 = 0$.

Известно, что для силы тока I и сопротивления R потеря напряжения равна IR . Для цепи с самоиндукцией L потеря напряжения равна $L \frac{dI}{dt}$. Поэтому полная потеря напряжения во всей цепи будет:

$$E = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Заменяя электродвижущую силу E ее значением, мы видим, что отыскание силы тока I приводит к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \sin \omega t. \quad (*)$$

Решим полученное уравнение. Пусть $I = uv$, где $u(t)$ и $v(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v &= 0, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{E_0 \sin \omega t}{Lv(t)}.\end{aligned}$$

Решая первое уравнение, получим $v = e^{-\frac{R}{L}t}$. Подставляя это значение во второе уравнение, получим уравнение для определения $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t}.$$

Интегрируя, находим

$$u = \frac{E_0}{L} \int \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt + C.$$

Тогда общий интеграл уравнения (*) примет вид:

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E_0}{L} \int \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt + C \right).$$

Но так как

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{Le^{\frac{R}{L}t} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

то

$$I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Используя начальное условие (при $t=0$ $I_0=0$), найдем постоянную C :

$$C = \frac{E_0 L \omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Поэтому

$$I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Представим искомое решение в более удобном для вычисления виде.

Полагая $\frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg} \varphi$ (угол φ называют смещением фазы), получим:

$$R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t - \varphi),$$

что дает

$$I = \frac{E_0 L \omega e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{E_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Сила тока, как показывает это равенство, состоит из двух частей: первая имеет характер затухания (множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$); вторая – периодический характер (множитель $\sin(\omega t - \varphi)$).

Пример 92. Электромотор включен в цепь с напряжением $E=300$ В, общее сопротивление $R=150$ Ом. Коэффициент самоиндукции $L=30$ Гн. Найти силу тока через 1 с после замыкания цепи.

Решение

Воспользуемся дифференциальным уравнением для определения силы тока в цепи в любой момент времени t :

$$IR + L \frac{dI}{dt} = E.$$

Подставив сюда данные из условия, получим следующее уравнение:

$$30I' + 150I = 300 \quad \text{или} \quad I' + 5I = 10.$$

Это уравнение является линейным; сделаем замену $I = u(t) \cdot v(t)$ ($I' = u'v + uv'$):

$$u'v + uv' + 5uv = 10 \Leftrightarrow u'v + u(v' + 5v) = 10.$$

Предполагая, что $v' + 5v = 0$, получим $u'v = 10$.

$$v' + 5v = 0; \quad \frac{dv}{dt} = -5v; \quad \frac{dv}{v} = -5dt; \quad \ln|v| = -5t \Rightarrow v = e^{-5t};$$

$$u'e^{-5t} = 10; \quad u' = 10e^{5t} \Rightarrow u = 2e^{5t} + C.$$

Таким образом,

$$I(t) = e^{-5t}(2e^{5t} + C) = 2 + Ce^{-5t}.$$

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ сила тока была равна нулю, т. е. $I(0) = 0$, найдем C :

$$I(0) = 2 + Ce^0 = 2 + C = 0, \text{ откуда } C = -2,$$

$$I(t) = 2 - 2e^{-5t}.$$

Определим силу тока через 1 с после замыкания цепи:

$$I(1) = 2 - 2e^{-5} \approx 1.9865 \text{ (A)}.$$

Уравнение затухающих колебаний

Рассмотрим случай движения точки под действием силы, притягивающей точку к неподвижному центру, при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости точки.

Пусть $x(t)$ – перемещение точки, тогда $\frac{dx}{dt}$ – скорость. Обозначим коэффициент пропорциональности $2hm$ ($h > 0$), тогда используя второй закон Ньютона, дифференциальное уравнение движения точки можно записать в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm \frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

где $x(t)$ – координата перемещения точки.

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$z^2 + 2hz + k^2 = 0$$

дает корни $z_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}$ и $z_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}$.

Прежде всего, рассмотрим наиболее важный случай, когда корни характеристического уравнения комплексны, т. е., когда $h^2 - k^2 < 0$. Полагая, что $h^2 - k^2 = \omega^2$, будем иметь $z_1 = -h + \omega i$, $z_2 = -h - \omega i$ и тогда общее решение:

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ начальное положение точки $x = x_0$, а начальная скорость $\frac{dx}{dt} = x'_0$ определим произвольные постоянные.

В силу первого условия

$$x_0 = (C_1 \cos \omega 0 + C_2 \sin \omega 0) e^{-h \cdot 0} \Rightarrow C_1 = x_0;$$

образуя производную

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht} (-C_1 h \cos \omega t - C_2 h \sin \omega t - C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t)$$

и, подчиняя ее второму условию, получим:

$$C_2 = \frac{x'_0 + x_0 h}{\omega}.$$

Таким образом,

$$x = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0 + x_0 h}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Перепишем правую часть равенства в виде

$$x = \rho e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$\rho = \frac{1}{\omega} \sqrt{x_0^2 \omega^2 + (x'_0 + x_0 h)^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega x_0}{x'_0 + x_0 h}.$$

Из равенства следует, что движение имеет колебательный характер. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Сравнивая его с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ свободных колебаний, видим, что $T > T_0$.

Пусть $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = 0$. Тогда

$$\rho = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h}{\omega}\right)^2} e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Придавая времени t значения

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{\omega}, \quad t_3 = \frac{2\pi}{\omega}, \dots,$$

учитывая полученное равенство, найдем:

$$x_1 = x_0; \quad x_2 = -x_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}}; \quad x_3 = x_0 e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}; \quad x_4 = -x_0 e^{-\frac{3h\pi}{\omega}}; \dots$$

Отсюда видно, что абсолютные значения абсцисс, т. е. последовательные отклонения колеблющейся точки от неподвижного центра, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Это и есть случай так называемых затухающих колебаний. Закон изменения $x(t)$ в зависимости от времени представлен графически на рис. 69.

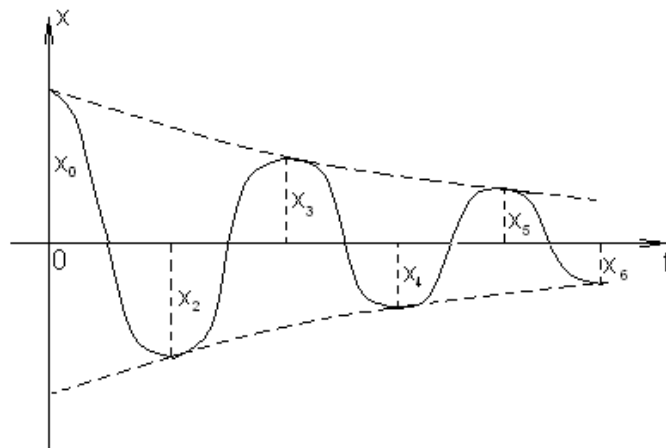


Рисунок 69

Рассмотрим случай, когда $h^2 - k^2 > 0$. Корни z_1 и z_2 будут вещественными и отрицательными:

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}.$$

Произвольные постоянные определим на основании начальных условий ($x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = x'_0$ при $t = 0$). Используя начальные условия, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ z_1 C_1 + z_2 C_2 = x'_0. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$C_1 = \frac{x'_0 - x_0 z_2}{z_1 - z_2}, \quad C_2 = \frac{x_0 z_1 - x'_0}{z_1 - z_2}.$$

Окончательно искомое решение можно записать в виде:

$$x(t) = \frac{x'_0 - x_0 z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{x_0 z_1 - x'_0}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}.$$

Исследуем полученное решение, для этого x и $\frac{dx}{dt}$ перепишем в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x'_0 - x_0 z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} \cdot \left[1 + \frac{x_0 z_1 - x'_0}{x'_0 - x_0 z_2} e^{(z_2 - z_1)t} \right]; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x'_0 - x_0 z_2}{z_1 - z_2} z_1 e^{z_1 t} \cdot \left[1 + \frac{x_0 z_1 - x'_0}{x'_0 - x_0 z_2} \cdot \frac{z_2}{z_1} e^{(z_2 - z_1)t} \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что если

$$\frac{x_0 z_1 - x'_0}{x'_0 - x_0 z_2} > 0,$$

то ни $x(t)$, ни скорость $\frac{dx}{dt}$ ни разу не обращаются в нуль. Это означает, что точка приближается асимптотически к притягивающему центру, находясь все время с одной стороны от него. Если

$$\frac{x_0 z_1 - x'_0}{x'_0 - x_0 z_2} < 0,$$

то как $x(t)$, так и $\frac{dx}{dt}$ могут обратиться в нуль по одному разу.

Рассмотрим последний случай, когда $h^2 - k^2 = 0$. Характеристическое уравнение имеет двукратный отрицательный корень $z_1 = z_2 = -h$. Общее решение будет иметь вид

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}.$$

Произвольные постоянные определим из тех же начальных условий:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = x'_0 + x_0 h.$$

В этом случае искомое решение запишем так:

$$x = [x_0 + (x'_0 + x_0 h)t] e^{-ht}.$$

Анализируя полученное выражение, легко заметить, что по истечении достаточно продолжительного промежутка времени t точка будет сколь угодно близка от притягивающего центра.

Колебания магнитной стрелки гальванометра, колебательный разряд конденсатора, колебания некоторых регуляторов паровых машин могут служить примерами затухающих колебаний. Движение, соответствующее случаям $h^2 - k^2 > 0$ и $h^2 - k^2 = 0$, имеет место при большом сопротивлении среды (например, движение магнитной стрелки при сильном успокоителе).

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Кусок металла с температурой 100°C помещен в печь, температура в которой поддерживается постоянно равной 500°C . За час тело нагрелось до 200°C . Определить температуру тела через 2 часа и время, за которое температура тела утроится.

(Ответ: 275°C , $t = \frac{\ln 2}{\ln 4 - \ln 3} \approx 2 \text{ ч } 25 \text{ мин.}$)

Задание 2. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100 до 60°C за 20 мин. Температура воздуха 25°C . Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до 30°C ?

(Ответ: 71 мин.)

Задание 3. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью $v(0) = 0$. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное скорости. Найти скорость падающего тела $v(t)$ в любой момент времени t (коэффициент пропорциональности равен $\frac{3}{2}$).

(Ответ: $v(t) = \frac{2}{3}mg \left(1 - e^{-\frac{3}{2m}t} \right)$.)

Задание 4. Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что до вхождения в лес начальная скорость ветра была $v_0 = 12$ м/с, а после прохождения в лесу пути $S = 1$ м скорость ветра уменьшилась до $v_1 = 11.8$ м/с.

(Ответ: 0.931 м/с.)

Задание 5. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1.5 м/с, ее скорость через 4 секунды 1 м/с. Найти время, за которое скорость лодки уменьшится до 0.01 м/с и путь пройденный лодкой до остановки.

(Ответ: 50 с, 15 м.)

Задание 6. Ускорение локомотива прямо пропорционально силе тяги F и обратно пропорционально массе поезда m . Начальная скорость локомотива v_0 , сила тяги $F = b - kv$, где v – скорость; b, k – постоянные величины. Найти силу тяги локомотива по истечении времени t , если в начальный момент времени $t = 0$ $F = F_0 = b - kv_0$.

(Ответ: $F = F_0 e^{-\frac{k}{m}t}$.)

Задание 7. Точка массой m движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности k). Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности k_1). Найти зависимость скорости от времени, если в момент $t = 0$ скорость точки была равна нулю.

(Ответ: $v = \frac{k}{k_1} \left(t - \frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_1} e^{-\frac{k_1 t}{m}} \right)$.)

Задание 8. Цепь состоит из омического сопротивления $R = 0.36$ Ом и самоиндукции $L = 0.02$ Гн. Определить $I(t)$ в момент размыкания тока, если $I(0) = I_0$, а также через какое время величина тока упадет до 1% своей исходной величины I_0 .

(Ответ: $I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, $t = 0.27$ с.)

Задание 9. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение E , сопротивления R , самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока I от времени.

(Ответ: $I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$.)

Задание 10. Тело массой 1.96 кг, подвешенное на пружине, которая силой 10 Н растягивается на 0.2 м, при движении встречает сопротивление, пропорциональное скорости и при скорости 0.01 м/с равное 0.2 Н. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 0.05 м и тело приходит в движение без начальной скорости. Определить закон движения тела.

(Ответ: $x = 5e^{-5t} (5t + 1) \cdot 10^{-2}$ м.)

3.3 Другие задачи

Пример 93. В резервуаре содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M литров воды и вытекает N литров раствора ($M \geq N$), причем концентрация сохраняется равномерной путем перемешивания. Найти количество вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

Решение

Пусть $x(t)$ – количество вещества в резервуаре через t минут после начала процесса и $x + \Delta x$ – в момент времени $t + \Delta t$. Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т. е. раствор "обедняется").

Обозначим объем смеси в момент t $V(t)$:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

Концентрация вещества в момент времени t равняется, очевидно, $\frac{x}{V}$. За бесконечно малый отрезок времени $[t, t + \Delta t]$ количество вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx , для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} \Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt , получаем дифференциальное уравнение:

$$dx = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} dt.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными и считая $M > N$, найдем общее решение:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{Ndt}{B + (M - N)t}; \quad \int \frac{dx}{x} = -N \int \frac{dt}{B + (M - N)t} + C_1;$$

$$\ln|x| = -\frac{N}{M-N} \ln|B + (M-N)t| + \ln C \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{C}{(B + (M-N)t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Используя начальное условие $x = A$ при $t = 0$, вычислим C и запишем частное решение:

$$A = \frac{C}{(B + (M-N) \cdot 0)^{\frac{N}{M-N}}} \Rightarrow C = A \cdot B^{\frac{N}{M-N}};$$

$$x(t) = A \left(\frac{B}{B + (M-N)t} \right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Полагая $t = T$, найдем количество вещества в резервуаре через T минут после начала процесса:

$$x(T) = A \left(\frac{B}{B + (M-N)T} \right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Пример 94. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин, и смесь вытекает из него с той же скоростью. Концентрация принимается равномерной. Сколько соли останется в баке через час?

Решение

Обозначим $x(t)$ – количество соли в резервуаре через t минут после начала процесса. Воспользовавшись результатами предыдущего примера и учитывая, что $M = N$, запишем дифференциальное уравнение:

$$dx = -\frac{Nx}{B} dt.$$

По условию, $B = 100$, $N = 5$, тогда

$$dx = -\frac{x}{20} dt.$$

Находим общее решение:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{20}; \quad \ln x = -\frac{1}{20}t + \ln C; \quad x = Ce^{-\frac{t}{20}}.$$

Поскольку в момент времени $t=0$ количество соли $x=10$ ($x(0)=10$), то $10 = Ce^0$ и $C=10$. Таким образом,

$$x(t) = 10e^{-\frac{t}{20}}.$$

Определим количество соли в баке через час. 1 час=60 мин,

$$x(60) = 10e^{-\frac{60}{20}} = 10e^{-3} \approx 0.5 \text{ (кг)}.$$

Пример 95. Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $\frac{1}{12}$ м, сделанного в дне резервуара?

Решение

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой Бернулли, определяющей скорость v истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на h м ниже свободного уровня жидкости:

$$v = \sigma \sqrt{2gh}.$$

Здесь $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести, σ – постоянный (безразмерный) коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma \approx 0.6$).

Пусть через t с после начала истечения жидкости уровень оставшейся в резервуаре воды был равен h м и за время dt понизился еще на dh м ($dh < 0$). Подсчитаем объем воды, вытекшей за бесконечно малый промежуток времени dt двумя способами.

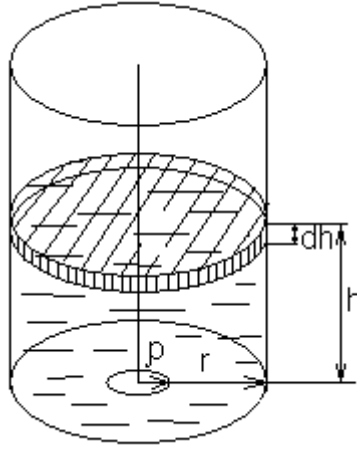


Рисунок 70

С одной стороны, этот объем dv равен объему цилиндрического слоя с высотой $|dh|$ и радиусом, равным радиусу r основания резервуара ($r=2$ м). Таким образом,

$$dv = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2 dh.$$

С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара, а высота равна $v dt$ (где v – скорость истечения). Если радиус отверстия равен ρ ($\rho = \frac{1}{12}$ м), то

$$dv = \pi \rho^2 v dt = \pi \rho^2 \sigma \sqrt{2gh} dt.$$

Приравнивая эти два выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-r^2 dh = \sigma \rho^2 \sqrt{2gh} dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow t = C - \frac{2r^2 \sqrt{h}}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}.$$

При $t=0$ имеем $h=6$ м, т.е. $h(0)=6$. Отсюда находим

$$C = \frac{2\sqrt{6}r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}.$$

Таким образом, связь между t и h определяется уравнением

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}(\sqrt{6} - \sqrt{h}),$$

а полное время истечения T найдем, полагая в этой формуле $h=0$:

$$t = \frac{2\sqrt{6}r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

Используя данные задачи ($r=2$ м, $\rho=\frac{1}{12}$ м, $\sigma\approx 0.6$, $g=9.8$ м/с²), находим $T\approx 1062$ с ≈ 17.7 мин.

Дифференциальные уравнения непрерывного роста (убывания)

Пусть известно, что скорость прироста (или убывания) некоторой величины P пропорциональна наличному количеству. Пусть в начальный момент $t=0$ величина была равна P_0 . Требуется найти зависимость между величиной P и временем t .

Так как скорость прироста выражается производной $\frac{dP}{dt}$, то согласно условию задачи запишем:

$$\frac{dP}{dt} = \pm kP,$$

где $k>0$ – коэффициент пропорциональности; знак “+” в случае прироста; знак “–” в случае убывания. Полученное выражение является дифференциальным уравнением непрерывного роста или убывания. Разделив переменные, найдем:

$$\frac{dP}{P} = \pm kdt,$$

откуда, интегрируя, получим общее решение

$$P = Ce^{\pm kt},$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя начальное условие, при $t = 0$ имеем $C = P_0$ и $P = P_0 e^{\pm kt}$.
Окончательно, в случае непрерывного роста

$$P = P_0 e^{kt},$$

а в случае убывания

$$P = P_0 e^{-kt}.$$

Анализируя полученный результат, можно утверждать, что в рассмотренном случае прирост (или убывание) некоторой величины P происходит по экспоненциальному закону.

Пример 96. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в данный момент его фактической стоимости. Начальная стоимость равна 10 млн. грн. Известно, что стоимость оборудования через 2 года стала 8 млн. грн., найти стоимость оборудования по истечению 10 лет.

Решение

Стоимость оборудования обозначим $P(t)$. Тогда $\frac{dP}{dt}$ – скорость обесценивания оборудования. По условию $\frac{dP}{dt} = -kP$ (знак “–”, т. к. стоимость оборудования уменьшается). Начальная стоимость оборудования 10 млн. грн., т. е. $P(0) = 10$; через 2 года стоимость составит 8 млн. грн., т. е. $P(2) = 8$. Требуется найти $P(10)$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dP}{dt} = -kP,$$

начальное условие $P(0) = 10$ и дополнительное условие $P(2) = 8$.

Решая дифференциальное уравнение, разделяем переменные и интегрируем полученное выражение.

$$\frac{dP}{P} = -kdt; \quad \int \frac{dP}{P} = -k \int dt; \quad \ln P = -kt + C_1; \quad P = C e^{-kt}.$$

Найдем неизвестные постоянные C и k из начального и дополнительного условий задачи:

$$P(0) = Ce^0 = C, \text{ отсюда } C = 10 \text{ и } P = 10e^{-kt};$$

$$P(2) = 10e^{-2k} = 8, \text{ отсюда } e^{-2k} = 0.8, e^{-k} = (0.8)^{\frac{1}{2}};$$

тогда частное решение дифференциального уравнения примет вид

$$P(t) = 10 \cdot (0.8)^{\frac{t}{2}}.$$

Теперь вычислим стоимость оборудования через 10 лет:

$$P(10) = 10 \cdot (0.8)^{\frac{10}{2}} = 10 \cdot 0.8^5 \approx 3.28 \text{ (млн. грн.)}.$$

Пример 97. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Определить, какой процент массы радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадется половина наличной массы радия) равен 1590 годам.

Решение

Пусть $m(t)$ – масса радия, тогда $\frac{dm}{dt}$ – скорость изменения массы или скорость распада радия. Согласно условию,

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

Дифференциальное уравнение решается аналогично уравнению из предыдущего примера, зависимость скорости распада радия от времени имеет вид

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Предположим, что первоначальная масса радия равна m_0 , т.е. $m(0) = m_0$. Известно, что период полураспада радия равен 1590 годам, т.е. $m(1590) = \frac{1}{2}m_0$. Подставляя эти начальное и дополнительное условия в общее решение дифференциального уравнения, получим

$$m(0) = Ce^0 = C, \text{ значит } C = m_0 \text{ и } m(t) = m_0 e^{-kt};$$

$$m(1590) = m_0 e^{-1590k} = \frac{1}{2}m_0, \text{ значит } e^{-1590k} = 0.5, e^{-k} = 0.5^{\frac{1}{1590}} \text{ и}$$

$$m(t) = m_0 \cdot 0.5^{\frac{t}{1590}}.$$

Вычислим $m(200)$:

$$m(200) = m_0 \cdot 0.5^{\frac{200}{1590}} = 0.9165m_0.$$

Таким образом, через 200 лет от первоначальной массы радия m_0 останется $0.9165m_0$ или 91.65%, значит, за это время распадется $100\% - 91.65\% = 8.35\%$ радия.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Вычислить, через сколько лет от 1 кг радия останется 650 г, если известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества.

(Ответ: через 1000 лет.)

Задание 2. В резервуаре, объем которого 100 л, находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар емкостью также 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максимальное количество достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания.)

(Ответ: 2.97 кг; максимум равен 3.68 кг и достигается при $t = 33.3$ мин.)

Задание 3. Цилиндрический резервуар длиной 6 м и радиусом 2 м расположен горизонтально. За какое время вода вытечет из резервуара, если отверстие радиуса $\frac{1}{12}$ м находится на уровне самой нижней из образующих цилиндра?

(Ответ: ≈ 18.4 мин.)

Литература: [1, р. 1, 2, 4; 3; 4, ч. 2, гл. IV, § 1; 6, гл. XIV, § 1, 2; 6; 8, ч. 2, гл. 9, § 1; 10, ч. 2, р. 15, § 15.1, 15.2, 15.5, 15.6; 11, ч. 2, р. 11, § 11.1, 11.2].

ЛИТЕРАТУРА

1 Методические указания к практическим занятиям по дисциплине “Высшая математика” для студентов всех специальностей вечерней формы обучения / сост. А. Н. Обухов – Краматорск : КИИ, 1980. – С. 60.

2 Методические указания, индивидуальные и тестовые задания для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей / сост. : В. Н. Астахов, Г. С. Буланов. – Краматорск : ДГМА, 2006. – С. 52.

3 Методические указания, индивидуальные и тестовые задания для студентов-заочников технических специальностей / сост. : А. Н. Обухов, С. А. Колесников, Б. Н. Горшунов. – Краматорск : ДГМА, 2006. – С. 64.

4 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I, II / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. – М. : Высш. школа, 2002. – С. 312–278.

5 Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, 2002. – 472 с.

6 **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1975. – 416 с.

7 **Шкіль, М. І.** Вища математика : підручник. У 3 кн. Кн. II. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

8 Сборник задач по математике для втузов. Ч. I, II / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – 368 с.

9 **Пак, В. В.** Вища математика : підручник / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 496 с.

10 Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. I, II / под ред. Е. И. Гурского. – Мн. : Высшейш. шк., 1990. – 400 с.

11 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. I, II / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высшейш. шк., 1991. – 352 с.

Навчальне видання

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні вказівки до самостійної роботи

для студентів технічних і економічних спеціальностей
усіх форм навчання

(Російською мовою)

Укладачі: **РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна,
БІЛИХ Наталія Валер'ївна**